Polinomiális-exponenciális diofantikus egyenletek és egyenletrendszerek

MTA doktori rövid értekezés tézisei

Szalay László

Sopron, 2014

dc_871_14

I. A kitűzött kutatási feladatok összefoglalása

Míg a diofantikus egyenletek elmélete a görög matematikában gyökeredzik, tehát több mint kétezer éves múltra tekint vissza, addig az első exponenciális típusú diofantikus probléma jóval később, a XIV. században jelent meg egy zeneelméleti kérdés kapcsán. Egészen a XX. század második feléig többnyire ad hoc módszerekkel oldottak meg exponenciális diofantikus egyenleteket, jó példa erre Nagell bizonyítása [58] Ramanujan sejtésére [62]. Bár az algebrai számok logaritmusai lineáris formáinak becslésén alapuló Baker-módszer, valamint a diofantikus approximáció elmélet egyik csúcsa, az Altér tétel, továbbá az egységegyenletek elmélete hatékony eszközöket adott a kutatók kezébe, – és nem csak az exponenciális vagy polinomiális-exponenciális diofantikus egyenletek vizsgálatára – a különböző egyedi megközelítések továbbra is fontos szerephez jutnak.

Polinomiális-exponenciális diofantikus egyenleten olyan diofantikus egyenletet értünk, amelyben egyszerre van jelen polinomiális és exponenciális – első megközelítésben – racionális egész ismeretlen is. Néhány klasszikus példát kiemelve, az alábbi problémák fémjelzik a problémakört.

Ramanujan-Nagell egyenlet. A

$$2^k - 7 = x^2$$

egyenlet összes egész megoldása $(k, x) = (3, 1)$, $(4, 3)$, $(5, 5)$, $(7, 11)$ és $(15, 181)$. (Lásd [62], [58].)

Catalan-Mihăilescu tétel. Az

$$x^p - y^q = 1$$

egyenlet egyetlen megoldása az $x, y, p, q > 1$ ismeretlenekben $3^2 - 2^3 = 1$. (Lásd [23], [56].)

Jeśmanowicz sejtés. Ha a, b és c primitív Pithagorszi számhármas, akkor

$$a^x + b^y = c^z$$

egyetlen pozitív egész megoldása $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. (Lásd [35].)

Az értekezés olyan vegyes egyenleteket, illetve egyenletrendszereket vizsgál, ahol az egyenlet(ek) egyik oldalán exponenciális, a másikon polinomiális ismeretlenek jelennek meg. Általános formában tekintsük az

$$u_1\xi_1^{n_1} + u_2\xi_2^{n_2} + \cdots + u_k\xi_k^{n_k} = p(x_1, x_2, \ldots, x_t) \tag{1}$$

diofantikus egyenletet, ahol u_i, ξ_i $(i = 1, 2, ..., k)$ rögzített egészek, $p(X_1, X_2, \ldots, X_t)$ egy adott egészegyütthatós polinom és a megoldásokat az $x_1, x_2, \ldots, x_t$ egészekben és az $n_1, n_2, ..., n_k$ nem negatív egészekben keressük.

Az (1) egyenlet több változata, módosítása ismert. A $p(X_1, X_2, \ldots, X_t)$ polinom lehet még egészértékű, vagy racionális együtthatós, vagy a racionális számtest egy algebrai bővítésével kapott $\mathbb{K}$ számtest elemei lehetnek az együtthatói. Hasonlóan (1) bal oldalán az együtthatók és a hatványalapok is lehetnek egy algebrai számtest egészei. A megoldásokat is kereshetjük úgy, hogy $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{Z}$ és $x_1, x_2, \ldots, x_t$ a $\mathbb{K}$ algebrai számtest egészei.

Az értekezés (1) alábbi speciális eseteit vizsgálja, az utolsó két esetben egyenlet helyett egyenletrendszereket tekintve.

- **A**. $2^N \pm 2^M \pm 2^L = x^2$;
- **B**. $(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$, különböző $1 < a < b$ egész paraméterek mellett;
- **C**. $G_n = p_3(x)$, ahol $\{G_n\}$ másodrendű rekurzív sorozat, $p_3(X)$ harmadfokú egészértékű polinom;
- **D**. $G_x = p(a, b)$, $G_y = p(a, c)$, $G_z = p(b, c)$, ahol $\{G_n\}$ másodrendű rekurzív sorozat, $p(X_1, X_2) = X_1X_2 + 1$;
- **E**. $s_1 = p(a, b)$, $s_2 = p(a, c)$, $s_3 = p(a, d)$, $s_4 = p(b, c)$, $s_5 = p(b, d)$, $s_6 = p(c, d)$, ahol s_i-k S-egységek az $|S| = 2$ feltétellel, $p(X_1, X_2) = X_1X_2 + 1$.

Az **A** kérdéshez hasonló problémákat korábban csak két tagra, vagy több tag esetén nagyon speciális helyzetben oldottak meg. **B** új irányt nyitott a kutatásokban. **C** esetében sok, szerteágazó eredmény létezett a rekurziókban előforduló polinomiális értékekre. Itt az volt az újdonság, hogy harmadfokú polinomok egy osztályára sikerült egy megoldó eljárást felfedezni. **D** és **E** előzménye a diofantikus négyesek klasszikussá vált problémája, mi a már meglevő variánsokat bővítettük új kérdésekkel, melyeket részben meg is válaszoltunk.

II. A vizsgálati módszerek áttekintése, az eredmények jellege

Az (1) típusú polinomiális-exponenciális diofantikus egyenletek megoldására egységes megközelítés nem létezik. Az előző fejezetben felvetett **A**–**E** témák vizsgálati módszereit kérdésenként tekintjük át, megadva egyúttal a kapott eredmények jellegét is.

