

dc\_837\_14

# Egyensúly a játékelméletben: egzisztencia és általánosítások

AKADÉMICAI DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Írta: Forgó Ferenc



Budapesti Corvinus Egyetem  
Közgazdaságtudományi Kar

2014

# Tartalomjegyzék

|                                                                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. A Nash-egyensúlypont létezése</b>                                                                        | <b>5</b>  |
| 1.1. A Nash-egyensúlypont létezése konvexitás nélkül . . . . .                                                 | 7         |
| 1.2. Cournot oligopólium nem konvex költségfüggvényekkel . . . . .                                             | 12        |
| 1.3. Kétfüggvényes minimax tételek . . . . .                                                                   | 23        |
| <b>2. A korrelált egyensúly és általánosításai</b>                                                             | <b>28</b> |
| 2.1. Definíció és interpretáció . . . . .                                                                      | 28        |
| 2.2. A gyenge és a puha korrelált egyensúly normál formában adott játékok esetében . . . . .                   | 36        |
| 2.3. Puha korrelált egyensúly egyszerű, két-kiszolgálós, nem-csökkenő, lineáris torlódási játékokban . . . . . | 51        |
| 2.4. A gyenge és a puha korrelált egyensúly extenzív formában adott játékok esetében . . . . .                 | 69        |
| 2.5. Részjáték tökéletes puha fa-korrelált egyensúly . . . . .                                                 | 73        |
| 2.6. Optimalizálás a fa-korrelált egyensúlyok halmazán . . . . .                                               | 81        |
| 2.7. Egy alkalmazás . . . . .                                                                                  | 85        |
| <b>3. Az L-Nash alkumegoldás</b>                                                                               | <b>88</b> |
| 3.1. A Nash-alkumegoldás . . . . .                                                                             | 88        |
| 3.2. Az L-Nash alkumegoldás . . . . .                                                                          | 92        |
| 3.3. Az L-Nash alkumegoldás implementációja kétszemélyes alkujátékokban                                        | 105       |
| 3.4. Az alkuprobléma és a többkritériumú döntések . . . . .                                                    | 114       |

|                                                                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Függelék</b>                                                                                                                          | <b>126</b> |
| <b>A. Bizonyítások</b>                                                                                                                   | <b>127</b> |
| A.1. Egy két-függvényes minimax tétel . . . . .                                                                                          | 127        |
| A.2. A puha korrelált egyensúly ereje négy-személyes, egyszerű, két-kiszolgálós,<br>nem növekvő lineáris, torlódási játékokban . . . . . | 138        |
| A.3. Az L-Nash alkumegoldás Howard-féle implementációja . . . . .                                                                        | 142        |
| <b>B. Rövidítések jegyzéke</b>                                                                                                           | <b>151</b> |
| <b>Irodalomjegyzék</b>                                                                                                                   | <b>153</b> |

## Előszó

Csaknem ötven éve foglalkozom játékelmélettel kisebb-nagyobb intenzitással. Az első mérföldkő ezen az úton az első magyar nyelvű játékelmélet könyv, amit mentorommal, Szép Jenővel közösen írtunk, Szép és Forgó (1974) majd ezt két angol és egy német nyelvű játékelmélet könyv követte az idők folyamán, Szép és Forgó (1983, 1985), Forgó et al (1999). Ezek, főleg az utolsó, sok új kutatási eredményemet is tartalmazza, mégis inkább tankönyvek. A Budapesti Corvinus Egyetemen és jogelődjain évtizedek óta vezetek játékelmélet kurzusokat, amelyek szintén inspiráltak arra, hogy a tudományos érdeklődésem a matematikai programozástól mindinkább a játékelmélet felé forduljon. Az utóbbi húsz évben már csak kifejezetten játékelméleti, vagy ahhoz szorosan kapcsolódó témákban jelentek meg dolgozataim sokféle fórumon, amelyek közül, fontossági sorrend nélkül, megemlítem a *European Journal of Operations Research*, a *Central European Operations Research*, a *Mathematical Social Sciences*, a *Journal of Global Optimization*, az *Archiv der Mathematik*, az *Acta Mathematica Hungarica*, a *Pure Mathematics and Applications* és a *Sigma* folyóiratokat.

Ennek a disszertációnak, amely túlnyomó részt saját kutatási eredményeket tartalmaz, speciális szerkezete van. Három fő fejezete egy-egy olyan új fogalom köré épül, amelyet különböző munkáimban én vezettem be olyan területeken, amelyek a játékelméleti kutatások fő sodrába tartoznak. Az első fejezet a Nash-egyensúlypont létezésével foglalkozik különböző modellekben és feltételek mellett, különös tekintettel a sok egzisztencia tétel bizonyításában szerepet játszó CF-konvexitás, Forgó (1994) fogalmára. A második fejezetben a korrelált egyensúllyal és általánosításával

foglalkozom különös tekintettel a "puha korrelált egyensúlyra", Forgó (2010). Ez, mint egyéb általánosítások is, első sorban azt célozza, hogy minél nagyobb társadalmi hasznosságot lehessen elérni egyensúlyban. A harmadik fejezet a Nash alkumegoldásból származtatott limit-Nash alkumegoldással, Forgó (1984), annak különböző tulajdonságaival és implementációjával foglalkozik.

Minden fejezetben törekedtem a témához kapcsolódó új alkalmazást is bemutatni. Az első fejezetben a Cournot oligopólium tiszta Nash-egyensúlypontjának létezésére adok elégséges feltételeket nem lineáris keresleti függvény és nem konvex költségfüggvény esetében, Forgó (1995). A puha korrelált egyensúly alkalmazását részletesen bemutatom a torlódási játékok egy osztályára, Forgó (2014), valamint a klímátárgyalások egy játékelméleti modelljében, Forgó et al (2005). Nagy figyelmet szentelek a limit-Nash alkumegoldás alkalmazásának a többkritériumú döntési problémákban, Forgó és Szidarovszky (2003).

Köszönettel tartozom szerzőtársaimnak, kollégáimnak, a diákoknak, az egyetemi játékelméleti szeminárium résztvevőinek, és utoljára, de elsősorban, családomnak a támogatásért és a türelemért.

## Bevezetés

Mivel a három fő fejezet elején külön-külön van egy viszonylag hosszabb bevezetés, itt csak amellet szeretnék érvelni, hogy miért tartozik a disszertációt alkotó három fejezet témája a játékelméleti kutatások fő sodrába. A klasszikus játékelméletnek három fontos kiindulópontja van (eltekintve, de nem lebecsülve von Neumann (1928) mérőföldkőnek számító, a zérus-összegű játékok speciális osztályára vonatkozó eredményétől): von Neumann és Morgenstern (1944) monumentális műve, amely a kooperatív játékok elméletét alapozta meg, Nash Nobel díjjal is jutalmazott definíciója és egzisztencia tétele, Nash (1950a, 1951) a nem-kooperatív játékok egyensúlyára vonatkozóan, valamint ugyancsak Nash (1950b, 1953) munkái, amelyek összekapcsolják a kooperatív és nem-kooperatív megközelítést. Ehhez a fő sodorhoz kapcsolódott az ugyancsak Nobel díjas Aumann (1974) a korrelált egyensúly fogalmának bevezetésével.

A disszertáció a kooperatív játékok Neumann-Morgenstern megközelítésének kivételével ezekhez a kutatási irányokhoz csatlakozik, amint azt a három fejezetre tagolás jelzi is, és igyekszik saját kutatásaimon alapuló új eredményeket bemutatni.

A dolgozathoz tartozik egy függelék (szintén három részből áll), amelyben a hosszabb bizonyítások találhatók. A disszertáció folyamatosan olvasható a függelék nélkül is. A definíciók, tételek, lemmák és példák számozása fejezetenként és a függelék három részében folyamatos. Az értekezésben elnevezés szintjén nem tettem különbséget "tétel" (theorem) és "állítás" (proposition) között, noha sokan alkalmaznak ilyen gyakorlatot, felállítva egy olyan hierarchiát, amelyben "súlyban" egy tétel megelőz egy állítást. Van amikor ez egyértelműen eldönthető, de sokszor nem.

Én mindenhol a "tétel" elnevezést használom és inkább a szövegben utalok arra, hogy milyen súlyú az állítás. Sok fogalomnak nincs magyar nyelvű, a szakma által egységesen elfogadott megnevezése. Sokszor saját elnevezéseket kreáltam, illetve önkényesen választottam a versengő lehetséges terminológia közül. Az olvasás megkönnyítése céljából elég sok fogalom esetében az első előfordulás alkalmával zárójelben az angol elnevezést is megadtam. A kettőnél több szerzős hivatkozásoknál csak az első szerzőt említem annak megjelölésével, hogy társai is vannak. Az irodalomjegyzékben minden adat pontosan szerepel. A disszertáció végén van a rövidítések jegyzéke.

A disszertáció megértéséhez a mesterszintű közgazdászképzésben elvárt analízis, valószínűségszámítás, lineáris algebra és optimumszámítás tudás bőségesen elég. A matematikai általánosságban sehol nem megyek túl a véges dimenziós euklideszi terek nyújtotta lehetőségeken, még az eredetileg általánosabb terekben megfogalmazott állításokat is a speciális esetet jelentő véges dimenzióban fogalmazom meg és bizonyítom.

Az egyes szám első személy használata csak az előszóra és a bevezetésre korlátozódik, a későbbiekben a tudományos művekben megszokott többes szám első személyt használom.

# 1. fejezet

## A Nash-egyensúlypont létezése

A játékelméleti kutatások lassan száz éves történetében mind a mai napig látható az a törekvés, hogy a Nash-egyensúlypont (*NEP*), illetve ennek általánosításai és finomításai esetében lehetőleg minél gyengébb feltételek mellett bizonyítsák a vizsgált egyensúly létezését általában és speciálisan egyes konkrét játékosztályok esetében is. Nézzük meg, hogy az általános esetben melyek a fő irányok.

Egy  $G$  nem-kooperatív játékot normál formában a játékosok  $N = \{1, \dots, n\}$  halmazával, a stratégiahalmazokkal és az kifizetőfüggvényeivel szokás megadni a jól ismert  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  formában, ahol minden  $i \in N$ -re  $S_i$  az  $i$  játékos nem üres stratégiahalmaza,  $f_i : \rightarrow \mathbb{R}$  a kifizetőfüggvénye, amely az  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  stratégiaprofil halmazon van értelmezve.

Természetesen  $G$  összetevőiről fel kell tételeznünk valamit, hogy bármilyen egzisztencia tételhez jussunk (közismert a mondás, hogy ha valamiről nem teszünk fel semmit, akkor nem is tudunk mondani róla semmit). Persze a feltételezéseknek olyanoknak kell lenni, amelyek bizonyos alkalmazásokban relevánsak, lehetőleg jól ellenőrizhetők és egyszerűek. Induljunk ki Nash (1950a, 1951) eredményéből.

Idézzük fel a jól ismert definíciót. Ehhez vezessük be a csonka stratégiaprofil fogalmát és a megfelelő jelölést. Minden stratégiaprofil felírhatunk az  $s = (s_i, s_{-i})$  formában, ahol az  $s_{-i}$  csonka stratégiaprofil csak az  $s_i$ -t nem tartalmazza. Egy  $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$  stratégiaprofil *NEP*-nek nevezünk, ha fennállnak az alábbi egyen-

lőtlenségek:

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*)$$

minden  $s_i \in S_i$  és  $i \in N$  esetén. Nash klasszikus eredménye (Nash, 1950a, 1951) a következő:

**1.1. tétel.** *Véges játékok kevert bővítésének mindig van NEP-je.*

Itt az  $S_i$  halmazok a lehetséges keverések (véges halmazon vett valószínűségeloszlások) halmazai, az  $f_i$  függvények pedig a véges játékban vett kifizetéseknek a játékosok által egymástól függetlenül választott valószínűségeloszlásaival számított várható kifizetését adják meg (egy multilineáris forma, vagyis minden játékos kifizetése a többiek által választott stratégiák rögzítése mellett a saját stratégia lineáris függvénye).

Már itt is látszik, hogy a további általánosítások kereteit mi határozza meg. Általánosítani lehet a stratégiahalmazokat (a stratégiahalmazok alakját, a teret, amelyben ezek a halmazok definiálva vannak), a kifizetőfüggvények alakját, folytonosságát, simaságát, stb. Ebben a szellemben született az első komoly általánosítás, a Nikaido-Isoda tétel (Nikaido és Isoda, 1955).

**1.2. tétel.** *Ha minden  $i \in N$ -re*

- (i) az  $S_i$  stratégiahalmazok véges dimenziós euklideszi terek konvex kompakt részhalmazai,*
  - (ii) az  $f_i$  függvények folytonosak az  $S$  stratégiaprofil halmazon,*
  - (iii) az  $f_i(\cdot, s_{-i})$  függvények konkávok az  $S_i$  stratégiahalmazon,*
- akkor a  $G$  játéknak van legalább egy NEP-je.*

Világos, hogy Nash tétele speciális eset, hiszen az egységsimplexek konvex, kompakt halmazok és a multilineáris függvények folytonosak és konkávok a saját változójukban a többi változó rögzítése esetén.

Friedman (1977) közölte a legáltalánosabbat azok közül a tételek közül, amelyek a konvexitás klasszikus fogalmát használják és a véges dimenziós euklideszi térben maradnak. Ez körülbelül az a pont, ahol a legtöbb tankönyv megáll.

**1.3. tétel.** *Legyen  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  egy nem-kooperatív játék, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek minden  $i \in N$ -re:*

1.  $S_i$  véges dimenziós euklideszi tér nem üres, konvex, kompakt részhalmaza,
2.  $f_i$  felülről félig folytonos a stratégiaprofilok  $S$  halmazán,
3. bármely rögzített  $s_i \in S_i$  esetén az  $f(s_i, \cdot)$  függvény alulról félig folytonos az  $S_{-i}$  csonka stratégiaprofilok halmazán,
4. az  $f_i(\cdot, s_{-i})$  függvények kvázikonkávok az  $S_i$  stratégiahalmazon.

*Ekkor a  $G$  játéknak van legalább egy NEP-je.*

## 1.1. A Nash-egyensúlypont létezése konvexitás nélkül

Az első kísérlet ebben az irányban Nishimura és Friedman nevéhez fűződik (Nishimura és Friedman, 1981). A feltételük, ami a kvázikonkávítást helyettesíti az 1.3. tételben azonban nagyon nehezen ellenőrizhető. Mint láttuk, a függvények alaki és folytonossági tulajdonságai is általánosabbak az 1.3. tételben, mint az 1.2. tételben. Mi a következőkben az alaki (konvexitási/konkávítási) tulajdonságok általánosításával foglalkozunk. A legelső, a játékelméletben is felhasznált eredmény Ky Fan nevéhez fűződik (Fan, 1952, 1953). Legelőször definiáljuk a Fan-konkáv ( $F$ -konkáv) függvényeket.

**1.4. definíció** ( $F$ -konkávítás). *Legyenek  $X$  és  $Y$  tetszőleges nem üres halmazok. Az  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt  $F$ -konkávnak nevezzük az  $X$  halmazon az  $Y$  halmazra*

vonatkozóan, ha bármely  $x_1, x_2 \in X$  ponthoz és  $\lambda \in [0, 1]$  valós számhoz van olyan  $x_0 \in X$ , hogy

$$f(x_0, y) \geq \lambda f(x_1, y) + (1 - \lambda)f(x_2, y) \quad (1.1)$$

fennáll minden  $y \in Y$ -ra.

Vegyük észre, hogy az általánosság milyen magas szintjén mozgunk: jóformán semmit sem teszünk fel az  $X, Y$  halmazokról és az  $f$  függvényről is csak az (1.1) egyenlőtlenség fennállását. Például, ha egy duopólium modellben  $X$  és  $Y$  a két vállalat lehetséges termelési halmaza (lehet pl. nem összefüggő, bizonyos volumenek nem lehetségesek), akkor csak azt követeljük meg, hogy ha az első vállalat bármely két  $x_1, x_2$  termelési lehetőségéhez tartozó  $f(x_1, y), f(x_2, y)$  profitoknak legalább a  $\lambda, (1 - \lambda)$ -val súlyozott átlagát lehessen realizálni valamely  $x_0$  termelési lehetőséggel, nem kell ennek feltétlenül a két termelési lehetőség  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  súlyozott átlagának lenni (lehet, hogy az nem is lehetséges).

Ky Fan klasszikus eredménye a következő (nem teljes általánosságában, mert mi az euklideszi térben maradunk).

**1.5. tétel** (Fan (1952)). *Legyen  $G = \{S_1, S_2; f_1, f_2\}$  kétszemélyes zérus-összegű játék, ahol az  $S_1, S_2$  stratégiahalmazok zártak és korlátosak, az  $f_1, f_2$  kifizetőfüggvények felülről félig folytonosak és  $f_1$   $F$ -konkáv  $S_1$ -en az  $S_2$ -re vonatkozóan,  $f_2$   $F$ -konkáv  $S_2$ -n az  $S_1$ -re vonatkozóan. Ekkor a  $G$  játéknak van legalább egy  $NEP$ -je.*

Hosszú ideig azt gondolták, hogy ezt az eredményt egyszerűen át lehet vinni  $n$ -személyes játékokra. Ez nem sikerült és kiderült az oka is: Joó (1986) konstruált egy olyan kétszemélyes nem zérusösszegű játékot, ahol mindkét játékos stratégiahalmaza a  $[0, 1]$  intervallum, a kifizetőfüggvények folytonosak és  $F$ -konkávok de a játéknak nincs  $NEP$ -je.

Forgó (1994) módosította az  $F$ -konkavitás definícióját (kicsit szigorított), ami aztán lehetővé tette a Fan-típusú egzisztencia tétel bizonyítását akárhány játékos esetére. Nézzük a módosított definíciót.

**1.6. definíció** (*CF-konkavitás, folytonos  $F$ -konkavitás*). Legyen  $X$  egy véges dimenziós euklideszi tér nem üres részhalmaza,  $Y$  egy tetszőleges nem üres halmaz. Az  $f: X \times Y$  függvényt *CF-konkávnak* nevezzük az  $X$  halmazon az  $Y$  halmazra vonatkozóan, ha van olyan  $\psi: X \times X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  folytonos függvény, hogy bármely  $x_1, x_2 \in X$  pontok és  $\lambda \in [0, 1]$  valós szám esetében

$$f(\psi(x_1, x_2, \lambda), y) \geq \lambda f(x_1, y) + (1 - \lambda)f(x_2, y) \quad (1.2)$$

fennáll minden  $y \in Y$ -ra.

Szükséges lesz ennek a definíciónak egy másik formájára is.

**1.7. definíció** (*CF-konkavitás*). Legyen  $X$  egy véges dimenziós euklideszi tér nem üres részhalmaza,  $Y$  egy tetszőleges nem üres halmaz. Az  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt *CF-konkávnak* nevezzük az  $X$  halmazon az  $Y$  halmazra vonatkozóan, ha minden  $k \geq 2$ -re van olyan  $\psi_k: \times_{j=1}^{j=k} X_j \times \mathbb{R} \rightarrow X$  folytonos függvény, hogy bármely  $x_1, \dots, x_k \in X$  pontok és  $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 1$ .  $\sum_{j=1}^{j=k} \lambda_j = 1$  valós számok esetében

$$f(\psi_k(x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k), y) \geq \lambda_1 f(x_1, y) + \dots + \lambda_k f(x_k, y)$$

fennáll minden  $y \in Y$ -ra.

A fenti két definíció ekvivalenciájának bizonyítása megtalálható Forgó (1994)-ben.

A *NEP* egzisztenciájának bizonyításához szükségünk lesz egy jól ismert definícióra.

**1.8. definíció.** A  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  játékhoz tartozó aggregátor függvénynek nevezzük az  $A: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$A(s, t) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(s_i, t_{-i}) \quad (1.3)$$

függvényt.

**1.9. lemma** (Nikaido és Isoda (1955)). *Ha van olyan  $t^* \in S$  stratégiaprofil, hogy*

$$A(t^*, t^*) \geq A(s, t^*) \quad (1.4)$$

*minden  $s \in S$ -re, akkor  $t^*$  a  $G$  játék NEP-je.*

**1.10. tétel** (Forgó (1994)). *Ha*

*a)  $S_i, i \in N$  véges dimenziós euklideszi tér nem üres, konvex, kompakt részhalmaza,*

*b)  $f_i, i \in N$  folytonos függvény az  $S$  stratégiaprofilok halmazán,*

*c) az  $A$  aggregátor függvény CF-konkáv  $S$ -en az  $S$ -re vonatkozóan,*

*akkor  $G$ -nek van NEP-je.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás a Nikaido-Isoda tétel (Nikaido és Isoda, 1955) bizonyításának lépései mentén halad. Tegyük fel, indirekt bizonyítást alkalmazva, hogy  $G$ -nek nincs NEP-je. Akkor az 1.9. lemma miatt minden  $t \in S$ -hez van olyan  $s \in S$ , hogy  $A(t, t) < A(s, t)$ . Legyen

$$H_s = \{t \in S : A(t, t) < A(s, t)\}, \quad s \in S.$$

A  $H_s$  halmazok nyíltak  $S$ -ben és teljesen lefedik  $S$ -et

$$S = \bigcup_{s \in S} H_s.$$

Mivel  $S$  zárt és korlátos, ezért a  $H_s$  halmazok közül véges sok is lefedti  $S$ -et

$$S = \bigcup_{j=1}^{j=q} H_{s_j}.$$

Definiáljuk minden  $j = 1, \dots, q$ -ra az  $a_j: S \rightarrow \mathbb{R}$  és az  $a: S \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket

$$\begin{aligned} a_j(t) &= \max\{A(s_j, t) - A(t, t), 0\}, & t \in S \\ a(t) &= \sum_{j=1}^q a_j(t) > 0, & t \in S. \end{aligned}$$

Tekintsük  $S$ -nek a következő önmagára való folytonos leképezését

$$t \rightarrow t' = \psi_q \left( s_1, \dots, s_q, \frac{a_1(t)}{a(t)}, \dots, \frac{a_q(t)}{a(t)} \right),$$

ahol  $\psi_q$  az 1.7. definícióban szereplő folytonos függvény. A c) feltételezés és az 1.7. definíció miatt

$$A(t', t) \geq \sum_{j=1}^q \frac{a_j(t)}{a(t)} A(s_j, t)$$

fennáll minden  $t \in S$ -re.

Az  $A, a_1, \dots, a_q, a, \psi_q$  függvények valamennyien folytonosak, ezért a  $t \rightarrow t'$  leképezésnek a Brouwer-fixponttétel, (Brouwer, 1912) szerint van fixpontja. Legyen  $t^*$  egy fixpont. Ekkor  $t^* = t'^*$  és így

$$A(t^*, t^*) \geq \sum_{j=1}^q \frac{a_j(t^*)}{a(t^*)} A(s_j, t^*) . \quad (1.5)$$

Az indirekt feltevés miatt van legalább egy  $s_j$ , amelyre  $A(t^*, t^*) < A(s_j, t^*)$ , és ha  $A(t^*, t^*) \geq A(s_j, t^*)$ , akkor  $a_j(t) = 0$ . Így

$$\sum_{j=1}^q \frac{a_j(t^*)}{a(t^*)} A(s_j, t^*) > \sum_{j=1}^q \frac{a_j(t^*)}{a(t^*)} A(t^*, t^*) = A(t^*, t^*) ,$$

ami ellentmond (1.5)-nek. □

A  $CF$ -konkávitás definíciójától inspirálva, az 1.10. tétel különböző irányokban való általánosításaiként további egzisztencia tételek születtek az évek folyamán. Csak azokból, amelyekben expliciten a  $CF$ -konkávitást jelölik meg, mint egyik kiindulópontot, megemlíjtük a következő független munkákat: Kim és Kum (2005), Kim és Lee (2002), Kim és Lee (2007), Hou (2009), Cheng (2010), Kim (2011) cikkeket és Cambini és Martein (2009) könyvét.

Az általánosítás egyik iránya, amikor az euklideszi tereknél általánosabb terekben definiálunk konvex halmazokat és függvényeket. Forgó és Joó (1999) munkájában 13 fixpont és játékelméleti egzisztencia tétel szerepel teljesen egyéni terekben (un.

pszeudokonvex terekben), amelyeknek definíciójában jól látható a  $CF$ -konkávítás, mint kiinduló pont. Ezeknek az ismertetése kívül esne azon a határon, amelyet az euklideszi térnél húztunk meg.

Az eddigiekből is világos volt, de most két példán is megmutatjuk, hogy nem kell az euklideszi teret elhagyni ahhoz, hogy olyan játékok  $NEP$ -jének létezését tudjuk bizonyítani, ahol a klasszikus konvexitási/konkávítási feltételek nem teljesülnek.

**1.11. példa.** Legyen  $G = \{X, Y, f, g\}$ ,  $X = Y = [-1, 1]$ ,  $f(x, y) = x^2y + x$ ,  $g(x, y) = -x^2y^2 + y$ . Látható, hogy  $f(\cdot, 1)$  nem kvázikonkáv és ezért az 1.3. tételt nem tudjuk használni. Az  $A: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$  aggregátor függvény ebben az esetben

$$A(x, y, u, v) = f(x, v) + g(u, y) = x^2v + x - u^2y^2 + y.$$

Legyen a  $\psi$  függvény a következő:

$$\psi(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda) = \left[ \begin{array}{c} \sqrt{\lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2} \\ \sqrt{\lambda y_1^2 + (1 - \lambda)y_2^2} \end{array} \right].$$

Elemi (de kicsit hosszadalmas) számolással igazolható, hogy az  $A$  aggregátor függvény  $CF$ -konkáv az  $X \times Y$  halmazon az  $X \times Y$ -ra vonatkozóan, így  $G$ -nek van  $NEP$ -je. Valóban, az  $x = -\frac{1}{2}, y = 1$  egy  $NEP$ . Megjegyezzük, hogy ennél a játéknál Nishimura és Friedman (1981) feltétele nem teljesül.

## 1.2. Cournot oligopólium nem konvex költségfüggvényekkel

A klasszikus Cournot modell jólismert. Egy iparágban, ahol  $n$  vállalat termel egy homogén termékfajtát (a fogyasztókat vásárlásaikkor nem érdekli, hogy a terméket melyik vállalat termelte), a vállalatok egymástól függetlenül hozzák meg volumendöntéseiket, vagyis az  $i$  vállalat választ egy  $x_i$  termelési szintet,  $x_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A vállalatok kapacitás szempontjából azonosak, lehetséges termelési

szintjeiket a  $[0, 1]$  intervallumra normalizáltuk az egyszerűség kedvéért. Adott egy  $P: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$  árfüggvény (inverz keresleti függvény), amely az iparág  $q = \sum_{i=1}^n x_i$  teljes termeléséhez azt a legnagyobb árat rendeli, amelyen a piac kitisztul, vagyis a fogyasztók az egész  $q$  mennyiséget megvásárolják. Szintén adott az  $i$  vállalat  $C_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  költségfüggvénye, amely az  $x_i$  termelési szinthez a  $C_i(x_i)$  költséget rendeli. Költség szempontból a vállalatok különbözők lehetnek. Ezekből az elemekből tevődik össze az  $i$  vállalat  $f_i: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$  profitfüggvénye (költséggel csökkentett árbevétel)

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i P \left( x_i + \sum_{j \neq i} x_j \right) - C_i(x_i), \quad x_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n.$$

Bevezetve az  $S_i = [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  jelölést, az  $S_i$  termelési halmazok és az  $f_i$  profitfüggvények,  $i = 1, \dots, n$  a  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  oligopólium játékot határozzák meg. Jelöljük a játékosok (vállalatok) halmazát  $N = \{1, \dots, n\}$ -el. A különböző közgazdasági alkalmazásokban fontos kérdés, hogy a  $G$  oligopólium játéknak van-e egyensúlypontja a tiszta stratégiák halmazán. A klasszikus eredmény a következő:

**1.12. tétel** (Friedman (1977)). *Ha a  $P$  árfüggvény konkáv a  $[0, n]$  intervallumon, a  $C_i$  költségfüggvények minden  $i \in N$ -re konvexek a  $[0, 1]$  intervallumon, akkor a  $G$  oligopólium játéknak van egyensúlypontja a tiszta stratégiák halmazán.*

Ennél általánosabb eredményekhez juthatunk, ha figyelmünket azokra az oligopólium játékokra koncentráljuk, amelyek az u.n. potenciál játékok közé tartoznak.

**1.13. definíció** (Monderer és Shapley (1996)). *Legyen  $N = \{1, \dots, n\}$  a játékosok halmaza, és  $H = \{T_1, \dots, T_n; g_1, \dots, g_n\}$  egy játék normál formában. A  $H$  játékot ordinális potenciál játéknak nevezzük, ha van olyan  $\Pi: T \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ahol  $T = T_1 \times \dots \times T_n$  a stratégiaprofilok halmaza, hogy minden  $i \in N$ , és  $t_{-i} \in T_{-i}$  csonka stratégiaprofilra*

$$g_i(t_i, t_{-i}) - g_i(r_i, t_{-i}) > 0 \Leftrightarrow \Pi(t_i, t_{-i}) - \Pi(r_i, t_{-i}) > 0 .$$

$\Pi$ -t ordinális potenciál függvénynek nevezzük. A potenciál függvény általában nem egyértelmű.

Az 1.13. definíció egyenes következményei:

1. A  $H = \{T_1, \dots, T_n; g_1, \dots, g_n\}$  és a  $H' = \{T_1, \dots, T_n; \Pi, \dots, \Pi\}$  játékok stratégiaileg ekvivalensek. A  $H'$  játék tulajdonképpen egy u.n. koordinációs játék, a játékosoknak közös céljaik vannak, amit a  $\Pi$  potenciál függvény fejez ki, a probléma csak a  $\Pi$  függvényt maximalizáló termelési profil realizálása.
2. Ha a  $\Pi$  ordinális potenciál függvénynek van maximuma  $T$ -n, akkor minden maximumpont egy  $NEP$ .
3. Minden véges ordinális potenciál játéknak van  $NEP$ -je.

Tekintsük a  $G$  oligopólium játékot azzal a további megkötéssel, hogy a vállalatok csak pozitív mennyiséget termelhetnek és minden vállalat költségfüggvénye lineáris, egységesen  $c$  marginális költséggel. Könnyű belátni, hogy ekkor a  $G$  oligopólium játék ordinális potenciál játék a  $\Pi: \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Pi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n (\Pi(x) - c)$  potenciál függvény. Ha van olyan termelési volumen profil, amelyben minden vállalat pozitív mennyiséget termel és a kialakult ár nagyobb a marginális költségnél (ezt minden "normális" iparágban nyugodtan fel lehet tenni), akkor a 2. következmény értelmében van a tiszta stratégiák halmazán  $NEP$ . Hangsúlyozni kell, hogy a  $P$  árfüggvény akármilyen lehet, még monoton csökkenőnek sem kell lenni, megengedve akár a Giffen hatást is, Varian (1992). A költségfüggvényre viszont szigorú kikötés van.

A fordított helyzet is kedvező a  $NEP$  egzisztenciája szempontjából.

Tegyük most fel, hogy a  $G$  oligopólium játékban, az árfüggvény lineáris:  $P(x) = a - bx$ ,  $a, b > 0$ , a  $C_i(x_i)$  költségfüggvények tetszőlegesek,  $i \in N$ . Legyen a potenciál függvény  $\Pi: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Pi(x_1, \dots, x_n) = a \sum_{j=1}^{j=n} x_j - b \sum_{j=1}^{j=n} x_j^2 - b \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j - \sum_{j=1}^{j=n} C_j(x_j) .$$

Nem nehéz igazolni, hogy a  $G$  oligopólium játék ordinális potenciál játék a  $\Pi$  potenciál függvénnyel (sőt, egy egzakt potenciál-játék, ami a mi szempontunkból most nem lényeges).

Láthatjuk, hogy itt az árfüggvényre van szigorú megkötés (linearitás), míg a költségfüggvények bármilyenek lehetnek. Ezért, ha olyan esetet keresünk, amikor nincs a tiszta stratégiák halmazán  $NEP$ , akkor nemlineáris árfüggvénnyel és nemlineáris vagy lineáris, de nem azonos költségfüggvényekkel kell próbálkoznunk.

A következőkben elégséges feltételeket adunk a  $C_i$  költségfüggvényekre, amelyek teljesülése esetén bizonyos monoton csökkenő, szigorúan konkáv árfüggvény esetén is van a tiszta stratégiák halmazán  $NEP$ . A célcsoport a költségfüggvények egy olyan osztálya, amely a legtöbb iparágban inkább mondható tipikusnak, mint a konvex költség függvény. A termelés felfutásával a költségek egy pontig (az optimális kapacitáskihasználásig) csökkenő ütemben nőnek, majd ezen túl növekvő ütemben. Annak jelentőségére, hogy az oligopólium modellekben preferáljuk a tiszta  $NEP$ -et, mások mellett Tasnádi (2011) mutat rá.

Foglaljuk össze az árfüggvényre és a költségfüggvényekre tett feltételeinket.

A  $P$  árfüggvény ki kell elégítse az alábbi feltételeket:

- a)  $P$  kétszer folytonosan differenciálható egy nyílt intervallumon, amely tartalmazza a  $[0, n]$  intervallumot, a  $P$  értelmezési tartományát.
- b)  $P(x) > 0$  minden  $x \in [0, n]$ -re, vagyis a vállalatok termelési korlátai olyan szorosak, hogy még akkor is, ha mindenki teljes kapacitáson termel, az össztermelést pozitív áron el lehet adni.
- c)  $P'(x) < 0$  minden  $x \in [0, n]$ -re, vagyis  $P$  szigorúan monoton csökkenő.
- d)  $P''(x) < 0$  minden  $x \in [0, n]$ -re, vagyis  $P$  szigorúan konkáv.

e)  $P''$  monoton csökkenő a  $[0, n]$  intervallumon, vagyis az árak csökkenésének "gyorsulása" csökken az összkínálat növekedésével.

Az  $i$  vállalat költségfüggvénye ki kell elégítse az alábbi feltételeket minden  $i \in N$ -re:

1.  $C_i$  kétszer folytonosan differenciálható egy nyílt intervallumon, amely tartalmazza a  $[0, 1]$  intervallumot, a  $C_i$  értelmezési tartományát.
2.  $C_i(x_i) \geq 0$  minden  $x_i \in [0, 1]$ -re.
3.  $C_i'(x_i) > 0$  minden  $x_i \in [0, 1]$ -re, tehát a költségek monoton nőnek a termelés növekedésével.
4. Van egy olyan  $u_i \in (0, 1)$  inflexiós pont, hogy  $C_i$  konkáv a  $[0, u_i)$  és konvex az  $(u_i, 1]$  intervallumon.
5.  $C_i''(0) < 0$  és  $C_i''$  szigorúan monoton növekvő a  $[0, 1]$  intervallumon, vagyis a költségek növekedésének a gyorsulása nő a termelés növekedésével.

Egy egyszerű példa a fenti feltételeket kielégítő költségfüggvényre a  $C_i(x_i) = (x_i - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{8}$  függvény.

A felesleges indexezés elkerülése érdekében vezessük be a következő jelöléseket

$$x = x_i, \quad t = \sum_{j \neq i} x_j \text{ és } \varphi_i(x, t) = xP(x + t) - C_i(x) .$$

A  $\varphi_i(x, t)$  tulajdonképpen az  $i$ -ik vállalat profitja, ha a saját termelése  $x$  a többieké pedig összesen  $t$ . A következőkben nem írjuk ki, de minden deriváltat az  $x$  helyen veszünk.

Hasznos lesz a következő segédétel.

**1.14. lemma.** *A  $P$  és  $C_i$  függvényekre tett feltételek mellett a  $\varphi_i$  függvény  $\varphi_i'$  deriváltja  $x$  szigorúan konkáv függvénye.*

*Bizonyítás.* Egyszerű deriválással kapjuk, hogy

$$\varphi'_i(x, t) = xP'(x + t) + P(x + t) - C'_i(x) ,$$

és mivel  $P$  konkáv,  $-C'_i$  szigorúan konkáv, csak azt kell bizonyítani, hogy  $h(x) = xP'(x + t)$  konkáv a  $[0, 1]$  intervallumon. Ennek a függvénynek a deriváltja  $P'(x + t) + xP''(x + t)$ , amely csökkenő  $P$  konkávitása és  $x$  nem negativitása miatt, ami azt jelenti, hogy  $\varphi'_i$  szigorúan konkáv.  $\square$

Az 1.14. lemma alkalmazásával tudjuk bizonyítani a következő tételt.

**1.15. tétel** (Forgó (1995)). *Ha  $2P'(0) \leq C''_i(0)$  fennáll minden  $i \in N$ -re, akkor a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.*

*Bizonyítás.* Vegyük a  $\varphi_i$  profitfüggvény második deriváltját

$$\varphi''_i(x, t) = 2P'(x + t) + xP''(x + t) - C''_i(x),$$

és végezzük el az  $x = 0$  helyettesítést

$$\varphi''_i(0, t) = 2P'(0 + t) - C''_i(0) .$$

Mivel  $P'$  monoton csökkenő,  $2P'(0) \leq C''_i(0)$ -ből következik  $\varphi''_i(0, t) \leq 0$ . Az 1.14. lemma miatt  $\varphi'_i$  konkáv és ezért  $\varphi''_i$  csökkenő. Ebből következik

$$\varphi''_i(x, t) \leq \varphi''_i(0, t) \leq 0$$

minden  $x \in [0, 1]$ -re. Ezért  $\varphi_i$  konkáv, tehát  $G$  egy olyan játék, amelyre az 1.2. tétel feltételei fennállnak és így van legalább egy NEP-je.  $\square$

Az 1.15. tétel feltétele azt jelenti, hogy az árfüggvény gyorsabban csökken 0 termelés esetében, mint a költségnövekedés gyorsulásának a fele.

Más elégséges feltételek mellett is bizonyítható a NEP egzisztenciája a  $G$  oligopólium játékokra. Ehhez szükséges lesz a következő tételre, amely egyenes következménye egy jól ismert egzisztencia tételnek (Theorem 3.1, Forgó et al (1999)).

**1.16. tétel.** *Ha a  $\varphi_i(x, t)$  profitfüggvénynek csak egyetlen maximumpontja van a  $[0, 1]$  intervallumon a  $t \in [0, n-1]$  paraméter bármely értékére, akkor a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.*

Két lemma lesz segítségünkre a továbbiakban.

**1.17. lemma.** *Ha  $\varphi'_i(0, t) > 0$  valamely  $t$ -re, akkor a  $\varphi_i(\cdot, t)$  függvénynek pontosan egy maximumpontja van a  $[0, 1]$  intervallumon.*

*Bizonyítás.* Ha  $\varphi'_i(0, t) > 0$  és  $\varphi'_i$  konkáv, akkor minden olyan  $0 < x \leq 1$ -re, amelyre fennáll a  $\varphi'_i(x, t) = 0$  egyenlőség, az alábbi egyenlőtlenség teljesül

$$0 < \varphi'_i(0, t) \leq \varphi'_i(x, t) - x\varphi''_i(x, t) = -x\varphi''_i(x, t) ,$$

amiből  $\varphi''_i(x, t) < 0$  jön. Ebből a tényből és az 1.14. lemmából következik, hogy a  $K = \{x \in [0, 1] : \varphi'_i(x, t) = 0\}$  kritikus pontok halmazának legfeljebb egy eleme van. Ha  $K = \emptyset$ , akkor felhasználva a  $0 < \varphi'_i(0, t)$  egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy  $\varphi'_i(x, t) > 0$  minden  $x \in [0, 1]$ -re, amiből az következik, hogy a  $\varphi_i(\cdot, t)$  függvénynek az  $x = 1$  pontban van az egyetlen maximumpontja. Ha viszont  $K = \{x^0\}$ , akkor  $x = x^0$  az egyetlen maximumpont.  $\square$

**1.18. lemma.** *Ha a  $\varphi_i(\cdot, t)$  függvénynek több, mint egy globális maximumpontja van a  $[0, 1]$  intervallumon, akkor*

$$C_i(1) - C_i(0) - C'_i(0) - P'(0) \leq 0 . \quad (1.6)$$

*Bizonyítás.* Azt az esetet, amikor a  $\varphi_i(\cdot, t)$  függvény szigorúan monoton, nem kell vizsgálni, mert akkor csak egy maximumpont van. Továbbá, az 1.17. lemma miatt csak azokat a  $t$ -ket kell tekintenünk, amelyekre  $\varphi'_i(0, t) \leq 0$ , amiből aztán a

$$P(t) - C'(0) \leq 0 \quad (1.7)$$

egyenlőtlenség következik.

Most azt látjuk be, hogy ha  $\varphi_i(\cdot, t)$ -nak két maximumpontja van a  $[0, 1]$  intervallumon, akkor ezek csak az intervallum végpontjai lehetnek. Indirekt érvelést alkalmazva, tegyük fel, hogy  $x^1$  és  $x^2$  két különböző maximumpont és legalább az egyik nem végpont. Feltehetjük, mondjuk, hogy  $0 < x^1 < x^2 \leq 1$ . Emiatt van olyan  $x^3$  pont, hogy  $x^1 < x^3 < x^2$  és  $x^3$  lokális minimumpont. Így

$$\varphi_i''(x^1, t) = 2P'(x^1 + t) + x^1 P''(x^1 + t) - C_i''(x^1) \leq 0 ,$$

és

$$\varphi_i''(x^3, t) = 2P'(x^3 + t) + x^3 P''(x^3 + t) - C_i''(x^3) \geq 0 ,$$

ami ellentmond a d), e) és az 5. feltételeknek. Tehát  $\varphi_i(0, t) = \varphi_i(1, t)$ , amiből kapjuk a

$$P(1 + t) = C_i(1) - C_i(0) \tag{1.8}$$

egyenlőséget. Mivel a  $P$  árfüggvény konkáv, ezért  $P(t) + P'(t) \geq P(1 + t)$ , amiből figyelembe véve, hogy  $P'(t) < P'(0)$ , az (1.7) és az (1.8) egyenlőség fennállnak. Ebből közvetlenül adódik a lemma állítása.  $\square$

A következő tétel a nulla összkínálat melletti határár és határköltségek viszonya alapján ad meg egy elégséges feltételt a  $NEP$  létezésére.

**1.19. tétel** (Forgó (1995)). *Ha  $C_i'(0) \leq -P'(0)$  minden  $i \in N$ -re, akkor a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy  $NEP$ -je.*

*Bizonyítás.* Mivel minden költségfüggvény monoton növekvő, ezért  $C_i(1) - C_i(0) > 0$ . Így a  $-C_i'(0) - P'(0) \geq 0$  egyenlőtlenségből következik, hogy (1.6) nem állhat fenn, ami viszont az 1.18. lemma miatt szükséges ahhoz, hogy  $\varphi_i(\cdot, t)$ -nek több maximumpontja legyen. Így az 1.16. tétel szerint a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy  $NEP$ -je.  $\square$

Egy másik elégséges feltételt kapunk, ha a költségfüggvények inflexiós pontjának elhelyezkedését korlátozzuk.

**1.20. tétel** (Forgó (1995)). *Ha minden  $i \in N$  -re az  $u_i$  inflexiós pontra fennáll az*

$$u_i < \frac{P'(0)}{C'''(0)} \quad (1.9)$$

*egyenlőtlenség, akkor a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.*

*Bizonyítás.* Az (1.6) egyenlőtlenséget, amely szükséges ahhoz, hogy a  $\varphi_i(\cdot, t)$ -nek több maximumpontja legyen, átrendezhetjük a következő módon

$$C_i(1) - C_i(u_i) + C_i(u_i) - C_i(0) - C'_i(0) - P'(0) \leq 0 . \quad (1.10)$$

Mivel  $C_i$  konkáv a  $[0, u_i]$  intervallumon és konvex az  $(u_i, 1]$  intervallumon, ezért

$$C_i(1) - C_i(u_i) \geq (1 - u_i)C'_i(u_i)$$

$$C_i(u_i) - C_i(0) \geq u_i C'_i(u_i) .$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket felhasználva kapjuk (1.10)-ből az alábbi egyenlőtlenséget

$$C'_i(u_i) - C'_i(0) - P'(0) \leq 0 . \quad (1.11)$$

A Lagrange középérték tételből következik, hogy

$$u_i C''_i(\xi) - P'(0) \leq 0$$

valamely  $0 \leq \xi \leq u_i$  értékre. A  $C''_i$  monotonitása miatt ebből az

$$u_i C''_i(0) - P'(0) \leq 0$$

egyenlőtlenség adódik, ami ellentmond (1.9)-nek. Az 1.18. lemma az állítja, hogy ekkor a  $\varphi_i(\cdot, t)$ -nek csak egy maximumpontja van és így az 1.16. tétel szerint a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy NEP-je.  $\square$

Ezeknek az elégségességi tételeknek érdekes következménye van a költségfüggvény alakjára. Az 1.20. tétel következménye, hogy ha minden  $i \in N$ -re  $2P'(0) > C_i'''(0)$ , akkor ha a költségfüggvény konkáv része nem terjed túl a termelési kapacitás felén, a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy  $NEP$ -je.

