Opponensi vélemény

Forgó Ferenc

Egyensúly a játékelméletben: egzisztencia és általánosítások

című MTA doktori értekezéséről

Az értékelés tárgyát képező értekezésben a szerző a játékelmélet fő sodrába tartozó területekhez kapcsolódó eredményeit mutatja be. Ezek az eredmények 10 egyszerzős és 6 társszerzős (a kandidátusi értekezés megvédése után készült) közleményben jelentek meg, amelyek hazai és nemzetközi folyóiratokban, illetve könyvfejezetekben és konferenciakiadványokban lettek publikálva.

A disszertáció három fő fejezete a szerző három fő kutatási irányát mutatja be. Az első fejezet a Nash-egyensúlypont létezésével foglalkozik különböző modellekben és különböző (egyre gyengülő) feltételek mellett. Ebben a kutatási irányban fontos szerepet játszik a szerző által 1994-ben bevezetett CF-konvexitás fogalma. Alkalmazásként nemlineáris keresleti függvény és nemkonvex költségfüggvény esetén a Cournot-oligopólium tiszta Nash-egyensúlypontjára kapunk elegendő feltételt. A második fejezet témája a korrelált egyensúly és ennek általánosításai, amelyek között fontos szerepet kap a szerző által 2010-ben bevezetett „puha egyensúly" fogalma. Az itt elért eredményeket a klímatárgyalások egy játékelméleti modelljére alkalmazza a szerző. A harmadik fejezet a Nash-alkumegoldásból származtatott limit Nash-alkumegoldással foglalkozik és ezt a többkritériumú döntési problémák megoldására alkalmazza. A disszertáció függeléke a három fejezet egy-egy tételének – az 1.24., a 2.19., és a 3.12. tételnek a bizonyítását tartalmazza. Ezek hosszúságuk miatt nem kerültek be az egyes fejezetekbe. A disszertáció irodalomjegyzéke közel száz tételből áll. Kiemelem, hogy a disszertáció rendkívül olvasmányos, a „száraz" matematikai, vagy közgazdasági tartalmat rövid de élvezetes történeti áttekintések és jól megválasztott példák teszik érthetőbbé.

Az alábbiakban részletesebben ismertetjük az egyes fejezetek tartalmát és a szerzőnek a fejezetben bemutatott saját eredményeit.

Az első fejezet alapfogalma a Nash-egyensúlypont (NEP). Nash 1950-es alapvető eredménye szerint az n-személyes véges nemkooperatív játékok kevert bővítésének mindig van NEP-je. Ezt a tételt Nikaido és Isoda 1955-ben, illetve Friedman 1977-ben általánosította megmutatva, hogy kompakt, konvex stratégiahalmazok és folytonos kifizetőfüggvények esetén az i-edik kifizetőfüggvény i-edik változójában való konkávitása, illetve kvázikonkávitása is elegendő feltétele a NEP létezésének. Természetes probléma, hogy hogyan lehet a konkávitási, kvázikonkávitási feltételt tovább gyengíteni. Ebben az irányban a Fan-konvexitás fogalmának bevezetésével Ky Fan ért el eredményt 1952-ben a kétszemélyes játékokra. Ennek többszemélyes játékokra való kiterjeszthetetlenségét Joó István 1986-ban egy ellenpéldával mutatta meg. Forgó 1994-ben bevezette a folytonos F-konkávitás (CF-konkávitás) fogalmát, és ezzel az erősebb fogalommal megmutatta, hogy a Ky Fan-féle eredmény már n-személyes játékokra is kiterjeszthető feltéve, hogy a stratégia halmazok kompakt és konvex halmazok.

Az n-személyes játékok közgazdasági alkalmazásai között kiemelt szerepet foglal el a Cournot-oligopólium, amelyben a kifizetőfüggvényeket az egyváltozós P (árfüggvény) és C_i költségfüggvények segítségével adjuk meg. Friedmann 1977-ből származó tétele szerint, ha P konkáv, a C_i függvények pedig konvexek, akkor az oligopóliumnak van NEP-je. Forgó 1995-ben megjelent dolgozatában ezt a tételt úgy általánosította, hogy a költségfüggvények konvexitása helyett azt tételezte fel, hogy ezek az értelmezési tartományuk alsó felén konkávak, felső felén pedig konvexek. Ilyen feltételek mellett az árfüggvény és a költségfüggvények nulla pontbeli viselkedésének függvényében több elegendő feltételt is sikerült a szerzőnek megadnia, amelyek a NEP létezését garantálják.