A. $\mathbf{2^N \pm 2^M \pm 2^L = x^2}$

A [14] dolgozatban sikerült teljesen megoldani a $2^N \pm 2^M \pm 2^L = x^2$ egyenletekből származó 8 esetet. Ez volt az első alkalom, amikor az egyenlet exponenciális részében három azonos alapú tag szerepelt általános körülmények között, azaz N, M és L viszonyára csak a természetes $N \geq M \geq L \geq 0$ feltétel volt előírva a szimmetria feloldására ott, ahol ez indokoltnak látszott. Az egyenletek többségét elemi számelméleti eszközökkel vizsgáltuk. Kettőhöz azonban másra is szükség volt. Az egyik a $2^n - 2^m + 1 = x^2$ egyenlet, amely Beukers [20] egy tételének felhasználásával volt kezelhető. A másik [14] fő eredménye, a jóval bonyolultabb $2^n + 2^m + 1 = x^2$ egyenlet gyökeinek meghatározása. Ehhez – egyebek mellett – Beukers [20] diofantikus approximáción alapuló mély eredményét alkalmaztuk. Érdekes módon, egy alkalmas transzformáció tulajdonságait figyelembe véve, az eredeti problémából származó, látszólag bonyolultabb egyenletrendszer vizsgálata vezetett a sikerhez. A kérdés azért volt nehéz, mert az $x = 2^t + 1$ alakú, végtelen sok elemű megoldáscsalád mellett létezik két sporadikus megoldás is.

A fenti eredményeket röviden úgy összegezhetjük, hogy végtelen sok általánosított Ramanujan-Nagell típusú, azaz $2^k + d = x^2$ egyenletet sikerült megoldani.

B. $\mathbf{(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2}$

Az $(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$ egyenlet összes megoldását meghatároztuk több a és b paraméter mellett. Azt mutattuk meg, hogy szóban forgó egyenletnek nincs megoldása ha $(a, b) = (2, 3)$ vagy $(2, 6)$, egy megoldás létezik ha $(a, b) = (2, 5)$ vagy $(2, 2^k)$, és három megoldás van $(a, b) = (a, a^k)$ mellett. A probléma azért nem könnyű, mert valamely c-hez relatív prím modulust véve $c^n - 1$ maradékai peridikusan 0-t vesznek fel. Ezt a helyzetet tovább nehezítheti, ha a szóban forgó egyenlet megoldható.

Amennyiben $(a, b) = (2, 3), (2, 5)$, akkor a primitív gyökök és kvadratikus maradékok elméletén alapuló bizonyítást adtunk ([12]). $(a, b) = (2, 6)$ esetén az előző módszert ki kellett bővíteni két alkalmasan megválasztott prímre vonatkozó kvadratikus maradék szitájával ([4]). Az általánosabb $(a, b) = (a, a^k)$ típus vizsgálata során tágabban értelmeztük a [12] dolgozatban megoldott $(2^k - 1)(2^{kn} - 1) = x^2$ egyenletet. Itt Chao Ko [24] illetve Ljunggren [50] egy-egy tételét használtuk a bizonyításhoz.

A [6] cikkben általánosítottuk a korábbi eredmények egy részét oly módon, hogy az a és b hatványalapokat nem rögzítettük, hanem bizonyos kongruenciáknak kellett eleget

tenniük: egyrészt $a \equiv 2 \pmod 6$ és $b \equiv 0 \pmod 3$ mellett beláttuk, hogy nincs pozitív egész (n, x) megoldás, másrészt $b - 1 = s^2$, $a \equiv 2 \pmod{20}$ és $b \equiv 5 \pmod{20}$ mellett igazoltuk, hogy az egyenlet általában nem oldható meg, de bizonyos esetben létezik egy explicite megadható megoldása. Az utóbbi vizsgálatoknál főleg a Pell egyenletek megoldásainak számelméleti tulajdonságait használtuk fel.

C. $\mathbf{G_n = p_3(x)}$

Legyenek a

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}, \qquad A, B \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

bináris rekurzió G_0 és G_1 kezdőelemei egész számok. Tételezzük még fel, hogy $\{G_n\}$ karakterisztikus polinomjának $D = A^2 + 4B$ diszkriminánsa 0-tól különböző, és hogy $|B| = 1$. A [15] dolgozatban beláttuk, hogy rögzített együtthatók mellett a $G_0 = 0$ és $G_1 = 1$ kezdőértékekkel indított $\{G_n\}$ rekurzió és annak $\{H_n\}$ asszociáltja csak véges sok $\binom{x}{3}$ típusú polinomiális értéket tartalmazhat. A bizonyítás Mordellnek [57] egy, az elliptikus egyenletekre vonatkozó ineffektív végességi tételén alapszik. A cikkben megadtunk egy algoritmust is az összes $\binom{x}{3}$ polinomiális érték meghatározására. Az algoritmus elliptikus egyenletekre vezeti vissza a problémát, melyek megoldására számítógépes eljárásokat fejlesztettek ki.

A [15] dolgozat eredményeinek kiterjesztését [13] tartalmazza, ahol az általánosabb

$$G_n = \frac{1}{d}(ax^3 + 3abx^2 + cx + (bc - 2ab^3))$$

egyenletet tárgyaltuk az $a \neq 0,\ d \neq 0$ feltételekkel (a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$), továbbá tetszőleges G_0, G_1 kezdőértékekkel. Ezzel egy három független paraméterű, harmadfokú polinomosztály elemeit tudtunk kezelni.

D. $\mathbf{G_x = p(a, b)}$, $\mathbf{G_y = p(a, c)}$, $\mathbf{G_z = p(b, c)}$, $\mathbf{p(X_1, X_2) = X_1X_2 + 1}$

Az I. részben közölt probléma nyilvánvalóan ekvivalens az

$$\begin{aligned} ab + 1 &= G_x, \\ ac + 1 &= G_y, \\ bc + 1 &= G_z \end{aligned} \tag{3}$$

egyenletrendszerrel, melyet az $1 \leq a < b < c$ és x, y, z nem negatív egész ismeretlenekben vizsgálunk, ahol a nem degenerált $\{G_n\}$ sorozat kielégíti a (2) rekurziót. Ha vannak ilyen a, b, c számok, akkor őket diofantikus hármasoknak nevezzük ($\{G_n\}$-re vonatkozóan). (3) vizsgálata nem egyszerű, egyes sorozatokra végtelen sok hármas létezik, másokra véges sok (esetenként 0).