Ha minden  $i \in N$  -re  $2P'(0) \leq C_i'''(0)$ , akkor az 1.15. tétel biztosítja a  $NEP$  létezését. Nem tudunk semmit mondani arról, ha bizonyos vállalatok esetén az egyik irányú, mások esetében pedig a másik irányú egyenlőtlenség áll fenn. Ez persze nem fordulhat elő a szimmetrikus esetben, vagyis, ha minden vállalatnak ugyanaz a költségfüggvénye. A  $NEP$  létezése szempontjából ekkor csak úgy lehet baj, ha az inflexiós pont az  $(\frac{1}{2}, 1]$  intervallumba esik.

A vállalatok a termelési lehetőségeiket tekintve szimmetrikusak. Ez teszi lehetővé, hogy adjunk egy olyan elégséges feltételt, amely az iparágot alkotó vállalatok számára vonatkozik.

**1.21. tétel** (Forgó (1995)). *Ha  $P(1) > C_i'(0)$  minden  $i \in N$ -re, akkor van olyan  $n_0 \geq 2$  vállalatszám, hogy a  $G$  oligopólium játéknak van legalább egy  $NEP$ -je minden  $2 \leq n \leq n_0$  esetében.*

*Bizonyítás.* Figyelembe véve, hogy a  $P$  árfüggvény és a  $P^{-1}$  keresleti függvény is monoton, könnyű látni, hogy ha

$$n < P^{-1}(C_i'(0)) + 1, \quad (1.12)$$

akkor (1.7) nem állhat fenn és ezért a  $\varphi_i(\cdot, t)$  profitfüggvénynek csak egy maximuma van, amiből az 1.16. tétel szerint következik, hogy van legalább egy  $NEP$ . Az (1.12) egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha

$$P^{-1}(C_i'(0)) > 1,$$

ami ekvivalens a tételben megfogalmazott feltétellel. Az  $n_0$  küszöbszám létezését az (1.12) egyenlőtlenség garantálja. □

A feltétel szavakban azt jelenti, hogy ha az iparág teljes termelését egy vállalat adja, akkor az ár legyen nagyobb, mint 0 termelésnél a határkötség. Általános tanulságként megállapíthatjuk, hogy még nemlineáris árfüggvény esetén sem szükséges a *NEP* létezéséhez a költségek konvexitása, igen széles költségfüggvény osztályok is "kellemesek" ebből a szempontból.

Valamiért azért kitüntetett szerep jut a konvex költségfüggvényeknek. Ezt világítja meg az alábbi tétel. Csak az  $n = 2$  esettel (duopóliumokkal) foglalkozunk. A modell lényegében változatlan, azzal a kivétellel, hogy általános árbevétel függvénnyel számolunk, az árbevétel nem feltétlenül mennyiség szer egységár, akár mennyiségi diszkontár is megengedett. Tehát az (általánosított)  $G$  duopólium játék

$$G = \{[0, 1], [0, 1]; f_1, f_2\}$$

$$f_i(x_1, x_2) = R_i(x_1, x_2) - C_i(x_i), \quad x_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2,$$

ahol  $R_i: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  az árbevétel (revenue) függvény,  $C_i$  a költségfüggvény.  $R_i(x_1, x_2)$  az árbevétel, amit az  $i$  vállalat ér el akkor, ha a vállalatok termelése  $(x_1, x_2)$ . Az alábbi tétel egy szükséges feltételt ad a költségfüggvény alakjára.

**1.22. tétel** (Forgó (1995)). *Ha a  $G$  duopólium játéknak minden konkáv árbevétel függvény mellett van *NEP*-je, akkor a költségfüggvény konvex*

Ez a tétel Joó (1986) egy kevésbé ismert tételének a következménye.

**1.23. tétel** (Joó (1986)). *Legyenek  $I_1, I_2$  az  $\mathbb{R}$  zárt intervallumai,  $f_1, f_2: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Ha bármely  $g_1, g_2: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényre, amelyek közül  $g_1$  az első változójában,  $g_2$  a második változójában konkáv, miközben a másik változót rögzítjük, a*

$$G = \{I_1, \dots, I_2; f_1 + g_1, f_2 + g_2\}$$

*játéknak van *NEP*-je, akkor  $f_1$  az első változójában,  $f_2$  a második változójában konkáv, ha a másik változót rögzítjük.*

Valóban, ha  $f_i = -C_i, g_i = R_i$   $i = 1, 2$ , akkor az 1.23. tételből azonnal következik az 1.22. tétel állítása. Itt a  $C_i$  költségfüggvények akár a másik vállalat termelési volumenétől is függhetnének, nem csak a sajátjuktól. Ekkor azt lehetne állítani, hogy az 1.23. tétel feltételei mellett a vállalatok költségfüggvénye konvex a másik vállalat termelését rögzítettnek véve. Nyitott kérdés, hogy ez a tétel kiterjeszthető-e oligopóliumokra és/vagy "mennyiség  $\times$  egységár" típusú árbevétel függvényekre. A kritikus lépés Joó tételének általánosítása lenne kettőnél több játékosra, ami azonban nem tűnik könnyűnek.

### 1.3. Kétfüggvényes minimax tételek

A játékelmélet első komoly eredménye Neumann János nevéhez fűződik. Úttörő munkájában, von Neumann (1928) egy egyensúlyi egzisztencia tételt bizonyított kétszemélyes zérus-összegű játékokra. A játékosztály, amire ez vonatkozik tartalmazza a mátrixjátékokat (véges, kétszemélyes zérusösszegű játékok kevert bővítése), amely a Nash által vizsgált véges játékok kevert bővítésének is speciális esete. Ez az egzisztencia tétel egy minimax tétel formájában is felírható. Nézzük ezt a problémát egy kicsit általánosabban.

Legyenek  $X, Y$  nem üres halmazok és  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  egy valós értékű függvény. Nagyon könnyű igazolni, hogy

$$\sup_X \inf_Y f \leq \inf_Y \sup_X f. \quad (1.13)$$

Az igazán érdekes kérdés, hogy milyen feltételeket kell tenni az  $X, Y$  halmazokra és az  $f$  függvényre, hogy (1.13)-ban az egyenlőtlenséget egyenlőségre cserélhessük. Neumann Jánossal kezdődően óriási mennyiségű dolgozat foglalkozott a témával. Az így keletkezett tételeket (egyfüggvényes) minimax tételeknek nevezik. Ezeknek a tételeknek nagyon sok alkalmazása van az optimumszámításban, döntéselméletben, játékelméletben, statisztikában és még sok más területen. Simons (1995) cikke kiváló áttekintést ad a témaköréről.

Az egyfüggvényes minimax tételek egy érdekes általánosítása a következő. Vezessünk be egy másik  $g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt és tegyük fel, hogy  $f \leq g$ . A kérdés az, hogy milyen feltételek mellett áll fenn a következő egyenlőtlenség:

$$\inf_Y \sup_X f \leq \sup_X \inf_Y g . \quad (1.14)$$

Világos, hogy ha  $f = g$  és (1.14) teljesül, akkor (1.13)-ban egyenlőség van. Mivel (1.14)-ben két függvény szerepel, ezért azokat a tételeket, amelyek az  $X, Y, f, g$ -re tett bizonyos feltételek mellett az (1.14) egyenlőtlenség fennállását mondják ki, kétfüggvényes minimax tételeknek nevezik.

Hogyan lehet alkalmazni a kétfüggvényes minimax tételeket a játékelméletben? Ennek egy egyszerű módja, Forgó (1999) a következő. Legyen a  $G$  egy  $n$ -személyes játék normál formában:

$$G := \{S_1, \dots, S_n, f_1, \dots, f_n\}.$$

Jelöljük a stratégiaprofilok halmazát  $S := \prod_{i=1}^n S_i$ -el és definiáljuk az  $A: S \rightarrow \mathbb{R}$  aggregátor függvényt a szokásos módon

$$A(x, y) := f_1(x_1, y_2, \dots, y_n) + \dots + f_n(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) , \quad x, y \in S .$$

Az 1.9. lemma szerint annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy  $y^* \in S$  a  $G$  egy  $NEP$ -je legyen az, hogy a

$$A(x, y^*) \leq A(y^*, y^*)$$

egyenlőtlenség fennálljon minden  $x \in S$ -re.

Tegyük fel, hogy van egy olyan  $B: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely kielégíti a

$$A(x, y) + B(y, x) \leq A(y, y) + B(x, x) \quad (1.15)$$

egyenlőtlenséget minden  $x, y \in S$ -re.

Definiáljuk az  $f, g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket a következő képpen

$$f(x, y) := A(x, y) - A(y, y) ,$$

és

$$g(x, y) := B(x, x) - B(y, x) .$$

(1.15) miatt az  $f \leq g$  egyenlőtlenség fennáll  $S^2$ -en. Tegyük fel, hogy az alábbi típusú kétfüggvényes minimax egyenlőtlenség teljesül, vagyis

$$\min_{y \in S} \sup_{x \in S} f(x, y) \leq \sup_{x \in S} \inf_{y \in S} g(x, y) . \quad (1.16)$$

Ekkor van olyan  $y^* \in S$ , hogy

$$A(x, y^*) \leq A(y^*, y^*) \quad (1.17)$$

fennáll minden  $x \in S$ -re, vagyis  $y^*$  a  $G$  egy  $NEP$ -je. Ez azért van, mert  $g(x, x) = 0$  minden  $x \in S$ -re és így

$$\sup_{x \in S} \inf_{y \in S} g(x, y) \leq 0 ,$$

amiből az következik, hogy van olyan  $y^* \in S$ , hogy

$$\sup_{x \in S} f(x, y) \leq 0 ,$$

ami (1.17)-tel ekvivalens.

Íly módon a kétfüggvényes minimax tételeket potenciálisan fel lehet használni játékelméleti egzisztencia tételek bizonyítására. Többféle technika van kétfüggvényes minimax tételek bizonyítására. Mint szinte mindenütt a matematikában (és más tudományágakban is) szeretjük az elemi bizonyításokat. Ezekre itt is van lehetőség. Persze az elemi bizonyítás nem jelenti azt, hogy egyszerű, vagy rövid, hanem azt, hogy csak elemi eszközöket használunk a bizonyításhoz. Erre jó példa a következő tétel.

A tétel megfogalmazásához szükségünk van az "átlagoló függvény" definíciójára.

Egy  $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényt átlagoló függvénynek (averaging function) nevezünk, ha mindkét változójában növekvő, valamint

$$\rho(\lambda, \lambda) = \lambda ,$$

és

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \min\{\lambda, \mu\} < \rho(\lambda, \mu) < \max\{\lambda, \mu\} .$$

Könnyű látni, hogy pl. a súlyozott számtani átlag függvény eleget tesz a fenti feltételeknek.

**1.24. tétel.** *(Forgó és Joó (1998)) Legyenek  $\rho_1$  és  $\rho_2$  átlagoló függvények,  $X$  és  $Y$  nem üres halmazok,  $f, g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , olyan függvények, amelyekre fennállnak a következő feltételek:*

(i)  $f \leq g$ ,  $f$  korlátos,

(ii) bármely  $x_1, x_2 \in X$ -hez található olyan  $x_3 \in X$ , hogy

$$y \in Y \Rightarrow f(x_3, y) \geq \rho_1(f(x_1, y), g(x_2, y)) ,$$

(iii) bármely  $y_1, y_2 \in Y$ -hoz található olyan  $y_3 \in Y$ , hogy

$$x \in X \Rightarrow g(x, y_3) \leq \rho_2(f(x, y_1), g(x, y_2)) .$$

Ekkor minden  $F \subset X$  véges halmazra fennáll

$$\inf_Y \max_F f(x, y) \leq \sup_X \inf_Y g(x, y) .$$

A bizonyítás a hosszúsága miatt a függelékben található.

Ezt a tételt az évek folyamán többen általánosították, Forgó (2001), Cheng és Lin (2001), Cheng és Lin (2003), Cheng (2004), Cheng (2010), Jin et al (2006), Tang és Cheng (2008), de az általánosabb feltételek némelyike már "elég mesterkéltnak" lett, szemben az átlagoló függvény természetességével.

## 2. fejezet

# A korrelált egyensúly és általánosításai

### 2.1. Definíció és interpretáció

A Nash-egyensúly egy fontos általánosításához vezet, ha a kevert stratégia fogalmát tágabban értelmezzük. Legyen  $N = \{1, \dots, n\}$  a játékosok halmaza és  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  egy véges játék. Amikor  $G$  kevert bővítéséről beszélünk, akkor legalábbis a leggyakoribb interpretációban, feltesszük azt, hogy a játékosok egymástól függetlenül, kevert stratégiájuk által meghatározottan, véletlenszerűen választanak tiszta stratégiát (amit ebben a fejezetben általában akciónak fogunk nevezni). Ehhez mindegyik külön-külön egy véletlen mechanizmust (random device,  $RD$ ) használ. Ezek az eloszlások egy valószínűségeloszlást generálnak az  $S = \times_{i=1}^n S_i$  akcióprofilok véges halmazán. Ha félretesszük azt a feltételezést, hogy az egyéni randomizálások egymástól függetlenek, akkor bővülnek a lehetőségek: tetszőleges valószínűségeloszlást használhatunk  $S$ -en egy akcióprofil véletlenszerű kiválasztására. Ez tulajdonképpen az akcióválasztások összehangolása (korrelálása), amit úgy kell megvalósítani, hogy ne kelljen valamilyen szerződésben a játékosokat az összehangolt cselekvésre kötelezni és így a nem-kooperatív játékok körét elhagyni.

Az egyszerűség kedvéért először kétszemélyes (bimátrix) játékokat tekintünk, a

több személyre való kiterjesztés csak jelölésbeli kellemetlenségeket okozna, a lényeg ugyanaz. Jelöljük az első (sor) játékos akcióinak halmazát  $I$ -vel, a másodikét (oszlop)  $J$ -vel, az első játékos kifizetéseit  $a_{ij}$ , a másodikét  $b_{ij}$ -vel,  $i \in I, j \in J$ . Jelölje  $A = [a_{ij}]$  és  $B = [b_{ij}]$  a két játékos kifizetőmátrixát. Legyen  $p_{ij}$  az  $(i, j)$  akcióprofil választásának valószínűsége. A  $p_{ij}$  valószínűségeket rendezzük el egy  $P$  mátrixban, amely nyilván nem negatív és az elemeinek összege 1. A  $P$  mátrix köztudott. Ezt a valószínűségeloszlást és az azt reprezentáló  $P$  mátrixot korrelált stratégiának nevezzük. Ez már nem a szó eredeti értelmében vett stratégia és talán az elnevezés sem szerencsés, de általában ez használatos.

A véletlen választást, az  $RD$ -t, egy "játékvezető" működteti. Amint a választás megtörtént, a játékvezető az első játékosnak titokban, úgy, hogy a második ezt ne tudja, javasolja, hogy az  $i$  akciót játssza. Ugyanígy javasolja a második játékosnak, hogy a  $j$  akciót játssza. A korrelált stratégiát korrelált egyensúlynak hívjuk, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a játékvezető javaslatát elutasítani és valami mást játszani, mint az éppen javasolt akció, feltéve, hogy a másik játékos megfogadja a játékvezető javaslatát. Itt tulajdonképpen a játék valódi lejátszását megelőző forgatókönyvet (pre-game scenario), más néven protokollt adtuk meg. Ez a protokoll a korrelált egyensúly feltalálójának, Aumannnak (Aumann, 1974) a nevéhez fűződik.

A fentiek alapján a korrelált egyensúlyok halmaza egyenlő az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer összes megoldásainak halmazával:

$$\begin{aligned}
p_{ij} &\geq 0 & i \in I, j \in J \\
\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} &= 1 \\
\sum_{j \in J} (a_{ij} - a_{kj}) p_{ij} &\geq 0 & i, k \in I \\
\sum_{i \in I} (b_{ij} - b_{il}) p_{ij} &\geq 0 & j, l \in J
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ezt az egyenlőtlenségrendszert használhatjuk a korrelált egyensúly formális definíciójára is. Az egyenlőtlenségeket szokás "ösztönző feltételeknek" (incentive const-

raints) nevezni.

**2.1. definíció.** A  $P = [p_{ij}]$  valószínűségeloszlást a  $G = (A, B)$  bimátrix játék korrelált egyensúlyának (CE) nevezzük, ha kielégíti a (2.1) egyenlőtlenségrendszert.

A lineáris egyenlőtlenségrendszerek elméletéből ismert, hogy a megoldásai konvex halmazt alkotnak. Így a korrelált egyensúlyok konvex lineáris kombinációi is korrelált egyensúlyok. Ez a tulajdonság nyilván nem igaz a NEP-ekre.

Vezessük be a következő jelölést minden  $i \in I$ -re és  $j \in J$ -re:

$$p_i = \sum_{j \in J} p_{ij}, \quad p_j = \sum_{i \in I} p_{ij}.$$

Feltéve, hogy  $p_i$  és  $p_j > 0$ , a (2.1) egyenlőtlenségeit végigoszthatjuk velük és az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} (a_{ij} - a_{kj}) \frac{p_{ij}}{p_i} &\geq 0 & i, k \in I \\ \sum_{i \in I} (b_{ij} - b_{il}) \frac{p_{ij}}{p_j} &\geq 0 & j, l \in J. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A  $\frac{p_{ij}}{p_i}$  annak a valószínűsége, hogy a második játékos a  $j$  akcióját játssza, feltéve, hogy az első az  $i$  akcióját, és így tekinthető az első játékos vélekedésének a második játékos akcióválasztásáról. A (2.2) egyenlőtlenségek azt fejezik ki tehát, hogy mindkét játékos akcióválasztása maximalizálja a saját várható kifizetését adott vélekedések mellett, ami maga a bayesi racionalitás, Aumann (1987).

A korrelált egyensúly valóban általánosítása a Nash-egyensúlynak, amit a következő egyszerűen igazolható tételben fogalmazunk meg.

**2.2. tétel** (Aumann (1974)). Ha  $(x, y)$  a  $G = (A, B)$  bimátrix játék NEP-je, akkor a  $p_{ij} = x_i y_j$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$  korrelált stratégia CE. Ha viszont  $p_{ij}$  egy olyan CE, amelyre fennáll, hogy  $p_{ij} = u_i v_j$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$  valamely  $u, v$  valószínűségi vektorokra (vagyis a  $p_{ij}$  valószínűségekből összeállított  $P$  mátrix rangja 1), akkor az  $(u, v)$  stratégiaprofil egy NEP.

A fenti tétel és a 2.1. definíció egyszerű következménye, hogy a  $NEP$ -ek konvex burka része a korrelált egyensúlyok halmazának.

**2.3. példa.** Tekintsük a „gyáva nyúl” (game of chicken), Forgó et al (1999) játékot a szokásos autós interpretációval, amelyben a kifizetőfüggvények a következők ( $N$ : nem tér ki,  $K$ : kitér):

| 1-es játékos kifizetései |     |     | 2-es játékos kifizetései |     |     |
|--------------------------|-----|-----|--------------------------|-----|-----|
|                          | $K$ | $N$ |                          | $K$ | $N$ |
| $K$                      | 6   | 2   | $K$                      | 6   | 7   |
| $N$                      | 7   | 0   | $N$                      | 2   | 0   |

Ekkor a korrelált egyensúlyok halmazát leíró egyenlőtlenségrendszer a következő:

$$\begin{aligned}
 p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} &\geq 0 \\
 p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} &= 1 \\
 (6 - 7)p_{11} + (2 - 0)p_{12} &\geq 0 \\
 (7 - 6)p_{21} + (0 - 2)p_{22} &\geq 0 \\
 (6 - 7)p_{11} + (2 - 0)p_{21} &\geq 0 \\
 (7 - 6)p_{12} + (0 - 2)p_{22} &\geq 0 .
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A három  $NEP$  által meghatározott  $CE$ -k:

- (i)  $p_{11} = 0, p_{12} = 1, p_{21} = 0, p_{22} = 0$ ;
- (ii)  $p_{11} = 0, p_{12} = 0, p_{21} = 1, p_{22} = 0$ ;
- (iii)  $p_{11} = 4/9, p_{12} = 2/9, p_{21} = 2/9, p_{22} = 1/9$ .

Szemléletes, ha a három  $NEP$  által meghatározott  $CE$ -k  $P$  mátrixát is felírjuk:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Természetesen ezek összes konvex lineáris kombinációi is  $CE$ -k, de van olyan  $CE$  is, amely nem állítható elő a három  $NEP$  által meghatározott  $CE$ -k konvex lineáris kombinációjaként. Könnyű látni, hogy például a

$$(iv) \quad p_{11} = 1/3, p_{12} = 1/3, p_{21} = 1/3, p_{22} = 0,$$

vagy mátrix formában:

$$(iv) \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$CE$  (kielégíti a (2.3) egyenlőtlenség rendszert!) ilyen.

A  $CE$ -t nemcsak bimátrix játékokra, hanem akárhány személyes véges játékokra is lehet definiálni, mint azt a későbbiekben meg is fogjuk tenni. Sőt, végtelen játékokra is, de ezzel nem nagyon foglalkozunk. A  $CE$  itt is egy eloszlás a játék lehetséges kimenetelein. Az interpretáció teljesen ugyanaz: a játékvezető kisorsol egy akció  $n$ -est, majd minden játékosnak titokban javasolja, hogy játssza a kisorsolt akciót. Ekkor egyetlen játékos sem tudja javítani a várható kifizetését azzal, hogy eltér a játékvezető által javasolt akciótól. A bayesi interpretáció is ugyanaz, mint a kétszemélyes esetben.

A  $CE$ -k halmaza sokkal egyszerűbb szerkezetű, mint a  $NEP$ -eké: egy konvex politóp. Nincs is szükség semmilyen fixpont tételre a  $CE$  létezésének bizonyítására, a lineáris programozás dualitás tétele (vagy ezzel ekvivalens tétel) elegendő annak bizonyításához, hogy a  $CE$ -t definiáló egyenlőtlenségrendszernek van megoldása.

Általában végtelen sok  $CE$  létezik. Ezek közül lehet úgy választani (pl. a játékvezető választhat), hogy valamilyen célt reprezentáló függvényt maximalizálunk a  $CE$ -k halmazán és a kiválasztott  $CE$ -t majd a játékvezető implementálja egy megfelelő  $RD$  segítségével. Ha a játékosok hasznosságai összeadhatók, akkor egy ilyen cél lehet a hasznosságok összegének a maximalizálása. Az így kapott  $CE$  egyszerre valósít meg „kollektív” hasznosságot és stabilitást, abban az értelemben, hogy a kollektív „optimum” önmegvalósító (self enforcing), ha a játékosok hajlandók a játék szabályait elfogadni (azt tehát, hogy a mindenki által ismert eloszlás szerint sorsol a játékvezető és a leírt titoktartási szabályokat betartják).

A fenti gyáva nyúl példában (2.3. példa)

$$p_{11} = 1/2, p_{12} = 1/4, p_{21} = 1/4, p_{22} = 0 ,$$

vagy mátrix formában:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

az egyetlen  $CE$  amely maximalizálja a hasznosságok összegét, amiről meggyőződhetünk, ha a

$$12p_{11} + 9p_{12} + 9p_{21}$$

célfüggvényű és a (2.3) feltételrendszerű lineáris programozási feladatot megoldjuk.

A fent leírt forgatókönyvet jól megnézve láthatjuk, hogy itt tulajdonképpen egy  $E$  extenzív játékról van szó, amely a játékvezető által végrehajtott sorsolással kezdődik, majd a játékosok lépnek (választanak a saját információ halmazukban lévő akciókból). A sorjátékos  $i$  stratégiájához tartozó információ halmazát azok az akcióprofilok (az  $E$  játék fájában pontok) alkotják, amelyekben a sorjátékos az  $i$  stratégiáját játssza. Az  $E$  játékban pl. a sorjátékos egy stratégiája egy függvény, amely minden információ halmazhoz hozzárendel egy  $k \in I$  akciót. A játékvezető javaslatának követése csak egy stratégia a sok közül. Könnyen látható, hogy  $E$ -ben a "javaslatkövető" stratégiapáros  $NEP$ . Lehet azonban  $E$ -ben a javaslatkövető stratégiapáron kívül más  $NEP$  is.

Nézzük ismét a gyáva nyúl játékot:

|     | $K$    | $N$    |
|-----|--------|--------|
| $K$ | (6, 6) | (2, 7) |
| $N$ | (7, 2) | (0, 0) |

Itt az ebből felépített  $E$  extenzív játékban mindkét játékosnak négy stratégiája van, amelyeket a  $\{K, N\}$  betűkészletből két betűvel adunk meg: az első azt jelenti, hogy mit csinál a játékos, ha a játékvezető  $K$ -t, a második pedig azt, hogy mit,

ha a játékvezető  $N$ -et javasol. Tehát a négy stratégia:  $KK$ ,  $KN$ ,  $NK$ ,  $NN$ . Az első és a negyedik két "következetes" stratégia: mindegy mit javasol a játékvezető, a játékos  $K$ -t illetve  $N$ -et választ. A második az "ellenszegülő", mindkét játékos mást csinál, mint amit javasolnak, a harmadik pedig a javaslatkövető. A kifizetések a  $P$  eloszlással számolt várható értékek az  $E$ -ben választott stratégiapárosok esetében. Válasszuk  $P$ -nek a hasznosságok összegét a  $CE$ -k halmazán maximalizáló eloszlást. Láttuk, hogy ez az alábbi (mátrix formában adott)  $CE$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Könnyen kiszámolható, hogy ezt a  $CE$ -t használva az  $E$  játék normál formája a következő (a számok negyedeket jelentenek):

$$C = \begin{bmatrix} & KK & NK & KN & NN \\ KK & (24, 24) & (12, 27) & (20, 25) & (8, 28) \\ NK & (27, 12) & (9, 9) & (20, 10) & (2, 7) \\ KN & (25, 20) & (10, 20) & (21, 21) & (6, 21) \\ NN & (28, 8) & (7, 2) & (21, 6) & (0, 0) \end{bmatrix}$$

A tiszta stratégiák halmazán három  $NEP$  van: a javaslatkövető  $(KN, KN)$  és az aszimmetrikus következetes  $(KK, NN)$  és  $(NN, KK)$ . Nehéz olyan érvet felhozni, amelyik garantálná, hogy feltétlenül a javaslatkövető stratégiapáros fog megvalósulni.

Ezen a ponton felmerül az a gondolat, hogy menjünk még egy lépéssel tovább, és tekintsük a  $C$  játékot kiinduló játéknak és keressük ennek egy olyan  $CE$ -jét, amely maximalizálja a várható hasznosságok összegét. Az világos, hogy ha a  $(KN, KN)$  javaslatkövető stratégiapárost 1 valószínűséggel sorsoljuk ki, akkor 42 összhasznosságot kapunk. Kérdés, hogy van-e ennél jobb? A most már kicsit nagyobb  $LP$ -t megoldva azt látjuk, hogy nincs. Viszont nem csak egy megoldás van, hanem végtelen sok. Például a következő két mátrix minden konvex lineáris kombinációja is:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Igy lehetőség van arra, hogy a sok optimális  $CE$  közül egyéb, a modellben nem szereplő megfontolások alapján válasszon a játékvezető. Hogyan lehet ezt a "két-szintű" korrelált egyensúlyt interpretálni? Egy lehetséges forgatókönyv a következő, Forgó (2013). Két játékvezető van. Az első szinten a játékvezető javaslatokat tesz és a játékosok választanak  $K$  és  $N$  közül. A második szinten a játékvezető javaslatot tesz arra, hogy hogyan reagáljanak a játékosok az első szinten kapott javaslatokra. Természetesen időben a második szint javaslata jut el a játékosokhoz először, azután következik az első szint. Ha javaslatkövető magatartást választanak a játékosok a második szinten, akkor nem kötelező javaslatkövetőnek lenni az első szinten, mégis lehet maximális hasznosságösszeget realizálni. Sőt, az sem kötelező, hogy az első szinten a sorsolás egy  $CE$ -t realizáló eloszlás szerint történjék.

Mindebből az a tanulság, hogy hiába olyan vonzó a "játékvezetős" forgatókönyvvel bevezetni a korrelált egyensúlyt, mégis jobb először a korrelált egyensúlyt matematikailag definiálni az ösztönző feltételekkel és csak utána belemerülni a különböző interpretációkba.

Az interpretációk közül a leghíresebb Aumanné (Aumann, 1987), aki azt állítja, hogy a korrelált egyensúly a bayesi döntéshozatal javaslataival legjobban összhangban lévő egyensúlyi fogalom. A végletekig leegyszerűsítve: egy bayesi döntéshozó a saját várható hasznosságát maximalizálja a világ állapotairól alkotott véleménye szerint, amely vélemény a világ állapotain definiált (szubjektív) valószínűségeloszlásban ölt testet. Tekintsünk úgy a stratégiaprofilok halmazára, mint a lehetséges világállapotok halmazára és a  $P$  mátrixra, mint egy ezen definiált a priori valószínűségeloszlásra. Ha a sorjátékos ahhoz az információhoz jut, hogy a sorsolás olyan világállapotot eredményezett, amelyben az ő akciója  $i$ , akkor az oszlopjátékos vi-

lágállapotainak halmaza  $J$ , a hozzá tartozó valószínűségek pedig a posterior valószínűségek (a feltétel az, hogy az  $i$ -ik sor választása már megtörtént). Ekkor a fenti ösztönző feltételek ekvivalensek azzal, hogy a sorjátékos, miután megtudta, hogy a kisorsolt stratégiaprofilból az  $\tilde{o}$  része az  $i$ -ik, bayesi döntéshozóként maximalizálja a posterior valószínűségekkel számolt várható hasznosságát. Ha a  $P$  eloszlás  $CE$ , akkor az  $i$  stratégia optimális választás.

Aumann kritikusainak legfőbb ellenvetése, hogy furcsa világállapot az, amely döntésekből tevődik össze. Így a végén a döntés meghozatalának az eredménye egy világállapot. Összekeverednek a dolgok, a lehetséges döntések hol döntésként, hol világállapotként szerepelnek. Aumann védi álláspontját, de igazán soha sem sikerült meggyőzni kritikusait. Holott egy egyszerű "trükkal" ezt a problémát meg lehet oldani. Tekintsük a problémát, mint egy nem teljes információs játékot, amelyben mind a sor, mind az oszlopjátékos minden akciójához hozzárendelünk egy típust. Tulajdonképpen minden akcióhoz hozzárendelünk egy tulajdonságot, amit az jellemez, hogy egy ilyen tulajdonságú játékos általában így cselekszik. Például a gyáva nyúl játékban a *Kitér* cselekvéshez az *Óvatos*, a *Nem tér ki* cselekvéshez a *Merész* típus tartozhat. Így a négy világállapot:  $ÓÓ$ ,  $ÓM$ ,  $MÓ$ ,  $MM$ . Korrelált egyensúlyban a "légy önmagad", vagyis ha  $Ó$  típus vagy, akkor játsszál  $K$ -t, ha  $M$  típus vagy, akkor játsszál  $N$ -et stratégia páros bayesi Nash-egyensúly.

## 2.2. A gyenge és a puha korrelált egyensúly normál formában adott játékok esetében

A  $CE$ , noha általánosítása az  $NE$ -nek, ugyanazokkal a koncepcionális problémákkal rendelkezik, mint az  $NE$ . Egyrészt azért, mert az extenzív játékká vagy nem teljes információs játékká való átalakítás során egy kibővített játék  $NE$ -jével hozzuk összefüggésbe, másrészt Aumann interpretációját ugyanúgy nem lehet az egyéni racionalitásra és annak a köztudására visszavezetni, mint az  $NE$ -ét. Lásd bővebben

Risse (2000).

Ez persze nem azt jelenti, hogy a  $CE$  egy haszontalan általánosítása az  $NE$ -nek. Ha másért nem, akkor azért, mert így nagyobb társadalmi hasznosságot ( $SW$ : social welfare) lehet egyensúlyban, a játékvezető segítségével, a játékosok egyéni érdekei által vezérelve, nem-kooperatív környezetben megvalósítani.

Felmerült az a kérdés, hogy a  $CE$  további általánosításával lehetne-e még nagyobb  $SW$ -t elérni. A továbbiakban, hacsak nem jelezzük,  $SW$ -n automatikusan az egyes játékosok hasznosságainak (kifizetéseinek) az összegét értjük. Világos, hogy ez egyáltalán nem magától értetődő, de mivel az irodalomban az egyes egyensúlytípusok összehasonlításánál általában ezt használják, nem érdemes ettől eltérni.

Moulin és Vial (1978) tértek el először az Aumann-féle protokolltól. Csak bimátrix játékokat vizsgáltak. Nagyobb elkötelezettséget követelnek a játékosoktól: a játék lejátszása előtti fázisban dönteniük kell, hogy vakon követik-e a játékvezető javaslatát a sorsolás megtörténte után, vagy nem akarják elkötelezni magukat, amikor is nem kapnak semmilyen javaslatot, de azt csinálhatnak, amit akarnak. Valami olyasmire gondolhatunk, mint amikor valakinek döntenie kell, hogy szabad kezét adjon-e a brókerének a befektetés kiválasztásához, vagy pedig saját maga hozza meg a befektetési döntést.

Szemléletes, ha a forgatókönyvet a következőképpen képzeljük el. A játékvezető elvégzi a sorsolást az adott, közismert valószínűségeloszlás szerint. A kisorsolt akciót (illetve egy papírt, amire az akció fel van írva) beteszi az egyes játékosok számára kijelölt piros borítékba. A játékosok valamennyi akcióját, azt is, amelyik a piros borítékban van, beteszi egy fehér borítékba. A játékosok egymástól függetlenül (szimultán) választanak a piros és a fehér boríték közül. Ha egy játékos a pirosat választotta, akkor azt az akciót kell végrehajtania, ami a borítékban van. Ha a fehérét választotta, akkor szabadon választ a borítékban lévő akciók közül, vagyis az akcióhalmazából bármelyiket választhatja. A valószínűségeloszlást, amely szerint a játékvezető a sorsolást végzi, gyenge korrelált egyensúlynak (weak correlated equilibrium),  $WCE$ -nek fogjuk nevezni. Más elnevezés is ismert a szakirodalomban. Az

eredeti "egyszerű kiterjesztés" (simple extension) nem elég kifejező, ezért talán a Young (2004) által bevezetett "coarse correlated equilibrium" elnevezés a leggyakoribb.

Moulin és Vial (1978) mutattak példát arra (lásd a 2.7. példát), amikor a *WCE* nagyobb *SW*-t ad, mint bármelyik *CE*. Ugyancsak karakterizálta azokat a bimátrix játékokat, amelyeknek a *NEP*-jét lehet és amelyeket nem lehet a *WCE* segítségével Pareto-javítani. Ezeknek az eredményeknek a megértéséhez szükség van a stratégiai ekvivalencia definíciójára.

**2.4. definíció.** Az  $(A, B)$  és  $(C, D)$  bimátrix játékokat stratégiaileg ekvivalenseknek nevezzük, ha

$$x' Ay \geq x'' Ay \Leftrightarrow x' Cy \geq x'' Cy \text{ minden } x', x'' \in X\text{-re, minden } y \in Y\text{-ra}$$

és

$$x By' \geq x By'' \Leftrightarrow x Dy' \geq x Dy'' \text{ minden } y', y'' \in Y\text{-ra, minden } x \in X\text{-re,}$$

ahol  $X$  a sorjátékos,  $Y$  az oszlopjátékos kevert stratégiáinak halmaza.

Könnyű belátni, hogy stratégiaileg ekvivalens játékok *NEP* halmazai megegyeznek, ami egyébként a stratégiai ekvivalencia szokásos definíciója. Ha egy bimátrix játék stratégiaileg ekvivalens egy zéró-összegű játékkal (mátrixjátékkal), akkor stratégiaileg zéró-összegű játéknak nevezzük. Ezeknek a játékoknak több érdekes tulajdonsága van, amelyek közül jelen kontextusban csak a következő két állítás fontos számunkra.

**2.5. tétel** (Szükséges feltétel, Moulin és Vial (1978)). *Ha egy bimátrix játék stratégiaileg zéró-összegű, akkor egyetlen Pareto-domináns NEP-et sem lehet a WCE-vel Pareto-javítani.*

**2.6. tétel** (Elégséges feltétel, Moulin és Vial (1978)). *Ha  $(x, y)$  egy teljesen kevert (minden akciót pozitív valószínűséggel játszanak) NEP-je az  $(A, B)$  bimátrix játéknak, amely nem stratégiailag zéró-összegű, akkor van olyan WCE, amelyben a játékosok kifizetései szigorúan Pareto-javítják az  $(x, y)$ -hoz tartozó kifizetéseket.*

Persze akkor is lehet javítani a WCE-vel, ha az elégséges feltétel nem teljesül. Ezt mutatja Moulin és Vial (1978) következő példája.

**2.7. példa.** Tekintsük a következő bimátrix játékot:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ennek egy NEP-je van: az első játékos az első sort, a második az első oszlopot választja és a kifizetés  $(3, 3)$ . Könnyen igazolható, hogy a

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

egy WCE, amely a  $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$  várható kifizetést adja és ez szigorúan Pareto-dominálja a  $(3, 3)$  kifizetést.

Felmerül a kérdés, hogy nem lehet-e a CE protokollját másképpen megváltoztatni úgy, hogy továbbra is a CE általánosítását kapjuk, de olyan játékok esetében is (nem mindegyiknél természetesen) el tudunk érni Pareto-jobb kifizetéseket, amelyeknél a WCE ezt nem tudja megtenni. A következő protokoll alapján Forgó (2010) a CE egy új általánosítását vezette be, amelyet "puha korrelált egyensúlynak" (soft correlated equilibrium, SCE) nevezett. A protokoll leírásánál célszerű ismét a "borítékos" interpretációt használni a szemléletesség kedvéért.

Most is azzal kezdünk, hogy a játékvezető egy köztudott valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy akcióprofil. Minden játékos számára a saját piros borítékjába teszi

a kiválasztott akciót. A fehér borítékjába a többi akciót. Vegyük észre a *WCE*-től való eltérést: míg ott minden akciót elhelyezett a játékvezető a fehér borítékba, itt a kiválasztott (piros borítékban lévő) akciót nem. Innentől kezdve a protokoll ugyanaz. A játékosok szimultán választanak a piros és a fehér borítékok közül. A valószínűségeloszlást *SCE*-nek nevezzük, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a fehér borítékot választani, feltéve, hogy az összes többi a pirosat választotta. Másképpen: annak a kibővített játéknak, amelyik azzal kezdődik, hogy a játékosok döntenek, hogy elkötelezik-e magukat a játékvezetőnek való feltétlen engedelmesség mellett, *NEP*-je az a stratégiaprofil, amikor mindenki elkötelezi magát.

Nézzük meg, hogy miképpen tudjuk jellemezni a háromféle korrelált egyensúlyt, a *CE*-t, a *WCE*-t és az *SCE*-t egy lineáris egyenlőtlenségrendszer segítségével  $n$ -személyes véges játékok esetében. Az egyenlőtlenségek az úgy nevezett "ösztönző feltételek", amelyek annak a várható hasznát, hogy egy játékos engedelmeskedik a játékvezetőnek, hasonlítja össze azzal, amikor ezt nem teszi meg, mindig feltéve, hogy a többi játékos követi a játékvezető utasításait.

Legyen  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  egy  $n$ -személyes játék normál formában, az  $S_1, \dots, S_n$  véges akcióhalmazokkal és az  $f_1, \dots, f_n$  kifizetőfüggvényekkel.

Az ösztönző feltételeket az  $i$  rögzített játékosra írjuk fel és az egyszerűség kedvéért ezt az indexet elhagyjuk ott, ahol ez nem okoz félreértést.

A következő jelöléseket használjuk:

- $N = \{1, \dots, n\}$ : a játékosok halmaza.
- $I = \{1, \dots, m\}$ : az  $i$  játékos akcióhalmaza, az akciókat az akciók indexei reprezentálják.
- $S_-$ : az  $i$  játékos kivételével az összes többi játékos akcióhalmazainak Descartes szorzata (a csonka akcióprofilok halmaza).
- $s_- \in S_-$ : egy csonka akcióprofil.
- $(j, s_-)$ ,  $j \in I$ ,  $s_- \in S_-$ : egy (teljes) akcióprofil.

- $S = \{(j, s_-) : j \in I, s_- \in S_-\}$ : a (teljes) akcióprofilok halmaza.
- $f(j, s_-)$ : az  $i$  játékos kifizetése, ha ő a  $j$  akciót játssza, a többiek pedig  $s_-$ -t.
- $p$ : egy valószínűségeloszlás  $S$ -en.
- $p(j, s_-)$ : az a valószínűség, amelyet a  $p$  eloszlás a  $(j, s_-)$  akcióprofilhoz rendel.

A  $CE$  olyan  $p$  valószínűségeloszlás, amely minden  $i$ -re, ( $i \in N$ ) kielégíti az alábbi ösztönző feltételt

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-)$$

minden  $j, k \in I$ -re, vagy ami ezzel ekvivalens

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-) \frac{p(j, s_-)}{\sum_{s_- \in S_-} p(j, s_-)} \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-) \frac{p(j, s_-)}{\sum_{s_- \in S_-} p(j, s_-)}$$

minden  $j, k \in I$ -re, feltéve, hogy  $\sum_{s_- \in S_-} p(j, s_-) > 0$ . Itt a baloldalon a kifizetés várható értéke szerepel akkor, ha az  $i$  játékos engedelmeskedik a játékvezetőnek, a jobboldalon pedig annak a kifizetésnek a várható értéke, ha a  $k \in I$  stratégiát választja függetlenül attól, hogy mi a játékvezető javaslata.

A  $WCE$  olyan  $p$  valószínűségeloszlás, amely kielégíti minden  $i$  ( $i \in N$ ) játékos

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-)$$

ösztönző feltételeit minden  $k \in I$ -re. A baloldalon annak a kifizetésnek a várható értéke van, amit az  $i$  játékos kap, ha elkötelezi magát, hogy mindig végrehajtja a játékvezető javaslatát, a jobboldalon pedig az a várható kifizetés szerepel, amelyet az  $i$  játékos akkor kap, ha nem kötelezi el magát és a  $k \in I$  akciót választja. Világos, hogy a  $WCE$  általánosítása a  $CE$ -nek, hiszen ösztönző feltételei a  $CE$  bizonyos ösztönző feltételeinek összegzésével álltak elő.

Az  $SCE$  definiálásához kell némi előkészület. Egy rögzített  $j \in I$ -re tekintsük az alábbi feltételeket

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(l, s_-)p(j, s_-)$$

minden  $l \in I$ -re, és nevezzük ezeket  $j$ -halmaznak. Világos, hogy a  $j$ -halmazok egyesítése minden  $j \in I$ -re pontosan a  $CE$  ösztönző feltételeinek a halmazát adja az  $i$  játékosra. A  $WCE$  ösztönző feltételeit az  $i$  játékosra úgy kapjuk, hogy minden  $j$ -halmazból a  $k$  indexű feltételeket összegezzük,  $k \in I$ .

Ugyanezt tesszük az  $SCE$  esetében, azzal a különbséggel, hogy a  $j$ -halmazból más feltételeket adunk össze, mint a  $WCE$  esetében. Tekintsük a következő halmazt

$$K = \prod_{j=1}^m (I \setminus \{j\}) .$$

A  $K$  elemeit megengedett (index)halmazoknak nevezzük. Például, ha  $m = 3$ , akkor  $(2, 3, 2)$  megengedett, míg  $(1, 3, 2)$  nem megengedett. Az  $SCE$  ösztönző feltételeit az  $i \in N$  játékos számára az alábbi egyenlőtlenségekkel definiáljuk

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-)p(j, s_-) \quad (2.4)$$

minden  $(k_1, \dots, k_m)$  megengedett halmazra.