Az első fejezet harmadik része kétszemélyes zéróösszegű játékokkal, és ezzel összefüggésben az ún. minimax tételekkel foglalkozik. Ezeket potenciálisan fel lehet használni az n-személyes játékok vizsgálatára is. A szakasz egyetlen tétele egy Joó Istvánnal 1998-ban közösen elért eredmény, ami átlagoló függvényekkel (szigorú közepekkel) leírható becslések teljesülése esetén nyer egy minimax típusú tételt. A tétel bizonyítása, habár eleminek mondható, összetett és hosszadalmas. Ennek az eredménynek a fontosságát és a visszhangját jól mutatja, hogy az elmúlt 10 évben többen is próbálták élesíteni és általánosítani.

A második fejezetben a véges n-személyes kevert játékok Nash-egyensúly fogalmának általánosításaival foglalkozik a szerző. Aumann 1974-ben bevezette a korrelált egyensúly (CE) fogalmát, ami egy stratégia n-es kisorsolását és ezt követően egy tanácsadást jelent, így ez a kibővített játék NEP-jének tekinthető. Aumann megmutatta, hogy a NEP-ek konvex burka része a CE-knek. Léteznek olyan játékok, ahol van olyan CE, amely esetén a játékosok összkifizetése (SW, a játék társadalmi hasznossága) nagyobb, mint bármely NEP-ben. A CE fogalmát a bimátrix játékok esetében Moulin és Vial 1978-ban tovább általánosították és bevezették a gyenge korrelált egyensúly (WCE) fogalmát. Sok olyan játék van, amelyben a játékosok összkifizetése WCE esetén nagyobb mint CE esetén. De az ún. notórius fogolydilemmára még a WCE sem alkalmazható. Ez vezette a szerzőt a puha korrelált egyensúly (SCE) fogalmának a bevezetéséhez 2010-ben. Ez úgy módosítja a CE fogalmát, hogy a sorsolás után a játékvezető javaslatot tesz az i-edik játékosnak, hogy fogadja el a kevert stratégiát jelentő valószínűség eloszlás szerint kisorsolt stratégiát. Ha ezt a játékos nem fogadja el a játékvezető tanácsát, akkor ezt a stratégiát nem választhatja, de minden mást igen. A szerző fő eredményei szerint bináris játékokban (azaz, ha minden játékosnak csak két stratégiája van), minden WCE egyúttal SCE is. Egy másik tétel elegendő feltételt ad arra, hogy az SCE minden játékos számára jobb legyen mint egy Pareto-dominált tiszta NEP. Ez utóbbi eredmény a fogolydilemmára is alkalmazható. A különböző egyensúly-fogalmak erejét, összehasonlítását számos példával mutatja be a szerző.

A második fejezet következő részében a kétkiszolgálós, nemcsökkenő lineáris torlódási játékokban vizsgálja a szerző a CE, WCE és SCE erejét abból a szempontból, hogy mennyire növelik az SW-t. Itt fontos mérőszámként bevezetésre kerül egy G játék mediációs ($MV(G)$, $MVP(G)$) és kényszerítési értékének ($EV(G)$) fogalma. Az MV és MVP fogalmát egy „legjobb eset elemzés" eredményének, EV-t pedig egy „legrosszabb eset elemzés" eredményének tekinthetjük. Egy 2014-ben talált tétel szerint bármely n-személyes, kétkiszolgálós, egyszerű, nemcsökkenő lineáris G torlódási játék esetén $EV(G)$ nem lehet nagyobb, mint $4/3$. Két- és háromszemélyes játékokra az $EV(G)$ pontos értéke 1. Az $MV(G)$ és $MVP(G)$ pontos (közös) értéke ∞, illetve $4/3$ a két-, illetve háromszemélyes játékokban. Nagyobb játékosszám esetén $MVP(G)$-re csak (n-től függő) alsó korlátok ismertek.