A [3] dolgozatban, $D > 0$ mellett osztályozni tudtuk a végtelen sok diofantikus hármassal rendelkező rekurziókat, ehhez szükség volt az Altér tételnek, a végesen generált multiplikatív csoportokra vonatkozó egységegyenleteknek, algebrai számelméleti eszközöknek, multirekurzív sorozatokra vonatkozó eredményeknek, és bizonyos polinomok tulajdonságainak kombinálására. Beláttuk, hogy végtelen sok diofantikus hármas

csak kivételes esetekben fordulhat elő, így természetes kérdésként merül fel, hogy a nem kivételes esetekben hogyan lehet meghatározni (3) összes (véges sok) megoldását. A Fibonacci sorozatra [8], majd a Lucas számok sorozatára [9] megadtunk egy módszert, amely lehetővé tette (3) tényleges megoldását. Ezek a dolgozatok a $\gcd(G_y - 1, G_z - 1)$ legnagyobb közös osztó többirányú becslésén múlnak ($x < y < z$). Később [1]-ben megvizsgáltuk a Balansz számokra vonatkozó diofantikus hármasok kérdését, és a Fibonacci sorozathoz hasonlóan ott sem találtunk megoldást (a Lucas számok sorozatából egy diofantikus hármas származik). Ezt az eredményt általánosította az [5] dolgozat, ahol már nem egy adott sorozatról, hanem sorozatok egy jól meghatározott, végtelen sok sorozattal rendelkező $G_n = AG_{n-1} - G_{n-2}$ osztályáról tudtuk megmutatni, hogy nincs diofantikus hármasuk. Újabban bevezettük a $\{G\}$-távolság fogalmát, és erre vonatkozóan is végeztünk vizsgálatokat [10, 11, 2].

E. $\mathbf{s_1 = p(a, b)}$, $\mathbf{s_2 = p(a, c)}$, $\mathbf{s_3 = p(a, d)}$, $\mathbf{s_4 = p(b, c)}$, $\mathbf{s_5 = p(b, d)}$, $\mathbf{s_6 = p(c, d)}$, $\mathbf{p(X_1, X_2) = X_1X_2 + 1}$

Legyen S a p és q prímek kételemű halmaza, és tekintsük az

$$\begin{aligned} ab + 1 &= p^{\alpha_1}q^{\beta_1}, & bc + 1 &= p^{\alpha_4}q^{\beta_4}, \\ ac + 1 &= p^{\alpha_2}q^{\beta_2}, & bd + 1 &= p^{\alpha_5}q^{\beta_5}, \\ ad + 1 &= p^{\alpha_3}q^{\beta_3}, & cd + 1 &= p^{\alpha_6}q^{\beta_6} \end{aligned} \tag{4}$$

egyenletrendszert. Erre vonatkozó sejtésünket, miszerint nincsenek olyan p és q prímek melyekre létezne $\{p, q\}$-diofantikus $\{a, b, c, d\}$ négyes, általánosságban nem sikerült igazolni. Megmutattuk azonban, hogy a sejtés végtelen sok, bizonyos technikai feltételeknek eleget tevő p és q prímekre teljesül [16], másrészt az összes olyan p és q prímszámokra, melyek 4-gyel vett osztási maradéka 3 [17]. A publikálásra benyújtott [18] cikkben beláttuk, hogy a sejtés $p = 2$ esetén is igaz ha $q \equiv 3 \pmod 4$ továbbra is fennáll.

A bizonyítások során három, a (4) egyenletrendszerből származó S-egység egyenletet vizsgáltuk, felhasználva Stewart és Tijdeman eredményeinek [68] élesítését, a Baker-módszert, bizonyos oszthatósági tulajdonságokat, és különböző becsléseket. A fő nehézséget az ismeretlenek számának (főleg a kitevők számának) nagysága jelenti, még akkor is, ha köztük különböző összefüggéseket lehet felfedezni.

III. Az új tudományos eredmények előzményei, összefoglalása és hatása

A. $\mathbf{2^N \pm 2^M \pm 2^L = x^2}$

A vizsgált egyenletek előzményei között meg kell említeni Lebesque munkáját [45], melyből következik, hogy a 2^n-1 Mersenne-féle szám csak akkor lehet teljes négyzet, ha $n = 0$ vagy 1. (Később Gerono [29] ugyanezt igazolta magasabb hatványokra.) Mivel a $2^n+1 = x^2$ egyenlet egyetlen $(n, x) = (3, 3)$ nem negatív egész megoldása régóta ismert, így világos, hogy ezek az eredmények összességében megadják a $2^{n_1} \pm 2^{n_2} = x^2$ egyenlet összes megoldását is.

Rotkiewicz és Złotokowski [63] a

$$p^{n_1} + p^{n_2} + \cdots + p^{n_k} + 1 = x^2$$

egyenletet vizsgálták, ahol p páratlan prím, $k > 1$, továbbá $n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1$.

De Weger [77] éles felső korlátot adott az

$$ax + by = z^2$$

egyenletben az $x \in S$ és $y \in S$ ismeretlenek nagyságára, ahol S az adott $p_1, \ldots, p_s$ prímek által multiplikatíve generált természetes számokból álló halmaz, $a, b \in \mathbb{Z}$, úgy hogy $p_i \nmid ab$ és az a, b számok legnagyobb közös osztója négyzetmentes.

Ramanujan sejtését [62] Nagell [58] bizonyította. Mások mellett Beukers [20] is foglalkozott az általánosított $2^k + d = x^2$ Ramanujan-Nagell egyenlettel, ezen cikkének eredményeit a bizonyításokban felhasználtuk.

Rátérve az általunk vizsgált problémára, az alábbi két tétel írja le $2^N \pm 2^M \pm 2^L = x^2$ két legfontosabb esetére vonatkozó eredményeket.

1. tétel. *(Szalay, 2002, [14].) Ha a pozitív n, m és x egészek az $n \geq m$ feltétellel kielégítik a*

$$2^n + 2^m + 1 = x^2$$

egyenletet, akkor

- $(n, m, x) \in \{(2t, t+1, 2^t+1) \mid t \in \mathbb{N},\ t \geq 1\}$, *vagy*
- $(n, m, x) \in \{(5, 4, 7)\ ,\ (9, 4, 23)\}$.