Valóban, az  $SCE$  ösztönző feltételei az  $i$  játékos számára  $m$  egyenlőtlenség összes lehetséges összegei, amelyek mindegyikét egy-egy  $j$ -halmazból vesszük azzal a megkötéssel, hogy azokat az egyenlőtlenségeket, amelyeket a  $WCE$  definiálásakor használtunk, nem választhatjuk. Már a  $WCE$  és az  $SCE$  definíciójából is látszik, hogy a  $CE$  két különböző általánosításáról van szó és ezek egyike sem általánosítása a másiknak. Ezt az állítást a későbbiekben egy példával is alátámasztjuk.

Az  $SCE$  ösztönző feltételeinek száma az  $i$  játékosra  $(m - 1)^m$ . Ez nagyon sok, összehasonlítva azzal, hogy ugyanez a  $WCE$  esetében  $m$ , míg a  $CE$  esetében  $m^2$ . Ezek között az egyenlőtlenségek között sok redundáns van, amelyek kiküszöbölése nehéz feladat, de még a redundancia megszüntetése után is túl sok marad ahhoz, hogy nagy  $m$  esetében bármit is lehessen vele kezdeni. A probléma azonban megoldható. Lehet ugyanis egy olyan ekvivalens egyenlőtlenségrendszer definiálni, amely

esetében a feltételek száma csak kvadratikusan növekszik  $m$  növekedésével (Fülöp János ötlete).

**2.8. tétel** (Forgó (2010)). *Minden  $i \in N$  játékos esetében van olyan lineáris egyenlőtlenségrendszer, amelynek mérete (a változók és feltételek száma) kvadratikusan nő az akciók számának növekedésével és az általa meghatározott lehetséges tartomány alkalmas vetítése megegyezik az SCE-k halmazával.*

*Bizonyítás.* A (2.4)-ben felírt ösztönző feltételek akkor és csak akkor teljesülnek, ha az alábbi egyenlőtlenség fennáll

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-) p(j, s_-) \geq \max_{(k_1, \dots, k_m) \in K} \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-) p(j, s_-) .$$

Kis számolással egyszerűen belátható, hogy ez ekvivalens az alábbival

$$\max_{(k_1, \dots, k_m) \in K} \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-) p(j, s_-) = \sum_{j \in I} \max_{l \in I \setminus \{j\}} \sum_{s_- \in S_-} f(l, s_-) p(j, s_-) .$$

Így levonhatjuk azt a következtetést, hogy (2.4) akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-) p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \max_{l \in I \setminus \{j\}} \sum_{s_- \in S_-} f(l, s_-) p(j, s_-)$$

fennáll, ami viszont ekvivalens a

$$0 \geq \sum_{j \in I} \max_{l \in I \setminus \{j\}} \sum_{s_- \in S_-} (f(l, s_-) - f(j, s_-)) p(j, s_-) \quad (2.5)$$

egyenlőtlenséggel. Bevezetve az  $u_1, \dots, u_m$  változókat, (2.5) az alábbi formában írható:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} u_j &\leq 0 \\ -u_j + \sum_{s_- \in S_-} (f(l, s_-) - f(j, s_-)) p(j, s_-) &\leq 0 \text{ minden } j \in I, l \in I \setminus \{j\}\text{-re} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ami ekvivalens az  $i$  játékos ösztönző feltételeivel. Az ekvivalencia itt azt jelenti, hogy minden  $SCE$ -hez találhatók olyan  $u_1, \dots, u_m$  számok, hogy a  $p$  változókkal együtt kielégítik a (2.6) egyenlőtlenségrendszer, és a (2.6) egyenlőtlenségrendszer minden megoldásából kapunk egy  $SCE$ -t az  $u_1, \dots, u_m$  változók elhagyásával.

Ezzel a transzformációval a változók száma növekedett  $m$ -el, de a feltételek száma  $m(m-1)$ -re csökkent, ami  $m$ -nek kvadratikus függvénye.

Ugyanez a transzformáció végrehajtható minden  $i \in N$ -re, a lineáris egyenlőtlenségrendszer mérete továbbra is kvadratikus függvénye marad az akciók számának, ha a játékosok száma rögzített.  $\square$

Mivel az  $SCE$  (és a  $WCE$ ) fogalomalkotásnak a legfőbb célja az, hogy "jobb" várható kifizetéseket érjünk el, mint a  $CE$ -vel, az általánosítás erejét azzal lehet demonstrálni, hogy mutatunk olyan fontos játékosztályokat, ahol az  $SCE$  jobban teljesít.

Nevezzünk egy  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  játékot binárisnak, ha minden játékosnak csak két akciója van. Könnyű látni, hogy a  $WCE$  és a  $CE$  egybeesik bináris játékok esetében, hiszen az ösztönző feltételeik ugyanazok. Ahhoz, tehát, hogy a  $WCE$ -nek esélye legyen arra, hogy javítson a  $CE$  által elérhető várható kifizetéseken, legalább egy játékos esetében legalább három akcióra van szükség. Ugyanakkor az  $SCE$ -k halmaza nem lehet szűkebb, mint a  $WCE$ -k halmaza, amint azt az alábbi egyszerű tétel kimondja.

**2.9. tétel** (Forgó (2010)). *Bináris játékokban minden  $WCE$  egyúttal  $SCE$  is.*

*Bizonyítás.* Legyen  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  egy bináris játék és jelöljék az 1 és 2 indexek az  $i$  játékos akcióit. Ekkor, a definíció szerint, a  $WCE$  ösztönző feltételei az  $i$  játékos számára a következők:

$$\sum_{s_- \in S_-} f(2, s_-)p(2, s_-) - \sum_{s_- \in S_-} f(1, s_-)p(2, s_-) \geq 0$$

és

$$\sum_{s_- \in S_-} f(1, s_-)p(1, s_-) - \sum_{s_- \in S_-} f(2, s_-)p(1, s_-) \geq 0 .$$

Két akció esetén csak egy megengedhető halmaz van az  $i$  játékos számára, mégpedig a  $(2, 1)$ . Ezért csak egyetlen ösztönző feltétel van

$$\begin{aligned} & \sum_{s_- \in S_-} f(2, s_-)p(2, s_-) - \sum_{s_- \in S_-} f(1, s_-)p(2, s_-) \\ & + \sum_{s_- \in S_-} f(1, s_-)p(1, s_-) - \sum_{s_- \in S_-} f(2, s_-)p(1, s_-) \geq 0 , \end{aligned}$$

ami a  $WCE$  két ösztönző feltételének az összege.  $\square$

A következő tétel egy elégséges feltételt ad arra, hogy az  $SCE$  minden játékos számára jobb legyen, mint egy Pareto-dominált tiszta  $NEP$  ( $PNEP$ ).

**2.10. tétel** (Forgó (2010)). *Ha  $s^*$  egy szigorúan Pareto-dominált  $PNEP$  egy  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$  véges játékban, akkor van olyan  $SCE$ , amely szigorúan Pareto-dominálja  $s^*$ -ot.*

*Bizonyítás.* Legyen  $s^*$  egy  $PNEP$  és  $t$  egy olyan akcióprofil, amelyre  $f_i(t) > f_i(s^*)$  fennáll minden  $i \in N$ -re. Tekintsük azt a  $C$  korrelált stratégiát, amelyben a játékvezető az  $s^*$  akcióprofil  $\alpha$  valószínűséggel, a  $t$  akcióprofil  $1 - \alpha$ , ( $0 < \alpha < 1$ ) valószínűséggel javasolja és minden más akcióprofil  $0$  valószínűséggel. Nyilvánvalóan  $C$  nagyobb várható kifizetést ad, mint  $s^*$ . Ezért elég azt megmutatnunk, hogy ha  $\alpha$  kellően közel van 1-hez, akkor ez a stratégia egy  $SCE$ .

A (2.4) alapján ahhoz, hogy  $C$  egy  $SCE$  legyen szükséges, hogy a következő egyenlőtlenség teljesüljön minden  $i \in N$ -re

$$(1 - \alpha)f_i(t) + \alpha f_i(s^*) \geq (1 - \alpha)f_i(k_j, t_-) + \alpha f_i(k_l, s_-^*) \quad (2.7)$$

minden  $k_j \neq t_i$ ,  $k_l \neq s_i^*$ -re. A (2.7) átrendezésével kapjuk az alábbi

$$\alpha(f_i(s^*) - f_i(k_l, s_-^*) + f_i(k_j, t_-) - f_i(t)) \geq f_i(k_j, t_-) - f_i(t) . \quad (2.8)$$

Mivel  $s^*$  egy *PNEP*, ezért  $f_i(s^*) - f_i(k_l, s_-^*) \geq 0$ . A (2.8) egyenlőtlenség triviálisan fennáll bármely  $\alpha \leq 1$ -re, ha  $\alpha$  együtthatója nem pozitív. Ha pozitív, akkor minden olyan  $\alpha$ -ra, amely kielégíti az alábbi egyenlőtlenséget

$$\alpha \geq \frac{f_i(k_j, t_-) - f_i(t)}{f_i(s^*) - f_i(k_l, s_-^*) + f_i(k_j, t_-) - f_i(t)}$$

a (2.8) egyenlőtlenség fennáll. Mivel véges sok megengedett halmaz (jelen esetben akciópáros) és játékos van, a tétel állítása következik.  $\square$

Hogyan interpretálhatjuk az *SCE*-t általában? (Az egyes konkrét játékokban konkrétabb értelmezést is fogunk látni) A *CE* egyik fontos előnyös tulajdonsága, hogy két irányból is megközelíthetjük. Az egyik nagy előnye (ami egyébként minden korrelációnak a legfontosabb célja), hogy olyan várható kifizetéseket tud biztosítani, ami korreláció nélkül nem érhető el és ezt többé-kevésbé önmegvalósító (self-enforcing) módon teszi. A másik, mint azt már korábban említettük is, amire először Aumann (1987) mutatott rá, hogy ha valódi bayesi szemléletű játékosok játsszák a játékot, akkor a *CE* testesíti meg legjobban ezt a döntéshozási filozófiát, amit nagyon röviden úgy lehet jellemezni, hogy a döntéshozó maximalizálja a várható kifizetését a világ állapotaihoz rendelt (szubjektív) valószínűségek használatával.

A *WCE*-t, megalkotói Moulin és Vial (Moulin és Vial, 1978) is elsősorban arra találták ki, hogy minél magasabb kifizetéseket lehessen általa elérni. Ugyanakkor viszont elveszett a bayesi interpretáció. Van azonban a *WCE*-nek egy másik interpretációja is: a *WCE*-k halmaza egybeesik az úgy nevezett Hannan-halmazzal, Hannan (1957), ami azoknak a valószínűségeloszlásoknak a halmaza, amelyekhez nem tartozik "external regret". Valóban, ha valaki elkötelezi magát arra, hogy egy adott valószínűségeloszlás szerint, aktív részvétel nélkül, rábízza magát a játékvezető választására, akkor nincs oka "sajnálni", hogy ezt miért tette és miért nem maga választott egy akciót.

Az *SCE* is ebbe a kategóriába esik, csak a szabályok változnak egy kicsit és valamilyen kényszerítő eszközre van szükség ahhoz, hogy az önálló utat választó

játékosok ne választhassák azt az akciót, amit a játékvezető kisorsolt. Konkrét játékokban sokszor természetesen adódik ilyen, mint azt a későbbiekben látni is fogjuk. Teljes joggal nevezhetnénk az *SCE*-t olyan valószínűségeloszlásnak, amelyhez nem tartozik "feltételes external regret", ahol most a feltétel azt jelenti, hogy az önálló út követésekor egy akció ki van zárva a választásból.

Egy másik interpretációban lehet az egész protokollra úgy gondolni, hogy van egy klub, és a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy belépnek-e. Tudják, hogy a klubtagság előnyökkel és hátrányokkal is járhat. Előny, hogy a sorsolás után a kisorsolt akciók csak a klubtagok számára lehetőségek, a kívül maradotoknak nem. Hátrány, hogy ha belépnek a klubba, a klub szabályzata kimondja, hogy feltétlenül engedelmeskedni kell és azt az akciót kell végrehajtani, amely ki lett sorsolva. *SCE*-ben senkinek sem érdeke a klubból kilépni, ha a többiek benn maradnak. Különböző játékokban konkrét formát ölt a "klub", a "szabályok", az "akciók" stb.

Milyen játékosok hajlandók részt venni olyan játékokban, amelyeket a *WCE* vagy az *SCE* protokollja (forgatókönyve) szerint játszanak? Azt várhatjuk, hogy a minél nagyobb várható kifizetésben érdekelt, szabálykövető, intelligens játékosok hajlandók részt venni olyan játékban, amiben megvan a lehetősége nagyobb kifizetés elérésének, amennyiben mindenki betartja a szabályokat és/vagy megvan az eszköz a szabályok betartatásának. A *WCE* és az *SCE* ebből a szempontból is hasonlóak, csak a szabályok különböznek valamennyire. A legtöbb sportágban alkalmaznak és betartatnak sokszor teljesen önkényesnek tűnő szabályokat, amelyek egyik célja, hogy a játékot érdekessé tegyék. A sport népszerűsége nem kérdőjelezhető meg.

A korreláción kívül vannak más eszközök is a hatékonyság növelésére. Az egyik legújabb experimentális kutatás, amelyet Bracht and Feltovich (Bracht és Feltovich, 2008) végzett el azt mutatja, hogy a játékosok az elvárható módon cselekszenek olyan játékokban, ahol az előzetes elkötelezettség lehetősége integráns része a játéknak és azt a célt szolgálja, hogy a várható kifizetéseket növelni lehessen. Egy másik kísérletben Cason és Sharma (Cason és Sharma, 2006) azt találta, hogy a *CE* realizálható, ha a játékosok biztosak abban, hogy mások is követik a játékvezető ajánlásait. Ez

azt sugallja, hogy a kritikus kérdés nem annyira a szabályok és a protokoll, hanem a játékosok kölcsönös bizalma. Természetesen ezt a bizalmat csak úgy lehet tesztelni, ha a szabályok és a protokoll mindenki számára világosak.

**2.11. példa.** Abból a célból, hogy a  $WCE$  és az  $SCE$  viszonyát illusztráljuk, tekintsük a következő szimmetrikus bimátrix játékot, amelyet az alábbi két mátrixszal adunk meg:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az  $SW$ -t a két játékos várható kifizetéseinek összegeként definiáljuk. Az  $SW$ -t maximalizáltuk az összes  $CE$ ,  $WCE$  és az  $SCE$  halmazain. Mivel ezek mindegyike egy konvex politóp és a várható hasznosság a valószínűségeknek lineáris függvénye, ez három  $LP$  megoldását jelentette. Az optimális megoldások mátrix formában (valószínűségeloszlások az akcióprofilok halmazán) az alábbiak:

$$CE : \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix}, \quad WCE : \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad SCE : \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az elérhető maximális várható  $SW$  (az  $LP$  feladatok optimális célfüggvényértéke):  $CE : 12$ ,  $WCE : 13$ ,  $SCE : 12.67$ .

Ebben a példában a  $WCE$  jobb eredményt ad, mint az  $SCE$ , és mindkettő jobbat, mint a  $CE$  (rosszabb nem is lehetne). A 2.9. tétel és két további példa pedig azt mutatja, hogy az  $SCE$  ad jobb eredményt, mint a  $WCE$ , igazolva azt a korábbi megjegyzésünket, hogy ezek általában nem egymás általánosításai. Ennek, a formális matematikai definíció különbségén túl, az az oka, hogy az információk struktúrájuk különböző. Az  $SCE$  esetében, amikor egy játékos úgy dönt, hogy nem igényli a játékvezető közreműködését, akkor kisebb a választási lehetősége (egy stratégiát nem választhat), de több információja van, hiszen tudja, hogy mi az, amit nem választhat

és ennek az információnak a felhasználásával meg tud határozni egy, az ismert a-priori eloszlásnál pontosabb posterior valószínűségeloszlást. A  $WCE$ -nél nagyobb a választási lehetőség, de nincs lehetőség a valószínűségeloszlás pontosítására. Az hogy mi az eredője ennek a két hatásnak, a konkrét játéktól, vagy játékosztálytól függ.

**2.12. példa.** Az  $SCE$  erejét most a fogolydilemma példáján keresztül mutatjuk be. Az élet nagyon sok területén előforduló konfliktus szituáció jól ismert. Az talán kevésbé, hogy ellenáll a korrelációnak, sem a  $CE$ , sem a  $WCE$  nem segít az egyetlen  $NEP$  kifizetésén javítani. Az előbbit egyszerű belátni, az utóbbi pedig következménye annak, hogy bináris játékokban a  $CE$  és a  $WCE$  egybeesik. A fogolydilemmát általában a "vall" ( $C$ ) és a "nem vall" ( $NC$ ) akciókkal és a  $c < b < a < d$  kifizetésekkel adják meg, amelyekből a következő bimátrix játékot állítjuk össze (itt most a két játékot együtt ábrázoljuk, minden cellában az első szám a sorjátékos, a második az oszlopjátékos kifizetése).

|      | $NC$     | $C$      |
|------|----------|----------|
| $NC$ | $(a, a)$ | $(c, d)$ |
| $C$  | $(d, c)$ | $(b, b)$ |

A játékhoz tartozó történet annyira közismert, hogy a leírást kihagyjuk. Az  $SCE$  mindig tudja javítani mindkét játékos kifizetését a 2.10. tétel következtében, de ez a tétel semmit sem mond arról, hogy mely  $SCE$ -k maximalizálják az  $SW$ -t, ami nyilván Pareto-optimális lesz.

A  $CE$ -t definiáló egyenlőtlenségek a következők:

$$\begin{aligned}
 (a-d)p_{11} + (c-b)p_{12} &\geq 0 \\
 (d-a)p_{21} + (b-c)p_{22} &\geq 0 \\
 (a-d)p_{11} + (c-b)p_{21} &\geq 0 \\
 (d-a)p_{12} + (b-c)p_{22} &\geq 0
 \end{aligned}$$

ahol minden változóra  $p_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2$  és  $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1$ . Ennek csak egyetlen megoldása van, amelynek értelmében a  $(C, C)$  akcióprofil realizálódik.

Az *SCE*-t definiáló egyenlőtlenségeket úgy kapjuk, hogy az első kettő és az utolsó kettő egyenlőtlenségeket összeadjuk:

$$(a-d)p_{11} + (c-b)p_{12} + (d-a)p_{21} + (b-c)p_{22} \geq 0$$

$$(a-d)p_{11} + (d-a)p_{12} + (c-b)p_{21} + (b-c)p_{22} \geq 0.$$

Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a  $p_{12} = p_{21} = 0$ ,  $p_{11} = \frac{b-c}{d-a+b-c}$ ,  $p_{22} = \frac{d-a}{d-a+b-c}$  megoldás egy *SCE*, ami Pareto-javítása a  $(b, b)$  *NEP* kifizetésnek. Ez történetesen maximalizálja az *SW*-t, ha  $2b \geq c+d$ . A paraméterek más értékeire más *SW*-t maximalizáló *SCE*-ket is kaphatunk. Például, ha  $2a \leq c+d$ , akkor  $p_{12} = p_{21} = 1/2$ ,  $p_{11} = 0$ ,  $p_{22} = 0$  adja a Pareto-legjobb szimmetrikus kifizetést, ami szintén jobb, mint a *NEP* kifizetése.

A másik példánk a szintén jól ismert, és már a korábbiakban példaként szereplő, "gyáva nyúl" (game of chicken) játék. A történet szinte minden játékelmélet könyvben, pl Osborne és Rubinstein (1994), Forgó et al (2006), megtalálható.

**2.13. példa.** A játékot most parametrikus formában vizsgáljuk és a következő kifizetésekkel adjuk meg bimátrix játékként (az első sor/oszlop a "kitér", a második sor/oszlop a "nem tér ki" akciókat reprezentálja, a kifizetéseknél az első szám a sor, a második az oszlopjátékos kifizetése):

$$\begin{bmatrix} (x-1, x-1) & (1, x) \\ (x, 1) & (0, 0) \end{bmatrix}$$

ahol  $x > 3$  a parameter.

Kicsit hosszadalmas, de egyszerű számolással megkaphatjuk, hogy az *SW* maximuma a *CE*-k halmazán  $\frac{4}{3}x$ , az *SCE*-k halmazán pedig  $\frac{3x-1}{2}$ . Az utóbbi minden megengedett  $x$ -re nagyobb és a kettő aránya  $x$  növekedésével monoton nő, határértéke pedig  $\frac{9}{8}$ , ha  $x \rightarrow \infty$ . Mivel ez is egy bináris játék,  $WCE = CE$  és így az *SCE* mindkettőnél jobb várható kifizetést tud biztosítani.

A *CE* és a *WCE* kiterjesztése végtelen játékokra meglehetősen könnyűnek tűnik. Vegyük például a Cournot oligopóliumot, ahogyan azt az 1.12. tételben definiáltuk.

Szinte minden marad ugyanaz, csak a valószínűségeloszlásokat az  $n$ -dimenziós egységkockán értelmezzük, a várható értéket nem szummával, hanem Stieltjes-integrállal definiáljuk és végtelen (kontinuumnyi sok) ösztönző feltételünk lesz. Ezen a területen az első érdekes eredmény Liu (1996) és Yi (1997)-től származik, akik bebizonyították, hogy az egyetlen  $CE$  egybeesik az egyetlen  $NEP$ -el és így nincs lehetőség az  $SW$  növelésére. Később Neyman (1997) bebizonyította, hogy ez igaz a potenciál játékok széles osztályára. Gerard-Varet és Moulin (1978) megmutatta, hogy bizonyos duópóliumokban a  $WCE$  tudja Pareto-javítani a  $NEP$  kifizetést. Érdekes, hogy pont a legegyszerűbb lineáris keresleti függvény/lineáris költségfüggvények esetre ezt nem lehet megtenni. Ebben az esetben Ray és Sen Gupta (2013) mutatta meg, hogy léteznek a  $NEP$ -től különböző, speciális struktúrájú  $WCE$ -k, amelyek azonban pont akkora  $SW$ -t adnak, mint az egyetlen  $NEP$ .

Az  $SCE$  értelmes kiterjesztése végtelen játékokra nem egyszerű. Itt nem elégséges az, ha csak egyetlen stratégiát (akciót) tiltunk meg, mert ennek tetszőleges környezetében van másik, "majdnem" olyan jó. Az első lépés az kell legyen, hogy a definíciót a végtelen esetre megfelelően adaptáljuk. Ez további kutatások témája lehet.

## 2.3. Puha korrelált egyensúly egyszerű, két-kiszolgálós, nem-csökkenő, lineáris torlódási játékokban

Ha különböző korrelált egyensúly koncepciók ( $CE$ ,  $WCE$ ,  $SCE$ ) "erejét" szeretnénk összehasonlítani abból a szempontból, hogy mennyire növeli az  $SW$ -t a  $NEP$ -hez képest, többféle megközelítést alkalmazhatunk. A számítástudományban jól bevált az u.n. legrosszabb eset elemzés (worst-case analysis) és az átlagos eset elemzés (average case analysis). Az előbbi használva azt határozzuk meg, hogy egy problémaosztályon belül a legrosszabb esetben mennyire javul az  $SW$  értéke abszolút vagy relatív értelemben valamely korrelált egyensúly forgatókönyvének alkalmazásá-

val. Az utóbbit használva, a problémaosztályból véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választunk egy problémát, arra alkalmazzuk a korrelációt és a korreláció eredményeképpen kapott átlagos javulást tekintjük mértéknek. Ezen kívül még vannak más megközelítések is.

Az első, és talán a legszebb példája a legrosszabb eset elemzésnek játékelméleti kontextusban Roughgarden és Tardos (2002) munkája, akik egy költségalapú torlódási játékokban határozták meg az "anarchia árát" (price of anarchy), ami a legrosszabb *NEP* társadalmi költségének és a minimális társadalmi költségnek a hányadosa. Ez utóbbi csak diktatórikus eszközökkel érhető el általában, míg ha a játékosokat teljesen magukra hagyjuk (hagyjuk az anarchiát) és feltételezzük, hogy így is kialakul az egyensúly, akkor a legrosszabb esetet hasonlítjuk össze a legjobbbal. A hányadosnak a maximuma a torlódási játékok egy osztályában az anarchia ára.

Ha nem a *NEP* a viszonyítási alap, hanem a korrelált egyensúly valamilyen fajtája és ugyanezt a megközelítést alkalmazzuk, akkor egy "alacsonyabb szintű" irányított anarchia árát kaphatjuk meg. Christodoulou és Koutsoupias (2005) kiszámították a *CE* esetében az anarchia árát a torlódási játékok egy osztályára. Ashlagi et al (2008) társadalmi költségek helyett a társadalmi jóléttel számoltak. Első látásra úgy tűnik, mintha ez nem lenne lényeges különbség, de az említett szerzők meggyőző példákat mutatnak arra, hogy egészen eltérő eredményeket kaphatunk a két megközelítéssel. Mi a következőkben ez utóbbit választjuk, tehát a játékosok kifizetőfüggvényeinek összegeként értelmezett *SW*-t hasonlítjuk össze az "anarchia fokára" tett különböző feltételezések mellett. A mérőszámok formális definícióit kicsit későbbre halasztjuk.

A játékosztály, amit tekintünk, a torlódási játékok egy alosztálya. Az egyszerű torlódási játékokban a játékosok választhatnak bizonyos kiszolgálók között, amelyeknek a szolgáltatait szeretnék igénybe venni. Egy játékos hasznossága (kifizetése) csak attól függ, hogy hányan használják (választották) az illető kiszolgálót. Például ha a közlekedők választhatnak két alternatív útvonal között, amelyek *A* várost *B* várossal kötik össze, akkor, ha sok közlekedő választja az egyik utat ezáltal torlódást

és lassulást okozva, akkor az ezen úton haladók hasznossága csökken a használók számának növekedésével. Mi csak két-kiszolgálós torlódási játékokkal foglalkozunk és ezen belül is csak azokkal, ahol a torlódás növekedésével lineárisan csökken a játékos által elérhető hasznosság. Az elemzés így is elég bonyolult lesz.

Először az általános esetet nézzük, amikor a játékosok száma  $n \geq 2$ . Egy ilyen játékot a legegyszerűbben egy "torlódási alakkal" (congestion form) adhatunk meg, ami két nem negatív  $n$  komponensű vektor:  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . A jelentése a következő: ha  $j$  darab játékos választja az  $F1$  első kiszolgálót, akkor mindegyik játékos  $a_j$  hasznosságához jut és ha  $k$  darab játékos választja az  $F2$  második kiszolgálót, akkor ezek mindegyike  $b_k$  hasznosságához jut. A torlódási alakból konstruálni tudunk egy torlódási játékot. A játékosok halmaza  $N = \{1, \dots, n\}$ , minden játékos akcióhalmaza  $\{F1, F2\}$ , amelyet röviden  $\{1, 2\}$ -vel jelölünk, a kifizetéseket pedig az  $a$  és  $b$  hasznosságvektorok határozzák meg. Egy akcióprofil  $(i_1, \dots, i_n)$ , ahol  $i_j \in \{1, 2\}$ ,  $j \in N$ . Például, ha  $n = 4$ , akkor  $(1, 1, 2, 1)$  azt a helyzetet jelenti, amikor az 1, 2, 4 játékosok az  $F1$  kiszolgálót, a 3 játékos pedig az  $F2$  kiszolgálót választja. Jelöljük az akcióprofilok halmazát  $S$ -el.

Legyen  $I_1(i_1, \dots, i_n) = \{k \in N : i_k = 1\}$ , és  $I_2 = N \setminus I_1$ , amelyek azoknak a játékosoknak a halmazai, akik rendre az  $F1$  és  $F2$  kiszolgálókat választották az  $(i_1, \dots, i_n) \in S$  akcióprofilban. Jelölje  $p_{i_1, \dots, i_n}$  annak a valószínűségét, hogy a játékevezető az  $(i_1, \dots, i_n)$  akcióprofilra választja. Az  $f_j(i_1, \dots, i_n)$  hasznosság, amit a  $j$  játékos kap, írható a következő képpen:

$$f_j(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} a_{|I_1(i_1, \dots, i_n)|}, & \text{ha } i_j = 1 \\ b_{|I_2(i_1, \dots, i_n)|}, & \text{ha } i_j = 2 \end{cases}.$$

Definiáljuk a  $g_j$  függvényt

$$g_j(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} a_{|I_1(i_1, \dots, i_n)|+1}, & \text{ha } i_j = 2 \\ b_{|I_2(i_1, \dots, i_n)|+1}, & \text{ha } i_j = 1 \end{cases}.$$

$g_j(i_1, \dots, i_n)$  az a hasznosság, amelyet a  $j$  játékos kapna, ha az  $F2$  kiszolgálóról az

$F1$ -re váltana, feltéve, hogy senki más nem változtatja meg a választását.

Ebben a speciális esetben (két kiszolgáló van) a torlódási játék egy bináris játék, amelyben, mint azt láttuk (2.9. tétel), az  $SCE$ -k halmazát definiáló ösztönző feltételek igen egyszerű formát öltenek. A  $j$  játékos ösztönző feltétele (csak egy ilyen van!) az alábbi módon írható fel

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} f_j(i_1, \dots, i_n) p_{i_1, \dots, i_n} \geq \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} g_j(i_1, \dots, i_n) p_{i_1, \dots, i_n} .$$

A bal oldalon a  $j$  játékos várható hasznossága van abban az esetben, ha vakon követi a játékvezető javaslatait, a jobb oldalon pedig az a várható hasznosság, amelyet akkor kap, ha nem kötelezi el magát, de nem is választhatja azt a kiszolgálót, amelyet a játékvezető javasolt volna és így kénytelen a másik kiszolgálót választani. Másképpen fogalmazva,  $F2$ -öt választja, ha a javaslat  $F1$ , és  $F1$ -et, ha a javaslat  $F2$ .

Ekkor az  $SW$  várható értéke

$$\sum_{j=1}^n \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} f_j(i_1, \dots, i_n) p_{i_1, \dots, i_n} .$$

Ha az  $SW$ -t maximalizálni akarjuk az  $SCE$ -k halmazán, akkor egy  $LP$  feladatot kapunk, amelyet "teljes méretű  $LP$ "-nek fogunk nevezni. Az a tény, hogy a torlódási játékban a kifizetéseket csak az határozza meg, hogy hányan választják az  $F1$  és  $F2$  kiszolgálókat, lehetővé teszi egy olyan  $LP$  feladat használatát, amelynek a nem negatívítási és a normalizáló feltételeken kívül csak egy feltétele van. Ezt fogjuk "kisméretű  $LP$ "-nek nevezni. Jelölje  $t$  azoknak a játékosoknak a számát, akik az  $F2$  kiszolgálót választották,  $t = 0, 1, \dots, n$ . Legyen továbbá  $S_t = \{(i_1, \dots, i_n) \in S : |I_2(i_1, \dots, i_n)| = t\}$  azoknak az akcióprofiloknak a halmaza, amelyekben  $t$  játékos választotta  $F2$ -öt. Tegyük fel, hogy valamennyi  $p_{i_1, \dots, i_n}$  valószínűség egyenlő,  $(i_1, \dots, i_n) \in S_t$  és jelöljük ezt  $p_t$ -vel.

Ennek a jelölésnek a használatával minden játékos ösztönző feltétele az alábbi lesz

$$\begin{aligned}
& a_n p_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left( \binom{n-1}{t-1} b_t + \binom{n-1}{t} a_{n-t} \right) p_t + b_n p_n \\
& \geq b_1 p_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left( \binom{n-1}{t-1} a_{n-t+1} + \binom{n-1}{t} b_{t+1} \right) p_t + a_1 p_n ,
\end{aligned}$$

vagy másképpen

$$\begin{aligned}
& (a_n - b_1) p_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left( \binom{n-1}{t-1} (b_t - a_{n-t+1}) \right. \\
& \left. + \binom{n-1}{t} (a_{n-t} - b_{t+1}) \right) p_t + (b_n - a_1) p_n \geq 0 .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

A normalizáló feltétel

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} p_t = 1 , \tag{2.10}$$

és az  $SW$

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (b_t t + a_{n-t}(n-t)) p_t .$$

Így a kisméretű  $LP$  az a feladat, amely az  $SW$ -t maximalizálja a (2.9) és (2.10) feltételek mellett. Ez egy "könnyű" feladat, a játékosok számában lineáris idő alatt oldható meg, Dyer (1984). Ha  $p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*$  a kisméretű  $LP$  egy optimális megoldása, akkor a

$$p_{i_1, \dots, i_n}^* = p_t^*, (i_1, \dots, i_n) \in S_t , \tag{2.11}$$

a teljes méretű  $LP$  lehetséges megoldása, amely ugyanakkora  $SW$  értéket szolgáltat. Erről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk. Könnyen állíthatunk elő más lehetséges megoldásokat is, mivel a  $\binom{n}{t} p_t^*$  valószínűségek nem csak egyenlően oszthatók fel azok között az akcióprofilok között, amelyekben  $t$  játékos választja  $F2$ -öt.

Az  $SCE$  erejének mérésére két mutatószámot használunk, amelyeket Ashlagi et al (2008) javasoltak a  $CE$ -re. Ezek a "mediációs érték" (mediation value) és a "kényszerítési érték" (enforcement value).

Legyen  $C$  a véges játékok egy osztálya és  $G \in C$ . Jelölje  $P(G)$  a  $G$  akcióprofiljain értelmezett összes valószínűségeloszlások halmazát,  $M(G)$  a  $G$  kevert  $NEP$ -jei által generált valószínűségeloszlások halmazát,  $MP(G)$  a  $G$  játék  $PNEP$ -jei által generált valószínűségeloszlások halmazát, és  $S(G)$  az  $SCE$ -k halmazát. Jelöljük  $SW(p)$ -vel a  $p$  eloszláshoz tartozó várható társadalmi hasznosságot (a játékosok várható hasznosságainak az összege). Definiáljuk az  $SCE$ -hez tartozó  $MV(G)$  és  $MVP(G)$  mediációs értékeket a következőképpen

$$\begin{aligned} MV(G) &= \frac{\max_{p \in S(G)} SW(p)}{\max_{p \in M(G)} SW(p)} \\ MVP(G) &= \frac{\max_{p \in S(G)} SW(p)}{\max_{p \in MP(G)} SW(p)} , \end{aligned}$$

az  $EV(G)$  kényszerítési értéket pedig az alábbi módon

$$EV(G) = \frac{\max_{p \in P(G)} SW(p)}{\max_{p \in S(G)} SW(p)} .$$

Az  $SCE$ -nek az  $MV$  és  $MVP$  mediációs értékeit és az  $EV$  kényszerítési értékét a  $C$  játékosztályon pedig így definiáljuk

$$\begin{aligned} MV &= \sup_{G \in C} MV(G) \\ MVP &= \sup_{G \in C} MVP(G) \\ EV &= \sup_{G \in C} EV(G) . \end{aligned}$$

Az  $MV$  és az  $MVP$  tulajdonképpen egy "legjobb-eset elemzés" eredménye. Minél nagyobb az  $MV$  és az  $MVP$  értéke, annál többet javít az  $SW$ -n a játékot megelőző "mediáció" (nevezzük így a játékvezető ténykedését is tartalmazó protokollt) a legjobb esetben. Az  $EV$  egy valódi "legrosszabb-eset elemzés" eredménye és azt mutatja, hogy (relatíven) maximum mennyit veszíthetünk az  $SW$  maximumához képest. Nyilván az  $MV = \infty$ ,  $MVP = \infty$  és az  $EV = 1$  a legjobb értékek.

Mivel ezeket az értékeket konkrétan ki szeretnénk számolni, illetve becslést adni rájuk, a legegyszerűbb esetre, a két-kiszolgálós, nem-csökkenő, lineáris torlódási játékokra szorítkozunk. A nem-csökkenő jelző itt azt jelenti, hogy a játékosok hasznossága nem csökken, ahogy a torlódás csökken, a linearitás pedig, hogy mindez egy lineáris függvény szerint történik. Ezért a következőkben feltesszük, hogy  $a_j = (n-j)x$ ,  $b_j = y + (n-j)z$ ,  $x, y > 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Ez csak minimális csorbítása az általánosságnak, amennyiben a legkisebb hasznosságot a 0 szinten rögzítettük. Ennek az az előnye, hogy négy paraméter helyett csak hárommal kell dolgoznunk, ami nagy könnyebbség. Az egyszerűség kedvéért nem teszünk különbséget jelölésben egy konkrét két-kiszolgálós, nem-csökkenő, lineáris torlódási  $G$  játékhoz tartozó  $MV(G)$  és  $EV(G)$  és az egész játékosztályra vonatkozó  $MV$  és  $EV$  értékek között, ahol ez nem okoz félreértést.

A lineáris esetben feltéve, hogy  $t$  játékos választja  $F2$ -öt és  $n-t$  játékos választja  $F1$ -et, a (2.9) ösztönző feltétel az alábbi formát ölti (a (2.10) normalizáló feltétel ugyanaz marad)

$$\begin{aligned} & (-y - (n-1)z)p_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left( \left( \binom{n-1}{t} t - \binom{n-1}{t-1} (t-1) \right) x \right. \\ & \quad \left. + \left( \binom{n-1}{t-1} - \binom{n-1}{t} \right) y \left( \binom{n-1}{t-1} (n-t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \binom{n-1}{t} (n-t-1) \right) z \right) p_t + (-(n-1)x + y)p_n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

míg az  $SW$  így alakul

$$SW = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (t(n-t)(x+z) + ty) p_t. \quad (2.13)$$

Az ösztönző feltételek figyelmen kívül hagyásával az  $SW$  feltétel nélküli maximuma a következő:

$$M = \max_{0 \leq t \leq n} \binom{n}{t} (t(n-t)(x+z) + ty), \quad t \in \mathbb{N}.$$

Ez az az  $SW$ , amelyet "diktatórikus módszerekkel" lehet elérni, amikor a társadalmi optimumot valamilyen eszközzel kényszerítik, a játékosoknak nincs döntési szabadságuk. Az  $M$  értéket könnyen ki lehet számolni. Hasznosnak bizonyul majd, ha a (2.12), (2.13) feladatban a  $q_t = \binom{n}{t} p_t$ ,  $t = 0, 1, \dots, n$  új változókat vezetjük be és a feladatot átfogalmazzuk, majd a következő ekvivalens alakra hozzuk:

$$\begin{aligned}
SW &= \sum_{t=0}^n (t(n-t)(x+z) + ty)q_t \rightarrow \max \\
\text{s.t.} \quad & (-y - (n-1)z)q_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{t}} ((\binom{n-1}{t}t \\
& - \binom{n-1}{t-1}(t-1))x + (\binom{n-1}{t-1} - \binom{n-1}{t})y \\
& + (\binom{n-1}{t-1}(n-t) - \binom{n-1}{t}(n-t-1))z)q_t \\
& + (-(n-1)x + y)q_n \geq 0 \\
& \sum_{t=0}^n q_t = 1.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Az  $SW$  feltétel nélküli folytonos maximumpontja a  $[0, n]$  intervallumon  $t^* = \frac{n}{2} + \frac{y}{2(x+z)}$ , ha  $\frac{y}{x+z} \leq n$ , egyébként  $t^* = n$ . A  $t^*$  maximumpont nem feltétlenül egész. Mivel a maximalizálandó függvény konkáv és kvadrátikus, az  $s$  egészértékű maximuma a  $t^*$  közelebbi szomszédja.

Most az  $EV$  egy felső korlátját határozzuk meg az  $SCE$ -k halmazán. Ebből a célból az ösztönző feltételt egyszerűbb formára hozzuk. Könnyen ellenőrizhetjük az alábbi azonosságok fennállását

$$\binom{n-1}{t} = \frac{n-t}{n} \binom{n}{t}$$

és

$$\binom{n-1}{t-1} = \frac{t}{n} \binom{n}{t}.$$

Így (2.14) az alábbi formát ölti

$$\begin{aligned}
& (-y - (n-1)z)q_0 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} (t(n+1-2t)x + (2t-n)y) \\
& + (n-t)(2t-n+1)z)q_t + (-(n-1)x + y)q_n \geq 0 .
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Az  $SW$ , amit most  $W(t)$ -vel jelölünk, nem változik:

$$W(t) = t(n-t)(x+z) + ty$$

minden  $0 \leq t \leq n$ -re.

**2.14. tétel** (Forgó (2014)).  *$n$ -személyes, két-kiszolgálós, egyszerű, nem-csökkenő, lineáris torlódási játékokra  $EV \leq \frac{4}{3}$ .*

*Bizonyítás.* A formulák egyszerűbbé tétele kedvéért vezessük be az  $r = \frac{y}{x+z}$  jelölést. Így az  $SW$  folytonos, feltétel nélküli maximumpontja

$$t^* = \frac{n}{2} + \frac{r}{2} , \tag{2.16}$$

míg az  $s$  feltétel nélküli integer maximumpontjára az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

$$\frac{n}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{n}{2} + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} .$$

Jelöljük  $W^*$ -al a legjobb  $SCE$ -hez tartozó  $SW$ -t. Tegyük fel először, hogy a játékosok száma páros. Két megfigyelést teszünk:

- (i) Az az akcióprofil, amikor  $\frac{n}{2}$  játékos választja  $F1$ -et és ugyancsak  $\frac{n}{2}$  játékos választja  $F2$ -öt, egy  $SCE$ . Valóban, ha  $q_{\frac{n}{2}} = 1$ , és az összes többi valószínűség 0, akkor az ösztönző feltétel

$$\frac{1}{2}(x+z) \geq 0 ,$$

ami nyilvánvalóan fennáll  $x$  és  $z$  nem negativitása miatt.

(ii) Ha  $s = n$ , akkor  $\frac{n}{2} + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \geq n$ , amiből következik

$$n \leq r + 1 = \frac{y}{x+z} + 1 \leq \frac{y}{x} + 1 .$$

Ezt átrendezve a  $-(n-1)x + y \geq 0$  egyenlőtlenséget kapjuk, amiből az következik, hogy a  $q_n = 1$ , minden más valószínűség 0 egy  $SCE$ . Ez azt jelenti, hogy egy  $SCE$  (is) realizálja a maximális társadalmi hasznosságot, és így  $EV = 1$ .

A (ii) megfigyelésből következik, hogy ha az  $EV$ -re egy felső korlátot akarunk meghatározni, akkor elég azokat az eseteket nézni, amikor  $s \leq n-1$ . Az (i)-ből és a (ii)-ből kapjuk az alábbi egyenlőtlenségeket

$$EV \leq \frac{W(s)}{W^*} \leq \frac{W(t^*)}{W(\frac{n}{2})} = \frac{((\frac{n}{2})^2 - (\frac{r}{2})^2)(x+z) + (\frac{n}{2} + \frac{r}{2})y}{(\frac{n}{2})^2(x+z) + \frac{n}{2}y} .$$

A jobb oldalon lévő tört számlálóját és nevezőjét  $x+z$ -vel elosztva kapjuk az alábbi becslést

$$EV \leq \frac{(\frac{n}{2})^2 - (\frac{r}{2})^2 + (\frac{n}{2} + \frac{r}{2})r}{(\frac{n}{2})^2 + \frac{n}{2}r} = \frac{(n+r)^2}{n(n+2r)} . \quad (2.17)$$

Az  $\frac{n}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \leq s \leq n-1$  egyenlőtlenségből az  $r \leq n-1$  egyenlőtlenség következik. Mivel (2.17) jobb oldala  $r$ -nek monoton növekvő függvénye rögzített  $n$  mellett, az  $r = n-1$  helyettesítést elvégezve (2.17)-ben azt kapjuk, hogy

$$EV \leq \frac{(2n-1)^2}{n(3n-2)}$$

minden  $n \geq 2$ -re. Mivel ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldala  $n$  monoton növekvő függvénye, következik, hogy

$$EV \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2}{n(3n-2)} = \frac{4}{3} ,$$

amellyel a tétel állítását bebizonyítottuk páros  $n$  esetére.

Ha  $n$  páratlan, akkor vegyük a  $q_{\frac{n}{2}-1} = q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2}$ , minden egyéb valószínűség 0 megoldást. A (2.15) egyenlőtlenséget ez kielégíti, tehát  $SCE$ , és a hozzá tartozó  $SW$

pontosan  $W(\frac{n}{2})$ . Ettől a ponttól kezdve a bizonyítás ugyanúgy megy, mint páros  $n$  esetében.  $\square$

A  $\frac{4}{3}$  felső becslés elég durvának tűnik. Az ember szorosabb korlátot várna, különös tekintettel a kis játékoszámra kapott szoros korlátokra (lásd később). Ennek az az oka, hogy  $W(\frac{n}{2})$  általában nem elég jó becslése a  $W^*$  alsó korlátnak. Jobb *SCE*-ket lehetne kapni, ennek ára azonban a számítások lényegesen bonyolultabbá válása.