A második fejezet következő szakaszában az extenzív formában adott játékok gyenge és puha egyensúlyi állapotairól esik szó. Formálisan az extenzív játékok normál alakra hozhatók, de konkrét esetekben jelentős méretnövekedéshez vezet, ezért érdemes a fentebb bevezetett fogalmakat, illetve vizsgált kérdéseket közvetlenül vizsgálni. A szerző által 2005-ben javasolt megközelítésben a randomizáció a játékfa levelein történik, míg a Stengel–Forges (2007)-es megközelítésében az információs halmaz lehetséges lépésein. A randomizáció a játék fájának egy adott csúcspontjában a játékvezető sorsolását követően háromféle protokoll (TCE, TWCE, TSCE) szerint történhet. (Ezek a korábbi CE, WCE, SCE fogalmak megfelelői.) A szerző kimutatja, hogy a Selten által 1975-ben bevezetett részjáték tökéletesség megkövetelése esetén a TWCE és így a TCE sem tudja Pareto értelemben megjavítani a NEP-et. A

TSCE viszont tud részjáték tökéletes Pareto-optimum javulást produkálni. Ezek az eredmények és a TSCE protokoll eredményesen használható a széndioxid kibocsátás csökkentésére folytatott tárgyalások modellezésére és vizsgálatára (a minimalizálandó célfüggvény ebben az esetben a globális hőmérséklet, a játékosok az országcsoportok, stb.)

A harmadik fejezet a Nash által 1950-ben a kooperatív játékok egyensúly-elméletében bevezetett alkumegoldás (NAM) fogalmával kapcsolatos. A lehetséges kifizetések $F \subseteq \mathbb{R}^n_+$ nemüres kompakt, konvex halmazából és a lehetséges egyet-nemértési kifizetés $d \in \mathbb{R}^n$ vektorából álló (F, d) párt nevezzük n-személyes alkuproblémának. Az alkumegoldás egy hat axiómából álló feltétel rendszert teljesít. Erről Nash kimutatta, hogy az ún. Nash-szorzattal megadható maximum feladat egyértelmű megoldásaként adható meg. A szerző az $(F, -\alpha r)$ alkufeladat aszimptotikus megoldását vizsgálta rögzített r egyet-nemértési irány esetén az $\alpha > 0$ (büntető) paraméter függvényében. Az alkumegoldások határértékét limit-NAM-nak (LNAM-nak) nevezik. A Szidarovszky-val 2003-ban elért eredmény az LNAM-ot egy a Nash-szorzatból konstruált polinom együtthatóira vonatkozó feltételes szélsőérték probléma egyértelmű megoldásaként jellemzi. Sőt azt is megmutatták, hogy ha F egy nemüres politóp, akkor elég nagy α-ra az $(F, -\alpha r)$ NAM-ja már a limit probléma LNAM-ját adja. (Sajnos az α küszöbértéke nem konstruktív.) Egy Fülöppel közös 2008-as eredményben a kétszemélyes alkuproblémák vizsgálatára egy olyan dinamikus nemkooperatív játékot konstruáltak, amely implementálja a LNAM-ot, ha van véges α büntető paraméter, vagy aszimptotikusan közelíti, ha nincs.

A fejezet utolsó részében többkritériumú döntési problémákkal foglalkozik a szerző. Már 1984-ben (elsőként) észrevette, hogy az ilyen problémákat át lehet fogalmazni alkuproblémaként. A szellemes megközelítés szerint az alkuprobléma játékosai a döntési probléma kritériumai lesznek. Szidarovszkyval 2003-ban megmutatták, hogy az ún. kiterjesztett súlyozással kapott többkritériumú döntési probléma megegyezik egy alkalmasan konstruált alkuproblémának a limit megoldásával, ahol az r egyet-nemértési irány komponensei a súlyok reciprokai.

Összefoglalva, úgy vélem, hogy Forgó Ferenc a játékelméletet alapvető és értékes eredményekkel gazdagította. Új fogalmak bevezetésével, illetve a feltételek gyengítésével többféle módon általánosította az elmélet számos ismert és érdekes eredményét. A disszertációban feldolgozott és bemutatott anyag meggyőzően mutatja be elmélyült problémamegoldó gondolkodását, elméleti és gyakorlati problémaérzékenységét. A disszertáció formailag és tartalmilag is igen gazdag, sokrétű anyagot tárgyal és egységes történeti és tartalmi szerkezetbe foglalja a szerző legfontosabb eredményeit. A disszertációban bemutatott eredmények messzemenően megfelelnek az MTA doktori pályázatokkal szemben támasztott követelményeknek. Ezért a disszertáció nyilvános vitára való kitűzését és sikeres védés esetén az MTA doktora cím Forgó Ferenc számára történő odaítélését határozottan javaslom.

Debrecen, 2015. március 20.

Páles Zsolt, az MTA doktora