2. tétel. *(Szalay, 2002, [14].) Amennyiben az n, m és x pozitív egészekre*

$$2^n - 2^m + 1 = x^2$$

áll fenn, akkor

- $(n, m, x) \in \{(2t, t+1, 2^t - 1) \mid t \in \mathbb{N},\ t \geq 2\}$, *vagy*
- $(n, m, x) \in \{(t, t, 1) \mid t \in \mathbb{N},\ t \geq 1\}$, *vagy*
- $(n, m, x) \in \{(5, 3, 5)\ ,\ (7, 3, 11)\ ,\ (15, 3, 181)\}$.

Főleg az 1. tétel eredménye értékes, mert általános körülmények között oldotta meg a három tagú összegre vonatkozó problémát, korábban csak bizonyos feltételekkel tudtak kettőnél több tagú összegeket vizsgálni.

A cikk megjelenését követően Luca [52] megadta a $p^a \pm p^b + 1 = x^2$ rokon egyenletet összes megoldását páratlan p prímszámok esetén. Később Le Maohua meghatározta $p^a - p^b + p^c = x^2$ [39], illetve $p^a - p^b - p^c = x^2$ [40] megoldásait, majd a $2 \mid a$ és $a \geq b \geq c \geq 0$ feltételek mellett megoldotta a $p^a + p^b - p^c = x^2$ egyenletet [41], ám az utóbbi egyenletnél a páratlan a esete még mindig nyitott.

Bennett, Bugeaud and Mignotte [21] $x \in \{2, 3\}$ mellett vizsgálta az $x^a + x^b + 1 = y^q$ egyenletet ($1 < a < b,\ q \geq 2$). A szerzők explicite megadták a megoldások halmazát. Később Bennett [22] elemezte, hogy hármas számrendszerben mely négyzetszámoknak, illetve magasabb hatványoknak van pontosan három 0-tól különböző számjegye.

Scott és Styre [64] a Pillai egyenlet $(-1)^u a^x + (-1)^v b^y = c$ alakú általánosításának vizsgálatában, többek között, felhasználja az 1. tétel eredményeit. A [65, 66] tanulmányokban Scott egyszerűbb, elemi bizonyítást ad az 1. tételre, valamint Luca $p^a \pm p^b + 1 = x^2$ egyenletre vonatkozó eredményére.

Arenas-Carmona, Berend és Bergelson [19] leírják, hogy vizsgálataikban nagy fontossággal bírnak azok a $P(X)$ polinomok, melyekre a $2^{n_1} \pm 2^{n_2} \pm \cdots \pm 2^{n_k} = p(x)$ egyenlet végtelen sok $(n_1, n_2, \ldots, n_k, x)$ megoldással rendelkezik. Ward [76] megjegyzi, hogy egy problémája megoldásában használni lehetne az 1. tételt, de direkt bizonyítást ad a speciális helyzetre.

További cikkek [51, 78, 53, 27], valamint Guy *Unsolved Problems in Number Theory* című könyve [31] (251. oldal) hasonló exponenciális, vagy polinomiális-exponenciális egyenleteket tárgyalva megemlíti az 1. tételt vagy hivatkozik a [14] dolgozatra.

B. $(\mathbf{a^n - 1})(\mathbf{b^n - 1}) = \mathbf{x^2}$

A felvetett probléma két bináris rekurzió szorzatában, vagy vele ekvivalens megfogalmazásban egy negyedrendű lineáris rekurzióban keresi a négyzetszámokat. Viszonylag hosszú múltra tekint vissza a

$$G_n = x^q$$

egyenlet vizsgálata az $n \geq 0$, x és $q \geq 2$ egészekben, ahol $\{G_n\}$ egy adott lineáris rekurzív sorozat. Shorey és Stewart [67], illetve tőlük függetlenül Pethő [60] megmutatták, hogy ha $\{G_n\}$ másodrendű, akkor mindhárom változó felülről effektíve korlátos. Amennyiben magasabbrendű rekurzív sorozatokat tekintünk, akkor a sorozat karakterisztikus polinomjának domináns gyököt feltételezve Shorey és Stewart [67] igazolta, hogy q nem lehet akármilyen nagy. Ezt az eredményt Nemes és Pethő [59] kiterjesztette a $G_n = x^q + A(x)$ esetre, ahol $A(X)$ egy adott egészegyütthatós polinom. Sajnos a q

kitevőre vonatkozó felső korlátok olyan hatalmasak, hogy közvetlenül nem lehet őket használni a kérdéses egyenletek tényleges megoldására.

A fentiek mellett több olyan eredmény született, amely különböző bináris rekurziókban meghatározta egy adott alakú figurális számok összességét, de magasabbrendű rekurziókban ritkán sikerült hasonló eredményeket elérni. McDaniel [55] például bizonyos Lehmer sorozatokban és asszociáltjaikban le tudta írni a négyzetszámokat. Mivel, mint már említettük,

$$(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2 \tag{5}$$

bal oldala felfogható úgy is, hogy két bináris rekurzió szorzata, azaz egy negyedrendű rekurzív sorozat, és (5) ezekben keresi a négyzetszámok előfordulását, így az (5) típusú egyenletek felvetése, és megoldása új irányt hozott a kutatásokba.

Az előbbiek szerint a [12] és [4] dolgozatok úttörő munkának is mondhatók, és a későbbi [6] tanulmánnyal együtt az alábbi tételeket bizonyítottuk bennük.

3. tétel. *(Szalay, 2000, [12].) Nincs pozitív egész* (n, x) *megoldása a*

$$(2^n - 1)(3^n - 1) = x^2$$

egyenletnek.

4. tétel. *(Szalay, 2000, [12].) A*

$$(2^n - 1)(5^n - 1) = x^2$$

egyenlet egyetlen pozitív egész megoldása $(n, x) = (1, 2)$.