A mediációs érték meghatározása tetszőleges számú játékos mellett elég nehéznek tűnik. Egyszerűbbé válik a feladat, ha a mediációs érték meghatározásakor egy *SCE*-hez tartozó *SW* értékét a legjobb *PNEP*-hez viszonyítjuk. Az így kapott hányadost "tisztá mediációs értéknek" (*MVP*) nevezzük.

Az az akcióprofil, amelyben  $s$  számú játékos választja  $F2$ -öt és  $n - s$  számú választja  $F1$ -et akkor lesz egy *PNEP*, ha egyetlen játékos sem jár jobban a kiszolgáló cseréjével, feltéve, hogy a többiek nem cserélnek. Ha egy játékos  $F1$ -et választja, akkor  $sx$  hasznossághoz jut. Ha átvált  $F2$ -re, akkor  $y + (n - s - 1)z$  hasznossága lesz, így ahhoz, hogy egyensúlyban legyünk az

$$sx \geq y + (n - s - 1)z$$

egyenlőtlenségnek fenn kell állni. Más részről, ha  $F2$ -ről  $F1$ -re vált, akkor a

$$y + (n - s)z \geq (s - 1)x$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia. A két egyenlőtlenséget kombinálva a következő szükséges feltételt kapjuk:

$$a = \frac{y + (n - 1)z}{x + z} \leq s \leq \frac{y + x + nz}{x + z} = b. \quad (2.18)$$

Könnyű látni, hogy  $b - a = 1$ . Mivel  $s$  egész, így generikusan  $s$  egyértelmű. Ha  $a \in \mathbb{Z}$ , akkor mind  $s = a$ , mind  $s = a + 1$  *PNEP*-et eredményez.

**2.15. tétel** (Forgó (2014)). *n*-személyes, két-kiszolgálós, egyszerű, nem-csökkenő lineáris torlódási játékok esetében

$$MVP \geq \begin{cases} \infty, & \text{ha } n = 2 \\ \frac{n^2}{4(n-1)}, & \text{ha } n \geq 3 \end{cases}.$$

*Bizonyítás.* Mivel  $MVP \geq MV$ , és  $n = 2$ -re  $MV = \infty$  (a 2.16. tétel állítása, lásd később) az állítás első része igaz. Így ettől kezdve feltehetjük, hogy  $n \geq 3$ . Tekintsük azoknak a torlódási játékoknak a halmazát, amelyekre  $x > 1, y = 1, z = 0$ . Ezekre a játékokra a  $W(t) = t(n-t)x + t$  abszolút maximumpontja  $t = \frac{n}{2} + \frac{1}{2x}$ , amely nem elégíti ki (2.18)-at, ha  $x > 1, y = 1, z = 0$ . Ilyen paraméterekre (2.18) az alábbi alakot ölti:

$$\frac{1}{x} \leq s \leq 1 + \frac{1}{x},$$

és mivel  $\frac{1}{x}$  nem egész, ezért  $s$  egyértelműen meghatározott és minden  $PNEP$  ugyanazt az  $SW$  értéket adja. Könnyen látható, hogy  $W(\frac{1}{x}) = n$  és  $W(1 + \frac{1}{x}) = (n-1)(x+1)$ . A 2.14. tétel bizonyításából tudjuk, hogy  $W(\frac{n}{2}) = \frac{n^2}{4}x + \frac{n}{2}$  egy alsó korlátja a maximális  $SW$ -nek az  $SCE$ -k halmazán. Mivel  $x > 1$ ,  $W(\frac{1}{x}) < W(1 + \frac{1}{x})$ , és  $\frac{\frac{n^2}{4}x + \frac{n}{2}}{(n-1)(x+1)}$  az  $x$ -nek monoton növekvő függvénye az  $(1, \infty)$  intervallumon minden rögzített  $n \geq 3$ -ra, azt kapjuk, hogy

$$MVP \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{4}x + \frac{n}{2}}{(n-1)(x+1)} = \frac{n^2}{4(n-1)}.$$

amivel a tételt be is bizonyítottuk.  $\square$

Láthatjuk azt is, hogy ha  $r$  rögzített, akkor a felső korlát (2.17)-ben 1-hez tart, ha  $n \rightarrow \infty$ , ami azt jelenti, hogy a kiszolgálók egyenlő megosztása a játékosok között aszimptotikusan realizálható  $SCE$ -ként.

Pontosabb eredményeket illetve szorosabb korlátokat kaphatunk, ha a játékosok száma kicsi. Nézzük először a két játékos esetét. Ekkor a torlódási forma a következő:

|                        |   | Kiszolgálók |         |
|------------------------|---|-------------|---------|
|                        |   | $F1$        | $F2$    |
| A kiszolgálót választó | 1 | $x$         | $y + z$ |
| játékosok száma        | 2 | 0           | $y$     |

ahol  $x, y > 0$ ,  $z \geq 0$ , és a fenti táblázat utolsó két oszlopa a hasznosságokat mutatja különböző torlódási szintek esetében. Ehhez a torlódási formához tartozó torlódási játék egy szimmetrikus bimátrix játék lesz, amit az alábbi táblázat mutat:

|      | $F1$         | $F2$         |
|------|--------------|--------------|
| $F1$ | $(0, 0)$     | $(x, y + z)$ |
| $F2$ | $(y + z, x)$ | $(y, y)$     |

Mint ahogy a következő tétel állítja, ebben az esetben mindent megkapunk az  $SCE$ -től, amit csak el lehet várni.

**2.16. tétel** (Forgó (2014)). *Két-személyes, két-kiszolgálós, egyszerű, nem-csökkenő lineáris torlódási játékokra  $MV = \infty$ ,  $EV = 1$ .*

*Bizonyítás.* Behelyettesítve  $n = 2$ -t (2.15)-be, az alábbi  $LP$  feladatot kapjuk, amelynek optimális célfüggvényértéke a maximális  $SW$  értéket adja az  $SCE$ -k halmazán

$$\begin{aligned}
 (x + y + z)q_1 + 2yq_2 &\rightarrow \max \\
 \text{s.t. } -(y + z)q_0 + \frac{1}{2}(x + z)q_1 + (y - x)q_2 &\geq 0 \\
 q_0 + q_1 + q_2 &= 1 \\
 q_0, q_1, q_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Két esetet különböztetünk meg:

- (i)  $x + y + z \leq 2y$ . Ekkor a maximális  $SW = 2y$ . Az  $SCE$ , ahol  $q_0 = q_1 = 0$ ,  $q_2 = 1$  maximális az  $SCE$ -k halmazán és a hozzá tartozó célfüggvény érték  $SW = 2y$ , ezért  $EV = 1$ .

- (ii)  $x + y + z > 2y$ . Ebben az esetben az  $SCE$ , ahol  $q_0 = q_2 = 0$ ,  $q_1 = 1$  maximális az  $SCE$ -k halmazán és így ismét  $EV = 1$ .

Legyen  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1 + t$ , ( $t > 0$ ). Ekkor az egyetlen  $NEP$  az  $(F2, F2)$ ,

$$MV = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4+t}{4} = \infty$$

és készen vagyunk a bizonyítással.  $\square$

Ha a játékosok száma 3, akkor is ki tudjuk számolni a mediációs és kényszerítési értékeket.

**2.17. tétel** (Forgó (2014)). *Három-személyes, két-kiszolgálós, egyszerű, nem-csökkenő, lineáris torlódási játékokra  $EV = 1$ .*

*Bizonyítás.* Úgy, mint az előbb, az  $n = 3$  helyettesítést elvégezve (2.15)-ben az alábbi lineáris programozási feladatot kapjuk, amelynek optimális célfüggvényértéke a maximális  $SW$  értéket adja az  $SCE$ -k halmazán:

$$\begin{aligned} (2x + y + 2z)q_1 + (2x + 2y + 2z)q_2 + 3yq_3 &\rightarrow \max \\ \text{s.t. } -(y + 2z)q_0 + \frac{1}{3}(2x - y)q_1 + \frac{1}{3}(y + 2z)q_2 + (y - 2x)q_3 &\geq 0 \\ q_0 + q_1 + q_2 + q_3 &= 1 \\ q_0, q_1, q_2, q_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Azonnal látszik, hogy  $q_1 = 1$  (minden más valószínűség 0) egy  $SCE$ , ha  $y \leq 2x$ ,  $q_3 = 1$  (minden más valószínűség 0) egy  $SCE$ , ha  $y \geq 2x$ , és  $q_2 = 1$  (minden más valószínűség 0) mindig egy  $SCE$ . Így mindhárom esetben a maximális  $SW$  realizálható  $SCE$ -ként, vagyis  $EV = 1$ .  $\square$

**2.18. tétel** (Forgó (2014)). *Három-személyes, két-kiszolgálós, egyszerű, nem-csökkenő lineáris torlódási játékokra  $MV = \frac{4}{3}$ .*

*Bizonyítás.* Először két triviális esetet vizsgálunk meg:

1.  $y \geq 2x$ . Ebből következik  $3y \geq 2x + 2y + 2z$ . Ekkor a maximális  $SW$ -t el lehet érni, ha mindkét játékos  $F2$ -öt választja, amiről rögtön látszik, hogy egy  $PNEP$ . Így  $MV = 1$ .
2.  $y < 2x$ , és  $y + z \geq x$ . Ekkor  $2x + 2y + 2z$  a maximális  $SW$  és ez realizálható  $PNEP$ -ként úgy, hogy két játékos választja  $F2$ -öt és egy  $F1$ -et (Ez egyébként háromféleképpen tehető meg). Így ismét  $MV = 1$ .

Ezért a következőkben csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $y + z < x$ . Vegyük észre, hogy  $y < 2x$  következik az  $y + z < x$  egyenlőtlenségből, amiből viszont következik  $x > z$ . Ekkor  $2x + 2y + 2z$  a maximális  $SW$ , és nem realizálható  $PNEP$ -ként. A maximális  $SW$ , amit  $SCE$ -vel el lehet érni  $2x + 2y + 2z$ . Minden olyan stratégiaprofil, amikor két játékos  $F1$ -et, egy pedig  $F2$ -öt választ egy  $PNEP$ , amelyhez tartozó  $SW = 2x + y + 2z$ .

Az  $MV \leq \frac{4}{3}$  egyenlőtlenség azonnal következik az

$$MV \leq MVP = \frac{2x + 2y + 2z}{2x + y + 2z} \leq \frac{4}{3}$$

egyenlőtlenségből.

Tekintsük a következő torlódási játékot, ahol  $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$  és  $\epsilon > 0$ . Ennek a játéknak az  $MVP$ -je

$$MVP(\epsilon) = \frac{4 + \epsilon}{3 + \epsilon},$$

amiből a tétel állítását kapjuk, ha az  $\epsilon \rightarrow 0$ . □

Az  $n = 2$  és  $n = 3$  esetekben a maximális  $SW$ -t lehetett  $SCE$ -ként realizálni, vagyis  $EV = 1$ , ami a lehető legjobb. Felmerül a kérdés, hogy ez a jó tulajdonság háromnál több játékos esetében is megmarad-e. Sajnos nem, mert már  $n = 4$ -re is  $EV > 1$ , de azért nagyon közel van 1-hez.

**2.19. tétel** (Forgó (2014)). *Négy-személyes, két-kiszolgálós, egyszerű, nem-csökkenő lineáris torlódási játékokra a kényszerítési érték*

$$EV = \frac{900 + 393\sqrt{30}}{1080 + 356\sqrt{30}} = 1,007478\dots$$

A tétel bizonyítása túl hosszú, ezért a függelékbe került.

Eredményeink a következő táblázatban összegezhetők:

| Játékosok száma | $MV$          | $MVP$                     | $EV$               |
|-----------------|---------------|---------------------------|--------------------|
| 2               | $\infty$      | $\infty$                  | 1                  |
| 3               | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$             | 1                  |
| 4               | ?             | $\geq \frac{4}{3}$        | $1,007478\dots$    |
| $\dots$         | $\dots$       | $\dots$                   | $\dots$            |
| $n$             | ?             | $\geq \frac{n^2}{4(n-1)}$ | $\leq \frac{4}{3}$ |

Egyéb korrelációs egyensúlyokkal való összehasonlítás céljából  $CE$  a természetes választás, hiszen  $WCE = CE$  a két-kiszolgálós torlódási játékokban. Nyilván, mivel  $SCE$  egy általánosítása a  $CE$ -nek, az  $MV$ -re és  $EV$ -re kapott korlátok legalább olyan jók kellene legyenek az  $SCE$  esetében, mint a  $CE$  esetében. Ha ezen a trivialitáson túl akarunk lépni és valami értelmeset mondani, akkor az egyetlen referencia pont két-kiszolgálós, egyszerű, nem-csökkenő lineáris torlódási játékokra a "hasznosság-alapú" megközelítésben Ashlagi et al (2008) munkája. Mivel az ő vizsgálataik  $n$  játékosra és az  $MV$ -re vonatkoztak, az  $SCE$ -vel való összehasonlítás korlátozott.

Ashlagi et al (2008) bebizonyították tetszőleges számú játékos és a  $CE$  esetére, hogy  $MV \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$  és azt sejtették, hogy ez a korlát túl laza. A mi eredményeink ezt alátámasztják, mivel  $n = 3$ -ra  $MV \leq \frac{4}{3} = 1,33$ , amit kombinálva azzal az alsó korláttal, amit szintén Ashlagi et al (2008) adtak  $n = 3$ -ra, azt kapjuk, hogy

$$1,125 \leq MV \leq 1,33,$$

ami elég szűk teret ad a további javításnak. Egy másik nem triviális eredmény, ami a vizsgálatainkból kiderül, ha a  $CE$ -re vonatkoztatjuk, egy alsó korlát a kényszerítési

értékre  $n = 4$  esetében

$$EV \geq 1,00747 \dots$$

Tiszta képet kapunk viszont  $n = 2$ -re. Ashlagi et al (2008) bebizonyították, hogy a  $CE$ -re,  $MV = MVP = \frac{4}{3}, EV = \infty$ . Ezeket az értékeket összehasonlítva a fenti táblázat első sorával kiderül, hogy az  $SCE$  sokkal jobban teljesít, mint a  $CE$  ebben a játékosztályban. A  $CE$  és  $SCE$  közötti szélesebbkörű hatékonysági összehasonlítás további kutatások témája lehet.

Itt ragadjuk meg az alkalmat, hogy pár szót ejtsünk arról, hogy miért (csak) azt a társadalmi hasznossági függvényt tekintettük, ahol a társadalmi hasznosság a játékosok hasznosságainak az összege, közismert nevén a "utilitariánus" megközelítést. Semmiképpen nem akarunk belemenni azokba a filozófiai kérdésekbe, amelyeket ez felvet. Rengeteg pro- és kontra érv van, ami nem lehet ennek a munkának témája. Közismert, hogy a utilitariánus társadalmi jóléti függvénynek a maximalizálása Pareto-optimumhoz vezet, ami a közgazdaságtanban egy kulcs-fogalom.

A torlódási játékok szimmetrikusak, amikor is a hasznosságok összeadása elég természetes és még természetes mértékek is szóba jöhetnek (pl. utazási idő, aminek az összeadása nem az ördögtől való). Ha az egalitariánus társadalmi hasznossági függvényt akarjuk maximalizálni, vagyis a legkisebb hasznosság maximumát keressük, akkor az egyszerű torlódási játékok esetében, könnyen bizonyíthatóan éppen a szimmetria miatt, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a hasznosságok összegének maximalizálásakor. Van még egy praktikus haszna is a hasznosság-összeg maximalizálásának: az eredményeket össze lehet hasonlítani más kutatásokban nyertekkel, hiszen általában ezt tekintik a "mércének".

Noha vizsgálataink nem irányultak az  $SCE$  forgatókönyv gyakorlati megvalósításának problémáira, néhány szó azért helyénvaló. A már említett "klub-protokoll" itt is működik. Tekintsük a két-kiszolgálós egyszerű torlódási játékot. Tegyük fel, hogy van egy "klub", amelyhez csatlakozhatnak játékosok. A klub működtet egy véletlen mechanizmust ( $RD$ ), amely egy minden játékos által ismert eloszlás szerint

kisorsol egy profilt (minden játékosnak az  $F1$  és az  $F2$  közül az egyiket). A klub tagjainak azt a kiszolgálót kell választani, amelyet nekik kisorsoltak, akik viszont úgy döntöttek, hogy nem csatlakoznak a klubhoz, nem választhatják a nekik kisorsolt kiszolgálót, és minthogy csak két kiszolgáló van, a másikat kell választaniuk

Ha például  $F1$  és  $F2$  két autópálya, amelyek  $A$  és  $B$  várost összekötik, a fenti forgatókönyvet meg lehet valósítani, például a következő módon. A klub tagjai a klubtagsági kártyájuk (prémium kártya) segítségével megtudják az  $RD$ -től, hogy melyik utat kell választaniuk. Aki nem klubtag, az a kártyája (reguláris kártya) segítségével szintén megtudja, hogy melyik utat kell választania: nem azt, amit választania kellett volna, ha klubtag lenne. Az  $SCE$  egy olyan valószínűségeloszlás, amely mellett minden játékosnak érdeke a klubhoz csatlakozni, feltéve, hogy mindenki más is ezt teszi.

Az, hogy bizonyos közlekedési helyzetekben valamiféle mediációra (aminek egy módja a korreláció) szükség lehet, már régóta ismert. A híres Braess paradoxon (Braess, 1969) meggyőzően mutatja, hogy mi történhet, ha ilyen nincs. A közlekedési torlódások növekedhetnek egy olyan új út építése által, amelyet abból a célból építettek, hogy csökkenjen a torlódás. Erre több nagyvárosban is volt példa (Szöul, Stuttgart, New York). Rapoport et al (2009) vizsgálják a Braess paradoxont experimentális eszközökkel.

Ha több, mint két kiszolgálós torlódási játékokat veszünk, akkor már van értelme az  $SCE$  és a  $WCE$  hatékonyságát összehasonlítani. Egyelőre úgy tűnik, hogy a szimuláció és az "átlagos-elemzés" eszköze áll rendelkezésre, de további kutatások akár analitikus eredményeket is hozhatnak.

## 2.4. A gyenge és a puha korrelált egyensúly extenzív formában adott játékok esetében

Az *SCE* protokollját eddig normál formában adott játékokra alkalmaztuk. A következőkben azt vizsgáljuk, hogyan lehet ezt a protokollt az extenzív, és ezen belül is a véges tökéletes információjú játékokra alkalmazni. Mondhatnánk azt, hogy nincs itt semmi probléma: alakítsuk át az extenzív formát normál formára (teljes, vagy redukált) és alkalmazzuk az *SCE*-t úgy, ahogy azt eddig tettük. Ez azonban még kisméretű játékoknál is óriási méretnövekedést jelent és gyakorlatilag kezelhetetlenné válik a probléma a változók és ösztönző feltételek exponenciálisan növekvő száma miatt. Ezért azt szeretnénk, hogy az *SCE* protokollját direktben alkalmazzuk, megfelelő módosítással, az eredeti extenzív formában adott játékokra úgy, hogy a probléma számítástechnikailag kezelhető maradjon és lehetőleg tudjunk javítani a *NEP*-hez tartozó *SW*-n.

A *CE* protokolljának alkalmazását extenzív játékokra többen tanulmányozták különböző modellekben, Forges (1986), Forges (1993), Myerson (1986), von Stengel és Forges (2007). Az alapötlet és alkalmazás klímátárgyalási játékokra először Forgó et al (2005)-nél jelenik meg. Az alkalmazott modellhez talán von Stengel és Forges (2007) "ügynök-alakú korrelált egyensúly"-a (agent-form correlated equilibrium, *AFCE*) áll a legközelebb. Az alapvető különbség a mi és von Stengel és Forges (2007) megközelítése között az, hogy nálunk a randomizáció a játéka levelein történik és nem az információs halmaz lehetséges lépésein. Ezt az teszi lehetővé, hogy a vizsgálatunk tökéletes információjú játékokra (minden információs halmaz egy elemű) vonatkozik, ahol a játéka minden pontjához tartozó elérési valószínűségek egyértelműen kiszámíthatók a levelek elérési valószínűségeiből.

Nézzük meg egy kicsit közelebbről von Stengel és Forges (2007) modelljeit. Az első, ahogy azt ők nevezték, az extenzív formájú korrelált egyensúly (extensive form correlated equilibrium, *EFCE*). Az *EFCE*-t teljes emlékezetű extenzív formájú játékokra definiálták. A *CE* szellemének megfelelően először a játékvezető egy min-

denki által ismert valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy lépést minden információs halmazban. Ezt, mint az ő javaslatát, elhelyezi egy lezárt borítékban. Ezt a borítékot akkor adja át annak a játékosnak, akinek éppen lépnie kell, amikor a játék ahhoz az információs halmazhoz ér, amikor az adott játékos van lépésen. A játékos a boríték kinyitása után vagy megfogadja a tanácsot, vagy nem és akkor szabadon azt csinál, amit akar. A valószínűségeloszlás egy *EFCE*, ha egyik játékosnak sem érdeke a javaslatot nem elfogadni, feltéve, hogy a többiek elfogadták a javaslatot, akkor amikor lépésen voltak. A játék lefolyása során a legtöbb borítékot ki sem nyitják, hiszen a játék lejátszása során általában elég kevés információs halmazt érintünk.

A randomizáció más forgatókönyv szerint is történhet. Hozzárendelünk minden információs halmazhoz egy ügynököt (agent), aki csak akkor végzi el a sorsolást és a javaslattevést, ha a játék ahhoz az információs halmazhoz jut el, amelynek ő az ügynöke. Itt jóval kevesebb boríték van, hiszen a nem érintett információs halmazoknál nincs is sorsolás. Persze az információs halmazhoz rendelt valószínűségeloszlásokat mindenki ismeri, és ha valaki nem fogadja el a javaslatot, akkor azt tesz, amit akar. Egyensúlyban, vagyis az *AFCE*-ban, egyik játékosnak sem érdeke a javaslatot nem elfogadni feltéve, hogy a többiek elfogadják. Egy variációt kaphatunk, ha úgy módosítjuk a protokollt, hogy a játékosok minden információs halmaznál, ahova a játék eljutott, dönthetnek arról, hogy vakon engedelmeskednek az ügynöknek (eleve elfogadják a javaslatát, anélkül, hogy tudnák mi az) vagy nem és akkor azt tesznek, amit akarnak. Az egyensúlyt hasonló módon definiáljuk. Ez a forgatókönyv tekinthető a *WCE* extenzív játékokra való lehetséges adaptációjának. Ha a forgatókönyvet úgy módosítjuk, hogy ha a játékos nem kötelezi el magát előre, hogy vakon elfogadja az ügynök javaslatát, akkor bármilyen lépést választhat, csak azt nem, ami az ügynök javaslata, akkor az *SCE* alapötletének egy lehetséges alkalmazását kapjuk extenzív játékokra. Mi azonban más utat választunk. Ennek oka az, hogy a randomizálást, csakúgy, mint a normál forma esetében, a kimenetek (a fa levelei) halmazán szeretnénk megtenni.

Véges normál formájú játékoknál a stratégiaprofilokon és a kifizetések halmazán

való randomizálás lényegében ugyanaz. Az extenzív formájú játékoknál a kifizetések a játéka levelein történnek meg és a levelek száma sokkal kisebb a stratégiák számánál, még akkor is, ha a tökéletes információjú véges játékokra korlátozzuk magunkat, mint ahogyan azt meg is tesszük.

A legegyszerűbb esetet vizsgáljuk: a véges, két-személyes tökéletes információjú játékokat, ahol nincs szerepe az externális véletlennek (no chance moves) a lépések kiválasztásánál és minden kifizetés különböző.

Tökéletes információjú véges extenzív játékoknál a játéka leveleihez (végpontokhoz) rendelt valószínűségeloszlásból egyértelműen ki tudjuk számolni az egyes döntési pontokhoz tartozó feltételes valószínűséget és természetesen fordítva is, a feltételes valószínűségekből a levelek valószínűségeit. A döntési pontokhoz tartozó feltételes valószínűségeket viselkedési (behavioral) valószínűségeknek fogjuk nevezni, ami összhangban van a viselkedési stratégiák szokásos definíciójával (lásd Forgó et al (2006)).

Legyen  $T = (V, E)$  a  $G$  véges, tökéletes információjú extenzív játék fája, ahol  $V$  a csúcspontok (döntési pontok és levelek) halmaza,  $E$  az élek halmaza. A levelek  $L$  halmazán értelmezett  $p$  valószínűségeloszlást fa-korrelált stratégiának (tree-correlated strategy) nevezzük. Ezt a minden játékos által ismert eloszlást használva a játékvezető minden egyes döntési pontban kisorsol egy lépést és javaslatot tesz az abban a pontban döntéshozó játékosnak, hogy melyik lépést válassza. Attól függően, hogy a játékosok mekkora mértékű elkötelezettséget vállalnak, a  $CE$ ,  $WCE$  és az  $SCE$  "viselkedési" változatát kapjuk, amit a  $TCE$ ,  $TWCE$  és  $TSCE$  rövidítésekkel jelölünk (A  $T$  első betű a "tree" szóra utal). Ha semmilyen elkötelezettséget sem vállalnak, akkor a  $TCE$ -t, ha teljes az elkötelezettség, de ha ezt a játékos nem vállalja, akkor bármit léphet, a  $TWCE$ -t, és ha nem kötelezi el magát, akkor bármit léphet annak a kivételével, ami ki lett sorsolva, az  $TSCE$ -t. A teljes protokollban arról is kell rendelkezni, hogy mi történjék akkor, ha a játékvezető javaslatát nem fogadják el valamikor a játék lejátszása folyamán. Elméletileg megengedve más lehetőségeket is, alapvetően azzal a feltételezéssel élünk, hogy amikor először történik ez meg a játék

folyamán, a játékvezető beszünteti tevékenységét és ettől a ponttól kezdve a játék játékvezető és mindenféle javaslattevés, bármiféle korreláció nélkül folytatódik, és a maradék részjáték egyetlen *NEP*-jének kifizetése realizálódik.

Összefoglalva: A randomizáció egy adott csúcspontban a következőképpen zajlik le. A játékvezető kisorsol egy lépést az adott (feltételes) valószínűségeloszlás szerint. Ekkor háromféle forgatókönyv van.

- a) *TCE*: A játékvezető a választott lépést javasolja annak a játékosnak, aki a csúcsponthoz van rendelve. A játékos vagy elfogadja a javaslatot és ennek megfelelően lép, vagy nem és választ egy másik lépést. A második esetben vagy vége van a játéknak és megtörténnek a kifizetések, vagy ha nincs, akkor a játékvezető visszavonul és a játék játékvezető nélkül folytatódik tovább.
- b) *TWCE*: Amikor a játék elérkezik egy csúcspontba, és a játékvezető sorsolt, akkor megkérdezi a csúcspontba rendelt játékost, hogy akarja-e a tanácsát vakon követni. Ha a felelet igen, akkor közli a javaslatot és a játékosnak ezt kell lépnie. Ha nem kívánja a játékos elkötelezni magát, akkor nem kap semmilyen tanácsot és azt lép, amit akar. A játékvezető ekkor is visszavonul és a soron következő részjátékban játékvezető nélkül folyik a játék tovább.
- c) *TSCE*: A forgatókönyv ugyanaz, mint a *TWCE* esetében, azzal a változtatással, hogy ha a játékos nem akarja vakon követni a játékvezető javaslatát, akkor bármit választhat annak a lépésnek a kivételével, amelyet a játékvezető javasolt volna, ha a játékos elkötelezte volna magát.

Mindhárom (*TCE*, *TWCE*, *TSCE*) forgatókönyv esetében a játéka levelein értelmezett valószínűségeloszlást egyensúlyinak nevezzük, ha várható értékben egyik játékos sem tudja a kifizetését javítani azzal, ha nem veszi igénybe és nem fogadja meg a játékvezető javaslatait minden olyan csúcspontban, amikor ő következik lépésre, feltéve, hogy az összes többi játékos kéri a játékvezető javaslatát és meg is fogadja azt.

Jegyezzük meg, hogy abban a részfában, amelyben már nincs játékevezető és amely véges, tökéletes információjú extenzív játék, egyetlen részjáték tökéletes *NEP* létezik, amelyet a visszafelé indukció módszerével határozhatunk meg a jól ismert módon (lásd Osborne és Rubinstein (1994) és Forgó et al (2006)). A *NEP* unicitását az a feltételünk biztosítja, amely szerint minden kifizetés különböző.

## 2.5. Részjáték tökéletes puha fa-korrelált egyensúly

Részjáték tökéletesség a legerőteljesebb finomítási eszköz az extenzív játékok körében. Amióta Selten (1975) bevezette a fogalmat, szinte alapvető dolog, hogy az extenzív formájú játékokban megköveteljük illetve biztosítsuk a teljesülését, ami tulajdonképpen a nem hihető fenyegetések kizárását jelenti. Elég természetes, hogy a három fa-korrelált egyensúlytól is követeljük meg valamely formájának teljesülését. Ez ebben az esetben azt jelenti, hogy a *TCE*, *TWCE*, *TSCE*, hogy ha egy részjátékra (részfára) korlátozzuk a játékot és az egész játékban egyensúlyi valószínűségeloszlást kicseréljük arra az eloszlásra, amely azokat a feltételes valószínűségeket rendel a részfa leveleihez, amelyek az egész fára vonatkozó valószínűségek azzal a feltétellel, hogy a részfa gyökerét elértük, az így kapott valószínűségek a részfában is alkossanak egyensúlyi (*TCE*, *TWCE*, *TSCE*) valószínűségeloszlást. A részjáték tökéletesség megóvjá a játékevezetőt attól, hogy a hitele csorbuljon azáltal, hogy módosítgatja a valószínűségeket a játék lejátszásának folyamán. Ez annál is kínosabb, mert a játék kezdetén a levelek elérési valószínűségei mindenki számára publikussá váltak. Amint az mindjárt kiderül, a részjáték tökéletesség megkövetelése túl sok a *TCE*, *TWCE* esetében. Az általánosítás elveszíti erejét és nem marad más, mint a Nash-egyensúly.

**2.20. tétel** (Forgó (2011)). *Ha megköveteljük a részjáték tökéletességét, akkor a TWCE (és ezáltal a TCE sem) nem tudja Pareto-javítani a NEP-et.*

*Bizonyítás.* Mivel feltettük, hogy minden kifizetés különböző és nincs externális véletlen, a visszafelé indukció egyetlen részjáték tökéletes *NEP*-et ad. Tegyük fel, hogy

a játéka gyökere legfelül van. Menjünk a fa aljától felfelé, mint ahogy azt tesszük a visszafelé indukció alkalmazásakor. Mindaddig, amíg egyetlen lépést (élt) sem zárunk ki a továbbhaladás lehetőségéből, mint ahogyan az a *TWCE* protokolljában szerepel is, az a játékos, aki az utolsó döntést hozza, nem tud többet elérni semmilyen randomizációval függetlenül az elkötelezettsége fokától, mint a legmagasabb kifizetése a megfelelő részében. Más szóval ebben a részében a *NEP* kifizetést kapja. Ezt a részét egy pontba sűrítve és levélnek tekintve a *NEP* kifizetéssel egy kisebb részéhez jutunk, ahol az előbbi eljárást megismételjük. Így haladva felfelé véges számú lépésben eljutunk a fa gyökeréig, és közben az egyetlen *NEP*-et határoztuk meg.  $\square$

Megjegyezzük, hogy ha a részjáték tökéletességet nem követeljük meg, akkor a 2.20. tétel állítása nem igaz. A *TSCÉ* viszont tud részjáték tökéletes Pareto-javítást produkálni, mint azt a későbbiek látni fogjuk.

Ha konkrét játékokra *TSCÉ*-ket szeretnénk meghatározni, akkor formálisan is meg kell konstruálni az ösztönző feltételeket.

A *TSCÉ* protokollja szerint az ajánlat visszautasítása csak egyszer fordulhat elő, amikor is a játékvezető visszavonul és ettől kezdve a játék kimenetele a visszafelé indukció alapján az egyetlen *NEP* a maradék részjátékban. Az adott  $\Gamma$  véges, tökéletes információjú extenzív játékban, amelynek a játékfája  $T = (V, E)$ , ahol  $V$  a csúcspontok,  $E$  pedig az élek halmaza, legyen  $p$  egy fa-korrelált stratégia (valószínűségeloszlás a levelek  $L$  halmazán). Mivel a visszautasítás bármelyik döntési pontban előfordulhat, ezért ugyanaz a típusú ösztönző feltétel tartozik a  $T$  fa minden döntési csúcspontjához. Tegyük fel, hogy a visszautasítás először az  $N$  csúcspontban történik meg, ahol az  $A$  játékosnak kell lépnie. Jelöljük azt a részjátékot, amely az  $N$  csúcspontban kezdődik  $G$ -vel. Legyenek az  $N$ -ből kiinduló élek  $e_1, \dots, e_k$ , amelyek a  $G_1, \dots, G_k$  részfákhoz vezetnek. Jelöljük a  $G_i$  részfa leveleiben az  $A$  játékos kifizetéseit  $c_{i_1}, \dots, c_{i_{r_i}}$ -vel,  $i = 1, \dots, k$ . A levelekhez tartozó  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{r_i}}$ ,  $i = 1, \dots, k$  valószínűségeket a  $p$  valószínűségeloszlás egyértelműen meghatározza. Így a  $G_i$  rész-

játékot  $q_i = \sum_{s_i=1}^{s_i=r_i} p_{i s_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$  valószínűséggel érjük el. A  $G$  játékot pedig  $q = \sum_{i=1}^k q_i = \sum_{i=1}^k \sum_{s_i=1}^{s_i=r_i} p_{i s_i} > 0$  valószínűséggel érjük el. Azok a (feltételes) valószínűségek, amelyekkel a játék az  $e_1, \dots, e_k$  élek mentén folytatódik  $\frac{q_1}{q}, \dots, \frac{q_k}{q}$ . Jelöljük az  $A$  játékos egyértelműen meghatározott  $NEP$  kifizetéseit a  $G_1, \dots, G_k$  részjátékokban  $f_1, \dots, f_k$ -el. Az  $A$  játékos  $C_i$  várható kifizetése a  $G_i$  részjátékban, ha elkötelezi magát amellelt, hogy megfogadja a játékvezető tanácsát a következő:

$$C_i = \frac{1}{q_i} \sum_{s_i=1}^{s_i=r_i} p_{i s_i} c_{i s_i},$$

a  $C$  várható kifizetése a  $G$  játékban pedig

$$C = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{q} C_i = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^k \sum_{s_i=1}^{s_i=r_i} p_{i s_i} c_{i s_i}.$$

Ha az  $A$  játékos nem akar vakon engedelmességni, akkor abban a részjátékban, amit választ, a  $NEP$  kifizetését kapja. Így ekkor a várható kifizetése

$$\sum_{i=1}^k \frac{q_i}{q} \max_{j \neq i} f_j.$$

Mindkét oldalt megszorozva  $q$ -val kapjuk az  $N$  csúcsponthoz tartozó ösztönző feltételt, ami a következő lineáris egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{s_i=1}^{s_i=r_i} p_{i s_i} c_{i s_i} \geq \sum_{i=1}^k \sum_{s_i=1}^{s_i=r_i} p_{i s_i} \max_{j \neq i} f_j. \quad (2.19)$$

Amikor a  $B$  játékos lép, akkor ugyanilyen típusú ösztönző feltételeket kapunk.

**2.21. példa.** Tekintsük a jól ismert "százlábú" játékot (lásd Osborne és Rubinstein (1994), Forgó et al (2006)), ami jelen esetben legyen négy lábú (a két játékos négyszer felváltva dönt és vagy a "megáll" vagy a "folytat" döntést hozza). Az  $A$  játékos kezd, és ha megáll, akkor a kifizetések  $(1, 0)$  és  $(3, 2)$ . Amikor a  $B$  játékos megáll, akkor a kifizetések  $(0, 3)$  és  $(2, 5)$ .  $B$  játékos hozza az utolsó döntést és ha a "folytat" döntést hozza, a játéknak vége és a kifizetések  $(5, 4)$ . A részjáték tökéletes  $TSC$ -k az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer nem negatív lehetséges megoldásai:

$$\begin{aligned}
-p_4 + p_5 &\leq 0 \\
-p_3 + p_4 - 2p_5 &\leq 0 \\
-p_2 + p_3 - 2p_4 - p_5 &\leq 0 \\
-p_1 + p_2 - 2p_3 - p_4 - 4p_5 &\leq 0 \\
p_1 + p_2 + 3p_3 + p_4 + p_5 &= 1 \\
p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 &\geq 0 .
\end{aligned} \tag{2.20}$$

A játékfa leveleit a  $p_1, \dots, p_5$  valószínűségekkel érjük el. Mind a négy döntési ponthoz tartozik egy ösztönző feltétel. Például, amikor az  $A$  játékos másodszorra lép, akkor a várható kifizetése, ha elkötelezi magát az engedelmességre:

$$\frac{p_3}{p_3 + p_4 + p_5} 3 + \frac{p_4}{p_3 + p_4 + p_5} 2 + \frac{p_5}{p_3 + p_4 + p_5} 5 ,$$

míg, ha ezt nem teszi, a játékvezető visszavonul és a maradék részében a 3 *NEP*-kifizetést  $\frac{p_4 + p_5}{p_3 + p_4 + p_5}$  valószínűséggel, a 2 *NEP*-kifizetést  $\frac{p_3}{p_3 + p_4 + p_5}$  valószínűséggel kapja. Így kapjuk a

$$3p_3 + 2p_4 + 5p_5 \geq 2p_3 + 3p_4 + 3p_5$$

ösztönző feltételt, ami a második egyenlőtlenség (2.20)-ban.

Könnyű látni, hogy a  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = 1/2, p_5 = 1/2$ , megoldás kielégíti az ösztönző feltételeket és így egy *TSCÉ*. Ennek értelmében egészen az utolsó előtti döntési pontig mindkét játékos folytatja a játékot, majd a két utolsó döntési pontban  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel folytatnak, vagy megállnak. Azt is könnyű bebizonyítani, hogy attól függetlenül, hogy hány lába van a "százlábúnak", az a fa-korrelált stratégia, amelyben az utolsó előtti és az utolsó döntési pontban  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel állnak meg vagy folytatják a játékosok, míg egészen odáig egyöntetűen a folytatás mellett döntenek, egy *TSCÉ*. Nyilvánvalóan a várható kifizetés sokkal több, mint az egyetlen *NEP*-ben, ahol a játék azonnal megáll.

Annak a feltételezése, hogy a javaslat elutasításakor a játékvezető visszavonul és utána a *NEP* felé halad a játék, túl szigorúnak tűnhet. Az ösztönző feltételt

általánosíthatjuk, ha ezzel a feltételezéssel nem élünk. Helyette tegyük fel, hogy van egy  $h_N$  függvény minden  $N$  döntési pontnál, amely minden olyan véges, tökéletes információjú extenzív játékhoz, amelynek a gyökere  $N$ , hozzárendel egy kimenetelt és egyúttal kifizetést, ami akkor realizálódik, ha a játék az  $N$  csúcspontba ér és ott a játékvezető visszavonul. Ezt a függvényt akár "fenyegetés függvénynek" is nevezhetnénk, hiszen minden játékosnak azt kell mérlegelnie, hogy elkötelezi-e magát a játékvezető javaslatainak követésére, ellenkező esetben a fenyegetés realizálódik és ennek megfelelően alakul a kifizetése. A pesszimista megközelítés az lenne, ha mind  $A$ , mind  $B$  játékos a maxmin kifizetéssel számol a saját szempontjából az  $N$ -el kezdődő részében. Mivel a maxmin kifizetés soha sem nagyobb a  $NEP$  kifizetésnél, az ösztönző feltétel nem lesz szigorúbb, mint a (2.19)-ben definiált feltétel (enyhébb igencsak lehet), így több lehetőség keletkezik egy kívánatos kimenetel elérésére. Ha az optimista megközelítést alkalmazzuk és a  $NEP$ -nél jobb kifizetésekkel számolunk (2.19) jobboldalán, akkor nagyon könnyen előfordulhat, hogy a  $TSC$ -k halmaza üres lesz, mivel ilyenkor valamelyik (vagy mindkettő) játékos számára kifizetődőbbé válik a vak engedelmesség megtagadása.

Egy másik forgatókönyvet kapunk, ha az  $AFCE$  és a  $TSC$  protokolljait kombináljuk a következőképpen. A javaslattól való eltérés csak egyszer fordulhat elő ( $AFCE$ ) és az eltérő játékos csak azok közül a lépések közül választhat, amelyek nem lettek javasolva. Ez a forgatókönyv egy olyan helyzetet modellez, amikor a játékvezető nem sértődik meg attól, hogy nem fogadták meg a javaslatait és a továbbiakban is adja a javaslatait (ezeket viszont meg fogják fogadni, hiszen csak egyszer lehet eltérni) jobb kimenetel elérése érdekében. Az a korlátozás, hogy csak egyszer lehet eltérni, valamiféle stabilitást fejez ki: egyensúlyban (ezt puha ügynök-alakú korrelált egyensúlynak, röviden  $SAFCE$ -nek nevezzük) egy játékosnak nem éri meg egy ügynöke javaslatát sem ignorálni, feltéve, hogy mindenki más (beleértve saját magát is a játék későbbi fázisában) megfogadja az ügynök tanácsát.

A  $SAFCE$  ösztönző feltételeit is úgy számoljuk ki, hogy összehasonlítjuk az engedelmesség és az eltérés várható kifizetését és megköveteljük, hogy az engedelmes-

séggel ne lehessen rosszabb kifizetést elérni, mint annak megtagadásával. Ugyanazon az úton haladunk, mint azt a *TSCÉ* esetében tettük és ugyanazokat a jelöléseket is használjuk. Tegyük fel, hogy a játékvezető segítségét először (és feltételezésünk szerint utoljára is) az  $N$  csúcspontnál utasítja el az  $A$  játékos, akinek ott lépnie kell. Ha az  $N$  csúcspontban az  $e_i$  él lett kisorsolva és az  $A$  nem kötelezi el magát a vak engedelmességre, akkor a legnagyobb kifizetés, amit kaphat a  $G$  részjátékban

$$\sum_{r=1}^{r=k} \frac{q_r}{q} \max_{j \neq i} C_j ,$$

és így az ösztönző feltétel a következő:

$$\sum_{r=1}^{r=k} \frac{q_r}{q} C_r \geq \sum_{r=1}^{r=k} \frac{q_r}{q} \max_{j \neq i} C_j ,$$

ami mindkét oldal  $q$ -val való beszorzása után így alakul

$$\sum_{r=1}^{r=k} q_r C_r \geq \sum_{r=1}^{r=k} q_r \max_{j \neq i} C_j .$$

Ez azonban sajnos nem lineáris egyenlőtlenség, ami egy óriási akadály a gyakorlati alkalmazásokban. Könnyű megmutatni, hogy az egyetlen *NEP*-ből nyert fa-korrelált egyensúly egy *SAFCE*, így ebből kiindulva lokális kereséssel remény van arra, hogy tudunk rajta Pareto-javítani. Az alábbi tétel azt mondja ki, hogy valódi általánosításról van szó.

