Opponensi vélemény

Forgó Ferenc

„Egyensúly a játékelméletben: egzisztencia és általánosítások”

című *MTA doktori értekezéséről*

Forgó Ferenc a hazai játékelméleti iskola egyik alapítója, több nemzetközi hatású szakkönyv szerzője. A játékelmélet irodalmát számos eredményével gazdagította, amelyek közül az értekezésében ismertetésre kerülők a játékelmélet három alapvető jelentőségű témaköréhez járulnak hozzá. Az értekezés ennek megfelelően három fejezetből áll, amelyek közül az első a Nash-egyensúly létezésével, a második a korrelált egyensúly általánosításával és a harmadik az L-Nash alkumegoldással foglalkozik.

Az opponensi véleményemben fejezetről-fejezetre haladva kiemelem a értekezés főbb eredményeit, és egyben megfogalmazom a hozzá kapcsolódó észrevételeimet, illetve kérdéseimet.

1. fejezet

A fejezet a Nash-egyensúly fogalmának és Nikaido–Isoda (1955) alapvető egzisztencia tételének ismertetésével kezdődik, továbbá szerepel Friedmann (1977) és Fan (1952) egzisztencia tétele. Ezt követően a szerző ismerteti saját egzisztencia tételét (Forgó, 1994), amely a Nash-egyensúly létezéséhez a stratégia halmazok konvexitását és kompaktságát, a kifizetőfüggvények folytonosságát és az úgynevezett aggregátorfüggvénynek a (szerző által bevezetett) folytonos Fan konkavitását igényli. A tétel bizonyítása szellemes.

A szerző ezek után a Nash-egyensúly létezésének kérdését vizsgálja a Cournot oligopóliumban. A Nash-egyensúly létezésével kapcsolatban érdemes lett volna kitérni a Cournot-egyensúly létezését biztosító egzisztencia tételekre, a hivatkozott Friedman (1977) egzisztencia tétel meglehetősen korai. Az 1.2. alfejezetben közölt tételek (Forgó, 1995) Friedman költségfüggvények konvexitására vonatkozó feltételét enyhítik, az árfüggvény második deriváltjának csökkenő voltának feltételezése árán (ami egy meglehetősen szokatlan feltételezés). Megjegyzendő, hogy Novshek (1985, RES) egzisztencia tétele sem igényelte már a költségfüggvények konvexitását, hanem csak azok monoton növekedését és alulról félig folytonosságát, és a legáltalánosabb Cournot-egyensúly létezését garantáló tételt pedig Ewerhart (2014, GEB) közölte az értekezés beadásának évében.

A fejezet kétfüggvényes minimax tételekkel zárul, amely Neumann (1928) kétszereplős zérus-összegű játékokra vonatkozó minimax tételének egy szép általánosítását adja. A függelékben megtalálható bizonyítás hosszából és mélységéből kiderül az olvasó számára, hogy milyen komoly szellemi teljesítmény húzódik meg a tétel igazolása mögött.

Összességében a szerző a Nash-egyensúly létezésére vonatkozó eredményeivel jelentősen hozzájárult a játékelmélet irodalmához. Az opponens hiányolja, hogy az előszóban sugalltakkal ellentétben, a szerző saját egzisztencia tétele (1.10. tétel) a fejezet hátralevő részében nem került alkalmazásra. A hiányérzetet pótolja, hogy a kérdéses tételt tartalmazó 1.1. alfejezetben a CF konkavitást felhasználó szakirodalomra vonatkozó utalások megtalálhatóak.

2. fejezet

A második fejezet a korrelált egyensúllyal és annak általánosításaival foglalkozik. A fejezetben megtalálhatók a korrelált egyensúlyok halmazát leíró lineáris egyenletrendszer bimátrix játékokra, továbbá a Nash-egyensúly és a korrelált egyensúly közötti kapcsolatot behatároló tételek. A korrelált egyensúly egy játékvezető közreműködését igényli, aki egy alkalmas véletlen generátor segítségével ajánlásokat tesz a játékosoknak. A szerző itt felveti, hogy egy második játékvezető arról nyilatkozhat, hogy a játékosok kövessék-e az első játékvezető ajánlását, ezzel megnövelve a játékosok stratégiahalmazait. Az olvasóban felvetődik annak a lehetősége, hogy ily módon véges, de tetszőlegesen sok játékvezetővel is lehet operálni. Az ezzel kapcsolatos kérdés, hogy milyen eredmények lennének várhatóak egy ilyen jellegű kiterjesztéstől?