5. tétel. *(Hajdu – Szalay, 2000, [4].) A*

$$(2^n - 1)(6^n - 1) = x^2$$

diofantikus egyenletnek nincs pozitív egész (n, x) *megoldása.*

6. tétel. *(Hajdu – Szalay, 2000, [4].) Ha az* $a > 1$, $k > 1$, n *és* x *pozitív egészekre* $kn > 2$ *teljesül, és kielégítik az*

$$(a^n - 1)\left(a^{kn} - 1\right) = x^2$$

egyenletet, akkor $(a, n, k, x) = (2, 3, 2, 21)$ *vagy* $(3, 1, 5, 22)$ *vagy* $(7, 1, 4, 120)$.

7. tétel. *(Lan – Szalay, 2010, [6].) Ha* $a \equiv 2 \pmod 6$ *és* $b \equiv 0 \pmod 3$ *akkor az*

$$(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$$

diofantikus egyenletnek nincs pozitív egész (n, x) *megoldása.*

8. tétel. *(Lan – Szalay, 2010, [6].) Tegyük fel, hogy* $b-1=s^2$ *négyzetszám. Ekkor* $a\equiv 2 \pmod{20}$ *és* $b\equiv 5 \pmod{20}$ *mellett az*

$$(a^n-1)(b^n-1)=x^2$$

egyenlet vagy nem oldható meg, vagy egyetlen lehetséges megoldása $(n,x)=(1,st)$*, ahol* $t=\sqrt{a-1}\in\mathbb{N}$*.*

A 2000-ben megjelent két cikk nagy érdeklődést keltett. Pethő [61] jelentős fejleménynek értékelte, hogy új kutatási irányt sikerült nyitni a magasabbrendű rekurziókban előforduló teljes hatványok vizsgálata terén. Cohn [25] egyik tétele az $a^k=b^\ell$ feltétel mellett általánosítja a 6. tételt, majd $n=1,2$ és $4k$ mellett adja meg (5) megoldását. Továbbá megoldja a $2\le a<b\le 12$ esetekre meghatározott egyenleteket. Nemrég Guo [30] továbbfejlesztette Cohn munkáját. Az egyik legjelentősebb eredmény Luca és Walsh nevéhez fűződik, akik [54]-ban általános végességi tételt nyertek az $u_nv_n=x^q$ egyenletre, ahol $\{u_n\}$ és $\{v_n\}$ bizonyos típusú bináris rekurziók. Igazolták továbbá, hogy az (5) egyenleteknek csak véges sok megoldása lehet rögzített alapokra. Emellett [54]-ben megadtak egy olyan eljárást, amellyel az $(a^n-1)(b^n-1)=x^2$ egyenletek általánosan kezelhetők az adott (a,b) párok többségére. Az algoritmusukat $2\le a<b\le 100$ esetben demonstrálták, és mintegy 70 kivételes esettől eltekintve megoldották az egyenleteket. A kivételek közül később néhányat Li és Tang [47], valamint Li és Jin [48] kezelni tudtak. 2009-ben Le Maohua két cikket [42, 43] is közölt a $(2^n-1)(b^n-1)=x^2$ egyenletről. Ugyanezzel a problémával foglalkozott még Li és Tang [46] is. Az (5) egyenlet $b=a+1$ speciális esetét vizsgálta Le Maohua [44], és Liang [49].

Több tanulmány [69, 73, 70, 72, 28, 36, 74] foglalkozik azzal, hogy a-ra és b-re olyan osztályokat keressen, melyekre (5) nem oldható meg. Az említett cikkek közül [69] az általánosabb $(a^n-1)(b^m-1)=x^2$ egyenletet tárgyalja, melynek az előzménye az, hogy Walsh [75] a 3. tételt általánosította: megmutatta, hogy a $(2^n-1)(3^m-1)=x^2$ egyenlet sem oldható meg. Szintén a különböző kitevőjű, általánosabb problémát elemzi He [33] is.

C. $\mathbf{G_n=p_3(x)}$

A bináris, valamint magasabb rendű rekurzív sorozatokban előforduló polinomiális értékek történetét a **B** részben már érintettük. A [15] és [13] dolgozatok egy harmadfokú polinomcsaláddal kapcsolatban tartalmaznak eredményeket.

A (2) bináris rekurzióra tegyük fel, hogy G_0, G_1 kezdőelemei egész számok, $|B|=1$, valamint, hogy $D=A^2+4B\neq 0$. Ismert, hogy a $\{G_n\}$ sorozat asszociált $\{H_n\}$ sorozatára $H_n=AH_{n-1}+BH_{n-2}$, $(n\ge 2)$ teljesül a $H_0=2G_1-AG_0$ és $H_1=AG_1+2BG_0$ kezdeti értékekkel. Legyen $G_0=0$ és $G_1=1$. Ekkor az alábbi állításokat láttuk be. Jelölje a Fibonacci, a Pell, és a Lucas számok sorozatának n-edik elemét rendre F_n, P_n, és L_n.

9. tétel. *(Szalay, 2002, [15].) A* $G_n=\binom{x}{3}$ *és* $H_n=\binom{x}{3}$ *egyenletek mindegyikének csak véges sok megoldása van az* $n\ge 0$ *és* $x\ge 3$ *ismeretlen egészekben.*

10. tétel. *(Szalay, 2002, [15].)*

- *Ha* $F_n = \binom{x}{3}$, *akkor* $(n, x) = (1, 3)$ *vagy* $(2, 3)$.
- $L_n = \binom{x}{3}$*-ből* $(n, x) = (1, 3)$ *vagy* $(3, 4)$ *következik.*
- *A* $P_n = \binom{x}{3}$ *egyenletet csak* $(n, x) = (1, 3)$ *elégíti ki.*

A [15] dolgozat eredményeinek kiterjesztését [13] tartalmazza, ahol az általánosabb $G_n = (ax^3 + 3abx^2 + cx + (bc - 2ab^3))/d$ egyenletet tárgyaltuk az $a \neq 0$, $d \neq 0$ feltételekkel (a, b, c és d egészek), továbbá tetszőleges G_0, G_1 kezdőértékekkel. Az eljárás alkalmazásaként a Fibonacci sorozatra, a Lucas számok sorozatára, és a Pell sorozatra az alábbi tételt nyertük.