**2.22. tétel** (Forgó (2011)). *Nem az egyértelműen meghatározott NEP az egyetlen SAFCE.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a játékfa hossza (a gyökeret a levelekkel összekötő leghosszabb ösvény éleinek száma)  $L$  és egy olyan  $D$  döntési pontban vagyunk, amely egy lépésre van egy levélről (ez 1 hosszúságú részfa) és itt az  $A$  játékos van lépésen: választania kell az  $l_1, \dots, l_k$  levelek közül, amelyekhez tartozó kifizetései  $b_1, \dots, b_k$ . A  $D$  csúcspontban az ösztönző feltétel

$$\sum_{i=1}^{i=k} p_i b_i \geq \sum_{i=1}^{i=k} p_i \max_{j \neq i} b_j ,$$

ahol  $p_1, \dots, p_k$  az egyes lehetséges lépések valószínűségei. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $b_1 > b_2 > \dots > b_k$ . Azonnal látható, hogy bármely valószínűségeloszlás, ahol  $p_1 \geq 1/2$  kielégíti az ösztönző feltételt. Válasszunk és rögzítsünk egy olyan valószínűségeloszlást, ahol  $1/2 \leq p_1 < 1$  minden 1 hosszúságú részfára. Definiáljunk most egy játékfát, amelynek hossza  $L - 1$  és minden levél egy olyan részfát reprezentál, amelynek a hossza 1, és a kifizetések a játékosok várható kifizetései az arra részfára rögzített valószínűségekkel számolva. Ezt az eljárást megismételjük mindaddig, amíg elérjük a gyökeret. Végül egy *SAFCE*-t kapunk, ha a leveleket a gyökérrel összekötő út mentén az egyes valószínűségeket összeszorozzuk és az így kapott valószínűségeket rendeljük a levelekhez. Ezek a konstrukcióból következően egy *SAFCE*-t adnak, amely nem tartozhat egyetlen *NEP*-hez sem. Valóban, az így meghatározott *SAFCE*-hoz tartozó valószínűségek 1-nél kisebbek, mert az első tényező kisebb 1-nél, míg az egyetlen *NEP* esetében egy levélhez az 1 valószínűség és az összes többi levélhez a 0 valószínűség tartozik.  $\square$

Ebből a bizonyításból látszik, hogy az előbbi konstrukcióval, lényegében visszafele indukcióval, elő tudunk állítani egy (általában nagyon sok) *SAFCE*-t. Arra viszont semmi garancia nincs, hogy minden *SAFCE* előállítható így módon.

**2.23. példa.** A konstrukció szemléltetésére tekintsük a 2.21. példában vizsgált négy lábú játékot. Jelöljük az  $A$  és  $B$  játékosok első és második döntési pontját  $A1$ ,  $A2$  és  $B1$ ,  $B2$ -vel, a "folytat" lépés választásának valószínűségét az  $A1$ ,  $B1$ ,  $A2$ ,  $B2$  pontokban rendre  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ -el. Az ösztönző feltételek fordított sorrendben az egyes döntési pontokban az alábbiak:

$$B2 : 4s + 5(1 - s) \geq 5s + 4(1 - s)$$

$$A2 : 3(1 - r) + 2r(1 - s) + 5rs \geq 3r + (5s + 2(1 - s))(1 - r)$$

$$B1 : 3(1 - q) + 2(1 - r)q + 5r(1 - s)q + 4rsq \geq \\ 3q + (2(1 - r) + 5r(1 - s) + 4rs)(1 - q)$$

$$A1 : 1 - p + 3q(1 - r)p + 2qr(1 - s)p + 5qrsp \geq \\ p + (3q(1 - r) + 2qr(1 - s) + 5qrs)(1 - p) .$$

Ezek az egyenlőtlenségek az első kivételével mind nem lineárisak. Ez még akkor is így marad, ha a  $p, q, r, s$  viselkedési valószínűséget a levelek  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  valószínűségeivel fejezzük ki. Vagyis

$$\begin{aligned} s &= \frac{p_5}{p_4 + p_5} \\ r &= \frac{p_4 + p_5}{p_3 + p_4 + p_5} \\ q &= \frac{p_3 + p_4 + p_5}{p_2 + p_3 + p_4 + p_5} \\ p &= p_2 + p_3 + p_4 + p_5 . \end{aligned}$$

Egy *SAFCE* megtalálása céljából válasszuk az  $s = 1/4$  értéket, amely kielégíti a  $B2$  egyenlőtlenséget. Ekkor a játékosok várható kifizetései a  $B2$  döntési pontban  $(11/4, 19/4)$ . Ezeket az értékeket rögzítve, az  $A2$  ösztönző feltétel az alábbi lesz

$$3(1 - r) + \frac{11}{4}r \geq 3r + \frac{11}{4}(1 - r) .$$

Válasszunk egy tetszőleges  $r$  értéket, amely kielégíti a fenti feltételt, mondjuk  $r = 1/3$ . A várható kifizetés  $A2$ -ben az eddig rögzített valószínűségekkel számolva  $(35/12, 35/12)$ . Így az ösztönző feltétel  $B1$ -ben:

$$3(1 - q) + \frac{35}{12}q \geq 3q + \frac{35}{12}(1 - q) .$$

Válasszuk  $q = 1/2$ -öt, amely kielégíti a fenti egyenlőtlenséget és számoljuk ki a várható kifizetéseket  $B1$ -ben, amely a következő:  $(35/24, 71/24)$ . Így  $A1$ -ben az ösztönző feltétel

$$1 - p + \frac{35}{24}p \geq p + \frac{35}{24}(1 - p) .$$

Válasszuk a  $p = 3/4$ -et, amely kielégíti a fenti feltételt. Most már megvannak a  $p = 3/4$ ,  $q = 1/2$ ,  $r = 1/3$ ,  $s = 1/4$  viselkedési valószínűségek, amelyekből egyszerűen ki lehet számolni a levelek valószínűségeit:  $p_1 = 8/32$ ,  $p_2 = 12/32$ ,  $p_3 = 8/32$ ,  $p_4 = 3/32$ ,  $p_5 = 1/32$ , ami könnyen ellenőrizhetően egy *SAFCE*. Az is kiderül, hogy ez egyúttal egy *TSCCE* is, de ez nyugodtan tekinthető véletlennek is, semmi garancia nincs arra, hogy ezzel a konstrukcióval egyúttal egy *TSCCE*-t kapunk.

Ha a *TSCCE* definícióját figyelmesen megnézzük, akkor láthatjuk annak fontosságát, hogy a részjátékokban mindkét játékosnak egyértelműen meghatározott *NEP* kifizetése legyen. Az externális véletlen kizárása és a különböző kifizetések feltételezése csak egy elégséges feltétel ahhoz, hogy ez a feltétel teljesüljön. Összehasonlítva, a *SAFCE* esetében ez a feltétel elhagyható, mivel a részjátékok *NEP* kifizetéseinek semmilyen szerepe sincs az ösztönző feltételek definíciójában.

## 2.6. Optimalizálás a fa-korrelált egyensúlyok halma- zán

Rendszerint sok korrelált stratégia van, amely kielégíti az ösztönző feltételeket. Ha kombinálni szeretnénk a stabilitást, amelyet az ösztönző feltételek fejeznek ki és amelyeket a különböző protokollokból vezetünk le, és ki szeretnénk választani a játékvezető (vagy valamilyen más személy vagy testület) szempontjából a lehetséges korrelált egyensúlyok közül a legjobbat (optimálisat), akkor egy optimumfeladatot kell megoldanunk.

A fa-korrelált egyensúly esetében a változók a fa minden egyes  $l \in L$  leveléhez

rendelt valószínűségek (ezeknek az összege 1 kell legyen). Azon túl, hogy a fa leveleihez a játékosok által elért hasznosságot rendeljük, amit akkor tudnak elérni, ha a játék abban a levélben végződik, minden egyes fa-korrelált egyensúlyhoz hozzárendeljük azt a hasznosságot, amelyet a játékvezető (vagy valamilyen mögötte álló szervezet) ér el. Speciális eset az, ha minden levélhez egy valós számot rendelünk hozzá, ami azt a hasznosságot reprezentálja, amelyet a játékvezető ér el akkor, ha a játék az adott levélben végződik. Ezeknek a hasznosságoknak a várható értékét a fa-korrelált egyensúly valószínűségeivel számolva kapjuk a játékvezető várható hasznosságát, ami a valószínűségek lineáris függvénye. Ebben a speciális esetben a játékvezető várható hasznosságának maximalizálása a fa-korrelált egyensúly lineáris ösztönző feltételei mellett egy  $LP$  feladat. A játékvezető hasznossági függvényének nem kell köztudottnak lenni.

Ha a  $SAFCE$ -k halmazán akarunk optimalizálni, akkor a nem lineáris feltételek komoly problémákat okozhatnak. Az optimalizálás sokkal egyszerűbbé válik, ha egy új módszerrel úgy nevezett "részjáték tökéletes optimalizálást" végzünk, Forgó (2011). Ennek az ötlete a visszafelé indukción alapszik. Ugyanúgy haladunk a fa aljától felfelé, mint azt tettük, amikor csak egy, a  $NEP$ -től különböző  $SAFCE$ -t akartunk meghatározni. A különbség az, hogy akkor egy tetszőleges lehetséges megoldását kerestünk az egyváltozós lineáris egyenlőtlenségnek, most pedig egy optimálisat. A dolgot nagyban egyszerűsíti, hogy minden szinten csak egyváltozós optimumfeladatokat kell megoldani, amire nagyon általános célfüggvények esetében is igen hatékony módszerek léteznek.

Az algoritmus részletes formális leírása helyett inkább egy példán keresztül mutatjuk meg, hogyan működik.

**2.24. példa.** Vegyük ismét a 2.21. és 2.23. példában szereplő négy lábú játékot és a következő célfüggvényt

$$p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 \rightarrow \max$$

## dc\_837\_14

A részjáték tökéletes optimális megoldás meghatározásához először a levelekhez rendelt valószínűségeket viselkedési valószínűségek szorzatává alakítjuk át és így a célfüggvény az alábbi alakú lesz:

$$1 - p + 3p(1 - q) + 5pq(1 - r) + 7pqr(1 - s) .$$

Első lépésként oldjuk meg a játékvezető optimumfeladatát a *B2* döntési pontban:

$$\begin{aligned} 7(1 - s) &\rightarrow \max \\ \text{s.t. } 4s + 5(1 - s) &\geq 5s + 4(1 - s) \\ 0 &\leq s \leq 1 \end{aligned}$$

ahol  $s$  jelenti a folytatás valószínűségét. Az optimális megoldás  $s = 0$ . Így a visszafelé indukció szellemében mindenki tudja, hogy ha a játék a *B2* pontba jut, akkor a kifizetés a játékosoknak rendre 2 és 5 lesz, a célfüggvény érték pedig 7. Ez azért van így, mert a játékvezető javaslatától való eltérés csak egyszer fordulhat elő a *SAFCE* definíciója szerint. Ezért a játékvezető az *A2* pontban a következő *LP* feladatot oldja meg:

$$\begin{aligned} 7r + 5(1 - r) &\rightarrow \max \\ \text{s.t. } 2r + 3(1 - r) &\geq 3r + 2(1 - r) \\ 0 &\leq r \leq 1 \end{aligned}$$

amelynek a megoldása  $r = 1/2$ . Így mindenki azt hiszi a *B1* döntési pontban, hogy ha  $B$  játékos a "folytat" lépést választja, akkor a játékosok várható kifizetései rendre  $5/2$  és  $7/2$ , míg a célfüggvény érték 6. A "megáll" lépés a játék leírása szerint a 0 és 3 kifizetéseket adja és a célfüggvény érték 3. Így most a játékvezető a következő feladatot oldja meg:

$$\begin{aligned} 6q + 3(1 - q) &\rightarrow \max \\ \text{s.t. } 3,5q + 3(1 - q) &\geq 3q + 3,5(1 - q) \\ 0 &\leq q \leq 1 \end{aligned}$$

A megoldás  $q = 1$ . Hasonlóan tudjuk kiszámolni, hogy  $p = 1$ , vagyis az  $A$  játékos az első döntési pontjában,  $A1$ -ben azt a tanácsot kapja, hogy folytassa a játékot. Mindent összerakva, azt kaptuk, hogy a részjáték optimális *SAFCE* a következő: Mind  $A$  mind  $B$  játékos először azt a tanácsot kapja, hogy játsszák a "folytat"-ot, aztán az  $A$  játékos  $1/2$  valószínűséggel kapja a "megáll" és a "folytat" tanácsot a játékvezetőtől és végül a  $B$  játékos a  $B2$  pontban azt a tanácsot kapja, hogy álljon meg, ha a játék eljut egyáltalán odáig. A részjáték tökéletes optimális viselkedési valószínűségek:

$$p = 1, q = 1, r = \frac{1}{2}, s = 0,$$

vagy másképpen

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = \frac{1}{2}, p_4 = \frac{1}{2}, p_5 = 0.$$

A célfüggvény érték 6. Ez a megoldás éppenséggel optimális a *SAFCE*-k halmazán is, de mint azt korábban is említettük, ezt általában nem lehet garantálni.

**2.25. tétel** (Forgó (2011)). *Rögzített döntési csúcspontszám mellett a részjáték tökéletes optimalizálásnak a SAFCE-k halmazán lineáris célfüggvény esetében az időigénye a játékfa éleinek lineáris függvénye.*

*Bizonyítás.* Az algoritmus szerint minden döntési pontban egy olyan *LP* feladatot kell megoldanunk, amelynek (a nem negatívítási feltételeken kívül) két feltétele van: egy ösztönző feltétel és egy normalizáló feltétel. Dyer (1984) bebizonyította, hogy ez a probléma a változók számában (vagyis a csúcspontból kimenő élek számában) lineáris idő alatt megoldható. A részjáték tökéletes optimalizálás során minden döntési pontban egy ilyen feladatot kell megoldani és így a feladat az egész fán az összes élek számában lineáris idő alatt oldható meg.  $\square$

Láthattuk, hogy minden döntési pontban a megoldandó feladatnak annyi változója van, amennyi az onnan kiinduló élek száma. Sőt, a normalizáló egyenlőségéből

egy változó kifejezésével a változók száma eggyel csökken. Ezért kevés változó esetében szinte minden célfüggvénnyel kezelhető a feladat. Ugyanez a helyzet, ha ugyan sok változó van, de a célfüggvény konkáv.

## 2.7. Egy alkalmazás

A *TSCCE* gondolata először az Európai Unió megbízásából, a széndioxid kibocsátás csökkentésére alkalmazott stratégiák vizsgálatának témakörében írt tanulmányban (SIADCERO) vetődött fel, Tóth et al (2001), majd a tanulmány játékelméleti vonatkozásait tárgyaló cikkben Forgó et al (2005) részletesebben is ki lett fejtve. A használt komplex modell egy extenzív formában adott játék köré épül. A játékosok különböző országcsoportok, amelyek bizonyos időpontokban hozhatnak döntéseket arról, hogy mekkora erőfeszítéseket tegyenek egy adott periódusban a GHG (üvegházhatású) gázok atmoszférikus koncentrációjának csökkentésére. A játékosok szekvenciálisan (nincsenek szimultán döntések), adott sorrendben, döntenek a GHG csökkentésre tett erőfeszítés mértékéről (véges számú lehetőségből választhatnak), saját maguk és a többiek korábbi döntéseit ismerik. Az utolsó periódus végén történnek meg a kifizetések, amelyeket a Nordhaus és Yang (1996) kombinált éghajlat és makroökonómiai modell segítségével számoltunk ki. A modell részletei megtalálhatók az idézett SIADCERO tanulmányban. Csak annyit említünk meg itt, hogy az illető játékos (országcsoport) országainak az egész időhorizonton vett, jelenértékre visszadiszkontált fogyasztása jelenik meg a játékfa végpontjaiban. A stratégia választás szerepe ott jön be a képbe, amikor a periódusokon keresztül megválasztott GHG redukcióra fordított költségek, amelyek az atmoszféra változásra, és ezen keresztül a gazdasági teljesítményre gyakorolt hatás következtében különböző kifizetéseket eredményeznek a fa leveleiben.

A legegyszerűbb változatban két játékos (országcsoport) van: az  $F$  (fejlett országok) és a  $D$  (fejldő országok) valamint három időperiódus: a Kyoto periódus (2000-2010), a post-Kyoto periódus (2011-2020) valamint a nyitott "forever" peri-

ódus (2021-). Először  $F$  lép a Kyoto periódusban, majd a post-Kyoto periódusban előbb  $D$  lép majd  $F$  és ugyanez történik a nyitott periódusban. Tehát a sorrend:  $F - D - F - D - F$ . Minden döntési pontban három lehetőség közül ( $N$ ,  $K$  és  $M$ ) választhatnak.  $N$  azt jelenti, hogy az illető játékos semmilyen extra erőfeszítést sem tesz a csökkentés érdekében, ennek szintje az 1990-es szinten marad. Az  $M$  a teljes elkötelezettséget jelenti a Kyoto ajánlás (18%) mellett. A  $K$  köztes érték a 12% -os vállalást jelenti.

Több megoldást is futtattunk, amelyek közül csak a  $NEP$ -et és a  $TSC$ E-t hasonlítjuk össze. A "játékvezető" célfüggvénye a várható globális hőmérséklet változás minimalizálása volt. A stabilitást az országcsoportok össz fogyasztására követeljük meg megfelelő ösztönző feltételekkel, míg a "globális jólét" növekedését a hőmérséklet növekedés csökkenése jelenti.

A  $NEP$  a fának ahhoz a leveléhez vezet, amely az alábbi ösvény végpontja:  $K - M - M - N - K$ . Ehhez 2,308  $C^0$  átlagos globális hőmérséklet emelkedés tartozik. A hőmérséklet növekedést minimalizáló  $TSC$ E a következő levelek keverése:

| Levél               | Valószínűség |
|---------------------|--------------|
| $K - M - M - N - K$ | 0,2125       |
| $K - M - M - N - M$ | 0,2125       |
| $K - M - M - K - N$ | 0,45         |
| $K - M - M - K - M$ | 0,125        |

Ehhez az alacsonyabb 2,255  $C^0$  (2,3%-al alacsonyabb, ami a globális méretek miatt igen jelentős) hőmérséklet növekedés tartozik.

A klímátárgyalások összefüggésében a "játékvezető" szerepének kiosztása nem különösebb probléma, bármely kellő felhatalmazással ellátott nemzetközi szervezet betöltheti. De még ez sem feltétlenül szükséges hozzá, mivel a sorsolás feladatát egy megfelelő sorsolási protokoll (igaz, hogy meglehetősen bonyolult) elfogadásával és végrehajtásával helyettesíteni lehet. Egy ilyen protokollra jó példa Bárány (1992) munkája. Más, lényegesen egyszerűbb mechanizmussal is lehet azonban helyettesí-

teni a sorsolást ebben a konkrét esetben.

Példaként tekintsük azt az esetet, amikor az  $A$  és  $B$  stratégiaprofilokból  $2/3 - 1/3$  valószínűségekkel kellene azt kiválasztani, amelyik majd a játékvezető javaslata lesz. Tegyük fel, hogy van egy bizottság, amelynek bizonyos pénzmennyiség áll rendelkezésre, hogy támogasson egy olyan előkészítő munkát, amelynek alapján a játékvezető javasolni fog. Ha ezt a pénzmennyiséget  $2/3 - 1/3$  arányban osztja szét az  $A$  és  $B$  támogatására és a siker (vagyis, hogy a játékvezető éppen az illető stratégia profilt támogatja) arányos a támogatására fordított pénzzel, akkor egy olyan sorsolást valósítottunk meg, amelyben nem szerepel semmilyen klasszikus és a döntéshozók által nem kedvelt randomizálás (pénzfeldobás, rulett kerék stb.).

## 3. fejezet

# Az L-Nash alkumegoldás

### 3.1. A Nash-alkumegoldás

Nash nem csak a nem-kooperatív játékok egyensúlyi vizsgálatának alapját fektette le, Nash (1950a), Nash (1951), hanem a kooperatív játékelmélet területén is elindított egy máig is virulens kutatási irányt, Nash (1950b), Nash (1953), amely különbözik a von Neumann és Morgenstern (1944) megközelítéstől. A Nash által vizsgált modell egyszerű, minden sallangtól megtisztított és csak a lényegre koncentrált: a lehetséges kimenetek halmazából (a hasznossági térben) kell egy elemet kiválasztani, amely jól fejezi ki a játékosok "alkupozícióját". A kiválasztott elemet alkumegoldásnak (bargaining solution) nevezte, ami később Nash-alkumegoldás, (*NAM*) néven vált közzismertté.

Jelöljük  $F$ -el a lehetséges kimenetek (kifizetések) halmazát és  $d = (d_1, d_2)$ -vel az egyet nem értési (disagreement, status quo) kifizetést. Az  $(F, d)$  párost, ahol  $F \subset \mathbb{R}_+^2$ ,  $d \in \mathbb{R}^2$ , kétszemélyes alkuproblémának nevezzük. Feltesszük, hogy  $F$  konvex, kompakt és van olyan  $x \in F$ , hogy  $x > d$ . Ez egy kicsit kevésbé általános megfogalmazás, mint Nashé, de a lényeget nem érinti. A (kooperatív) játék abból áll, hogy a két játékos tárgyal egymással arról, hogy  $F$  melyik elemét válasszák. Ha sikerül megegyezni, és a választás  $x^* \in F$ , akkor az első játékos megkapja az  $x_1^*$  kifizetést, a második pedig  $x_2^*$ -ot. Ha nem sikerül megállapodniuk, akkor az első

játékos a  $d_1$ , a második a  $d_2$  „büntető” kifizetést kapja.

Ha adott az  $(F, d)$  alkuprobléma, akkor mit tekintünk megoldásnak? Jelöljük  $A$ -val az alkuproblémák halmazát. Egy  $\psi: A \rightarrow R^2$  függvényt megoldásfüggvénynek vagy röviden megoldásnak nevezzük. Az axiómatikus megközelítés igyekszik követelményeket megfogalmazni, amelyek intuitíven elfogadhatóak, és egyértelműen meghatároznak egy megoldást. Nash axiómái (követelményei) a következők:

1. Lehetségesség: minden  $(F, d)$  alkuproblémára  $\psi(F, d) \in F$ . Ez a követelmény nem szorul magyarázatra.
2. Racionalitás: minden  $(F, d)$ -re  $\psi(F, d) \geq d$ . Mindegyik játékosnak legalább annyit kell kapnia, mint amennyit akkor is kapna, ha nem születik semmilyen megegyezés.
3. Pareto-optimalitás: ha  $f \in F$ , és  $f \geq \psi(F, d)$ , akkor  $f = \psi(F, d)$ . Ez a klasszikus Pareto-elv az alkuprobléma kontextusában megfogalmazva.
4. Skála függetlenség: ha  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $\beta_1, \beta_2$  tetszőleges, és

$$\begin{aligned} d' &= (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \alpha_2 d_2 + \beta_2) \\ F' &= \{(\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2) : (x_1, x_2) \in F\} \end{aligned}$$

akkor  $\psi(F', d') = (\alpha_1 \psi_1(F, d) + \beta_1, \alpha_2 \psi_2(F, d) + \beta_2)$ . A megoldás ne függjön attól, hogy milyen mértékegységben számolunk és hová tesszük a mérési skála kiinduló pontját.

5. Kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség: ha  $F' \subset F$ ,  $(F', d) \in A$ , és  $\psi(F, d) \in F'$ , akkor  $\psi(F', d) = \psi(F, d)$ . Az optimumszámítás "relaxációs" elvének megfelelő kikötés. Ha a lehetséges kimenetek halmazát úgy szűkítjük, hogy a megoldás a szűkebb halmazban is benn van, akkor a szűkebb lehetséges kimenetelű problémának is ez kell legyen a megoldása.

6. Szimmetria: ha  $(x_1, x_2) \in F$  akkor és csak akkor, ha  $(x_2, x_1) \in F$  és  $d_1 = d_2$ , akkor  $\psi_1(F, d) = \psi_2(F, d)$ . Mindenben azonos játékosok kapjanak ugyanannyit. Más szóval, a játékosok minden lényeges tulajdonsága (alkuereje, rendelkezésre álló lehetőségek halmaza, stb.) a modell része kell legyen, semmi külső különbség ne legyen közöttük.

Tekintsük a következő maximum feladatot, amelynek célfüggvényét Nash-szorzatnak nevezzük:

$$\begin{aligned} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad (x_1, x_2) &\in F \\ x_1 &\geq d_1 \\ x_2 &\geq d_2 \end{aligned}$$

Ennek a feladatnak pontosan egy megoldása van, melyet Nash-alkumegoldásnak (*NAM*) nevezünk. Legyen  $\varphi$  az a megoldásfüggvény, amely minden alkuproblémához a *NAM*-ot rendeli.

**3.1. tétel** (Nash (1950b)).  *$\varphi$  az egyetlen megoldásfüggvény, amely az 1-6 követelményeket kielégíti.*

A *NAM*-ot nem nehéz általánosítani  $n$  játékos esetére. Mind az általánosítás, mind a 3.1. tétel bizonyítása ugyanúgy megy, megváltoztatva a megváltoztatandókat, mint Nash eredeti bizonyítása és több könyvben megtalálható, például Forgó et al (1999). A könnyű hivatkozás kedvéért a problémát, az axiómákat és a tételt  $n$  játékosra is megfogalmazzuk.

Az alkuprobléma definíciója: az  $(F, d)$  párost, ahol  $F \subset \mathbb{R}_+^n$ ,  $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n$ -személyes alkuproblémának nevezzük. Feltesszük, hogy  $F$  konvex, kompakt és van olyan  $x \in F$ , hogy  $x > d$ . A (kooperatív) játék abból áll, hogy  $n$  játékos tárgyal egymással arról, hogy  $F$  melyik elemét válasszák. Ha sikerül megegyezni, és a választás  $x^* \in F$ , akkor az  $i$  játékos megkapja az  $x_i^*$  kifizetést,  $i \in N = \{1, \dots, n\}$ .

Ha nem sikerül megállapodniuk, akkor a játékosok a  $d_i$ ,  $i \in N$  „büntető” kifizetést kapják.

Jelöljük  $A$ -val az alkuproblémák halmazát. Egy  $\psi: A \rightarrow R^n$  függvényt megoldásnak nevezünk. Az axiómák:

1. Lehetőségesség: minden  $(F, d)$  alkuproblémára  $\psi(F, d) \in F$ .
2. Racionalitás: minden  $(F, d)$ -re  $\psi(F, d) \geq d$ .
3. Pareto-optimalitás: ha  $f \in F$ , és  $f \geq \psi(F, d)$ , akkor  $f = \psi(F, d)$ .
4. Skála függetlenség: ha  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_n$  tetszőleges,

$$d' = (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n d_n + \beta_n)$$

$$F' = \{(\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n x_n + \beta_n) : (x_1, \dots, x_n) \in F\}$$

$$\text{akkor } \psi(F', d') = (\alpha_1 \psi_1(F, d) + \beta_1, \dots, \alpha_n \psi_n(F, d) + \beta_n).$$

5. Kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség: ha  $F' \subset F$ ,  $(F', d) \in A$ , és  $\psi(F, d) \in F'$ , akkor  $\psi(F', d) = \psi(F, d)$ .
6. Szimmetria: ha van olyan  $i$  és  $j$  indexpáros, hogy  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \in F$  akkor és csak akkor, ha  $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \in F$  és  $d_i = d_j$ , akkor  $\psi_i(F, d) = \psi_j(F, d)$ .

A Nash-szorzat értelemszerűen megváltozik, csakúgy, mint a megoldandó optimumfeladat:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{i=n} (x_i - d_i) &\rightarrow \max \\ \text{s.t. } (x_1, \dots, x_n) &\in F \\ x_i &\geq d_i, \quad i \in N. \end{aligned}$$

Ennek a feladatnak szintén pontosan egy megoldása van, melyet  $n$ -személyes Nash-alkumegoldásnak nevezünk. Ezt szintén  $NAM$ -al rövidítjük. Legyen  $\varphi_n$  az a megoldásfüggvény, amely minden  $n$ -személyes alkuproblémához a  $NAM$ -ot rendeli.

**3.2. tétel.**  $\varphi_n$  az egyetlen megoldásfüggvény, amely az 1-6 követelményeket kielégíti.

A *NAM* koránt sem az egyetlen alkumegoldás. Más axiómák más megoldásokhoz vezetnek. Ezek közül megemlíjtük a nem-szimmetrikus Nash-alkumegoldást, Harsanyi és Selten (1972), a Kalai-Smorodinsky megoldást, Kalai és Smorodinsky (1975), a referencia függvény megoldást, Anbarci (1995), az egalitáriánus megoldást, Kalai (1977), a szuperadditív megoldást, Perles és Maschler (1981), az "egyenlő áldozatok" megoldást, Chun (1988), és az "egyenlő területek" megoldást, Anbarci (1993), Calvo és Peters (2000). Az alkuproblémák kooperatív modelljeinek összefoglaló áttekintését adja Thomson (1994).

### 3.2. Az L-Nash alkumegoldás

Mint azt láttuk, egy alkuprobléma két dologtól függ: az  $F$  lehetséges kimenetek halmazától és a  $d$  egyet nem értési kifizetéstől. Sokan vizsgálták, hogy miként függ a *NAM* a  $d$ -től rögzített  $F$  mellett. Thomson (1994) áttekintő cikke itt is a legjobb referencia. Általában monotonítási és konkávitási tulajdonságokat vizsgáltak, szinte semmilyen figyelmet nem szenteltek annak a problémának, hogy mi történik, ha az egyet nem értési pont valamilyen irányban a végtelenhez tart. Ez több szempontból sem érdektelen probléma. Egyrészt sok esetben annak az "ára", hogy az alku időben elhúzódik és nem születik megegyezés folyamatosan nőhet. Másrészt, mint azt látni fogjuk, szoros kapcsolat alakítható ki a *NAM* és a döntéelmélet egyik legtöbbet vizsgált problémája: a véges, többkritériumú döntési probléma között.

A következőkben Forgó (1984), Forgó et al (1999) és Forgó és Szidarovszky (2003) munkákra támaszkodunk.

Legyen  $C(\alpha) = (F, -\alpha r)$  egy  $n$ -személyes alkuprobléma, ahol  $r \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ , és  $\alpha$  egy pozitív paraméter. Az  $r$  vektort egyet nem értési iránynak nevezzük. Bármely  $\alpha$ -ra a *NAM* az  $\alpha$  paraméter  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvénye. A  $b(\alpha)$  *NAM* az alábbi matematikai programozási feladat egyetlen optimális megoldása

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (x_k + \alpha r_k) &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad x &\in F \end{aligned} \quad (3.1)$$

Megmutatjuk, hogy  $b(\alpha)$  egy  $b^0 \in F$  ponthoz konvergál, ha  $\alpha \rightarrow \infty$ . A  $b^0$  vektort így csak az  $F$  lehetséges halmaz és az  $r$  egyet nem értési irány határozza meg. Ezt az alkuproblémát limit-alkuproblémának nevezzük és tömören  $(F, -r)^L$ -el jelöljük. A  $b^0$  megoldást limit- $NAM$ -nak, vagy röviden  $LNAM$ -nak nevezzük.

Bármely  $x \in F$ -re a (3.1) feladat  $P(\alpha)$  célfüggvénye az  $\alpha$  paraméter  $n$ -fokú polinomja. Írjuk fel ezt a polinomot az

$$s(x, \alpha) = h_n(x)\alpha^n + h_{n-1}(x)\alpha^{n-1} + h_{n-2}(x)\alpha^{n-2} + \dots + h_1(x)\alpha + h_0(x) ,$$

alakban, ahol

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \prod_{i=1}^n r_i \\ h_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} r_j \right) x_i \\ h_{n-2}(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left( \prod_{k \neq i, j} r_k \right) x_i x_j \\ &\vdots \\ h_0(x) &= \prod_{i=1}^n x_i . \end{aligned}$$

Tekintsük a következő matematikai programozási feladatot:

$$\begin{aligned} h_{n-1}(x) &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad x &\in F . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ha (3.2)-nek egyetlen  $x^1$  megoldása van, akkor legyen  $x^0 = x^1$ . Ha (3.2)-nek több optimális megoldása van, akkor oldjuk meg az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned}
h_{n-2}(x) &\rightarrow \max \\
\text{s.t.} \quad x &\in F \\
h_{n-1}(x) &= h^*
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ahol

$$h^* = \max_{x \in F} h_{n-1}(x) .$$

Vegyük észre, hogy  $h_{n-1}(x)$  lineáris, és mivel  $F$  konvex, kompakt, ezért (3.3) lehetséges tartománya szintén konvex és kompakt. Elvégezhetjük a következő átalakítást (Fülöp János észrevétele)

$$h_{n-2}(x) = \left\{ [h_{n-1}(x)]^2 - \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} r_j \right)^2 x_i^2 \right\} / \left( 2 \prod_{i=1}^n r_i \right) .$$

Ezért (3.3) ekvivalens az alábbi szigorúan konvex matematikai programozási feladattal:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} r_j \right)^2 x_i^2 &\rightarrow \min \\
\text{s.t.} \quad x &\in F \\
h_{n-1}(x) &= h^* ,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

amelynek az egyetlen megoldása  $x^2$ . Ebben az esetben legyen  $x^0 = x^2$ .

**3.3. tétel** (Forgó és Szidarovszky (2003)). *A fentiekben definiált  $x^0$  az  $(F, -r)^L$  limit-alkuprobléma LNAM megoldása.*

*Bizonyítás.* Azt kell bizonyítani, hogy ha  $\bar{x} \in F$  az  $(F, -\alpha_k r)$  alkuproblémák NAM-jai  $\{b(\alpha_k)\}$  sorozatának torlódási pontja, bármely  $\alpha_k \rightarrow \infty$  sorozat esetén, akkor  $x^0 = \bar{x}$ .

Legyen  $\bar{x}$  a NAM-ok  $\{b(\alpha_k)\}$  sorozatának egy torlódási pontja, amint  $\alpha_k \rightarrow \infty$ . Mivel  $F$  kompakt, létezik legalább egy torlódási pont. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a  $b_k = b(\alpha_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  jelölést és tegyük fel, hogy  $\alpha_k > 1$  minden  $k = 1, 2, \dots$ -ra.

Indirekt bizonyítást alkalmazva feltesszük, hogy  $x^0 \neq \bar{x}$ . Két esetet különböztetünk meg:

$$\delta_1 := h_{n-1}(x^0) - h_{n-1}(\bar{x}) > 0 \quad (3.5)$$

$$h_{n-1}(x^0) - h_{n-1}(\bar{x}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\delta_2 := h_{n-2}(x^0) - h_{n-2}(\bar{x}) > 0 .$$

Az  $x^0$  definíciója miatt, (3.5) és (3.6) minden esetet kimerít. A (3.5) esetben, van olyan  $k_1$  index, hogy minden  $k \geq k_1$ -ra

$$h_{n-1}(x^0) - h_{n-1}(b_k) \geq \frac{\delta_1}{2} .$$

Definiáljuk az  $s(x, \alpha)$  függvényt a következő képpen:

$$s(x, \alpha) = \alpha^{n-1} \left( \alpha h_n(x) + h_{n-1}(x) + \frac{h_{n-2}(x)}{\alpha} + \dots + \frac{h_0(x)}{\alpha^{n-1}} \right) .$$

Mivel valamennyi  $h_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , függvény folytonos és  $F$  kompakt, ezért ha  $\alpha > 1$ , akkor van olyan  $K_1 > 0$  konstans, hogy

$$\begin{aligned} s(x, \alpha) &\leq \alpha^{n-1} \left( \alpha h_n(x) + h_{n-1}(x) + \frac{K_1}{\alpha} \right) \\ s(x, \alpha) &\geq \alpha^{n-1} \left( \alpha h_n(x) + h_{n-1}(x) - \frac{K_1}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

fennállnak. Ha  $k \geq k_1$ , akkor

$$\begin{aligned} s(b_k, \alpha_k) &\leq \alpha_k^{n-1} \left( \alpha_k h_n(b_k) + h_{n-1}(b_k) + \frac{K_1}{\alpha_k} \right) \\ s(x^0, \alpha_k) &\geq \alpha_k^{n-1} \left( \alpha_k h_n(x^0) + h_{n-1}(x^0) - \frac{K_1}{\alpha_k} \right) , \end{aligned}$$

amiből tudván, hogy  $h_n(x)$  konstans, következik

$$\begin{aligned} s(x^0, \alpha_k) - s(b_k, \alpha_k) &\geq \alpha_k^{n-1} \left( h_{n-1}(x^0) - h_{n-1}(b_k) - \frac{2K_1}{\alpha_k} \right) \\ &\geq \alpha_k^{n-1} \left( \frac{\delta_1}{2} - \frac{2K_1}{\alpha_k} \right) > 0 \end{aligned}$$

ha  $\alpha_k > \frac{4K_1}{\delta_1}$ , ami ellentmondás, hiszen  $b_k$  maximalizálja az  $s(x, \alpha_k)$  függvényt az  $F$  halmazon.

A (3.6) esetben van olyan  $k_2$  index, hogy minden  $k \geq k_2$ -ra

$$h_{n-2}(x^0) - h_{n-2}(\bar{x}) \geq \frac{\delta_2}{2} .$$

Írjuk az  $s(x, \alpha)$  függvényt a következő módon:

$$s(x, \alpha) = \alpha^{n-2} \left( \alpha^2 h_n(x) + \alpha h_{n-1}(x) + h_{n-2}(x) + \frac{h_{n-3}(x)}{\alpha} + \dots + \frac{h_0(x)}{\alpha^{n-2}} \right) .$$

Ha  $\alpha > 1$ , akkor van olyan  $K_2 > 0$  konstans, hogy

$$\begin{aligned} s(x, \alpha) &\leq \alpha^{n-2} \left( \alpha^2 h_n(x) + \alpha h_{n-1}(x) + h_{n-2}(x) + \frac{K_2}{\alpha} \right) \\ s(x, \alpha) &\geq \alpha^{n-2} \left( \alpha^2 h_n(x) + \alpha h_{n-1}(x) + h_{n-2}(x) - \frac{K_2}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

fennáll. Ha  $k \geq k_2$ , akkor

$$\begin{aligned} s(b_k, \alpha_k) &\leq \alpha_k^{n-2} \left( \alpha_k^2 h_n(b_k) + \alpha_k h_{n-1}(b_k) + h_{n-2}(b_k) + \frac{K_2}{\alpha_k} \right) \\ s(x^0, \alpha_k) &\geq \alpha_k^{n-2} \left( \alpha_k^2 h_n(x^0) + \alpha_k h_{n-1}(x^0) + h_{n-2}(x^0) - \frac{K_2}{\alpha_k} \right) . \end{aligned}$$

Mivel  $x^0$  maximalizálja a  $h_{n-1}(x)$  függvényt az  $F$  halmazon, ezért

$$\begin{aligned} s(x^0, \alpha_k) - s(b_k, \alpha_k) &\geq \alpha_k^{n-2} \left( \alpha_k [h_{n-1}(x^0) - h_{n-1}(b_k)] + [h_{n-2}(x^0) - h_{n-2}(b_k)] - \frac{2K_2}{\alpha_k} \right) \\ &\geq \alpha_k^{n-2} \left( \frac{\delta_2}{2} - \frac{2K_2}{\alpha_k} \right) > 0 , \end{aligned}$$

ha  $\alpha_k > \frac{4K_2}{\delta_2}$ , ami ismét egy ellentmondás. □

A tétel következménye, hogy az  $LNAM$ -ot legfeljebb két "jól viselkedő" matematikai programozási feladat megoldásával megkaphatjuk. Mivel ezek konvex programozási feladatok, hatékony megoldási módszerek állnak rendelkezésre. Érdekes kérdés, hogy vajon megkaphatjuk-e az  $LNAM$ -ot egyetlen  $NAM$  megoldásaként, ha  $\alpha$  elég nagy? Erről szól a következő tétel.

**3.4. tétel** (Forgó és Szidarovszky (2003)). *Ha  $F$  egy nem üres politóp, akkor van olyan  $\alpha_0 > 0$ , hogy minden  $\alpha \geq \alpha_0$ , esetén az  $(F, -\alpha r)$  alkuprobléma  $b(\alpha)$   $NAM$ -ja az  $(F, -r)^L$  limit-alkuprobléma  $LNAM$ -ja.*

*Bizonyítás.* Legyen  $x^0$  az  $LNAM$  és  $V$  az  $x^0$  ponthoz tartozó lehetséges irányok halmaza, vagyis

$$V := \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1, x^0 + \lambda v \in F \text{ valamely } \lambda > 0\text{-ra}\}.$$

Azzal a triviális esettel, amikor  $F$  egyetlen pont, nem foglalkozunk. Mivel  $F$  politóp, amelynek több, mint egy eleme van, a  $V$  halmaz nem üres és kompakt. Indirekt bizonyítást használva, tegyük fel, hogy bármely  $\alpha_0 > 0$ -ra, van olyan  $\alpha \geq \alpha_0$  és  $\bar{x} = x(\alpha) \in F$ , hogy

$$\begin{aligned} 0 < s(\bar{x}, \alpha) - s(x^0, \alpha) &= [h_{n-1}(\bar{x}) - h_{n-1}(x^0)]\alpha^{n-1} \\ &+ [h_{n-2}(\bar{x}) - h_{n-2}(x^0)]\alpha^{n-2} + \dots + h_0(\bar{x}) - h_0(x^0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bármely  $x \in F$ ,  $x \neq x^0$  esetében legyen  $v = v(x) = \frac{1}{|x-x^0|}(x-x^0)$ .

Tekintsük először azt az esetet, amikor (2)-nek egyetlen  $x^0$  megoldása van. Ekkor minden  $x \in F$ ,  $x \neq x^0$ ,  $v \in V$ -re fennáll

$$h_{n-1}(x) - h_{n-1}(x^0) = |x - x^0| h'_{n-1} v < 0,$$

ahol  $h'_{n-1}$  a  $h_{n-1}$  lineáris függvény gradiense. Mivel  $V$  kompakt, van olyan  $\gamma > 0$  konstans, amely független  $x$ -től és  $\alpha$ -tól, és amelyre fennáll

$$h'_{n-1} v \leq -\gamma < 0,$$

amiből következik a

$$\frac{h_{n-1}(\bar{x}) - h_{n-1}(x^0)}{|\bar{x} - x^0|} \leq -\gamma < 0$$

egyenlőtlenség. Mivel az  $\alpha^k$ ,  $(k = 0, \dots, n-2)$  hatványok koefficiensei korlátosak, ezért elég nagy  $\alpha_0$ -ra fennáll

$$\frac{s(\bar{x}, \alpha) - s(x^0, \alpha)}{|\bar{x} - x^0|} < 0 ,$$

amely ellentmond (3.7)-nek.

Tegyük fel most, hogy (3.3)-nek több megoldása van. A bizonyítás hasonlóan megy az előző esethez. Ebben az esetben az  $F$  politópot felcseréljük  $F'$ -vel, ahol

$$F' = \{x \in F : h_{n-1}(x) = h_{n-1}(x^0) ,$$

amely szintén egy politóp. A lehetséges irányok kompakt halmazát most definiáljuk a következőképpen:

$$V' := \{v' \in \mathbb{R}^n : |v| = 1, v^0 + \lambda v' \in F' \text{ valamely } \lambda > 0\text{-ra}\} .$$

Tegyük ismét fel, hogy minden  $\alpha_0 > 0$ -hoz van olyan  $\alpha \geq \alpha_0$  és  $\bar{x} = x(\alpha) \in F'$ , hogy (3.7) fennáll. A Lagrange középérték tétel szerint minden  $x \in F'$ ,  $x \neq x^0$ ,  $v' := v(x) = \frac{1}{|x-x^0|}(x-x^0)$ -re az alábbi egyenlőség teljesül

$$h_k(x) - h_k(x^0) = h'_k(x^0 + \xi_k(x-x^0))|x-x^0|v', \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

valamely  $0 \leq \xi_0, \dots, \xi_{n-2} \leq 1$  értékekre. Így  $\bar{x}$  egy elég kicsi  $N$  környezetében minden  $x \in N \cap F'$ ,  $x \neq x^0$ ,  $v' \in V'$ -re

$$h_{n-2}(x) - h_{n-2}(x^0) = h'_{n-2}(x^0 + \xi_{n-2}(x-x^0))|x-x^0|v' < 0 ,$$

és ezért

$$h'_{n-2}(x^0 + \xi_{n-2}(x - x^0))v' \leq -\gamma < 0$$

valamely  $\gamma$  konstansra, mivel  $N \cap F'$  és  $V'$  kompaktak,  $h'_{n-2}$  pedig folytonos (lineáris). Így

$$\frac{h_{n-2}(\bar{x}) - h_{n-2}(x^0)}{|\bar{x} - x^0|} \leq -\gamma < 0 .$$

Ebből, valamint a  $h_{n-1}(\bar{x}) - h_{n-1}(x^0) \leq 0$  egyenlőtlenségből ugyanúgy és ugyanazt a következtetést vonhatjuk le, mint az első esetben.  $\square$

Az a feltétel, hogy az  $F$  politóp legyen, azért kellett, hogy a lehetséges irányok  $V$  halmaza kompakt legyen.  $V$  lehet nem kompakt egészen egyszerű nem lineáris esetekben is. Például legyen  $F := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 \leq 2\}$ ,  $x^0 = (1, 1)$ . Ekkor  $V := \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1^2 + v_2^2 = 1, (1 + \lambda v_1)^2 + (1 + \lambda v_2)^2 \leq 2 \text{ valamely } \lambda > 0\}$ . Legyen  $v(\varepsilon) := (v_1(\varepsilon), v_2(\varepsilon))$ , ahol  $v_1(\varepsilon) := \sqrt{1/2 - \varepsilon}$ ,  $v_2(\varepsilon) := -\sqrt{1/2 + \varepsilon}$  és  $0 < \varepsilon < 1/2$ . Egyszerű számolással láthatjuk, hogy minden  $0 < \varepsilon < 1/2$ ,  $\lambda = 2\varepsilon^2$  esetében  $|v(\varepsilon)|^2 = 1$  és  $|1 + \lambda v(\varepsilon)|^2 \leq 2$ , ami azt jelenti, hogy  $v(\varepsilon) \in V$ . A határérték  $\bar{v} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\varepsilon) = (1/2, -1/2)$  azonban nincs  $V$ -ben, mivel nincs olyan  $\lambda > 0$  amelyre  $(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda)^2 + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda)^2 \leq 2$  fennállna. Így  $V$  nem kompakt.