Moulin és Vial (1978) bevezette a gyenge korrelált egyensúly fogalmát, amely esetén a játékvezető borítékban elhelyezett ajánlását megnéző játékosok kötelesek a borítékban talált ajánlást követni, míg a borítékot fel nem bontó játékosok egy másik borítékban megtalálható összes stratégia közül választhatnak. A gyenge korrelált egyensúly előnye a korrelált egyensúllyal szemben, hogy társadalmi jólét javulást eredményezhet a Nash egyensúlyhoz képest. A zéró-összegű bimátrix játékokkal stratégiailag nem ekvivalens játékok esetén van Nash-egyensúlyt Pareto-javító gyengén korrelált egyensúly (Moulin és Vial, 1978). A szerzőben felmerült annak igénye, hogy a korrelált egyensúly protokollját másképpen megváltoztatva, lehet-e a gyenge korrelált egyensúlyt Pareto-javító egyensúlyi koncepciót konstruálni. A szerző sikerrel járt: az általa megfogalmazott puha korrelált egyensúly (Forgó, 2010) ilyen jó tulajdonságokkal rendelkezik. Az új koncepció protokollja annyiban tér el a gyengén korrelált egyensúlyétól, hogy a játékvezetői borítékot fel nem nyitó játékosok számára, a második borítékból az első borítékban szereplő stratégia kimarad. Egy apró megjegyzésem, hogy a 40.-től 45. oldalig terjedő rész olvasását megkönnyítené, ha a játékosokat más betűvel jelölnék (i játékos, míg j és k akciók).

A puha korrelált egyensúly erejét mutatja, hogy a Fogoly-dilemma esetén Pareto-javulást eredményez a gyengén korrelált egyensúllyal szemben. Külön izgalmas fejezet a torlódási játékok puha korrelált egyensúlyának meghatározása. Az alfejezetben vizsgált torlódási játék a lehető legegyszerűbb torlódási játék: két kiszolgáló között választ n darab játékost, és minél többen választanak egy kiszolgálót, annál inkább romlik a kiszolgálás színvonala (pl. lassul a kiszolgálás). A szerző a puha korrelált egyensúly társadalmilag jótékony hatását a hozzá tartozó társadalmi jólét és a Nash-egyensúlyhoz tartozó társalmi jólét (MV, MVP), illetve az optimális társadalmi jólét és puha korrelált társadalmi jólét hányadosaival méri (EV). Mivel több puha korrelált és több Nash-egyensúly létezhet, ezért külön mérőszám tartozik a hányadosok legjobb és legrosszabb eseteihez. A szerző lineáris torlódási játékokra igazolja (Forgó, 2014), hogy $EV \leq 4/3$. A fejezet ezenkívül számos további becslést tartalmaz a legjobb és legrosszabb esetekre. A számítások meglehetősen összetettek és feltehetően a fejezetben tárgyaltnál általánosabb torlódási játékokra már analitikusan nehezen kivitelezhetők.

Két külön alfejezet tárgyalja a puha korrelált egyensúly bevezetését és viselkedését extenzív játékokra. A fejezet végül a bevezetett fogalmak egy klímatárgyalási modellen történő alkalmazásával zárul.

3. fejezet

A harmadik fejezet a Nash által bevezetett alkumegoldás egy szerző általi kiterjesztésével foglalkozik, az L-Nash alkuhalmazzal. Nash modellje szerint a szereplők sikeres megegyezés esetén a lehetséges kimenetelek halmazából választanak egy az „egyet nem értési" pontnál mindenki számára kedvezőbb megoldást, míg megegyezés hiányban mindenki az egyet nem értési pont szerinti mennyiségben részesül. Nash 6 természetesnek mondható axiómával karakterizálta, az egyének egyet nem értési értékeihez képesti többletek szorzataként értelmezett célfüggvény segítségével nyert, a lehetséges kimenetelek halmaza fölötti maximális megoldást. Az axiómák felsorolásánál megjegyezném, hogy a szimmetria tulajdonság definíciója (90. oldal eleje és 91. oldal közepe) nehezen olvasható, jobban tagolható lett volna.