11. tétel. *(Szalay, 2001, [13].)*

- *Ha* $F_n = \sum_{i=1}^{x} i^2$, *akkor* $(n, x) = (1, 1)$, $(2, 1)$, $(5, 2)$ *vagy* $(10, 5)$.
- $L_n = \sum_{i=1}^{x} i^2$*-ből* $(n, x) = (2, 1)$ *következik.*
- *A* $P_n = \sum_{i=1}^{x} i^2$ *egyenletet csak az* $(n, x) = (1, 1)$ *és* $(3, 2)$ *párok elégítik ki.*

Mindezeken túl, elemi módszert alkalmazva mindhárom korábbi sorozatban meghatároztuk az összes $\sum_{i=1}^{x} i^3$ formájú számot, továbbá a Fibonacci sorozatban illetve a Lucas számok sorozatában az $\binom{x}{4}$ típusú kifejezéseket.

Hasonló jellegű problémákkal foglalkozott Kovács [37, 38], Tengely [71], valamint Luca és Szalay [7]. Ez utóbbi dolgozat egy exponenciális kifejezés létezését vizsgálja a Fibonacci sorozatban, és megmutatja, hogy csak véges sok $p^a \pm p^b + 1$ alakú 1-nél nagyobb Fibonacci szám létezik, ahol p adott prím, a, b pozitív egészek és $\max\{a, b\} \geq 2$.

D. $\mathbf{G_x = p(a, b)}$, $\mathbf{G_y = p(a, c)}$, $\mathbf{G_z = p(b, c)}$, $\mathbf{p(X_1, X_2) = X_1X_2 + 1}$

A (3) egyenletrendszer vizsgálata, a klasszikus diofantikus szám m-esek mintájára egy új kutatási irányt nyitott meg azzal, hogy a négyzetszámokat egy rögzített másodrendű rekurzió tagjaira cserélte. (3)-nak lehet végtelen sok megoldása, legyen például $G_n = 2^n + 1$, és ekkor világos, hogy az $a = 2^{a_1}$, $b = 2^{b_1}$ és $c = 2^{c_1}$ hatványokkal végtelen sok diofantikus hármas adható meg. Más sorozatoknál már a kezdetben gyanítható volt, hogy csak véges sok diofantikus hármasuk van. Így jogosan merült fel a következő kérdés. Melyek azok a másodrendű sorozatok melyekre végtelen sok diofantikus hármas létezik? A [3] cikkben közölt tétel tálalásához szükségünk lesz a következő jelölésekre. Legyen α és β a (2) rekurzióhoz tartozó karakterisztikus polinom két különböző gyöke. Ismert, hogy léteznek olyan $\gamma, \delta \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}[\alpha]$ komplex számok, melyekre

$$G_n = \gamma\alpha^n + \delta\beta^n$$

teljesül minden n-re. Most következzen az állítás.

12. tétel. *(Fuchs – Luca – Szalay, 2008, [3].) Legyen a $\{G_n\}$ bináris rekurzív sorozat nem degenerált és $A^2+4B>0$. Tegyük fel, hogy létezik végtelen sok a,b,c,x,y és z nem negatív egész az $1\le a<b<c$ feltétellel, melyekre*

$$\begin{aligned} ab+1 &= G_x,\\ ac+1 &= G_y,\\ bc+1 &= G_z \end{aligned}$$

teljesül. Ekkor $\beta,\delta\in\{\pm 1\}$, $\alpha,\gamma\in\mathbb{Z}$.

Továbbá, véges sok a,b,c,x,y,z kivételtől eltekintve $\delta\beta^z=\delta\beta^y=1$, és az alábbiak közül az egyik szükségszerűen igaz:

- *$\delta\beta^x=1$, amikor γ vagy $\gamma\alpha$ négyzetszám;*
- *$\delta\beta^x=-1$, amikor $x\in\{0,1\}$.*

A 12. tétel rávilágít arra, hogy a bináris rekurziók kivételes esetektől eltekintve véges sok diofantikus hármast tartalmaznak. A bizonyítás, jellegéből adódóan, nem ad eljárást arra, hogyan lehet meghatározni a (3) egyenletrendszer nem kivételes esetekben előforduló véges sok megoldását. A Fibonacci sorozatra [8], majd később a Lucas számok sorozatára [9] megadtunk egy módszert, amely lehetővé tette (3) tényleges megoldását, és amely az alábbi eredményt hozta.

13. tétel. *(Luca – Szalay, 2008, [8] és Luca – Szalay, 2009, [9].) A (3) egyenletrendszernek $0<a<b<c$ és nem negatív x,y,z egész ismeretlenek esetén*

- *nincs megoldása a Fibonacci sorozatra;*
- *az egyetlen megoldása $(a,b,c)=(1,2,3)$, $(x,y,z)=(2,3,4)$ a Lucas számok sorozatára.*

A [8] és [9] cikkeket követve Alppal és Irmakkal [1] megvizsgáltuk a Balansz számokra vonatkozó diofantikus hármasok kérdését, és a Fibonacci sorozathoz hasonlóan ott sem találtunk megoldást. Ezt általánosította az [5] dolgozat, ahol már nem egy adott sorozatot, hanem sorozatok egy jól meghatározott, végtelen sok sorozattal rendelkező osztályáról tudtuk megmutatni, hogy nincs diofantikus hármasuk. A vizsgált sorozatok közös jellemzője a $G_n=AG_{n-1}-G_{n-2}$ rekurzív formula, ahol $A\neq 2$ rögzített pozitív egész, a kezdőelemek pedig $G_0=0$ és $G_1=1$. A bizonyított állítás a következő.

14. tétel. *(Irmak – Szalay, közlésre elfogadva, [5].) Ha $A\neq 2$ egy pozitív egész szám, akkor nem léteznek olyan $1\le a<b<c$ egészek, melyekre*

$$\begin{aligned} ab+1 &= G_x,\\ ac+1 &= G_y,\\ bc+1 &= G_z \end{aligned}$$

mindegyike egyszerre teljesülne valamely $1\le x<y<z$ egészekre.