A 3.4. tétel bizonyítása nem konstruktív. Hasznos, ha az alkuprobléma alapadataiból tudunk becslést adni az  $\alpha$  büntető paraméter  $\alpha_0$  alsó korlátjára. Egy ilyen becslést konstruálunk a következőkben az  $n = 2$  esetben.

Tegyük fel, hogy az  $F$  politóp csúcspontjai  $p_1, \dots, p_k$  és  $z$  az  $LNAM$ . A  $P(\alpha)$  feladat célfüggvénye ebben az esetben így is írható:

$$x_1 x_2 + \alpha(r_1 x_2 + r_2 x_1) + \alpha^2 r_1 r_2 \rightarrow \max .$$

Legyen  $p = (p_1, p_2)$ ,  $q = (q_1, q_2)$  az  $F$  két Pareto-optimális csúcspontja. Mivel a  $NAM$  mindig Pareto-optimális felületen van (ez az egyik axióma!), ezért a  $P(\alpha)$  feladat megoldása vagy Pareto-optimális csúcspontban, vagy két ilyen csúcspont által meg-

határozott szakaszon van, amelyet Pareto-optimális szakasznak fogunk nevezni. Legyen

$$T = \{x : x = \lambda p + (1 - \lambda)q, \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

a  $p$  és  $q$  pontok által meghatározott szakasz. A Nash-szorzat ( $P(\alpha)$  célfüggvénye) a konstans tag elhagyása után a  $T$  szakaszon a következő:

$$f(\lambda) = (\lambda p_1 + (1 - \lambda)q_1)(\lambda p_2 + (1 - \lambda)q_2) + \alpha r_1(\lambda p_2 + (1 - \lambda)q_2) + \alpha r_2(\lambda p_1 + (1 - \lambda)q_1) .$$

Ha a  $NAM$  a  $[p, q]$  szakasz belsejébe esik, akkor ott

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= 2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)\lambda + (p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1 \\ &\quad + \alpha(r_1(p_2 - q_2) + r_2(p_1 - q_1)) = 0 . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ez csak akkor állhat fenn minden elég nagy  $\alpha$ -ra, és ezáltal minden  $\alpha \geq 0$ -ra, ha

$$r_1(p_2 - q_2) + r_2(p_1 - q_1) = 0 . \tag{3.9}$$

Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, amikor az  $LNAM$  egy Pareto-optimális szakasz belsejébe esik, akkor  $\alpha_0 = 0$ . Mivel  $r_1, r_2 > 0$ ,  $p \neq q$ , és  $[p, q]$  Pareto-optimális szakasz, ezért  $(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) < 0$ . Így minden elég nagy  $\alpha$ -ra a  $NAM$  csak akkor eshet a  $[p, q]$  szakasz belsejébe, ha a

$$0 < -\frac{(p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1}{2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)} < 1 \tag{3.10}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha (3.8) és (3.9) fennállnak, akkor a  $[p, q]$  szakaszt elfogadhatónak nevezzük. Ha a  $[p, q]$  szakasz elfogadható, akkor a  $\lambda p + (1 - \lambda)q$  pontot, ahol

$$\lambda = -\frac{(p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1}{2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}$$

a  $[p, q]$  szakasz kritikus pontjának hívjuk. Könnyű látni, hogy ebből legfeljebb egy van. Legyen  $K$  a Pareto-optimális csúcspontok és a legfeljebb egy Pareto-optimális elfogadható szakasz kritikus pontjának véges halmaza.

Az előbbiek alapján világos, hogy az  $LNAM$  a  $K$  halmaz pontjainak egyike és meghatározható az alábbi egyszerű algoritmussal:

Számoljuk ki az  $r_1x_2 + r_2x_1$  függvény értékét az  $F$  csúcspontjaiban. Ha a maximum csak egyetlen pontban vétetik fel, akkor ez az  $LNAM$ . Ha kettő pontban (ennél több nem lehet, mivel két dimenzióban vagyunk), akkor ezen két pont által meghatározott szakasznak a kritikus pontja az  $LNAM$ , amennyiben ez létezik, vagy pedig a két csúcspont közül az, amelyikben a (3.5) feladat célfüggvényértéke kisebb. A  $NAM$  meghatározására Kaneko (1992) adott egyszerű és hatékony véges algoritmust.

A fenti eredményeket is fel fogjuk használni arra, hogy egy felső becslést adjunk arra az  $\alpha_0$  értékre, amelyre fennáll, hogy minden  $\alpha > \alpha_0$  esetén a  $NAM$  és az  $LNAM$  egybeesik.

Az előzőek alapján a  $K$  halmazból most már kihagyhatjuk a kritikus pontot (maradnak az  $F$  Pareto-optimális csúcspontjai), mivel arra már megvan az egzakt  $\alpha_0 = 0$  alsó korlát. Legyen  $b(\alpha)$  a  $NAM$  az  $\alpha$  paraméter függvényében,  $z$  az  $LNAM$  és tegyük fel, hogy  $b(\alpha) \neq z$ . Ekkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} M &:= r_1z_2 + r_2z_1 \geq r_1b_2(\alpha) + r_2b_1(\alpha) \\ z_1z_2 + \alpha(r_1z_2 + r_2z_1) &= z_1z_2 + \alpha M < b_1(\alpha)b_2(\alpha) + \alpha(r_1b_2(\alpha) + r_2b_1(\alpha)) . \end{aligned}$$

A második egyenlőtlenség azért szigorú, mert bármely  $\alpha > 0$ -ra a  $NAM$  a Nash-szorzat egyetlen maximalizálója. Ezekből az egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy

$$\alpha(M - (r_1b_2(\alpha) + r_2b_1(\alpha))) < b_1(\alpha)b_2(\alpha) - z_1z_2 . \quad (3.11)$$

$g(b(\alpha)) = M - (r_1b_2(\alpha) + r_2b_1(\alpha)) \neq 0$ , mert akkor a jobb oldalnak pozitívnak kellene lenni, ami ellentmond annak, hogy  $z$  a (3.5) feladat egyetlen megoldása.

Ha  $b(\alpha) \in K$ , akkor legyen

$$s = \min_{y \in K, g(y) > 0} (M - (r_1 y_2 + r_2 y_1)) > 0 ,$$

és

$$S = \max_{y \in K} y_1 y_2 .$$

Ekkor (3.11)-ből az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\alpha < \frac{S - z_1 z_2}{s} \leq \frac{S}{s} \quad (3.12)$$

mivel  $z \geq 0$ .

Nézzük most azt az esetet, amikor  $b(\alpha) \notin K$ . Ez akkor fordulhat elő, ha

$$C := r_1(p_2 - q_2) + r_2(p_1 - q_1) \neq 0 .$$

(Ha  $C = 0$ , akkor azt már láttuk, hogy ha (3.9) nem áll fenn, akkor a  $NAM$  a  $[p, q]$  szakasz egyik végpontjába esik, ezek pedig definíció szerint benne vannak a  $K$  halmazban)

Legyen  $A := 2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)$ ,  $B := (p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1$ . Ekkor a (3.7) egyenlőség így néz ki:

$$A\lambda + B + C\alpha = 0 .$$

Ebből

$$\alpha = \frac{-A\lambda - B}{C} .$$

Mivel azt már láttuk, hogy  $A < 0$  és  $0 < \lambda < 1$ , ezért

$$\alpha = \frac{-A\lambda - B}{C} < \frac{-A + |B|}{|C|} .$$

Ezt (3.12)-el összevetve azt kapjuk, hogy ha a  $NAM$  és az  $LNAM$  különböznek, akkor abban az esetben, ha  $C \neq 0$ , és  $b(\alpha) \in [p, q]$ , akkor

$$\alpha < \max \left\{ \frac{S}{s}, \frac{-A + |B|}{|C|} \right\} ,$$

ha pedig  $C = 0$ , akkor

$$\alpha < \frac{S}{s} .$$

Ha tehát  $\frac{-A^* + |B^*|}{|C^*|}$  a  $\frac{-A + |B|}{|C|}$  értékek maximuma az  $F$  Pareto-optimális szakaszain ( $C \neq 0$ ), és

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \max \left\{ \frac{S}{s}, \frac{-A^* + |B^*|}{|C^*|} \right\} , \quad C \neq 0 \\ \alpha_0 &= \frac{S}{s} , \quad C = 0 \end{aligned}$$

akkor  $\alpha > \alpha_0$  esetben a  $NAM$  egybeesik az  $LNAM$ -mal.

Láthattuk, hogy  $\alpha_0$  kiszámításához csak eredeti adatok,  $F$  csúcspontjai, valamint az  $r$  egyet nem értési irány szükségesegek. Ha a problémát egy bimátrix játékból származtatjuk, akkor az  $F$  csúcspontjai kifizetéspárosokból kerülnek ki és eleve rendelkezésre állnak.

**3.5. példa.** Tekintsük a közismert Gyáva nyúl bimátrix játéknak azt a változatát, amelyben a játékosok aszimmetriája abban nyilvánul meg, hogy az egyet nem értés az egyiknek ötször jobban "fáj", mint a másiknak. Az  $A$  és  $B$  játékos kifizetőmátrixa a "kitér", "nem tér ki" tiszta stratégiapárosokra az alábbi:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

A kimenetek síkján három Pareto-optimális csúcspont van:

$$p = (1, 7) , \quad q = (6, 6) , \quad t = (7, 1) ,$$

és két Pareto-optimális szakasz:  $[p, q]$  és  $[q, t]$ . Tegyük fel, hogy az egyet nem értési irány:  $r = (5, 1)$ . Ekkor a Pareto-optimális csúcspontokban az  $r_1x_2 + r_2x_1$  függvény értéke rendre 36, 36 és 12. Sem a  $[p, q]$ , sem a  $[q, t]$  szakaszon nincs kritikus pont. A  $[p, q]$  szakasz esetében  $C = 0$ , így csak az  $S$  és  $s$  értékeket kell kiszámolni. Ezek az értékek rendre:  $S = 36$ ,  $s = 24$ , amelyből az  $\alpha_0 = 1,5$  értéket kapjuk. A  $[q, t]$  szakasz esetében  $C = 24$ ,  $A = -10$ ,  $B = 34$ , amiből  $\frac{-A+|B|}{|C|} = 1,83$ . Így az  $\alpha_0$ -ra a  $\max\{1, 5; 1, 83\} = 1,83$  értéket kapjuk. Ez elég jó becslés, mert a legkisebb  $\alpha_0$ , amely mellett a  $NAM$  és  $LNAM$  egybeesik 0.

Ha a lehetséges kimenetek halmaza nem poliedrikus, akkor nem feltétlenül van olyan  $\alpha_0$ , hogy minden  $\alpha > \alpha_0$ -ra a  $NAM$  és az  $LNAM$  egybeesnek. Az alábbi alkuprobléma egy példa erre az esetre.

**3.6. példa.** Legyen az  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  a lehetséges kimenetek halmaza, az  $r = (1, 3)$  pedig az egyet nem értési irány. Az  $LNAM$  a  $3x + y$  lineáris függvény maximumpontja, ami a  $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$  pont. Rögzített  $\alpha > 0$  egyet nem értési büntetés mérték mellett a  $NAM$  az

$$\begin{aligned} (x + \alpha)(y + 3\alpha) &\rightarrow \max \\ (x, y) &\in F \end{aligned}$$

feladat megoldása. Mivel a  $NAM$  az  $x^2 + y^2 = 1$  által meghatározott Pareto-határon van, a fenti feladat ekvivalens az

$$\begin{aligned} (x + \alpha)(y + 3\alpha) &\rightarrow \max \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Lagrange-feladattal. Könnyű belátni, hogy a  $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$  pont semmilyen  $\lambda$  Lagrange-multiplikátor érték mellett sem elégíti ki az

$$y + 3\alpha - 2\lambda x = 0$$

$$x + \alpha - 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

elsőrendű feltételeket egyetlen  $\alpha \geq 0$  mellett sem.

### 3.3. Az L-Nash alkumegoldás implementációja két-személyes alkujátékokban

A *NAM*-ot eddig egy "kiválasztási" probléma (choice problem) megoldásaként kezeltük és "ésszerű" axiómák által határoztuk meg. Nash azonban nem elégedett meg ennyivel. Konstruált egy olyan nem-kooperatív játékot, amelynek, bizonyos értelemben, egyetlen *NEP*-jének kifizetése megegyezik a *NAM*-mal. Ez a játék explicitte teszi az alkufolyamatot, és mintegy más oldalról világítja meg ugyanazt a dolgot. Ezt az eljárást, amikor egy axiómatikusan meghatározott kooperatív megoldást előállítunk egy nem-kooperatív alku-játék (lehetőleg egyetlen) *NEP*-jeként, implementálásnak nevezzük (nem azonos a klasszikus implementációval, de közeli rokona, Serrano (2005)). Ezt természetesen nem csak a *NAM*-ra lehet megtenni, hanem egyéb megoldásokra is.

Az a kutatási irány, amely az axiómatikus és a nem-kooperatív megközelítést összekapcsolja, Nash-program néven vált közismertté, és még mindig újabb és újabb eredményeket produkál, mintegy iránytűül szolgál azok számára, akik játékelméleti kutatásaikban egy modellt, vagy megoldáskonceptiót két oldalról is meg szeretnének közelíteni. Természetesen el lehet indulni a másik irányból is: adott alkujátékhoz keresünk a kooperatív megfogalmazásban olyan axiómarendszert, amely egyértelműen meghatározza az alkujáték egyetlen (vagy valamely) *NEP*-jét.

Magának a *NAM*-nak is többféle implementációja van. Ezek közül két olyant tekintünk a következőkben, amelyek alapgondolatát viszonylag könnyen lehet alkal-

mazni az  $LNAM$  implementálására. Először Rubinstein (1982) váltakozó ajánlattételes ( $VA$ ) modelljét használjuk fel kiindulópontnak az  $LNAM$  implementálására az alkuproblémák egy speciális osztályának esetében.

Azt leszögezhetjük, hogy a  $NAM$  bármely implementációja egyúttal az  $LNAM$ -ot is implementálja, ha a lehetséges tartomány egy konvex politóp. Hiszen azt tudjuk a 3.4. tételből, hogy ekkor elég nagy  $\alpha$  büntetés mérték mellett az  $LNAM = NAM$ , sőt a kétszemélyes esetben (most erről van szó) a feladat paramétereiből becslést tudunk adni arra, hogy legalább mekkorának kell lenni a büntetés mértékének, hogy az egyenlőség fennálljon. A 3.6. példában láttuk, hogy síma Pareto-határ esetében nem mindig van olyan véges  $\alpha > 0$ , amelyre az  $LNAM = NAM$  fennáll. Így most ezzel az esettel foglalkozunk.

Legyen  $C(\alpha) = (F, -\alpha r)$  egy kétszemélyes alkuprobléma, ahol  $r > 0$  az egyet nem értési irány,  $\alpha > 0$  az egyet nem értés büntetésének mértéke,  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y \leq g(x)\}$  a lehetséges kimenetek halmaza. Feltesszük, hogy  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  monoton csökkenő, folytonosan differenciálható, szigorúan konkáv függvény. Az így definiált alkuprobléma osztályt ( $\alpha$  minden lehetséges értékére) nevezzük röviden  $C$  alkuproblémának. Az  $F$  halmaz így konvex, kompakt, és az  $y = g(x)$  által meghatározott Pareto-határa "sima". Legyen  $a = g^{-1}(0), b = g(0)$  ( $g^{-1}$  létezik  $g$  monotonitása miatt). Az  $F$ -et így az alábbi egyenlőtlenségrendszer lehetséges megoldásaiként is lehet definiálni:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq a \\ 0 &\leq y \leq b \\ y &\leq g(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

**3.7. tétel.** *Ha a  $C$  alkuprobléma osztályra fennáll, hogy vagy  $g'(0) < -\frac{r_2}{r_1}$ , vagy pedig  $g'(a) > -\frac{r_2}{r_1}$ , akkor van olyan véges  $\alpha_0$ , hogy minden  $\alpha > \alpha_0$  esetében az  $LNAM$  egybeesik a  $NAM$ -al.*

*Bizonyítás.*  $C(\alpha)$ -nak minden  $\alpha$ -ra létezik  $NAM$ -ja, amelyet az  $(x + \alpha r_1)(y + \alpha r_2)$  Nash-szorzat egyértelmű maximumpontjaként kapunk. Ezeknek a határértéke, ha

$\alpha \rightarrow \infty$  az  $LNAM$ , amelyet viszont az  $r_2x + r_1y$  lineáris függvény szintén egyértelmű maximumpontjaként nyerhetünk. Az egyértelműséget a  $g$  függvény szigorú konkávitása biztosítja. Mivel mind a  $NAM$ , mind az  $LNAM$  a Pareto határon van, ezért (3.13)-ban az  $y = g(x)$ -el lehet az  $y \leq g(x)$  egyenlőtlenséget helyettesíteni, és így mind a  $NAM$ , mind az  $LNAM$  meghatározásakor a  $[0, a]$  zárt intervallumon egy egyváltozós függvényt kell maximalizálni. Adott  $\alpha$ -ra a  $NAM$ -ot az

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \alpha r_1)(g(x) + \alpha r_2) \rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad 0 &\leq x \leq a \end{aligned} \quad (3.14)$$

feladat megoldásával kapjuk. A célfüggvény első deriváltja:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x) + xg'(x) + \alpha(r_1g'(x) + r_2) \\ f'(0) &= g(0) + \alpha(r_1g'(0) + r_2) . \end{aligned}$$

Ha  $g'(0) < -\frac{r_2}{r_1}$  és  $\alpha > \alpha_0 = -\frac{g'(0)}{r_1g'(0) + r_2}$ , akkor  $f'(0) < 0$ , és így a (3.14) feladat megoldása  $x = 0, y = g(0)$ , ami egyúttal az  $LNAM$  is.

Vegyük most a célfüggvény deriváltját az  $x = a$  pontban

$$f'(a) = g(a) + ag'(a) + \alpha(r_1g'(a) + r_2) = ag'(a) + \alpha(r_1g'(a) + r_2) .$$

Ha  $f'(a) > 0$ , akkor  $x = a$  a (3.14) feladat optimális megoldása. Ez tetszőlegesen nagy  $\alpha$ -ra akkor és csak akkor állhat fenn, ha  $r_1g'(a) + r_2 > 0$ . Ha tehát

$$\alpha > \alpha_0 = \frac{-ag'(a)}{r_1g'(a) + r_2} ,$$

akkor a  $NAM$  és az  $LNAM$  egybeesnek. □

**3.8. következmény.** *Ha a 3.7. tétel feltételei fennállnak, akkor minden olyan implementáció, amely előállítja a  $NAM$ -ot, kellően nagy egyet nem értési „büntetés” mellett az  $LNAM$ -ot is előállítja.*

A továbbiakban tehát csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a  $C$ -be tartozó alkuproblémák  $LNAM$ -ja a Pareto-felület (relatív) belső pontja. Ekkor az  $(x^*, y^*)$   $LNAM$  az

$$\begin{aligned} r_2x + r_1y &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad y &= g(x) \end{aligned}$$

Lagrange-feladat egyetlen megoldása, amely kielégíti az alábbi elsőrendű feltételeket:

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= -\frac{r_2}{r_1} \\ y^* &= g(x^*) . \end{aligned} \tag{3.15}$$

A  $VA$  modell diszkrét idővel dolgozik:  $t = 1, 2, \dots$ . Ajánlatnak nevezzük az  $F$  egy pontját. A játékosok felváltva tesznek ajánlatokat, minden páratlan időpontban az első játékos, minden páros időpontban a második. Ha az egyik játékos ajánlatát a másik elfogadja, akkor ez lesz a kifizetés, és a játéknak vége. Ha nem, akkor  $\delta > 0$  "megállási" valószínűséggel (break down probability) az alkufolyamat megszakad, a játéknak vége, a játékosok rendre a  $-\alpha r_1$  és  $-\alpha r_2$  „büntető” kifizetéseket kapják. Az alkufolyamat  $1 - \delta$  valószínűséggel folytatódik, és újabb ajánlatot tesz valaki, aki éppen soron van.

Ebben a játékban egy stratégia az a terv (függvény), amely bármely időpontban egy ajánlatot rendel a korábbi ajánlatok alkotta bármely lehetséges történethez. A  $NEP$ -et és a részjáték tökéletes  $NEP$ -et ebben a játékban a szokásos módon definiáljuk. Azt a speciális stratégiát, amelyben az ajánlattételek nem függenek (konstansok) a korábbi történetektől, stacioner stratégiának nevezzük.

Rubinstein alapvető tétele a következő, amelyet rögzített egyet nem értési pont ( $\alpha$  rögzített) esetére bizonyított.

**3.9. tétel** (Rubinstein (1982), Osborne és Rubinstein (1994)). *A  $VA$  játéknak egyetlen részjáték tökéletes  $NEP$ -je van, amely stacioner stratégiákból áll.*

Így a játék lefolyása, ha a játékosok az egyetlen  $(x^*, y^*)$  stacioner stratégiát játsszák, igen rövid. Az első játékos a  $t = 1$  időpontban megteszi az  $(x^*, y^*)$  ajánlatát,

amit a második játékos elfogad, megtörténnek a kifizetések és a játék véget ér. Jegyezzük meg, hogy  $(x^*, y^*)$  függ a  $\delta$  valószínűségtől.

Számunkra fontos még a következő tétel is.

**3.10. tétel** (Rubinstein (1982), Osborne és Rubinstein (1994)). *Ha  $\delta > 0$ , akkor a  $VA$  játék egyetlen stacioner stratégiájában a kifizetések tartanak a  $NAM$ -hoz, ha  $\delta \rightarrow 0$ .*

A  $VA$  játék tehát a  $NAM$  aszimptotikus implementációja és így ha  $\delta$ -át elég kicsinek választjuk, akkor tetszőlegesen közel kerülhetünk a  $NAM$ -hoz. Mi a helyzet az  $LNAM$ -al? Ha olyan aszimptotikus implementációt szeretnénk, amely a 3.10. tételen nyugszik, akkor az  $\alpha$  és  $\delta$  paraméterek értékét egyszerre kellene a végtelenhez illetve a nullához tartatni, és még a két konvergencia egymáshoz való viszonyával is törődni kell. Ezt úgy csináljuk meg, hogy veszünk egy  $0 < \beta < 1$  paramétert, és definiálunk egy olyan  $VA$  játékot, amelyben a büntetés mértéke  $\alpha = \frac{1}{\beta}$ , a tárgyalások megszakadásának valószínűsége pedig  $\delta = \beta^2$ . Az ezekkel a paraméterekkel definiált  $VA$  játékot jelöljük  $VA(\beta)$ -val.

**3.11. tétel** (Forgó (2006)). *Bármely  $\lambda > 0$  számhoz van olyan  $\beta_0$ , hogy minden  $0 < \beta < \beta_0$  esetén a  $VA(\beta)$  játék egyetlen részjáték tökéletes  $NEP$ -jének kifizetésvektora  $\lambda$ -nál kisebb távolságra van az  $LNAM$ -tól.*

*Bizonyítás.* Rögzített  $\beta$  esetén a 3.9. tétel értelmében a  $VA(\beta)$  játéknak van egy-értelműen meghatározott részjáték tökéletes  $NEP$ -je. Könnyű belátni (lásd például Forgó et al (1999)), hogy ennek az egyensúlypontnak olyan stacioner stratégiákból kell állni, hogy bármelyik játékos számára közömbös legyen, hogy a másik ajánlatát elfogadja-e vagy visszautasítja-e.

Ha tehát  $(x^1, y^1)$  az első játékos ajánlata, akkor a második játékos  $(x^2, y^2)$  ajánlatára fenn kell állni az alábbi egyenlőségeknek:

$$\begin{aligned}
y^1 &= g(x^1) \\
y^2 &= g(x^2) \\
x^2 &= \delta(-\alpha r_1) + (1 - \delta)x^1 \\
y^1 &= \delta(-\alpha r_2) + (1 - \delta)y^2 .
\end{aligned}$$

Egyensúlyban  $x^1 = x^2$ ,  $y^1 = y^2$ . Az indexeket elhagyva azt kapjuk, hogy  $(x, y) \in F$  akkor és csak akkor egyensúlyi ajánlat, ha  $x$  kielégíti a

$$g(x) + \delta \alpha r_2 - (1 - \delta)g(-\delta \alpha r_1 + (1 - \delta)x) = 0$$

egyenletet. Ha rögzítjük az  $x^*$  egyensúlyi ajánlatot, és  $\alpha = \frac{1}{\beta}$ ,  $\delta = \beta^2$ , akkor  $\beta > 0$ -ra a következő egyenletet kapjuk:

$$f(\beta) = g(x^*) + \beta r_2 - (1 - \beta^2)g(-\beta r_1 + (1 - \beta^2)x^*) = 0 .$$

Mindkét oldal  $\beta$  szerinti deriváltját véve kapjuk a

$$f'(\beta) = r_2 + 2\beta g(-\beta r_1 + (1 - \beta^2)x^*) + (1 - \beta^2)g'(-\beta r_1 + (1 - \beta^2)x^*) = 0$$

egyenletet, ami szintén minden  $\beta > 0$  esetén fennáll. Rögzített  $\beta$ -ra a fenti egyenletnek egyetlen  $x(\beta)$  megoldása van (lásd Forgó et al (1999), 310. oldal). Minden  $\beta > 0$ -ra  $x(\beta) \in F$ , és mivel  $F$  kompakt,  $g'$  folytonos, így minden  $\{\beta_i\}$  nullsorozatra  $\{x(\beta_i)\}$  minden torlódási pontja kielégíti az

$$f'(0) = r_2 + r_1 g'(x) = 0$$

egyenletet. A  $g'$  függvény monoton csökkenő, ezért a

$$g'(x) = -\frac{r_2}{r_1}$$

egyenletnek egyetlen megoldása van, ami (3.15) miatt megegyezik az  $x^*$ -al, ez pedig pontosan az első játékos kifizetése az  $LNAM$ -ban.  $\square$

A 3.11. tétel állítását úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a  $VA$  játék aszimptotikus implementációja az  $LNAM$ -nak, az adott feltételek mellett.

Mind Nash eredeti (Nash, 1953), mind Rubinstein (1982) implementációi aszimptotikusak és exogén paramétereket is tartalmaznak (például a  $\delta$  megállási valószínűség a  $VA$  modellben), amelyek alapvető funkciója, hogy a  $NAM$ -hoz való konvergenciát biztosítsák. Howard (1992) implementációja azonban egzakt, amelyet csak belső paraméterek irányítanak. Ebben az alfejezetben a Howard implementációt alakítjuk úgy át, hogy alkalmas legyen az  $LNAM$  implementációjára. Semmilyen külső paramétert nem használunk és egzakt implementációra törekszünk: a játék minden alkotórésze vagy primer adat, vagy a játékosok döntési változója. Kiindulás képpen a Howard-féle játékot Osborne és Rubinstein (1994) alapján átfogalmazzuk, mert ebben a formában kezelhetőbb lesz, mint az eredetiben.

Az  $LNAM$ , amit implementálni szeretnénk az  $F \subset \mathbb{R}^2$  lehetséges halmazból, amiről feltesszük, hogy a pozitív kvadráns konvex, kompakt részhalmaza és az  $(1, r)$ ,  $r > 0$  egyet nem értési irányból áll. Az, hogy az egyet nem értési irány első komponensét 1-en rögzítettük nem sérti az általánosságot. Nevezzük a két játékost  $P1$ -nek és  $P2$ -nek.

Egyszerűsítés céljából teszünk még egy feltételt, aminek az a célja, hogy ahol csak lehet, a játékosoknak egyértelmű legjobb lépésük legyen. Ez a feltétel egyébként Howardnál is szerepel Howard (1992) (147. old.), de nincs elég pontosan megfogalmazva, amikor azt írja: „each individual has a unique best choice”.

Pareto-optimális választás feltétele: Bármely  $g(x_1, x_2)$  célfüggvényt maximalizálva az  $F$  halmazon, a feladat optimális megoldásai közül a  $Pi$  ( $i = 1, 2$ ) játékos azt a Pareto-optimális pontját választja, amelyiknek az  $x_{3-i}$ , ( $i = 1, 2$ ) koordinátája a legnagyobb.

Ez a feltétel egy kis magyarázatra szorul. Miért törődik a  $P1$  játékos a  $P2$  játékos kifizetésével? Azért mert, ha a  $P1$  játékos egy ajánlatot tesz (választ egy  $(x_1, x_2) \in F$  pontot) és nem tud  $x_1$ -nél többet elérni, akkor okosan cselekszik, ha  $x_2$ -öt olyan magasra választja, amennyire csak lehet anélkül, hogy saját magának kevesebbet

kérne, mivel ezzel növeli annak az esélyét, hogy a  $P2$  játékos elfogadja az ajánlatot. Ez pedig érdeke a  $P1$  játékosnak, hiszen azért javasolta az  $(x_1, x_2)$  pontot, mert  $x_1$ -el meg lenne elégedve.

Az összehasonlíthatóság kedvéért nézzük először a  $NAM$  Howard-féle implementációját. Legyen az alkuprobléma  $(F, d)$ , ahol  $F \subset \mathbb{R}^2$  a lehetséges halmaz,  $d \in \mathbb{R}^2$  pedig az egyet nem értési pont.

A Howard-féle implementáció a következő  $D$  dinamikus játék, amely négy fő lépésből áll.

1.  $P1$  választ egy  $(y_1, y_2) \in F$  pontot (ajánlat).
2.  $P2$  választ egy  $(x_1, x_2) \in F$  pontot (ajánlat) és egy  $p \in [0, 1]$  számot (valószínűség).
3. Egy sorsolás van, amelyben a játék  $p$  valószínűséggel folytatódik és  $1 - p$  valószínűséggel véget ér, amikor is a játék kimenetele (outcome)  $d$ .
4.  $P1$  választ a következő két lehetőség közül:
  - a) Elfogadja a  $P2$  játékos  $(x_1, x_2)$  ajánlatát és akkor ez a játék kimenetele.
  - b) Egy sorsolás van, amelyben a játék  $1 - p$  valószínűséggel véget ér és a kimenetel  $d$ .  $p$  valószínűséggel az  $(y_1, y_2)$  a játék kimenetele.

**3.12. tétel** (Howard (1992)). *A  $D$  dinamikus játék egyetlen részjáték tökéletes NEP-jének kifizetése egyenlő az alku probléma NAM-jával.*

Nézzük most a következő  $H$  dinamikus játékot, amely szintén négy fő lépésből áll.

1.  $P1$  választ egy  $(y_1, y_2) \in F$  pontot (ajánlat) és egy  $\alpha > 0$  számot (ez a büntető paraméter).
2.  $P2$  választ egy  $(x_1, x_2) \in F$  pontot (ajánlat) és egy  $p \in [0, 1]$  számot (ez a megállási paraméter).

3. Egy sorsolás van, amelyben a játék  $p$  valószínűséggel folytatódik és  $1 - p$  valószínűséggel véget ér, amikor is mindkét játékos kifizetése 0.

4.  $P1$  választ a következő két lehetőség közül:

a) Elfogadja a  $P2$  játékos  $(x_1, x_2)$  ajánlatát, a játék kimenetele  $(x_1, x_2)$  és a játékosok a következő kifizetést kapják:

$$\left( x_1 + \alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right), x_2 + \alpha\left(r - \frac{1}{p}\right) \right) . \quad (3.16)$$

b) Egy sorsolás van, amelyben a játék  $1 - p$  valószínűséggel véget ér és mindkét játékos kifizetése 0.  $p$  valószínűséggel a játék kimenetele  $(y_1, y_2)$  és a kifizetések az alábbiak:

$$\left( y_1 + \alpha\left(1 - \frac{1}{p^2}\right), y_2 + \alpha\left(r - \frac{1}{p^2}\right) \right) . \quad (3.17)$$

A két játék megfogalmazásában feltűnő, hogy a  $H$ -ban éles különbséget teszünk a "kimenetel" és a "kifizetés" között. Itt célszerű a kimenetelre a szó fizikai értelmében gondolni és a kifizetésre, mint az ehhez tartozó hasznosságra. Például, ha a két örökös egy egységnyi méretű telken akar osztozkodni, akkor a kimenetel lehet a telekből a saját részük, míg a kifizetés az a hasznosság, amit ez jelent nekik. A  $D$  játékban nyugodtan helyettesíthetjük a "kimenetel" szót a "kifizetéssel", vagy hasznossággal. A  $H$  játékban a 0 pontot az egyszerűség kedvéért vettük fel, a skála invariancia miatt ezt nyugodtan megtehetjük, mint az általában szokás is. Már azt előre lehet látni, hogy az  $\alpha$  és a  $p$  belső paraméterek szerepe az, hogy együttes mozgásuk révén realizálják az adott irányban  $-\infty$  felé haladó egyet nem értési pont mozgását.

Mielőtt az implementációs tételt megfogalmazzuk, tekintsük a Nash-feladatot az  $\alpha = 0$  büntetés mellett:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &\rightarrow \max \\ \text{s.t. } (x_1, x_2) &\in F \end{aligned} \quad (3.18)$$

Legyen az ehhez tartozó  $NAM$  a  $(z_1(0), z_2(0))$  pont. Az implementációban, mielőtt a  $H$  játék elkezdődne, válasszuk a játékosok indexeit úgy, hogy a

$$\frac{z_2(0)}{z_1(0)} \leq r$$

egyenlőtlenség fennálljon. Nyilvánvaló, hogy ez mindig megtehető, de úgy is interpretálható, hogy mielőtt az alkujáték elkezdődik, a játékosok a 0 büntetés melletti játék lejátszásával eldöntik az indexkiosztást (Ilyen játék előtti indexkiosztás történik például a társasági asztalitenisz játékban, amikor a játékosok egy labdamentet lejátszásával döntenek el, hogy kié a kezdés joga).

**3.13. tétel** (Forgó és Fülöp (2008)). *Pareto-optimális választás feltétele és a játékosok megfelelő indexelése mellett a  $H$  játék implementálja az  $LNAM$ -ot vagy pontosan, ha van olyan véges büntető paraméter, amely mellett  $LNAM = NAM$ , vagy aszimptotikusan, ha nincs ilyen véges büntető paraméter.*

A tétel bizonyítása túl hosszú, ezért a függelékbe került.

### 3.4. Az alkuprobléma és a többkritériumú döntések

A legegyszerűbb véges többkritériumú döntési probléma ( $TDP$ ) a következő. Egy döntéshozónak ( $DH$ ) az alternatívák  $m$ -elemű  $A = \{A_1, \dots, A_m\}$  véges halmazából kell kiválasztani egyet, amelyet legjobbnak tart. Minden alternatívát egy valós  $n$ -elemű vektorral jellemezünk, amelynek elemei az alternatívák hasznosságát adják egy adott kritérium szerint. Jelöljük a kritériumok  $n$ -elemű halmazát  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ -el. Így a problémát meg lehet egy  $D = [d_{ij}]$   $n \times m$ -es döntési mátrixszal adni, amelynek  $d_{ij}$  eleme azt jelenti, hogy a  $DH$  a  $C_i$  kritérium szerint mekkora hasznossághoz jut, ha az  $A_j$  alternatívát választja.

A  $TDP$ -t általánosabban is megfogalmazhatjuk, ha az alternatívák valószínűségi keverését is megengedjük. Így tehát lehetséges döntés az is, ha az alternatívákat valamilyen  $p \in \mathbb{R}^m$  valószínűségeloszlás szerint véletlenszerűen választjuk ki. Ekkor a

döntési alternatívák halmaza az  $A$  elemein értelmezett összes  $P$  valószínűségeloszlás, ami egy politóp (pontosan egy szimplex). Ha még tovább szeretnénk általánosítani, akkor a lehetséges döntések halmazáról csak annyit teszünk fel, hogy nem üres, konvex és kompakt.

Milyen alapon válasszon a döntéshozó a lehetséges döntések közül? Valami egyéb, külső információ kell, mert különben például a lehetetlen feladattal állunk szemben, amikor  $D = E$  (egységmátrix). A két leggyakrabban használt megközelítés a

- (i) súlyozásos módszer (weighting vagy scoring) és a
- (ii) referencia pont módszer (reference point method).

A súlyozásos módszer esetében a kritériumokat fontosságuk szerint súlyozzuk a "súlyfüggvény" segítségével és a legnagyobb súlyú alternatív(áka)t választjuk. A leggyakrabban a lineáris súlyozást használják. A referencia pont módszer esetében van egy  $r \in \mathbb{R}^n$  "ideális" alternatíva, ami általában nem eleme az  $A$  halmaznak és mintegy "aspirációs szintként" funkcionál. Itt a leggyakoribb eset az, amikor a  $DH$  olyan alternatív(áka)t választ, amely(ek) valamilyen távolságfüggvény szerint a legközelebb van(nak) a referencia ponthoz. A másik eset az, amikor a referencia pont egy nagyon rossz alternatíva, amely szintén lehet egy "ideálisan rossz" mesterséges alternatíva, de lehet egy valódi alternatíva is, ha az kellő képpen rossz. Ezt a fajta referencia pontot szokták "nadír" pontnak nevezni. A  $DH$  ilyenkor szeretne olyan alternatívát választani, amely lehetőleg minél távolabb van (valamely távolságfüggvény szerint) a nadírtól.

A játékelmélet és a  $TDP$  közötti kapcsolatot már elég korán észrevették és tanulmányozták. Ezt azonban csak abból a szempontból vizsgálták, hogy a nem-kooperatív játékok körében mit tud nyújtani a többcélfüggvényes matematikai programozás elmélete és gyakorlata a  $NEP$  kiterjesztéséhez vektorkifizetésű játékok esetére, Shapley (1959). Először Forgó (1984) vette észre, hogy a játékelméleti megfogalmazás új eszközöket ad a  $TDP$  elméleti és gyakorlati kezeléséhez. Nevezetesen, a

$TDP$  megfogalmazható alkuproblémaként is. Az egyes kritériumokat kell játékosokként értelmeznünk. Minden játékosnak azonos a stratégiahalmaza: az alternatívák  $A$  halmaza. A játékosok egymástól függetlenül választanak egy-egy alternatívát. Ha valamennyien ugyanazt az alternatívát választják, mondjuk  $A_j$ -t, akkor az  $i$  játékos kifizetése  $d_{ij}$ . Ha a játékosok nem valamennyien választják ugyanazt az alternatívát, akkor egy "egyet nem értési",  $A_0$  alternatíva valósul meg (ez lehet modellen kívüli, de akár valamelyik eredeti alternatíva is),  $d_{i0}$  "igen rossz" kifizetésekkel. Az így definiált nem-kooperatív játék lehetséges kifizetései, ha a valószínűségi keveréseket is megengedjük, az egyes  $A_j$  alternatívákhoz tartozó  $d_1, \dots, d_m$  kifizetésvektorok  $F$  konvex burka  $\mathbb{R}^n$ -ben, ami egy konvex politóp. Ezt a kutatási irányt követte többek között Christensen et al (1996) majd Andersen és Lind (1999), akik a  $TDP$ -ből konstruált kooperatív játék Shapley-értékét és a nukleoluszt használták a kritériumok súlyának meghatározására.

A kritériumoknak játékosokként való értelmezése sokszor direktben is nagyon közel van a valósághoz. Első sorban akkor, ha a kritériumok mögött egyének, testületek, szervezetek vannak, amelyek, ha rajtuk múlna, csak a saját szempontjukat vennék figyelembe a "legjobb" alternatíva kiválasztásánál. A több kritérium létezése éppen azt jelenti, hogy ezeket a kritériumokat (a mögötte lévő játékosokat) össze kell egyeztetni. Ennek az egyeztetésnek (alkunak) az eredménye az alkumegoldás, jelen esetben a  $NAM$  vagy az  $LNAM$ .

Az előző két alfejezet terminológiáját használva a fenti probléma, ami eredetileg egy  $TDP$  volt, egy  $(F, d_0)$  alkuprobléma lett, ahol  $d_0$  a rossz kifizetések "egyet nem értési" vektora,  $F$  pedig a lehetséges halmaz. Erre aztán bármilyen alkumegoldást, többek között a  $NAM$ -ot, vagy akár az  $LNAM$ -ot lehet alkalmazni. Vegyük észre, hogy a  $NAM$  egy olyan referencia pont megoldás, ahol a nadír a "rossz" alternatíva, a maximalizálandó távolságfüggvény a Nash-szorzat. Az  $LNAM$  pedig egy olyan referencia pont megoldás, ahol a nadír egy adott irányban a  $-\infty$ -be tart.

A  $TDP$  alkuproblémává való átfogalmazása különösen akkor hasznos, ha az egyet nem értési vektor a probléma természetéből közvetlenül adódik. Ha például az al-

ternatívák arról szólnak, hogy hogyan lehet egy "nagyon rossz" helyzetet javítani, akkor a megegyezés hiánya a rossz helyzet fennmaradását jelenti és ilyenkor az alkumegoldás azt az alternatívát választja ki, amely a Nash-szorzat szerint a lehető legmesszebb van a rossz helyzettől. Ha a döntésképtelenség a jelenlegi helyzetet fokozatosan rontja minden kritérium szerint, de eltérő arányban, akkor az *LNAM* az adekvát megoldás.

Az egyik plusz, amit az átfogalmazás nyújt, a *NAM* axiomatikus jellemzése. Az axiómák elfogadhatóságát a konkrét döntési problémában ellenőrizni lehet és így a választást megalapozottabbá tenni. Az *LNAM*-ot abban az esetben ugyanaz az axiómarendszer határozza meg, ha  $F$  véges számú alternatíva kifizetésvektorainak konvex burka. Ennek alapját a 3.4. tétel adja, amely szerint egy nagy, de véges egyet nem értési vektorral vett *NAM* megegyezik az *LNAM*-al.

Ennyire "forradalmi" ez a megközelítés? Eldobhatjuk a legnépszerűbb lineáris súlyozást? Koránt sem. Minden azon múlik, hogy honnan vesszük azt a plusz információt, amelyet az  $F$  lehetséges halmazon kívül még igénybe veszünk. Ha ez egy természetesen adódó nadír és a Nash axiómák követelményeinek igazolt a fennállása, akkor a *NAM* egy megalapozott döntés. Ha a kritériumok fontosságának mércéjéül szolgáló súlyok és a "score"-ok súlyozott átlagként való értelmezése illik legjobban az adott *TDP*-hez, akkor az a módszer a megfelelő. Az, hogy csak ezt a kettőt emeltük ki a rengeteg létező módszer közül, azért van, mert ez az írás csak a játékelméleti alkuproblémával való kapcsolatot tárgyalja. Egy másik ok, hogy az alábbiakban a lineáris súlyozás és az *LNAM* közötti szoros kapcsolattal szeretnénk foglalkozni.

Mint azt láttuk, az *LNAM* megoldás meghatározása azzal kezdődik, hogy megoldjuk a 3.2. alfejezet (3.2) lineáris célfüggvényű feladatát (*LP2*). Maradjunk a *TDP* kontextusban. Ekkor  $F$  a lehetséges kimenetek (kifizetések) halmaza. Ha az *LP2* célfüggvényét elosztjuk a  $\prod_{j=1}^n r_j$  konstanssal, akkor az alábbi feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} L(x, w) &:= \sum_{i=1}^n w_i x_i \rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad & x \in F \end{aligned} \tag{3.19}$$

ahol  $w_i = 1/r_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), amelyeket teljes joggal interpretálhatjuk a kritériumok súlyaként. A (3.19) feladat megoldása így a lineáris súlyozásos módszer (linear weighting method, *LWM*) alkalmazását jelenti az egyet nem értési irányok reciprokait használva súlyként. A (3.19) feladat megoldásait utilitáriánus megoldásoknak (utilitarian solution) nevezzük. A nem túl szerencsés elnevezés az irodalomból származik.