A szerző által bevezetett L-Nash alkumegoldás a Nash-féle célfüggvényt véve az egyet nem értési pont egy irány mentén történő mínusz végtelenbe tartása esetén adódó határérték. A kérdéses határérték legfeljebb két egymást követő konvex programozási feladat megoldásaként kapható meg (Forgó–Szidarovszky, 2003). A L-Nash célfüggvény n szereplős problémák esetén a végtelenbe tartás paraméterének n-fokú paramétere, amelynek az előbb említett tétel szerint, elegendő csak a két legkisebb fokú nem konstans tagjával foglalkozni az L-Nash megoldás meghatározásakor. Van-e valamilyen jól megfogható olyan intuitív érvelés, ami miatt a magasabb fokú tagokra nincsen szükség a határérték meghatározásához? Egy más jellegű kérdés, hogy skálafüggetlenség (illetve az EWM karakterizációban a homogenitás) mellett az egyet nem értési pontot origónak véve, viszont az F halmazt megfelelően transzformálva ($F^*(\alpha) = \alpha(F + r)$) egy (az elhúzódó alkudozás esetén a „jövőbeli értékekhez" tartozó) ekvivalens problémasereg nyerhető, amely megoldásainak egy „határiránya" vajon kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető-e az eredeti megfogalmazás szerinti b^0 L-Nash megoldásnak? A határirány esetleg a szereplők „súlyának" is felfogható.

A szerző többféle érdekes kapcsolatot vezet le a Nash és az L-Nash megoldások között. Az L-Nash megoldás jelentőségét az alkuproblémák és többkritériumú döntési problémák közötti kapcsolat szolgáltatja. Forgó–Szidarovszky (2003) az L-Nash megoldás segítségével nyert EWM (kiterjesztett súlyozási módszer) döntési módszer egy karakterizációját is megadja a Nash-féle karakterizációhoz hasonlóan.

Értékelés

Forgó Ferenc új játékelméleti egyensúly koncepciókat vezetett be, amelyek közül kiemelendő a puha korrelált egyensúly és az L-Nash alkuhalmaz fogalma. Mindkettő a gyakorlati elemzői tevékenysége során felmerült problémákra adott válaszként is felfogható: a puha korrelált egyensúly fogalma a klímatárgyalások játékelméleti modellezése, míg az L-Nash alkuhalmaz a többszempontú döntési problémák vizsgálata során vetődött föl. Ez azt is alátámasztja, hogy az eredményekben gazdag értekezésben tárgyalt fogalmak és tételek komoly gyakorlati mondanivalóval bírnak. A bevezetett új fogalmakat a szerző világosan elhelyezi a szakirodalomban már bevezetett előd- és rokonfogalmakhoz képest, továbbá a bemutatott saját tételei segítségével rámutat az új fogalmak jelentőségére. Kiemelendő, hogy a játékelmélet Nash-egyensúly létezésének kérdését vizsgáló – komoly felkészültséget és kreativitást igénylő – területet, az egzisztencia tételeivel jelentősen gazdagította. Az értekezés rangos nemzetközi szakfolyóirat (mint például a *European Journal of Operational Research*, *Mathematical Social Sciences*, *Archiv der Mathematik*, vagy *Journal of Global Optimization*) publikációkra épül.

Összegezve, Forgó Ferenc egy minőségi eredményekben gazdag és egy egésszé összeálló MTA doktori értekezést nyújtott be. Mindezek alapján teljes meggyőződéssel támogatom Forgó Ferenc értekezésének nyilvános vitára történő bocsátását és részére az MTA doktora cím odaítélését.

Budapest, 2015. március 6.

Tasnádi Attila