További kutatási irányt kapunk, ha egy adott $\{G_n\}$ sorozatra bevezetjük a $\{G\}$-távolság fogalmát. Egy w valós szám $\{G\}$-távolságán a

$$\|w\|_G = \min\{|w - G_n| : n \geq 0\}$$

minimumot értjük. A fentiek inspirálták az olyan pozitív $a < b < c$ egészek tanulmányozását, melyekre $\|ab\|_G$, $\|ac\|_G$ and $\|bc\|_G$ mindegyike kicsi. Például a Fibonacci sorozatra [10]-ben megmutattuk, hogy

$$\max\{\|ab\|_F, \|ac\|_F, \|bc\|_F\} > \exp(0.034\sqrt{\log c}).$$

Ebből következik, hogy ha $\max\{\|ab\|_F, \|ac\|_F, \|bc\|_F\} \leq 2$, akkor $c \leq \exp(415.7)$, és a legnagyobb ilyen c az $(1, 11, 235)$ hármasban fordul elő a mindösszesen 222 megoldás közül. A Balansz számokra $\{B_n\}$ sorozatára beláttuk [2], hogy csak $(a, b, c) = (1, 34, 1188)$ ad pontosan 1 $\{B\}$-távolságú ab, ac és bc hármast. További kérdés, hogy milyen becslést lehet adni azon (a, b, c) hármasok számosságára, melyekre az $\|ab\|_G$, $\|ac\|_G$, $\|bc\|_G$ távolságok nem nagyobbak egy előre megadott korlátnál. Vezessük be az

$$s(x) = \#\{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : 1 \leq a < b < c,\ \max\{\|ab\|_G, \|ac\|_G, \|bc\|_G\} \leq x\}$$

függvényt, melynek a viselkedését [11]-ben a Fibonacci sorozatra vizsgáltuk. Megmutattuk, hogy ha $x \to \infty$ akkor $x^{3/2} \ll s(x) \leq x^{2+o(1)}$, továbbá igazoltuk, hogy $s(0) = 0$, $s(1) = 16$, $s(2) = 49$.

E. $\mathbf{s_1 = p(a, b)}$, $\mathbf{s_2 = p(a, c)}$, $\mathbf{s_3 = p(a, d)}$, $\mathbf{s_4 = p(b, c)}$, $\mathbf{s_5 = p(b, d)}$, $\mathbf{s_6 = p(c, d)}$, $\mathbf{p(X_1, X_2) = X_1X_2 + 1}$

Ismét a diofantikus szám m-esek kérdéskörének egy változatát elemeztük, most a négyzetszámok helyett S-egységeket vizsgálva. Tekintsük a (4) egyenletrendszert tetszőleges számú, de véges sok prímet tartalmazó S halmazra. Ehhez kapcsolódik Győry, Sárközy és Stewart [32] egy sejtése, melyet később Corvaja és Zannier [26], valamint tőlük függetlenül Hernandez és Luca [34] igazoltak. A sejtés a következőt állította: ha $a < b < c$ pozitív egészekre $c \to \infty$, akkor $(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)$ legnagyobb prímfaktora is a végtelenhez tart. Eszerint rögzített S esetén csak véges sok S-diofantikus hármas (következésképpen négyes) lehet.

Tételezzük fel, hogy $|S| = 2$. Az általunk megfogalmazott sejtést, miszerint nincsenek olyan p és q prímek melyekre létezne $\{p, q\}$-diofantikus négyes, végtelen sok, bizonyos technikai feltételeknek eleget tevő p és q prímekre sikerült igazolni [16], másrészt az összes olyan p és q prímszámokra, melyek 4-gyel vett osztási maradéka 3 [17]. A pontos állítások a következők.

15. tétel. *(Szalay – Ziegler, 2013, [16].) Legyen $p < q$ két különböző prím, $S = \{p, q\}$, és tegyük fel, hogy*

$$p^2 \nmid q^{\mathrm{ord}_p(q)} - 1, \qquad q^2 \nmid p^{\mathrm{ord}_q(p)} - 1.$$

Tegyük fel továbbá, hogy valamely $\xi > 1$ valós számra $q < p^\xi$ teljesül.

Ilyen feltételek mellett létezik olyan $C = C(\xi)$ konstans, hogy bármely $p, q > C$ prímek esetén nincs S-diofantikus négyes. A C konstans értékét a

$$C = \Psi(9; 2.142 \cdot 10^{22}\xi^3)$$

egyenlőség határozza meg, ahol $\Psi(k; x)$ az

$$x = \frac{y}{(\log y)^k}$$

egyenlet legnagyobb $y > 0$ valós megoldást jelöli.

Például $\xi = 2$ mellett $C = C(2) = 1.023 \cdot 10^{41}$ adódik.

Belátható, hogy a tétel technikai feltételeit, különös tekintettel a rendekre vonatkozó előírásokra, végtelen sok p és q prím teljesíti. Ebből következik, hogy a tétel értelmében végtelen sok $S = \{p, q\}$ halmazra nincs S-diofantikus négyes.

16. tétel. *(Szalay – Ziegler, 2013, [17].) Ha a p és q különböző prímekre $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$ teljesül, akkor nem létezik $\{p, q\}$-diofantikus négyes.*

Megjegyezzük, hogy a 16. tétellel analóg állítás igaz, ha abban a páratlan p prím helyett 2-t veszünk és meghagyjuk a q-ra vonatkozó előírást. Ezt az eredményt publikálás nyújtottuk be [18], ahol még azt is beláttuk, hogy nem létezik diofantikus négyes a $\{p, q\}$ halmazra ha $p = 2$ és $q < 10^9$, illetve függetlenül p és q maradékától modulo 4, $p < q < 10^5$ esetén sem.

Hivatkozások

IV. A disszertáció témakörében készült saját publikációk jegyzéke

[1] Alp, M. – Irmak, N. – Szalay, L., Balancing diophantine triples, Acta Univ. Sapientiae, **4** (2012), 11-19.