Így, ha (3.19)-nek csak egyetlen megoldása van, akkor ez az *LNAM*. Vegyük észre, hogy mivel feltételezésünk szerint  $w > 0$  és van olyan  $f \in F$ , hogy  $f > 0$ , a (3.19) feladat optimális célfüggvényértéke pozitív.

Ha (3.19)-nek több megoldása is van (akkor már egyúttal végtelen sok,  $F$  konvexitása miatt), akkor megoldjuk a következő konvex kvadratikus programozási feladatot:

$$\begin{aligned} Q(x, w) &:= \sum_{i=1}^n w_i^2 x_i^2 \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad & x \in F \\ & wx = w^* , \end{aligned} \tag{3.20}$$

ahol

$$w^* = \max_{x \in F} wx .$$

Mivel a (3.20) feladat célfüggvénye szigorúan konvex, ezért egy optimális megoldása van, ami a 3.3. tétel értelmében egy olyan alkuprobléma *LNAM*-ja, amelyben az egyet nem értési irány  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $r_i = 1/w_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

Ezt a kétlépcsős eljárást (a (3.19) és amennyiben szükséges a (3.20) feladat megoldását) "kiterjesztett súlyozási módszernek" (extended weighting method, *EW**M*) nevezzük. Az egyszerűség kedvéért ugyancsak *EW**M*-nek nevezzük a módszer alkalmazásának eredményeként adódó megoldást a döntéselméleti kontextusban. A 3.1. és a 3.2. tételek szerint az 1 – 6 axiómák egyértelműen meghatározzák a *NAM*-ot. Természetesen adódik a kérdés, hogy vajon lehet-e az *LNAM*-ot, vagy az annak

megfelelő *EWM*-et jellemezni megfelelő axiómákkal. Ki fog derülni, hogy az  $n = 2$  esetben Nash axiómáit csak kicsit kell megváltoztatni.

Jelölje  $\mathbb{R}_+^n$  a nem negatív  $n$ -elemű vektorok halmazát. Az axiomatizálást a *TDP*-k egy  $\mathcal{D}$  osztályára végezzük el. Az  $(F, w)$  párost "súlyozott többkritériumú döntési problémának" ( $n$ -criteria decision problem with weights, *DPW*) nevezzük, ha  $F \subset \mathbb{R}_+^n$  nem üres, konvex, kompakt halmaz (a lehetséges kimenetek halmaza), amelynek van legalább egy pozitív eleme,  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $w > 0$  (a súlyvektor) és amelyre az *EWM* pozitív eredményt ad.

Legyen  $\mathcal{D}$  az összes *DWP*-k halmaza. Egy  $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvényt döntési szabálynak nevezünk, ha minden  $(F, w)$  *DWP*-hez egy  $\psi(F, w) \in \mathbb{R}^n$  megoldást rendel. Az *EWM* például egy döntési szabály.

Megköveteljük, hogy egy  $\psi$  döntési szabály teljesítse a következő feltételeket (elégtse ki a következő axiómákat):

**A1**  $\psi(F, w) \in F$ , (lehetségesség).

**A2** Legyen  $\lambda > 0$  egy valós szám és  $F'(\lambda) := \{x' \in \mathbb{R}_+^n : x' = \lambda x, x \in F\}$ . Megköveteljük, hogy minden  $\lambda > 0$ -ra  $\psi(F'(\lambda), \lambda w) = \lambda \psi(F, w)$  álljon fenn (homogenitás).

**A3** Definiáljuk az  $F' := \{x' \in \mathbb{R}_+^n : x' = Wx, x \in F\}$  halmazt, ahol  $W := \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ . Megköveteljük, hogy  $\psi(F, w) = W^{-1}\psi(F', e)$ , ( $e := (1, \dots, 1)$ ) teljesüljön (gyenge skála függetlenség).

**A4** Legyen  $E(F, w) := \arg \max_{x \in F} wx$ . Az  $E(F, w)$  elemeit hatékony (efficiens) megoldásoknak nevezzük. Ekkor  $\psi(F, w) \in E(F, w)$  teljesüljön (utilitáriánizmus).

**A5** Ha  $F_1 \subset F$  és  $\psi(F, w) \in F_1$ , akkor  $\psi(F_1, w) = \psi(F, w)$ , (kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség).

**A6** Ha egy *DWP*-re vannak olyan  $i, j$  indexek, hogy  $f = (f_1, \dots, f_n) \in F \iff \hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n) \in F$ , ( $\hat{f}_k = f_k, k \neq i, k \neq j, \hat{f}_i = f_j, \hat{f}_j = f_i$ ), akkor  $\psi_i(F, e) = \psi_j(F, e)$  (szimmetria).

**A7** Legyen  $F = \{x \in \mathbb{R}_+^n : h_i(x) \leq 0, i \in I\}$  az  $(F, w)$  *DWP* lehetséges halmazának támaszszíkokkal való reprezentációja és  $I$  a  $h_i$  támaszszíkok indexhalmaza (ez akár végtelen is lehet). Egy  $h_k$  támaszszíkot eltávolíthatónak nevezünk, ha az  $F_{-k} := \{x \in \mathbb{R}_+^n : h_i(x) \leq 0, i \in I, i \neq k\}$  halmaz konvex és kompakt. A  $h_r$  támaszszíkot inaktívnak hívjuk a  $\psi$  döntési szabályra vonatkozóan, ha eltávolítható és  $h_r(\psi(F, w)) < 0$ . Megköveteljük, hogy minden  $h_r$  inaktív támaszszíkra  $\psi(F, w) = \psi(F_{-r}, w)$  álljon fenn (inaktív feltételektől való függetlenség).

Csak az **A7** axióma szorul magyarázatra. Az **A5** és **A7** bizonyos értelemben egymás „duáljai”. Az **A5** azt követeli meg, hogy egy halmazon kapott megoldás legyen megoldás az őt tartalmazó részhalmazokon, míg az **A7** azt követeli, hogy egy halmazon kapott megoldás legyen megoldás az őt tartalmazó halmazon is, ha az "lényegtelen", inaktív feltételek elhagyásával keletkezett. "Laza" fogalmazásban azt is mondhatjuk, hogy az **A5** egy "befelé mutató", míg az **A7** egy "kifelé mutató" axióma.

Ha csak egyetlen hatékony megoldás van, akkor az **A4** axióma egyedül meghatározza a megoldást. A többi hat azért kell, hogy ha több (végtelen sok) hatékony megoldás van, akkor ezek közül melyiket válassza a *DH*.

**3.14. tétel** (Forgó és Szidarovszky (2003)). *Az EWM döntési szabály kielégíti az A1–A7 axiómákat.*

*Bizonyítás.* A könnyebbség kedvéért a  $\varphi$  betűt használjuk az *EWM* döntési szabály jelölésére. Nézzük az axiómákat egymás után.

**A1–A4.** Nyilvánvalóan teljesülnek az *EWM* definíciója következtében.

**A5**  $\varphi(F, w)$  a (3.19) és (3.20) optimumfeladatok megoldásaként adódik. Ha a lehetséges halmazt szűkítjük egy részhalmazára, akkor a részhalmazon vett optimum nem lehet nagyobb, mint az egész halmazon vett optimum.

**A6.** Ha  $w = e$ , akkor a szimmetria teljesül, mivel a (3.19) és (3.20) optimumfeladatok  $L$  és  $Q$  célfüggvényei szimmetrikusak az  $x_i$  és  $x_j$  változóknak minden  $i \neq j$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ ) indexpárra.

**A7.** Legyen  $h_r$  egy inaktív feltétel a  $\varphi$  döntési szabályra vonatkozóan. Vezessük be az  $\bar{f} := \varphi(F, w)$  és az  $\bar{\bar{f}} := \varphi(F_{-r}, w)$  jelöléseket. Az  $\bar{f}$  és  $\bar{\bar{f}}$  azonos célfüggvényű szigorúan konvex programozási feladatok optimális megoldásaiként adódnak. Ha  $\bar{f} \neq \bar{\bar{f}}$ , akkor  $f(\lambda) = \bar{f} + \lambda(\bar{\bar{f}} - \bar{f})$  lehetséges megoldás elég kicsi  $\lambda > 0$ -ra a  $h_r$  affin függvény folytonossága miatt.  $Q(f(\lambda)) < \max\{Q(\bar{f}), Q(\bar{\bar{f}})\} = Q(\bar{f})$  elég kis  $\lambda > 0$ -ra mivel  $Q$  szigorúan konvex. Ez ellentmond annak, hogy  $\bar{f}$  minimumpontja a (3.20) feladatnak.  $\square$

Az **A2** és **A3** miatt elég  $(F, e)$  alakú  $DWP$ -ket tekinteni. Ezért feltehetjük, hogy

$$\max_{x \in F} ex = n. \quad (3.21)$$

**3.15. tétel** (Forgó és Szidarovszky (2003)).  $n = 2$  esetében az  $EWM$  az egyetlen döntési szabály, amely kielégíti az **A1–A7** axiómákat.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a  $\psi$  döntési szabály kielégíti az **A1–A7** axiómákat. Legyen  $\bar{f} := \varphi(F, e)$ . (3.21) miatt  $\max_{x \in F} ex = 2$ . Definíáljuk a következő halmazokat:

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x \in F, ex = 2\} \\ F_2 &:= \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x \in F, ex = 2, \bar{f}_2 x_1 + \bar{f}_1 x_2 \leq 2\bar{f}_1 \bar{f}_2\} \end{aligned}$$

Könnyű igazolni, hogy a

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad x &\in F \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

konvex programozási feladat ekvivalens (vagyis ugyanaz az optimális megoldása) a

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad x &\in F \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

feladattal, ami a Nash-szorzatot maximalizálja az  $F_1$  halmazon a 0 egyet nem értési pont mellett. Mivel az utóbbi optimális megoldása  $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$  és a célfüggvény gradiense az  $\bar{f}$  pontban  $(\bar{f}_2, \bar{f}_1)$ , azt kapjuk, hogy

$$\bar{f}_2 x_1 + \bar{f}_1 x_2 \leq 2\bar{f}_1 \bar{f}_2$$

minden  $x \in F_1$ -re. Definiáljuk most az

$$F_3 := \{x \in \mathbb{R}_+^2 : ex = 2, \bar{f}_2 x_1 + \bar{f}_1 x_2 \leq 2\bar{f}_1 \bar{f}_2\}$$

$$F_4 := \{x \in \mathbb{R}_+^2 : ex = 2\}$$

halmazokat. Világos, hogy  $F_1 = F_2 \subset F_3 \subset F_4$ . Tekintsük az  $(F_3, e)$  *DWP*-t és legyen  $\bar{\bar{f}} = \psi(F_3, e)$ . Először megmutatjuk, hogy  $\bar{f}_2 \bar{\bar{f}}_1 + \bar{f}_1 \bar{\bar{f}}_2 < 2\bar{f}_1 \bar{f}_2$  nem állhat fenn. Ha fennállna, akkor a  $\bar{f}_2 x_1 + \bar{f}_1 x_2 \leq 2\bar{f}_1 \bar{f}_2$  feltétel inaktív lenne  $\psi$ -re vonatkozóan és ezért az **A7** miatt,  $\bar{\bar{f}} = \psi(F_4, e)$  lenne. Az **A6** miatt  $\bar{\bar{f}} = e$ , amiből  $2 = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 < 2\bar{f}_1 \bar{f}_2$  következik, ami lehetetlen, mivel a  $2\bar{f}_1 \bar{f}_2$  maximuma a  $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 = 2$  mellett 2. Így

$$\bar{f}_2 \bar{\bar{f}}_1 + \bar{f}_1 \bar{\bar{f}}_2 = 2\bar{f}_1 \bar{f}_2$$

és mind  $\bar{f}$ , mind  $\bar{\bar{f}}$  megoldásai az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ \bar{f}_2 x_1 + \bar{f}_1 x_2 &= 2\bar{f}_1 \bar{f}_2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

egyenletrendszernek. Ha a (3.2) együttható mátrixának a rangja 2, akkor csak egy megoldása van és ezért  $\bar{f} = \bar{\bar{f}}$ . Ha 1 a rangja, akkor  $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ , és így ahhoz, hogy ne legyen ellentmondás az egyenletek között fenn kell állnia az  $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = 1$  egyenlőségeknek. Ez azt jelenti, hogy  $F_3 = F_4$  és az  $(F_3, w)$  *DWP* szimmetrikus. Ekkor viszont **A6** miatt  $\psi(F_3, e) = \bar{f} = e$ . Így minden esetben  $\psi(F_3, e) = e$ . Mivel  $F_1 \subset F_3$ ,  $e \in F_1$ , **A5** miatt  $\psi(F_1, e) = \psi(F_3, e) = e$ . **A4** miatt viszont  $\psi(F, e) = \psi(F_1, e) = e = \varphi(F, e)$ .  $\square$

Az **A4** axióma körülbelül hasonló erejű, mint a Pareto-optimalitás a Nash axiómák közül. A gyenge skála függetlenség (**A3**) és homogenitás (**A2**) együtt is gyengébbek, mint a skála függetlenség Nash axiómái közül. Érdekes megjegyezni, hogy **A3** a skála függetlenséget csak az adott súlyvektor szerint követeli meg. Az **A7** új axióma, amely önmagában elég gyenge, "tölti ki" a különbséget és így nem túlzás azt állítani, hogy az  $n = 2$  esetben az *EW*M és így egyúttal az *LN*AM is lényegében ugyanazokkal az axiómákkal karakterizálhatók, mint a klasszikus *N*AM.

Sajnos ezt nem lehet automatikusan átvinni az  $n > 2$  esetre. Tekintsünk egy olyan döntési szabályt, ami megegyezik az *EW*M-el kivéve azt, hogy a (3.20) feladatban a  $Q(x, w)$  célfüggvényt kicseréljük a  $P_k(x, w) := \sum_{i=1}^k (w_i x_i)^k$  célfüggvényre. Az így kapott döntési szabály kielégíti az **A1–A7** axiómákat minden  $k > 1$ -re és ugyanakkor más megoldásokat is tud produkálni mint az *EW*M ha  $k \neq 2$ ,  $n \geq 3$ .

Így vagy az eddigi axiómákat kell kiegészíteni, vagy valami teljesen más axióma-rendszerben gondolkodni. Mi az első utat választjuk és egy új axiómát fogalmazunk meg. Legyen  $\psi$  egy döntési szabály a  $\mathcal{D}$  halmazon. Minden  $(F, e) \in \mathcal{D}$ -re definiáljuk a következőket:

$$\begin{aligned} G &= E(F, e) \\ \bar{\bar{f}} &= \psi(F, e) \\ u &= ne - \bar{\bar{f}}, \end{aligned}$$

ahol  $E(F, w)$  az  $(F, w)$  *DWP* "utilitáriánus megoldásainak" a halmazát (vagyis a (3.19) feladat optimális megoldásainak a halmazát) jelöli. A  $\psi$  döntési szabályt konzisztensnek nevezzük, ha

$$\bar{\bar{f}} \in E(G, u)$$

minden  $(F, e) \in \mathcal{D}$ -re.

A konzisztencia követelményének egy lehetséges interpretációja a következő. Az  $(F, e)$  *DWP*-ben a *DH* a kritériumoknak eredetileg egyenlő súlyokat adott és kapott

egy  $\bar{\bar{f}}$  megoldást (kimenetelt), amire úgy is lehet gondolni, mint aktualizált súlyvektorra (a kritériumok "fontosságát" kifejező súlyrendszerre), amelyben megtestesül az utilitáriánizmus elve, a kritériumok eredeti (egyenlő) értékelése és a lehetséges megoldások halmazának alakja. Ha még van tere a döntésnek (a (3.19) probléma megoldása nem egyértelmű), akkor az egyformán hatékony megoldások közül való választásban egy olyan célfüggvény irányít, amely az eredeti egyenlő súlyozás felé orientálja a választást. Túlsúlyozott kritériumok (amelyeknek megfelelő komponense az  $\bar{\bar{f}}$ -ben nagy) kisebb súlyt kapnak, alulsúlyozottak ( $\bar{\bar{f}}$  relatíven kisebb komponenseihez tartozók), pedig nagyobbat. Így valamiféle "kiegyensúlyozás" valósul meg, a (3.20) feladat megoldásával a második fázisban a lehetőségekhez képest korrigálunk. Az eredetileg egyenlő súlyok felé való elmozdulás (amennyiben a lehetséges tartomány, pontosabban a hatékony megoldások halmazának alakja ezt megengedi) elég természetes célnak tűnik.

El kell azonban ismerni, hogy a konzisztencia ezen interpretációja mesterkétebb, mint a többi axióma természetes interpretációi. Ez persze nem jelenti azt, mintha akár az eredeti Nash axiómák közül nem lennének olyanok, amelyeket meg lehet kérdejezni. Gondoljunk csak az irreleváns alternatíváktól való függetlenségre, amely bizonyos esetekben akár intuíció ellenes eredményt is hozhat. Ez motiválta pl. a Kalai és Smorodinsky (1975) megoldást, amely egy másik döntési filozófiát testesít meg. Annyit nyugodtan meg lehet állapítani, hogy nincs olyan döntési szabály, amely adott esetben ne eredményezne intuíció ellenes megoldást. Moulin (1988) könyve kitűnő áttekintést ad a problémakörökről. Minden esetre a konzisztencia segítségével tetszőleges  $n$ -re lehet jellemezni az *EW*M-et.

**3.16. tétel** (Forgó és Szidarovszky (2003)). *Az EW*M konzisztens és az egyetlen lehetséges, konzisztens, homogén és gyengén skála független utilitáriánus döntési szabály.

*Bizonyítás.* Legyen  $\psi$  egy konzisztens döntési szabály amely kielégíti az **A1–A4** axiómákat, továbbá  $\bar{f} := \varphi(F, e)$  és  $\bar{\bar{f}} := \psi(F, e)$  (az *EW*M-et most is  $\varphi$ -vel jelöljük).

Az *EWM* első fázisa (a (3.19) probléma megoldása) biztosítja azt, hogy a második fázisban ((3.20) probléma) a választás már csak a  $G := E(F, e)$  efficiens megoldások halmazára korlátozódik. Az  $\bar{f}$  a (3.20) feladat egyetlen optimális megoldása. A (3.20) célfüggvénye folytonosan differenciálható, ezért  $\bar{f}x \geq \bar{f}\bar{f}$  minden  $x \in G$ -re, mivel a célfüggvény grádiense az  $\bar{f}$  pontban  $2\bar{f}$ . Ez ekvivalens az  $(ne - \bar{f})x \leq (ne - \bar{f})\bar{f}$  egyenlőtlenséggel, mert  $nex = n^2$  minden  $x \in G$ -re (3.21) miatt. Így  $\bar{f} \in E(G, ne - \bar{f})$  és  $\varphi$  konzisztens.

**A4** miatt,  $\bar{\bar{f}} \in G$  és mivel  $\bar{f}x \geq \bar{f}\bar{f}$  minden  $x \in G$ -re, azt kapjuk, hogy

$$\bar{f}\bar{\bar{f}} \geq \bar{f}\bar{f}. \quad (3.23)$$

Mivel  $\psi$  konzisztens, ezért  $\bar{\bar{f}} \in E(G, ne - \bar{\bar{f}})$ , vagyis  $\bar{\bar{f}}$  optimális megoldása az alábbi feladatnak

$$\begin{aligned} (ne - \bar{\bar{f}})x &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad x &\in G \end{aligned}$$

Mivel  $\bar{f} \in G$  lehetséges és  $\bar{\bar{f}}$  optimális, az

$$(ne - \bar{\bar{f}})\bar{\bar{f}} \geq (ne - \bar{f})\bar{f}$$

egyenlőtlenség fennáll. Ebből viszont következik az

$$\bar{f}\bar{\bar{f}} \geq \bar{\bar{f}}\bar{f} \quad (3.24)$$

egyenlőtlenség, mivel  $ne\bar{f} = ne\bar{\bar{f}} = n^2$  konstans.

A (3.22) és (3.23) egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk a

$$2\bar{f}\bar{\bar{f}} \geq \bar{f}\bar{f} + \bar{\bar{f}}\bar{\bar{f}}$$

egyenlőtlenséget, amely csak akkor állhat fenn, ha  $\bar{f} = \bar{\bar{f}}$ . □

Az *EWM* két fázisa külön-külön is axiomatizálható. Utilitáriánizmus (**A4** axióma) helyett lehet additivitást vagy affinitást megkövetelni, mint ahogy azt Myerson

(1981) tette és Moulin (1988) részletesen elemezte. Az *EWM* második fázisa tulajdonképpen az origótól vett euklideszi távolság minimalizálása, ami ugyanaz, mint egy olyan lehetséges megoldás választása, amely a lehető legközelebb van egy referencia ponthoz, jelen esetben az origóhoz. Rubinstein és Zhou (1999) axiomatizálta ezt a döntési szabályt, amelyben az elég erős „line symmetry” axiómát használta. Ennek az alkalmazása az általunk tárgyalt döntési problémák esetében komoly nehézségeket jelentene, mert akkor nem korlátos lehetséges tartományokat, amelyek akár az  $\mathbb{R}_+^n$ -en is túlterjednek, szintén *TDP*-knek kellene tekinteni. Ebben a kontextusban érdemes megjegyezni, hogy az *EWM* első fázisa egy nadírtól való eltávolodás, a második fázis pedig egy ponthoz való közeledés. A konzisztencia axióma a második fázisban a célfüggvényt linearizálja és ezáltal mindkét fázis egy *LWM* lesz.

A játékelmélet és a *TDP* "összehozására" más megközelítések is vannak. Erre egy példa Zhou et al (2009), ahol a kritériumokat szintén játékosok testesítik meg, de a súlyokat nem egy *NAM*, hanem egy megfelelően definiált nem-kooperatív játék *NEP*-jeként kapjuk.

Meg kell jegyezzük, hogy az *EWM* a kimenetel-térben határoz meg egy egyértelmű megoldást. Ezt viszont, ha nem egy eredeti "tisza" alternatíva kimenetele, hanem valamely alternatívák keverésének kimenetele, akkor akár többféle keverés is előállíthatja. Ennek oka, hogy egy politóp pontjainak a csúcspontok konvex lineáris kombinációként való előállítása nem feltétlenül egyértelmű.

## A. függelék

### Bizonyítások

#### A.1. Egy két-függvényes minimax tétel

*Az 1.24. tétel bizonyítása, Forgó és Joó (1998).* Legyenek  $\rho_1$  és  $\rho_2$  átlagoló függvények,  $X$  és  $Y$  nem üres halmazok,  $f, g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \leq g$ ,  $f$  korlátos függvények, amelyekre fennállnak a következő feltételek:

bármely  $y_1, y_2 \in Y$ -hoz található olyan  $y_3 \in Y$ , hogy

$$x \in X \implies g(x, y_3) \leq \rho_2(f(x, y_1), g(x, y_2)) ,$$

bármely  $x_1, x_2 \in X$ -hez található olyan  $x_3 \in X$ , hogy

$$y \in Y \implies f(x_3, y) \geq \rho_1(f(x_1, y), g(x_2, y)) .$$

Ekkor minden  $F \subset X$  véges halmazra fennáll

$$\inf_Y \max_F f(x, y) \leq \sup_X \inf_Y g(x, y) .$$

A tétel bizonyításához szükségünk lesz az átlagoló függvény definíciójára és egy lemmára. Az átlagoló függvényt ugyan már korábban definiáltuk, de a könnyebb referencia kedvéért ezt megismételjük.

Egy  $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényt átlagoló függvénynek nevezünk, ha mindegyik változójában monoton növekvő,

$$\rho(\lambda, \lambda) = \lambda, \quad (\text{A.1})$$

és

$$\lambda \neq \mu \implies \min\{\lambda, \mu\} < \rho(\lambda, \mu) < \max\{\lambda, \mu\}. \quad (\text{A.2})$$

**A.1. lemma.** Legyenek  $\rho_1$  és  $\rho_2$  átlagoló függvények,  $X$  és  $Y$  nem üres halmazok,  $f, g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , amelyekre fennállnak a következő feltételek:

$$f \leq g \text{ } X \times Y\text{-on, } f \text{ korlátos,} \quad (\text{A.3})$$

bármely  $y_1, y_2 \in Y$ -hoz található olyan  $y_3 \in Y$ , hogy

$$x \in X \implies g(x, y_3) \leq \rho_2(f(x, y_1), g(x, y_2)), \quad (\text{A.4})$$

bármely  $x_1, x_2 \in X$ -hez található olyan  $x_3 \in X$ , hogy

$$y \in Y \implies f(x_3, y) \geq \rho_1(f(x_1, y), g(x_2, y)). \quad (\text{A.5})$$

Ekkor minden  $x_1, x_2 \in X$ -re fennáll

$$\inf_Y \max\{f(x_1, y), g(x_2, y)\} \leq \sup_X \inf_Y g(x, y). \quad (\text{A.6})$$

*Bizonyítás.* Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy

$$\inf_Y \max\{f(x_1, y), g(x_2, y)\} = \alpha > \beta = \sup_X \inf_Y g(x, y). \quad (\text{A.7})$$

fennáll valamely  $x_1, x_2 \in X$ -re. Kényelmi szempontból jelöljük  $(x_1, x_2)$ -öt  $(x_1, w_1)$ -el és definiáljuk a  $(x_n, w_n)$  sorozatot induktíven a következő képpen. Tegyük fel, hogy  $x_n$  és  $w_n$  már rendelkezésünkre áll és

$$\inf_Y \max\{f(x_n, y), g(w_n, y)\} \geq \alpha . \quad (\text{A.8})$$

Definiáljuk  $x^*$ -ot a következő egyenlőtlenséggel

$$f(x^*, y) \geq \rho_1(f(x_n, y), g(w_n, y)) , \text{ minden } y \in Y\text{-ra.} \quad (\text{A.9})$$

Az (A.5) miatt ilyen  $x^*$  létezik. Legyen  $\gamma$  egy tetszőleges olyan szám, amely kielégíti a

$$\alpha > \gamma > \beta \quad (\text{A.10})$$

egyenlőtlenségeket. Vezessük be az

$$N_\gamma f(x) := \{y \in Y : f(x, y) \leq \gamma\} \quad (\text{A.11})$$

jelölést. Először megmutatjuk, hogy

$$N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma f(x_n) , \text{ vagy } N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma g(w_n) . \quad (\text{A.12})$$

Mivel  $\gamma > \beta$ , ezért  $N_\gamma g(x) \neq \emptyset$  minden  $x \in X$ -re. Továbbá  $g \geq f$  -ből következik  $N_\gamma f(x) \neq \emptyset$  minden  $x \in X$ -re. Az  $\alpha > \gamma$  egyenlőtlenségből és (A.8)-ból

$$N_\gamma f(x_n) \cap N_\gamma g(w_n) = \emptyset . \quad (\text{A.13})$$

A  $g(x^*, y) \geq f(x^*, y) \geq \rho_1(f(x_n, y), g(w_n, y))$  egyenlőtlenségekből kapjuk a

$$N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma f(x^*) \subset N_\gamma f(x_n) \cup N_\gamma g(w_n) \quad (\text{A.14})$$

tartalmazásokat. Ismét indirekt módon tegyük fel, hogy (A.12) nem áll fenn. Ekkor van olyan  $z_1, z_2$ , hogy

$$z_1 \in N_\gamma g(x^*) \cap N_\gamma f(x_n), z_2 \in N_\gamma g(x^*) \cap N_\gamma g(w_n) . \quad (\text{A.15})$$

Indukcióval,  $m = 3$ -tól kezdve definiáljuk  $z_m$ -et minden  $m \geq 3$ -ra az alábbiak szerint.

Jelölje  $i_m$  (és  $j_m$ ) azt a legnagyobb  $m$ -nél kisebb indexet, amelyre  $z_{i_m} \in N_\gamma f(x_n)$  (és  $z_{j_m} \in N_\gamma g(w_n)$ ). Definiáljuk  $z_m$ -et (A.4)-el, ami azt jelenti, hogy minden  $x \in X$ -re fennáll a

$$g(x, z_m) \leq \rho_2(f(x, z_{i_m}), g(x, z_{j_m})) \quad (\text{A.16})$$

egyenlőtlenség. Mivel  $z_1, z_2 \in N_\gamma g(x^*)$ , indukcióval azt kapjuk (a  $\rho_2$  átlagoló függvény monotonitását kihasználva), hogy  $z_m \in N_\gamma g(x^*)$  minden  $m$ -re, amiből (A.13) és (A.14) miatt

$$z_m \in N_\gamma f(x_n) , \text{ vagy } z_m \in N_\gamma g(w_n) \quad (\text{A.17})$$

következik. Tegyük először fel, hogy végtelen sok olyan  $m$  index van, amelyre  $z_m \in N_\gamma f(x_n)$ . Jelöljük  $\{z_{m_k}\}$ -val ezeknek a részsorozatát. Az  $f(x_n, z_{m_{k+1}}) \leq \gamma < \alpha$  egyenlőtlenségekből (A.8) és (A.16) következtében az

$$\alpha \leq g(w_n, z_{m_{k+1}}) \leq \rho_2\left(f(w_n, z_{m_k}), g(w_n, z_{j_{m_{k+1}}})\right) \quad (\text{A.18})$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Itt a  $z_{j_{m_{k+1}}}$  definíciójából kapjuk a  $g(w_n, z_{j_{m_{k+1}}}) \leq \gamma$  egyenlőtlenséget, amelyből

$$f(w_n, z_{m_k}) \geq g(w_n, z_{m_{k+1}}) \geq f(w_n, z_{m_{k+1}})$$

következik. Másképpen: az  $\{f(w_n, z_{m_k})\}$  sorozat monoton csökkenő amint  $k \rightarrow \infty$  és  $\alpha$  egy alsó korlátja. Vezessük be az  $A := \lim_{k \rightarrow \infty} f(w_n, z_{m_k}) \geq \alpha$  jelölést.

Az

$$\begin{aligned} f(w_n, z_{m_{k+1}}) &\leq g(w_n, z_{m_{k+1}}) \\ &\leq \rho_2\left(f(w_n, z_{m_k}), g(w_n, z_{j_{m_{k+1}}})\right) \leq \rho_2(f(w_n, z_{m_k}), \gamma) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy ha  $k \rightarrow \infty$ , akkor  $A \leq \rho_2(A, \gamma)$ , ami ellentmondás, mivel  $A \geq \alpha > \gamma$  és  $\rho_2$  átlagoló függvény.

Ez azt mutatja, hogy nincs végtelen sok  $z_m \in N_\gamma f(x_n)$ , ezért valamely elég nagy  $N$ -re, minden  $m \geq N$  esetében  $z_m \in N_\gamma g(w_n)$  és valamely  $m_0 < N$  -ra ( $m_0$  az a legnagyobb index, amelyre  $f(x_n, z_{m_0}) \leq \gamma$ )

$$g(x, z_{m+1}) \leq \rho_2(f(x, z_{m_0}), g(x, z_m))$$

fennáll minden  $x \in X$ -re.

Az (A.8) miatt a  $g(w_n, z_m) \leq \gamma$  egyenlőtlenségből következik  $f(x_n, z_m) \geq \alpha$ , így

$$\alpha \leq f(x_n, z_{m+1}) \leq g(x_n, z_{m+1}) \leq \rho_2(f(x_n, z_{m_0}), g(x_n, z_m))$$

fennáll minden  $m \geq N$ -re. Mivel  $f(x_n, z_{m_0}) \leq \gamma$ , ezért  $\{g(x_n, z_m)\}$  csökkenő amint  $m \rightarrow \infty$  és  $\alpha$  egy alsó korlátja. Ez ugyanúgy ellentmondáshoz vezet, mint a  $\{f(w_n, z_{m_k})\}$  sorozat esetében.

Azon feltételezés mellett, hogy (A.12) nem áll fenn, a (nem feltétlen különböző)  $z_m$  pontok generálása a végtelenségig megy. De éppen most láttuk be, hogy ez lehetetlen, így (A.12) fenn kell álljon.

Másodszor, (A.12)-re támaszkodva megmutatjuk, hogy

$$N_\gamma f(x^*) \subset N_\gamma f(x_n) , \text{ vagy } N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma g(w_n) . \quad (\text{A.19})$$

Ehhez elég azt bizonyítani, hogy  $N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma f(x_n) \implies N_\gamma f(x^*) \subset N_\gamma f(x_n)$ , mert a fordított implikáció mindig igaz a  $g \geq f$  feltétel miatt. Mivel (A.14) miatt  $N_\gamma f(x^*) \subset N_\gamma f(x_n) \cup N_\gamma g(w_n)$ , az  $N_\gamma f(x^*) \not\subset N_\gamma f(x_n)$  indirekt feltételezés implikálja egy  $z_2 \in N_\gamma f(x^*) \cap N_\gamma g(w_n)$  létezését.

Vegyünk egy tetszőleges  $z_1 \in N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma f(x_n)$  elemet és definiáljuk a  $\{z_m\}$  sorozatot indukcióval (A.4) felhasználásával a következő módon:

$$\begin{aligned} g(x, z_3) &\leq \rho_2(f(x, z_2), g(x, z_1)) \\ g(x, z_{m+1}) &\leq \rho_2(f(x, z_2), g(x, z_m)), \quad (m \geq 3), \end{aligned}$$

minden  $x \in X$ -re.

Az  $f(x^*, z_2) \leq \gamma$  és  $g(x^*, z_1) \leq \gamma$  egyenlőtlenségekből jön  $g(x^*, z_3) \leq \gamma$  és így az  $m$ -re vonatkozó indukció alapján

$$g(x^*, z_{m+1}) \leq \rho_2(f(x^*, z_2), g(x^*, z_m)) \leq \gamma, \quad (m \geq 3) .$$

Ez azt jelenti, hogy  $z_{m+1} \in N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma f(x_n)$  és így (A.8) miatt  $g(w_n, z_{m+1}) \geq \alpha$ .

Ezért

$$\alpha \leq g(w_n, z_{m+1}) \leq \rho_2(f(w_n, z_2), g(w_n, z_m)) , \quad (m \geq 3) . \quad (\text{A.20})$$

Minthogy  $z_2 \in N_\gamma g(w_n)$ , ezért  $f(w_n, z_2) \leq g(w_n, z_2) \leq \gamma$ . Az (A.20)-ból látszik, hogy  $\{g(w_n, z_m)\}$  csökkenő sorozat  $m \geq 4$ -re. Legyen  $\alpha \leq B := \lim_{m \rightarrow \infty} g(w_n, z_m)$ . Ekkor (A.20)-ból következik  $B \leq \rho_2(\gamma, B)$ , ami ellentmond (A.2)-nek. Így (A.19) fennáll.

Most rátérünk a bizonyítás harmadik, befejező szakaszára.

Ha  $N_\gamma f(x^*) \subset N_\gamma f(x_n)$ , akkor legyen  $(x_{n+1}, w_{n+1}) := (x^*, w_n)$ , és ha  $N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma g(w_n)$ , akkor legyen  $(x_{n+1}, w_{n+1}) := (x_n, x^*)$ . Az első esetben  $y \in N_\gamma f(x^*)$ -ből következik  $y \in N_\gamma f(x_n)$  és így (A.8) miatt  $g(w_n, y) \geq \alpha$ . Ezért

$$\inf_Y \max\{f(x^*, y), g(w_n, y)\} = \inf_Y \max\{f(x_{n+1}, y), g(w_{n+1}, y)\} \geq \gamma . \quad (\text{A.21})$$

Mivel  $x^*$  választása nem függ  $\gamma$ -tól és (A.21) fennáll minden  $\gamma < \alpha$  esetében, azt kapjuk, hogy

$$\inf_Y \max\{f(x_{n+1}, y), g(w_{n+1}, y)\} \geq \alpha .$$

A második esetben ugyanígy érvelünk:  $y \in N_\gamma g(x^*) \implies y \in N_\gamma g(w_n)$ . Az (A.18)-ból az  $f(x_n, y) \geq \alpha$  következik, majd az

$$\inf_Y \max\{f(x_n, y), g(x^*, y)\} = \inf_Y \max\{f(x_{n+1}, y), g(w_{n+1}, y)\} \geq \gamma$$

egyenlőség/egyenlőtlenség, és végül a

$$\inf_Y \max\{f(x_{n+1}, y), g(w_{n+1}, y)\} \geq \alpha$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az  $\{x_n, w_n\}$  sorozat konstrukciójából és az (A.19)-ből

$$N_\gamma f(x_{n+1}) \subset N_\gamma f(x_n), \quad N_\gamma g(w_{n+1}) \subset N_\gamma g(w_n), \quad (n \geq 1).$$

Ha  $N_\gamma f(x^*) \subset N_\gamma f(x_n)$ , akkor  $f(x_{n+1}, y) \geq \rho_1(f(x_n, y), g(w_n, y))$  minden  $y \in Y$ -ra.

Mivel  $y \in N_\gamma f(x_{n+1}) \implies y \in N_\gamma f(x_n) \implies g(w_n, y) \geq \alpha$ , ezért

$$f(x_{n+1}, y) \geq \rho_1(f(x_n, y), \alpha) \quad y \in N_\gamma f(x_{n+1})\text{-re.}$$

Innen

$$\begin{aligned} \inf_Y f(x_{n+1}, y) &= \inf_{y \in N_\gamma f(x_{n+1})} f(x_{n+1}, y) \\ &\geq \inf_{y \in N_\gamma f(x_{n+1})} \rho_1(f(x_n, y), \alpha) \\ &\geq \inf_Y \rho_1(f(x_n, y), \alpha) = \rho_1\left(\inf_Y f(x_n, y), \alpha\right). \end{aligned} \tag{A.22}$$

Ha  $N_\gamma g(x^*) \subset N_\gamma g(w_n)$ , akkor hasonló képpen kapjuk

$$\inf_Y g(w_{n+1}, y) \geq \rho_1\left(\alpha, \inf_Y g(w_n, y)\right). \tag{A.23}$$

Így a  $\{c_n := \inf_Y f(x_n, y)\}, \{d_n := \inf_Y g(w_n, y)\}$  sorozatok egyike végtelen kell legyen. Ha a  $\{c_{n_k}\}$  részsorozat végtelen, akkor

$$c_{n_k} \leq \beta < \alpha, \quad c_{n_{k+1}} \geq \rho_1(c_{n_k}, \alpha) > c_{n_k}, \quad (k \geq 1).$$

Határértéket véve

$$c^* := \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_{k+1}} \geq \rho_1\left(\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k}, \alpha\right) > \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = c^*,$$

ami ellentmondás. Ha a  $\{d_{n_\ell}\}$  sorozat végtelen, akkor hasonló képpen

$$d_{n_\ell} \leq \beta < \alpha, d_{n_\ell+1} \geq \rho_1(\alpha, d_{n_\ell}) > d_{n_\ell}, \quad (\ell \geq 1)$$

és

$$d^* := \lim_{\ell \rightarrow \infty} d_{n_\ell+1} \geq \rho_1\left(\alpha, \lim_{\ell \rightarrow \infty} d_{n_\ell}\right) > \lim_{\ell \rightarrow \infty} d_{n_\ell} = d^*,$$

ami szintén ellentmondás. Ezért (A.7) nem állhat fenn és a lemma igaz.  $\square$

Most rátérünk a tétel bizonyítására. A könnyebb hivatkozás kedvéért megismételjük a tétel állítását.

Legyenek  $\rho_1$  és  $\rho_2$  átlagoló függvények,  $X$  és  $Y$  nem üres halmazok,  $f, g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \leq g$ ,  $f$  korlátos, amelyekre fennállnak a következő feltételek: bármely  $y_1, y_2 \in Y$ -hoz található olyan  $y_3 \in Y$ , hogy

$$x \in X \implies g(x, y_3) \leq \rho_2(f(x, y_1), g(x, y_2)), \quad (\text{A.24})$$

bármely  $x_1, x_2 \in X$ -höz található olyan  $x_3 \in X$ , hogy

$$y \in Y \implies f(x_3, y) \geq \rho_1(f(x_1, y), g(x_2, y)). \quad (\text{A.25})$$

Ekkor minden  $F \subset X$  véges halmazra fennáll

$$\inf_Y \max_F f(x, y) \leq \sup_X \inf_Y g(x, y). \quad (\text{A.26})$$

(A.26) triviálisan fennáll, ha  $|F| = 1$ . A bizonyítás az  $|F|$ -e vonatkozó indukcióval megy. Egészen pontosan azt fogjuk bizonyítani (ami egy kicsit több, mint a tétel állítása), hogy minden  $F \subset X$  véges halmazra és minden  $U \subset Y$ -ra, amely kielégíti az (A.24) és (A.25) feltételeket, ha  $Y$ -t  $U$ -ra cseréljük ki, fennáll

$$\inf_U \max_F f(x, y) \leq \sup_X \inf_U g(x, y). \quad (\text{A.27})$$

Tegyük most fel, hogy az (A.27) egyenlőtlenség teljesül minden olyan  $F$ -re, amelyre  $|F| \leq n$ . Legyen  $G := \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  és  $U \subset Y$  olyan, hogy (A.24) és (A.25) fennállnak. Mivel  $f$  korlátos, ezért

$$\inf_U \max_G f(x, y) > -\infty .$$

Tekintsünk egy tetszőleges  $\gamma$  számot, amelyre

$$\gamma < \inf_U \max_G f(x, y) .$$

Definiáljuk a  $V$  és  $\bar{V}$  halmazokat:

$$\begin{aligned} V &:= \{y \in U : g(x_{n+1}, y) < \gamma\} \\ \bar{V} &:= U \setminus V = \{y \in U : g(x_{n+1}, y) \geq \gamma\} . \end{aligned}$$

Ha  $V = \emptyset$  minden  $\gamma < \inf_U \max_G f(x, y)$  számra, akkor

$$\gamma \leq \inf_U g(x_{n+1}, y) \leq \sup_X \inf_U g(x, y) .$$

Mivel  $\gamma$  tetszőlegesen közel lehet  $\inf_U \max_G f(x, y)$ -hoz, (A.27)-nek fenn kell állni, ha  $F = G$ . Így feltehetjük, hogy  $V \neq \emptyset$ , valamely  $\gamma_0 < \inf_U \max_G f(x, y)$  esetében. Ekkor  $V \neq \emptyset$ , ha  $\gamma_0 < \gamma < \inf_U \max_G f(x, y)$ . Tekintsünk egy ilyen  $\gamma$ -t és olyan  $\beta$ -t, amelyre  $\alpha < \beta < \gamma$ .

Legyenek  $y_1, y_2 \in V$ . Ekkor

$$\max\{g(x_{n+1}, y_1), g(x_{n+1}, y_2)\} < \gamma$$

$V$  definíciója miatt. Az (A.24) miatt van olyan  $y_3 \in Y$ , hogy

$$\begin{aligned} g(x, y_3) &\leq \rho_2(f(x, y_1), g(x, y_2)) \leq \max\{f(x, y_1), g(x, y_2)\} \leq \\ &\max\{g(x, y_1), g(x, y_2)\} \end{aligned}$$

minden  $x \in X$ -re. Ezért

$$g(x_{n+1}, y_3) < \gamma , \quad (\text{A.28})$$

amiből  $y_3 \in V$  következik és így  $V$  (ugyanúgy, mint  $U$ ) kielégíti az (A.24) feltételt és nyilván az (A.25)-öt is.

Legyen  $F := G \setminus \{x_{n+1}\}$ . Így  $V$  definíciója miatt és mert  $f(x_{n+1}, y) \leq g(x_{n+1}, y) < \gamma$  valamint  $\max_G f(x, y) > \gamma$  minden  $y \in V$ -re

$$\max_G f(x, y) = \max_F f(x, y) ,$$

aminek következtében

$$\gamma < \inf_V \max_G f(x, y) = \inf_V \max_F f(x, y) .$$

Az indukciós feltevés miatt

$$\gamma < \inf_V \max_F f(x, y) \leq \sup_X \inf_V g(x, y) .$$

Így van olyan  $x' \in X$ , hogy

$$\gamma < \inf_V g(x', y) . \quad (\text{A.29})$$

Ha  $\overline{V} = \emptyset$ , akkor (A.29) következtében  $V = U$  és

$$\inf_U \max_G f(x, y) = \inf_V \max_G f(x, y) = \inf_V \max_F f(x, y) \leq \sup_X \inf_U g(x, y) ,$$

ami azt jelenti, hogy (A.27) fennáll  $F = G$  esetében.

Tegyük most fel, hogy  $\overline{V} \neq \emptyset$ . Be fogjuk látni, hogy van olyan  $x'' \in X$ , amelyre

$$f(x'', y) > \alpha \quad (\text{A.30})$$

minden  $y \in \overline{V}$ -ra. Legyen  $z_0 := x_{n+1}$ . Ha valamely  $k = 0, 1, \dots$  esetében  $f(z_k, y) \geq \beta$  minden  $y \in \overline{V}$ -ra, akkor legyen  $x'' := z_k$ . Különben legyen  $z_k \in X$ , amelyet az (A.25) feltétel határoz meg a

$$f(z_k, y) \geq \rho_1(f(z_{k-1}, y), g(z_0, y))$$

$y \in \bar{V}$ , egyenlőtlenséggel. Mivel  $g(z_0, y) \geq \gamma$ , és  $f(z_{k-1}, y) < \beta < \gamma$  valamely  $y \in \bar{V}$ -ra, ezért

$$f(z_k, y) > f(z_{k-1}, y) . \quad (\text{A.31})$$

Ha a  $\{z_k\}$  sorozat véges, akkor (A.30) azonnal következik. Tegyük fel, hogy végtelen. Minden  $k = 0, 1, \dots$ , esetében definiáljuk az

$$r_k := \inf_{y \in \bar{V}} f(z_k, y) .$$

számokat. Ekkor  $r_k < \beta$  minden  $k = 0, 1, \dots$ -ra és az  $\{r_k\}$  sorozat növekvő az (A.31) miatt és mert minden  $y \in \bar{V}$ -ra, amelyre  $f(z_\ell, y) \geq \gamma$  fennáll valamely  $\ell$  indexre, a  $f(z_k, y) \geq \gamma$  egyenlőtlenség is igaz minden  $k \geq \ell$  index esetében, mert  $g(z_0, y) \geq \gamma$ . Így  $\{r_k\}$  konvergál és  $\delta := \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \leq \beta$ . Ha  $\delta < \beta$ , akkor  $\rho_1$  folytonossága és  $z_{k+1}$  definíciója miatt

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{k+1} \geq \rho_1 \left( \lim_{k \rightarrow \infty} r_k, \beta \right) > \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \delta ,$$

ami nem lehetséges. Ezért  $\delta = \beta$  és elég nagy  $k_0$  indexre

$$\inf_{y \in \bar{V}} f(z_{k_0}, y) > \alpha .$$

Legyen  $x'' := z_{k_0}$ . Így (A.29) és (A.30) következtében

$$\alpha < \inf_U \max\{f(x'', y), g(x', y)\} .$$

Az A.1. lemma állítása miatt

$$\alpha < \inf_U \max\{f(x'', y), g(x', y)\} \leq \sup_X \inf_U g(x, y) ,$$

amiből, mivel  $\alpha$  tetszőlegesen közel van  $\inf_U \max_G f(x, y)$ -hoz, következik

$$\inf_U \max_G f(x, y) \leq \sup_X \inf_U g(x, y) ,$$

ami a tétel állítása. □

## A.2. A puha korrelált egyensúly ereje négy-személyes, egyszerű, két-kiszolgálós, nem növekvő lineáris, torlódási játékokban

A 2.19. tétel bizonyítása, Forgó (2014). Ezúttal az  $n = 4$  értéket helyettesítjük be a 2.3. alfejezet (2.12) és (2.13) formulájába. Így a következő  $LP$  feladatot kapjuk

$$\begin{aligned} & (12x + 4y + 12z)p_1 + (24x + 12y + 24z)p_2 \\ & \quad + (12x + 12y + 12z)p_3 + 4yp_4 \rightarrow \max \\ \text{s.t. } & (-y - 3z)p_0 + (3x - 2y - 3z)p_1 + (3x + 3z)p_2 \\ & \quad + (-3x + 2y + 3z)p_3 + (-3x + 3y)p_4 \geq 0 \\ & p_0 + 4p_1 + 6p_2 + 4p_3 + p_4 = 1 \\ & p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0 . \end{aligned}$$

Azokra a bázismegoldásokra, amelyeknek egy pozitív komponense van, a következő célfüggvény értékeket kapjuk:

|               |           |                     |                     |                     |           |
|---------------|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|
| Pozitív komp. | $p_0 = 1$ | $p_1 = \frac{1}{4}$ | $p_2 = \frac{1}{6}$ | $p_3 = \frac{1}{4}$ | $p_4 = 1$ |
| Célfv. érték  | 0         | $3x + y + 3z$       | $4x + 2y + 4z$      | $3x + 3y + 3z$      | $4y$      |

Csak a következő három lehetőség van:

- (i)  $p_2 = \frac{1}{6}$ -nak van a legnagyobb célfüggvény értéke. Mivel ez mindig lehetséges megoldás, ezért mind a kisméretű, mind a teljes méretű  $LP$ -nek optimális megoldása és így  $EV = 1$ .

- (ii)  $p_4 = 1$ -nek van a legnagyobb célfüggvény értéke. Ekkor  $4y \geq 4x + 2y + 4z$ , ami csak akkor fordulhat elő, ha  $y \geq 2x + 2z$ , amiből az következik, hogy  $-3x + 3y \geq 0$ , és így mind a kisméretű, mind a teljes méretű  $LP$ -nek optimális megoldása. Tehát ebben az esetben is  $EV = 1$ .
- (iii)  $p_3 = \frac{1}{4}$ -nek van a legnagyobb célfüggvény értéke. Ha  $-3x + 2y + 3z \geq 0$ , akkor a korábbi okfejtésből következően szintén  $EV = 1$ .

Így egy pozitív komponensű bázismegoldás csak akkor nem ad optimális megoldást, ha az alábbi egyenlőtlenségek fennállnak

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 3z &\geq 4y \\ 3x + 3y + 3z &> 4x + 2y + 4z \\ -3x + 2y + 3z &< 0 \end{aligned}$$

ami a következőre egyszerűsíthető

$$x + z < y < \frac{3}{2}(x - z) . \quad (\text{A.32})$$

A továbbiakban két pozitív komponensű bázismegoldásokat tekintünk. Nézzük azt az esetet, amikor a  $p_2$  és  $p_3$  változók pozitívak. A bázismegoldást megkapjuk, ha megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (3x + 3z)p_2 + (-3x + 2y + 3z)p_3 &= 0 \\ 6p_2 + 4p_3 &= 1 \end{aligned}$$

A megoldás:

$$p_2 = \frac{1}{6} \frac{3x - 2y - 3z}{5x - 2y - 6z} , \quad p_3 = \frac{1}{4} \frac{2x - 3z}{5x - 2y - 6z} . \quad (\text{A.33})$$

Az (A.32)-ből következik, hogy  $0 \leq p_2, p_3 \leq 1$  és így (A.33) valóban lehetséges bázismegoldás, amelynek a célfüggvény értéke

$$\frac{(4x + 2y + 4z)(3x - 2y - 3z) + (3x + 3y + 3z)(2x - 3z)}{5x - 2y - 6z} .$$

Az  $EV(x, y, z)$  kényszerítési hányados  $x, y, z$  függvényeként az alábbi:

$$EV(x, y, z) = \frac{(3x + 3y + 3z)(5x - 2y - 6z)}{(4x + 2y + 4z)(3x - 2y - 3z) + (3x + 3y + 3z)(2x - 3z)} . \quad (\text{A.34})$$

Az  $EV$  kényszerítési érték így az alábbi optimum feladat optimális célfüggvény értéke:

$$\begin{aligned} EV(x, y, z) &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad x + z &\leq y \leq \frac{3}{2}(x - z) \\ x, y, z &\geq 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Vegyük észre, hogy ha  $x^*, y^*, z^*$  optimális megoldása az (A.35) feladatnak, akkor  $y^* > 0$ , és  $x' = \frac{x^*}{y^*}, y' = 1, z' = \frac{z^*}{y^*}$  szintén optimális megoldása (A.35)-nek. Ezért feltehetjük, hogy  $y = 1$ . Vezessük be a  $\phi = \frac{900+393\sqrt{30}}{1080+356\sqrt{30}} = 1.007478\dots$  jelölést.

Először megmutatjuk, hogy  $EV(x, 1, z) \leq \phi$  az (A.35) feladat minden lehetséges bázismegoldására. Ebből a célból belátjuk, hogy  $EV(x, 1, 0) \leq \phi$ -ből következik  $EV(x, 1, z) \leq \phi$  az (A.35) feladat minden lehetséges megoldására. Az (A.34) felhasználásával  $EV(x, 1, z) \leq \phi$  a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} f(x, z) &= (15 - 18\phi)x^2 + (21\phi - 18)z^2 + (9 - 4\phi)x \\ &\quad + (23\phi - 24)z + (3\phi - 3)xz + 4\phi - 6 \leq 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Minden rögzített  $x$ -re  $f(x, z)$  konkáv kvadratikus függvénye  $z$ -nek. Az  $f(x, z)$  függvény  $z$  szerinti parciális deriváltja a  $z = 0$  helyen

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 3(\phi - 1)x + 23\phi - 24 .$$

Figyelembe véve, hogy  $y = 1$ , a következő egyenlőtlenségeket kapjuk (A.35)-ből:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}z &\leq x \leq 1-z \\
0 &\leq x \\
0 &\leq z \leq 1.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Ezért

$$3(\phi - 1)x + 23\phi - 24 \leq 3(\phi - 1) + 23\phi - 24 = 26\phi - 27 < 0.$$

Mivel  $f(x, z)$  olyan konkáv kvadratikus függvénye  $z$ -nek minden  $x \in [0, 1]$ -re, amelynek a  $z$  szerinti parciális deriváltja negatív, ezért csökkenő az egész  $[0, 1]$  intervallumban, amiből következik az állításunk, vagyis  $EV(x, 1, 0) \leq \phi$ -ből következik  $EV(x, 1, z) \leq \phi$  az (A.35) minden lehetséges megoldására.

Most megmutatjuk, hogy  $EV(x, 1, 0) \leq \phi$  minden  $x \in [0, 1]$ -re. Behelyettesítve az  $y = 1, z = 0$  értékeket (A.34)-ba, algebrai átalakítások után kapjuk az alábbi:

$$EV(x, 1, 0) = \frac{5x^2 + 3x - 2}{9x^2 + 2x - 2}.$$

Ez a függvény az  $x^* = \frac{8+\sqrt{30}}{17} = 0,7927\dots$  pontban veszi fel a maximumát a  $[0, 1]$  intervallumon és az  $EV(x, 1, 0)$  maximális értéke

$$\phi = \frac{900 + 393\sqrt{30}}{1080 + 356\sqrt{30}} = 1.007478\dots$$

Behelyettesítve  $(x^*, 1, 0)$ -át (A.33)-ba kapjuk a  $p_2 = \frac{3\sqrt{30}-10}{30\sqrt{30}+6} = 0,0321\dots$ ,  $p_3 = \frac{\sqrt{30}+8}{10\sqrt{30}+12} = 0,2018\dots$  (minden egyéb valószínűség 0) értékeket. Ez a kisméretű és a megfelelő teljes méretű  $LP$ -nek is lehetséges megoldása ugyanazzal a  $w$  célfüggvény értékkel, ahol

$$w = \frac{3(x^* + 1)}{\phi} = \frac{(75 + 3\sqrt{30})(1080 + 356\sqrt{30})}{17(900 + 393\sqrt{30})} = 5,3384\dots$$

A korábbiakból tudjuk már hogy  $EV \leq \phi$ . Ahhoz, hogy az  $EV = \phi$  egyenlőséget bebizonyítsuk, meg kell mutatni, hogy a fenti megoldás nem csak lehetséges, hanem

optimális megoldása is a teljes méretű  $LP$ -nek. Gondos és hosszadalmas számolással (ennek részleteit kihagyjuk) be lehet látni, hogy

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \lambda, \quad u_5 = w,$$

ahol

$$\lambda = \frac{(75 + 3\sqrt{30})(1080 + 356\sqrt{30})}{(900 + 393\sqrt{30})(16 + 2\sqrt{30})} - \frac{66 + 4\sqrt{30}}{16 + 2\sqrt{30}} = 0,1055\dots$$

lehetséges megoldása a teljes méretű  $LP$  duáljának és a hozzá tartozó duál cél-függvény érték  $w$ . A lineáris programozás gyenge dualitás tétele értelmében a teljes méretű  $LP$  (a primál feladat) optimális célfüggvény értéke is  $w$ , amiből a tétel állítása következik.  $\square$

### A.3. Az L-Nash alkumegoldás Howard-féle implementációja

*A 3.12. tétel bizonyítása, Forgó és Fülöp (2008).* A Pareto-optimális választás feltétele és a játékosok megfelelő indexelése mellett a  $H$  játék implementálja az  $LNAM$ -ot vagy pontosan, ha van olyan véges büntető paraméter, amely mellett  $LNAM = NAM$ , vagy aszimptotikusan, ha nincs ilyen véges büntető paraméter.

A  $H$  játék részjáték tökéletes  $NEP$ -jét visszafelé indukcióval határozzuk meg.

Ha  $(y_1, y_2, \alpha)$  a  $P1$  választása, akkor  $P2$  maximális kifizetése

$$g(y_1, y_2, \alpha) = \max_{x_1, x_2, p} f(x_1, x_2, p, y_1, y_2, \alpha), \quad (\text{A.38})$$

ahol

$$f(x_1, x_2, p, y_1, y_2, \alpha) = \begin{cases} p(x_2 + \alpha r) - \alpha & \text{ha } x_1 \geq py_1 - \alpha(1 - p), \\ p^2(y_2 + \alpha r) - \alpha & \text{ha } x_1 < py_1 - \alpha(1 - p). \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

A  $g$  függvény változói  $y_1, y_2, \alpha$ , míg az  $f$  függvény változói  $x_1, x_2, p$ , és  $y_1, y_2, \alpha$  a paraméterek,  $(x_1, x_2) \in F$ ,  $(y_1, y_2) \in F$ ,  $p \in [0, 1]$ ,  $\alpha > 0$ . Jelölje  $P$  az  $F$  lehetséges halmaz Pareto-optimális pontjait:

$$P = \{(x_1, h(x_1)) : L_1 \leq x_1 \leq U_1\} ,$$

ahol  $h$  egy monoton csökkenő konkáv függvény az  $[L_1, U_1]$  intervallumon. Jelöljük a  $NAM$ -ot mint  $\alpha$  függvényét  $NAM(\alpha) = (z_1(\alpha), z_2(\alpha)) = (z_1(\alpha), h(z_1(\alpha)))$ -al, amely az alábbi feladat egyetlen maximumpontja:

$$\begin{aligned} (x_1 + \alpha)(x_2 + \alpha r) &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad (x_1, x_2) &\in F \end{aligned} \tag{A.40}$$

A következőkben meghatározzuk az (A.40) megoldását az  $y_1, y_2, \alpha$  paraméterek függvényeként. Két eset van.

1.  $y_1 \leq L_1$ . Könnyen látható, hogy (A.39) és a Pareto-optimális választás feltétele miatt  $x_1 = L_1$ ,  $x_2 = h(L_1)$ ,  $p = 1$  az egyetlen optimális megoldása az (A.40) feladatnak.
2. Ha  $y_1 > L_1$ , akkor a  $g$  függvény értéke azon tartomány felett, amelyet az  $f$  definíciójának "felső része" határoz meg (ezentúl röviden a "felső rész") legalább  $h(y_1) + \alpha r - \alpha$ , mivel ezt el lehet érni az  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = h(y_1)$ ,  $p = 1$  értékválasztással. Azon tartomány felett, amelyet az  $f$  definíciójának "alsó része" határoz meg (ezentúl röviden az "alsó rész") a  $g$  függvény nem vehet fel nagyobb értéket, mint  $h(y_1) + \alpha r - \alpha$ , ezért elég az optimumot a felső részen keresni.

Ha  $x_1$ -et  $y_1$  értéke alá visszük, akkor  $g$  értéke lehet nagyobb, mint  $h(y_1) + \alpha r - \alpha$ , ha figyelembe vesszük, hogy  $p < 1$  megengedett. Az (A.39) következtében  $x_1$  értékét nem lehet  $py_1 - \alpha(1 - p)$  alá szorítani anélkül, hogy elhagynánk a felső részt, és természetesen nem érdemes  $L_1$  alá menni. Így

$$p = \frac{x_1 + \alpha}{y_1 + \alpha},$$

és

$$x_1 \in [L_1, y_1].$$

Mivel  $x_2 = h(x_1)$ , ezért a következő feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \alpha}{y_1 + \alpha} (h(x_1) + \alpha r) - \alpha &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad x_1 &\in [L_1, y_1] \end{aligned}$$

vagy, ami ezzel ekvivalens

$$\begin{aligned} (x_1 + \alpha)(h(x_1) + \alpha r) &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad x_1 &\in [L_1, y_1]. \end{aligned}$$

Könnyű igazolni, hogy ennek a feladatnak az optimális megoldása

$$\begin{aligned} x_1^*(y_1, y_2, \alpha) &= \begin{cases} y_1 & \text{ha } L_1 \leq y_1 \leq z_1(\alpha), \\ z_1(\alpha) & \text{ha } z_1(\alpha) < y_1 \leq U_1, \end{cases} \\ x_2^*(y_1, y_2, \alpha) &= h(x_1^*(y_1, y_2, \alpha)) \\ p^*(y_1, y_2, \alpha) &= \begin{cases} 1 & \text{ha } L_1 \leq y_1 \leq z_1(\alpha), \\ \frac{z_1(\alpha) + \alpha}{y_1 + \alpha} & \text{ha } z_1(\alpha) < y_1 \leq U_1. \end{cases} \end{aligned}$$

A  $g$  függvény optimális értékét behelyettesítéssel kapjuk:

$$g(y_1, y_2, \alpha) = \begin{cases} h(L_1) + \alpha r - \alpha & \text{ha } y_1 < L_1, \\ h(y_1) + \alpha r - \alpha & \text{ha } L_1 \leq y_1 \leq z_1(\alpha), \\ \frac{(z_1(\alpha) + \alpha)(h(z_1(\alpha)) + \alpha r)}{y_1 + \alpha} & \text{ha } z_1(\alpha) < y_1 \leq U_1. \end{cases}$$

Ha  $L_1 \leq y_1 \leq z_1(\alpha)$  és  $y_2 = h(y_1)$ , akkor, ha a  $p = 1$  értéket választjuk, akkor minden  $x_1 < y_1$  optimális az alsó részen. A Pareto-optimális választás feltétele miatt ezekkel a megoldásokkal nem foglalkozunk és így egyértelmű optimumot kapunk (Könnyű belátni, hogy  $z_1(\alpha) < y_1 \leq U_1$  esetében az optimum nem lehet az alsó részen).

A visszafelé indukció utolsó lépéseként meg kell oldanunk a  $P1$  játékos következő maximum feladatát:

$$\begin{aligned} & \max\{p^*(y_1, y_2, \alpha)(x_1^*(y_1, y_2, \alpha) + \alpha(1 - \frac{1}{p^*(y_1, y_2, \alpha)})), \\ & \quad p^{*2}(y_1, y_2, \alpha)(y_1 + \alpha(1 - \frac{1}{p^{*2}(y_1, y_2, \alpha)}))\} \rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad & (y_1, y_2) \in F \\ & \alpha \geq 0. \end{aligned} \tag{A.41}$$

Ezt a következő alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned} & \max\{p^*(y_1, y_2, \alpha)(x_1^*(y_1, y_2, \alpha) + \alpha), \\ & \quad p^{*2}(y_1, y_2, \alpha)(y_1 + \alpha)\} - \alpha \rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad & (y_1, y_2) \in F \\ & \alpha \geq 0. \end{aligned} \tag{A.42}$$

Rögzített  $\alpha \geq 0$ -ra, az (A.41) feladatot könnyű megoldani. Azt állítjuk, hogy az optimális értéke  $z_1(\alpha)$ . Ennek belátásához vegyük észre, hogy  $x_1^*(y_1, y_2, \alpha) \leq z_1(\alpha)$  és  $p^*(y_1, y_2, \alpha) \in [0, 1]$ , amiből

$$p^*(y_1, y_2, \alpha)(x_1^*(y_1, y_2, \alpha) + \alpha) \leq z_1(\alpha) + \alpha$$

következik, amelyben egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $y_1 = z_1(\alpha)$ .

A  $p^{*2}(y_1, y_2, \alpha)(y_1 + \alpha)$  rész az (A.42) célfüggvényében nem lehet nagyobb, mint  $z_1(\alpha) + \alpha$ . Ha ugyanis ez nem lenne igaz, akkor  $z_1(\alpha) < y_1$  állna fenn, de ebben az esetben  $p^*(y_1, y_2, \alpha) < 1$  lenne, amiből a  $p^{*2}(y_1, y_2, \alpha)(y_1 + \alpha) < z_1(\alpha) + \alpha$  ellentmondás következne.

Bebizonyítottuk tehát, hogy az (A.42) optimális értéke  $z_1(\alpha)$ , minden optimális megoldásban  $y_1^*(\alpha) = z_1(\alpha)$ , és  $y_2^*(\alpha)$  szabadon választható azzal a korlátozással, hogy  $(y_1^*(\alpha), y_2^*(\alpha)) \in F$  fenn kell álljon. A Pareto-optimális választás feltétele miatt  $y_2^*(\alpha)$  maximális kell legyen, feltéve, hogy  $(y_1^*(\alpha), y_2^*(\alpha)) \in F$ , és így egyértelműen meghatározott. Behelyettesítéssel kapjuk a következőket:

$$x_1^*(y_1^*(\alpha), y_2^*(\alpha), \alpha) = z_1(\alpha),$$

$$x_2^*(y_1^*(\alpha), y_2^*(\alpha), \alpha) = z_2(\alpha),$$

$$p^*(y_1^*(\alpha), y_2^*(\alpha), \alpha) = 1.$$

Az (A.41) feladat így ekvivalens a

$$\begin{aligned} z_1(\alpha) &\rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad \alpha &\geq 0 \end{aligned} \tag{A.43}$$

vagy még inkább a

$$\begin{aligned} z_1(\alpha) &\rightarrow \sup \\ \text{s.t.} \quad \alpha &\geq 0 \end{aligned} \tag{A.44}$$

feladattal, mert lehetséges, hogy nincs maximum, csak felső határ.

Most három állítást, a könnyebb átláthatóság kedvéért, közbeeső lemmaként fogalmazunk meg.

**A.2. lemma.** *Ha*

$$\frac{z_2(0)}{z_1(0)} = r, \tag{A.45}$$

*akkor*  $(z_1(\alpha), z_2(\alpha)) = LNAM$  *minden*  $\alpha \geq 0$ -ra.

*Bizonyítás.* Jelölje

$$\varphi_\alpha(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha)(x_2 + \alpha r)$$

az (A.40) feladat célfüggvényét. Az (A.45) feltétel miatt minden  $\alpha \geq 0$ -ra fennáll

$$\nabla \varphi_\alpha(z_1(0), z_2(0)) = (z_1(0)r + \alpha r, z_1(0) + \alpha) = (z_1(0) + \alpha)(r, 1).$$

Legyen  $(x_1, x_2) \in F$ . A  $\varphi_\alpha$  függvény  $(x_1, x_2)$  irány menti deriváltja a  $(z_1(0), z_2(0))$  pontban

$$\nabla \varphi_\alpha(z_1(0), z_2(0))(x_1 - z_1(0)(x_2 - z_2(0)))^\top = (z_1(0) + \alpha)(r, 1)(x_1 - z_1(0)(x_2 - z_2(0)))^\top .$$

A  $(z_1(0), z_2(0))$  az (A.40) feladat optimális megoldása  $\alpha = 0$  esetében és  $z_1(0) > 0$ , ezért

$$(r, 1)(x_1 - z_1(0)(x_2 - z_2(0)))^\top \leq 0 .$$

Mivel  $\alpha \geq 0$ , ezért

$$\nabla \varphi_\alpha(z_1(0), z_2(0))(x_1 - z_1(0)(x_2 - z_2(0)))^\top \leq 0 ,$$

amelyből a lemma állítása következik amiatt, mert a  $\varphi_\alpha$  függvény logkonkáv a pozitív kvadránsban.  $\square$

**A.3. lemma.** *Ha*

$$\frac{z_2(\alpha)}{z_1(\alpha)} < r , \tag{A.46}$$

*akkor  $z_1(\alpha)$  monoton nem csökkenő,  $z_2(\alpha)$  monoton nem növekvő  $\alpha$ -ban, és*

$$(\sup_{\alpha \geq 0} z_1(\alpha), \inf_{\alpha \geq 0} z_2(\alpha)) = LNAM .$$

*A sup és inf akkor és csak akkor cserélhető ki max és min-re, ha van olyan véges  $\alpha_0$ , hogy  $NAM(\alpha_0) = (z_1(\alpha_0), z_2(\alpha_0)) = LNAM$  és  $NAM(\alpha_0) = (z_1(\alpha), z_2(\alpha)) = LNAM$  minden  $\alpha \geq \alpha_0$ -ra.*

*Bizonyítás.* Legyen  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$ . Megmutatjuk, hogy ha

$$\frac{z_2(\alpha_1) + \alpha_1 r}{z_1(\alpha_1) + \alpha_1} < r , \text{ vagy ami ezzel ekvivalens } \frac{z_2(\alpha_1)}{z_1(\alpha_1)} < r , \tag{A.47}$$

akkor

$$z_1(\alpha_1) \leq z_1(\alpha_2), \quad z_2(\alpha_1) \geq z_2(\alpha_2) , \tag{A.48}$$

és

$$\frac{z_2(\alpha_2) + \alpha_2 r}{z_1(\alpha_1) + \alpha_1} < r, \text{ vagy ami ezzel ekvivalens } \frac{z_2(\alpha_2)}{z_1(\alpha_1)} < r. \quad (\text{A.49})$$

Tegyük fel, hogy (A.48) nem áll fenn. Ekkor

$$z_1(\alpha_1) > z_1(\alpha_2), \quad z_2(\alpha_1) < z_2(\alpha_2). \quad (\text{A.50})$$

A  $(z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_2))$  maximalizálja a Nash-szorzatot, ezért

$$\nabla \varphi_\alpha(z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_1))(z_1(\alpha_2) - z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_2) - z_2(\alpha_1))^\top \leq 0$$

vagyis

$$\begin{aligned} & (z_2(\alpha_1) + \alpha_1 r, z_1(\alpha_1) + \alpha_1)(z_1(\alpha_2) - z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_2) - z_2(\alpha_1))^\top \\ &= (z_1(\alpha_1) + \alpha_1) \left( \frac{z_2(\alpha_2) + \alpha_2 r}{z_1(\alpha_1) + \alpha_1}, 1 \right) (z_1(\alpha_2) - z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_2) - z_2(\alpha_1))^\top \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Most belátjuk, hogy

$$\frac{z_2(\alpha_1) + \alpha_1 r}{z_1(\alpha_1) + \alpha_1} < \frac{z_2(\alpha_1) + \alpha_2 r}{z_1(\alpha_1) + \alpha_2}. \quad (\text{A.52})$$

Ehhez használjuk az (A.47) egyenlőtlenséget és az alábbi implikációt

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}, \quad (\text{A.53})$$

amely minden  $a, b, c, d$  pozitív számra fennáll. Végezzük el a következő helyettesíté-  
téseket:

$$\begin{aligned} a &= z_2(\alpha_1) + \alpha_1 r \\ b &= z_1(\alpha_1) + \alpha_1 \\ c &= (\alpha_2 - \alpha_1)r \\ d &= \alpha_2 - \alpha_1. \end{aligned}$$

Mivel

$$z_1(\alpha_1) + \alpha_2 > z_1(\alpha_1) + \alpha_1 ,$$

(A.50), (A.51), (A.52) és (A.53)-ból kapjuk az alábbiakat:

$$\begin{aligned} 0 &> (z_1(\alpha_1) + \alpha_2) \left( \frac{z_2(\alpha_2) + \alpha_2 r}{z_1(\alpha_1) + \alpha_2}, 1 \right) (z_1(\alpha_2) - z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_2) - z_2(\alpha_1))^\top \\ &= (z_2(\alpha_1) + \alpha_2 r, z_1(\alpha_1) + \alpha_2) (z_1(\alpha_2) - z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_2) - z_2(\alpha_1))^\top \\ &= \nabla \varphi_{\alpha_2}(z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_1)) (z_1(\alpha_2) - z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_2) - z_2(\alpha_1))^\top . \end{aligned}$$

Ebből, mivel  $\varphi_{\alpha_2}$  logkonkáv a pozitív kvadránsban, következik, hogy

$$\varphi_{\alpha_2}(z_1(\alpha_2), z_2(\alpha_2)) < \varphi_{\alpha_2}(z_1(\alpha_1), z_2(\alpha_1)),$$

ami ellentmond annak a ténynek, hogy  $(z_1(\alpha_2), z_2(\alpha_2))$  maximalizálja a Nash-szorzatot  $\alpha = \alpha_2$ -re. Így (A.48) fennáll, és (A.47) és (A.48)-ból következik (A.49). Az (A.46)-ból  $\alpha_1 = 0$  és  $\alpha_2 = \alpha$ ,  $\alpha$  tetszőleges, szereposztással kapjuk a

$$\frac{z_2(\alpha)}{z_1(\alpha)} < r$$

egyenlőtlenséget minden  $\alpha > 0$ -ra. Az A.2. lemmából következik, hogy  $z_1(\alpha)$  is monoton nem csökkenő. A  $z_2(\alpha)$ -ra vonatkozó állítás a  $z_2(\alpha) = h(z_1(\alpha))$  egyenlőségből és a  $h$  függvény szigorúan monoton csökkenéséből következik. Mivel az  $LNAM = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} NAM(\alpha)$  (lásd 3.3.tétel) a  $z_1(\alpha)$  és  $z_2(\alpha)$  monotonitási tulajdonságai miatt azt kapjuk, hogy

$$(\sup_{\alpha \geq 0} z_1(\alpha), \inf_{\alpha \geq 0} z_2(\alpha)) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (z_1(\alpha), z_2(\alpha)) = LNAM . \quad (\text{A.54})$$

amivel a lemma második részét bizonyítottuk. □

A tétel állítása a két lemmából azonnal következik. □

Vegyük észre, hogy a játékosok megfelelő indexelése az (A.53) formulában lett kihasználva, ahol a  $z_1(\alpha)$  és a  $z_2(\alpha)$  megfelelő irányú monotonitása kritikus szerepet játszik. Az alkumegoldás monotonitását Thomson (1987) részletesen vizsgálja egy másik kontextusban.

## B. függelék

### Rövidítések jegyzéke

|                   |                                      |
|-------------------|--------------------------------------|
| <i>NEP</i>        | Nash-egyensúlypont                   |
| <i>F</i> -konkáv  | Fan-konkáv                           |
| <i>CF</i> -konkáv | folytonos Fan-konkáv                 |
| <i>RD</i>         | véletlen mechanizmus                 |
| <i>CE</i>         | korrelált egyensúly                  |
| <i>NE</i>         | Nash-egyensúly                       |
| <i>PNE</i>        | tiszta Nash-egyensúly                |
| <i>PNEP</i>       | tiszta Nash-egyensúlypont            |
| <i>SW</i>         | társadalmi hasznosság                |
| <i>WCE</i>        | gyenge korrelált egyensúly           |
| <i>SCE</i>        | puha korrelált egyensúly             |
| <i>MV</i>         | mediációs érték                      |
| <i>EV</i>         | kényszerítési érték                  |
| <i>MVP</i>        | tiszta mediációs érték               |
| <i>AFCE</i>       | ügynök-alakú korrelált egyensúly     |
| <i>EFCE</i>       | extenzív-formájú korrelált egyensúly |
| <i>TCE</i>        | fa-korrelált egyensúly               |
| <i>TWCE</i>       | gyenge fa-korrelált egyensúly        |

|              |                                           |
|--------------|-------------------------------------------|
| <i>TSCE</i>  | puha fa-korrelált egyensúly               |
| <i>SAFCE</i> | puha ügynök-alakú korrelált egyensúly     |
| <i>LP</i>    | lineáris programozási feladat             |
| <i>NAM</i>   | Nash-alkumegoldás                         |
| <i>LNAM</i>  | limit-Nash alkumegoldás                   |
| <i>VA</i>    | váltakozó ajánlattétel                    |
| <i>TDP</i>   | többkritériumú döntési probléma           |
| <i>DH</i>    | döntéshozó                                |
| <i>LP2</i>   | A 3.2. alfejezet (3.2) feladata           |
| <i>LWM</i>   | lineáris súlyozási módszer                |
| <i>EWM</i>   | kiterjesztett súlyozási módszer           |
| <i>DPW</i>   | súlyozott többkritériumú döntési probléma |

## Irodalomjegyzék

- Anbarci N (1993) Noncooperative foundations of the area monotonic solution. *Econometrica* 108:245–258
- Anbarci N (1995) Reference functions and balanced concessions in bargaining. *Canadian Journal of Economics* 28:675–682
- Andersen K, Lind M (1999) Computing the NTU-Shapley value of NTU games defined by multiple objective programs. *International Journal of Game Theory* 28:585–597
- Ashlagi I, Monderer D, Tennenholtz M (2008) On the value of correlation. *Journal of Artificial Intelligence* 33:575–613
- Aumann R (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics* 1:67–96
- Aumann R (1987) Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality. *Econometrica* 55:1–18
- Bárány I (1992) Fair distribution protocols or how the players replace fortune. *Mathematics of Operations Research* 17:327–340
- Bracht J, Feltovich N (2008) Efficiency in the trust game: an experimental study of precommitment. *International Journal of Game Theory* 37:39–72
- Braess D (1969) Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung* 12:258–268

- Brouwer L (1912) Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* 71:97–115
- Calvo E, Peters H (2000) Dynamics and axiomatics of the equal area bargaining solution. *International Journal of Game Theory* 29:81–92
- Cambini A, Martein L (2009) Generalized convexity and optimization: Theory and applications. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 616. SpringerVerlag, Berlin/Heidelberg/New York
- Cason T, Sharma T (2006) Recommended play and correlated equilibria: An experimental study. Working Paper, Krannert Graduate School of Management, Perdue University, West Lafayette, Indiana, Institute for Research in the Behavioral, Economic, and Management Sciences, Paper No 1191
- Cheng C (2004) Two-function upward-downward minimax theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 296(1):183–189
- Cheng C (2010) A general two-function minimax theorem. *Acta Mathematica Sinica* 26(3):595–602
- Cheng C, Lin B (2001) A minimax theorem involving two functions. *Taiwanese Journal of Mathematics* 5(3):647–657
- Cheng C, Lin B (2003) Some alternative principles and mixed minimax theorems involving two functions. *Acta Mathematica Hungarica* 100(8):177–186
- Christensen F, Lind M, Tind J (1996) On the nucleolus of NTU games defined by multiple objective programs. *Mathematical Methods of Operations Research* 43:337–352
- Christodoulou G, Koutsoupias E (2005) On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games. In: *Proceedings of the 13th Annual European Symposium, ESA*, 59–70

- Chun Y (1988) The equal-loss principle for bargaining problems. *Economics Letters* 26:103–106
- Dyer M (1984) An  $O(n)$  algorithm for the multiple choice-knapsack linear program. *Mathematical Programming* 29:57–63
- Fan K (1952) Fixedpoint and minimax theorems in locally convex topological spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 38:121–126
- Fan K (1953) Minimax theorems. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 39:42–47
- Forges F (1986) An approach to communication equilibria. *Econometrica* 54:323–358
- Forges F (1993) Five legitimate definitions of correlated equilibrium in games with incomplete information. *Theory and Decision* 35:277–310
- Forgó F (1984) A game theoretic approach for multicriteria decision making. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 229, SpringerVerlag, 41–46
- Forgó F (1994) On the existence of Nash equilibrium in  $n$ -person generalized concave games. In: Komlósi S, Rapcsák T, Schaible S (eds) *Generalized Convexity*, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 405, SpringerVerlag, Berlin, 53–61
- Forgó F (1995) Cournot Nash equilibrium in non-concave oligopoly games. *Pure Mathematics and Applications* 6(2):161–169
- Forgó F (1999) On two-function minimax inequalities: A guided tour. *Sigma* 29:221–230
- Forgó F (2001) A nontopological two-function minimax theorem with monotone transformations of the functional values. In: Gianessi et al (ed) *Optimization Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 99–110
- Forgó F (2006) Az L-Nash megoldás implementációjáról kétszemélyes alkuproblémák esetén. *Sigma* 37:113–125

- Forgó F (2010) A generalization of correlated equilibrium: A new protocol. *Mathematical Social Sciences* 60:186–190
- Forgó F (2011) Generalized correlated equilibrium for two-person games in extensive form with perfect information. *Central European Journal of Operations Research* 19:201–213
- Forgó F (2013) Gondolatok az egyensúlyról a játékelméletben. In: Csekő et al (ed) *Matematikai Közgazdaságtan: elmélet, modellezés, oktatás. Tanulmányok Zalai Ernőnek*, Műszaki Kiadó, Budapest, 73–86
- Forgó F (2014) Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple nonincreasing linear congestion games. *Central European Journal of Operations Research* 22(1):139–155
- Forgó F, Fülöp J (2008) On the implementation of the L-Nash bargaining solution in two-person bargaining games. *Central European Journal of Operations Research* 16:359–378
- Forgó F, Joó I (1998) A general nontopological two-function minimax theorem. *Archiv der Mathematik* 71:376–383
- Forgó F, Joó I (1999) Fixed point and equilibrium theorems in pseudoconvex spaces. *Journal of Global Optimization* 14:27–54
- Forgó F, Szidarovszky F (2003) On the relation between the Nash bargaining solution and the weighting method. *European Journal of Operational Research* 147:108–116
- Forgó F, Szép J, Szidarovszky F (1999) *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London
- Forgó F, Fülöp J, Prill M (2005) Game theoretic models for climate change negotiations. *European Journal of Operational Research* 160:252–267

- Forgó F, Pintér M, Simonovits A, Solymosi T (2006) Játékelmélet, elektronikus tankönyv. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest
- Friedman JW (1977) Oligopoly and the theory of games. NorthHolland, Amsterdam
- Gerard-Varet L, Moulin H (1978) Correlation and duopoly. *Journal of Economic Theory* 19:123–149
- Hannan J (1957) Approximation to bayes risk in repeated play. In: Dresher M, Tucker AW, Wolfe P (eds) *Contributions to the Theory of Games*, volume III, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 97–139
- Harsanyi J, Selten R (1972) A generalized Nash solution for two-person bargaining games with incomplete information. *Management Science* 18:80–106
- Hou JC (2009) Characterization of the existence of a pure-strategy Nash equilibrium. *Applied Mathematics Letters* 22(5):689–692
- Howard JV (1992) A social choice rule and its implementation in perfect equilibrium. *Journal of Economic Theory* 56:142–159
- Jin C, Cheng C, Jin Y, Li J (2006) Minimax theorems involving two functions and strictly monotone transformations of their values. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 22(4):607–614
- Joó I (1986) Answer to a problem of M. Horváth és A. Sövegjártó,. *Annales Univ Sci Budapest Sect Math* 29:193–198
- Kalai E (1977) Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisons. *Econometrica* 45:1623–1630
- Kalai E, Smorodinsky M (1975) Other solutions to Nash's bargaining problem. *Econometrica* 43:513–518
- Kaneko M (1992) The ordered field property and a finite algorithm for the Nash bargaining solution. *International Journal of Game Theory* 20:227–236

- Kim WK (2011) Generalized C-concave conditions and their applications. *Acta Mathematica Hungarica* 130(12):140–154
- Kim WK, Kum S (2005) Existence of Nash equilibria with C-convexity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 63(57):1857–1865
- Kim WK, Lee K (2002) The existence of Nash equilibrium in n-person games with C-concavity. *Computers and Mathematics with Applications* 44(89):1219–1228
- Kim WK, Lee K (2007) Nash equilibrium and minimax theorem with C-concavity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 328(2):1206–1216
- Liu L (1996) Correlated equilibrium of Cournot oligopoly competition. *Journal of Economic Theory* 68:544–548
- Moulin H (1988) *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, Cambridge
- Moulin H, Vial J (1978) Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon. *International Journal of Game Theory* 7:201–221
- Myerson R (1981) Utilitarianism, egalitarianism and the timing effect in social choice problems. *Econometrica* 49:883–897
- Myerson R (1986) Multistage games with communication. *Econometrica* 54:323–358
- Nash JF (1950a) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1):48–49
- Nash JF (1950b) The bargaining problem. *Econometrica* 18:155–162
- Nash JF (1951) Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics* 54(2):286–295
- Nash JF (1953) Two person cooperative games. *Econometrica* 21:128–140

- von Neumann J, Morgenstern O (1944) Theory of games and economic behavior. Princeton University Press
- Neyman A (1997) Correlated equilibrium and potential games. *International Journal of Game Theory* 26:223–227
- Nikaido H, Isoda K (1955) Note on noncooperative convex games. *Pacific Journal of Mathematics* 5:807–815
- Nishimura K, Friedman J (1981) Existence of Nash equilibrium in n-person games without quasiconcavity. *International Economic Review* 22:637–648
- Nordhaus WD, Yang Z (1996) RICE: A regional dynamic general equilibrium model of alternative climate change strategies. *The American Economic Review* 86:726–741
- Osborne M, Rubinstein A (1994) A course in game theory. The MIT Press, Cambridge MA
- Perles M, Maschler M (1981) A superadditive solution for Nash’s bargaining game. *International Journal of Game Theory* 10:163–193
- Rapoport A, Kugler T, Dugar S, Gisches E (2009) Choice of routes in congested traffic networks: Experimental tests of the Braess Paradox. *Games and Economic Behavior* 65:538–571
- Ray I, Sen Gupta S (2013) Coarse correlated equilibria in linear duopoly games. *International Journal of Game Theory* 42:541–562
- Risse M (2000) What is rational about Nash equilibria? *Synthese* 124:361–384
- Roughgarden T, Tardos E (2002) How Bad is Selfish Routing? *Journal of the ACM* 49(2):236–259
- Rubinstein A (1982) Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica* 50:97–109

- Rubinstein A, Zhou L (1999) Choice problems with a ‘reference’ point. *Mathematical Social Sciences* 37:205–209
- Selten R (1975) Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* 4:25–55
- Shapley LS (1959) Equilibrium points in games with vector payoffs. *Naval Research Logistics Quarterly* 6:57–63
- Simons S (1995) Minimax theorems and their proofs. In: Du D, Pardalos PM (eds) *Minimax and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1–24
- von Stengel B, Forges F (2007) Extensive form correlated equilibrium: Definition and computational complexity. Research Report LSE-CDAM-2006-04
- Szép J, Forgó F (1974) Bevezetés a játékelméletbe. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Szép J, Forgó F (1983) Einführung in die Spieltheorie. Akadémiai Kiadó, Budapest, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main
- Szép J, Forgó F (1985) Introduction to the theory of games. Akadémiai Kiadó, Budapest, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland
- Tang G, Cheng C (2008) Some minimax theorems with strictly monotone transformation. *Applied Mathematics J Chinese Univ* 23(1):69–78
- Tasnádi A (2011) Tiszta és vegyes oligopóliumok. MTA doktori értekezés, Budapest
- Thomson W (1987) Monotonicity of bargaining solutions with respect to the disagreement point. *Journal of Economic Theory* 42:50–58
- Thomson W (1994) Cooperative models of bargaining. In: Aumann RJ, Hart S (eds) *Handbook of Game Theory*, vol. II., Elsevier Science, Amsterdam, 1237–1284

- Tóth F, Ciscar J, Courtois P, Forgó F (2001) Strategic Integrated Assessment of Dynamic Carbon Emission Reduction Policies. SIADCERO Final Report of EU project ENG-1999-00011
- Varian HR (1992) Microeconomic Analysis. Norton, New York
- von Neumann J (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen 100:295–320
- Yi SS (1997) On the existence of a unique correlated equilibrium in Cournot oligopoly. Economic Letters 54:235–239
- Young HP (2004) Strategic learning and its limits. Oxford University Press, Oxford
- Zhou L, Liu W, Xu Y, Wang L (2009) A game method for multiple attribute decision-making without weight information. In: Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Information and Automation, June 22-25, 2009 Zhuhai/Macau, China, 1302–1307