[2] Alp, M. – Irmak, N. – Szalay, L., Balancing diophantine triples with distance 1, közlésre elfogadva: Period. Math. Hung.

[3] Fuchs, C. – Luca, F. – Szalay, L., Diophantine triples with values in binary recurrences, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5** Vol. VII (2008), 579-608.

[4] Hajdu, L. – Szalay, L., On the diophantine equations $(2^n-1)(6^n-1)=x^2$ and $(a^n-1)(a^{kn}-1)=x^2$, Period. Math. Hung., **40** (2000), 141-145.

[5] Irmak, N., – Szalay, L., Diophantine triples and reduced quadruples with the Lucas sequence of recurrence $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$, közlésre elfogadva: Glas. Mat.

[6] Lan, L. – Szalay, L., On the exponential diophantine equation $(a^n-1)(b^n-1)=x^2$, Publ. Math. Debrecen, **77** (2010), 465-470.

[7] Luca, F. – Szalay, L., Fibonacci numbers of the form $p^a \pm p^b + 1$, Fibonacci Q., **45** (2007), 98-103.

[8] Luca, F. – Szalay, L., Fibonacci diophantine triples, Glas. Mat., **43 (63)** (2008), 253-264.

[9] Luca, F. – Szalay, L., Lucas diophantine triples, Integers, **9** (2009), 441-457.

[10] Luca, F. – Szalay, L., On the Fibonacci distances of ab, ac and bc, Annal. Math. Inf., **41** (2013), 137-163. (Proceedings of the 15^{th} International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications).

[11] Luca, F. – Szalay, L., On the counting function of triples whose pairwise products are close to Fibonacci numbers, Fibonacci Q., **51** (2013), 228-232.

[12] Szalay, L., On the diophantine equation $(2^n-1)(3^n-1)=x^2$, Publ. Math. Debrecen, **57** (2000), 1-9.

[13] Szalay, L., Some polynomial values in binary recurrences, Rev. Col. Math., **35** (2001), 99-106.

[14] Szalay, L., The equation $2^N \pm 2^M \pm 2^L = z^2$, Indag. Mathem., **13** (2002), 131-142.

[15] Szalay, L., On the resolution of the equations $U_n = \binom{x}{3}$ and $V_n = \binom{x}{3}$, Fibonacci Q., **40** (2002), 9-12.

[16] Szalay L. – Ziegler, V., On an S-unit variant of diophantine m-tuples, Publ. Math. Debrecen, **83** (2013), 97-121.

[17] Szalay L. – Ziegler, V., S-Diophantine quadruples with two primes congruent to 3 modulo 4, Integers, **13** (2013), A80.

[18] Szalay L. – Ziegler, V., S-Diophantine quadruples with $S = \{2, q\}$, (közlésre benyújtva: Int. J. Number Theory).

V. A disszertáció témájához kötődő hivatkozások

[19] Arenas-Carmona, L. – Berend, D. – Bergelson, V., Ledrappier's system is almost mixing of all orders, Ergodic Theory Dynam. Syst., **28** (2008), 339-365.

[20] Beukers, F., On the generalized Ramanujan-Nagell equation I., Acta Arithm., **38** (1981), 389-410.

[21] Bennett, M. A. – Bugeaud, Y. – Mignotte, M., Perfect powers with few binary digits and related diophantine problems, II., Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **153 (3)** (2012), 525-540.

[22] Bennett, M. A., Perfect powers with few ternary digits, Integers, **12** (2012), 1159-1166.

[23] Catalan, E., Note extraite d'une lettre adressée á l'éditeur, J. Reine Angew. Math., **27** (1944), 192.

[24] Chao Ko, On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$, Sci. Sinica (Notes), **14** (1965), 457-460.

[25] Cohn, J. H. E., The Diophantine equation $(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$, Period. Math. Hung., **44** (2002), 169-175.

[26] Corvaja, P. – Zannier, U., On the greatest prime factor of $(ab + 1)(ac + 1)$, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 1705-1709.

[27] Fuchs, C., Polynomial-exponential equations involving multi-recurrences, Studia Sci. Math. Hung., **46** (2009), 377-398.

[28] Ge, Jian, On the exponential Diophantine equation $(a^n-1)(b^n-1) = x^2$, J. Xi'an Shioyu Univ. (Nat. Sci.), **27** (2012), 106-107.

[29] Gerono, C. G., Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l' équation $x^m = y^n + 1$, Nouv. Ann. Math. (2), **9** (1870), 469-471; **10** (1871), 204-206.

[30] Guo, Xiaoyan, A note on the diophantine equation $(a^n-1)(b^n-1)=x^2$, Period. Math. Hung., **66** (2013), 87-93.

[31] Guy, R. K., Unsolved Problems in Number Theory, Third Edition, Springer Verlag, 2004, (p. 251).

[32] Győry, K. – Sárközy, A. – Stewart, C. L., On the number of prime factors of integers of the form $ab+1$, Acta Artihm., **74** (1996), 365-385.

[33] He, Guangrong, A note on the exponential Diophantine equation $(a^m-1)(b^n-1)=x^2$, Pure Appl. Math., **27** (2011), 581-585.

[34] Hernandez, S. – Luca, F., On the largest prime factor of $(ab+1)(ac+1)(bc+1)$, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), **9** (2003), 235-244.

[35] Jeśmanowicz, L., Some remarks on Pythagorean numbers (in Polish), Wiadom. Mat., **1** (1955/1956), 196-202.

[36] Jiang, Ziguo – Cao, Xingbing, On the solution to Diophantine equation $[(10k_1+2)^n-1][(10k_2+5)^n-1]=x^2$, J. Aba Teachers Coll., **24** (2007), 124-125.

[37] Kovács, T., Combinatorial numbers in binary recurrences, Period. Math. Hung., **58** (2009), 83-98.

[38] Kovács, T., Combinatorial Diophantine Equations, PhD. thesis, Debrecen, 2011.

[39] Le, Maohua, The exponential diophantine equation $p^a-p^b+p^c=z^2$, J. Shaoyang Univ. (Sciences and Technology), **3** (2006), 1-2.

[40] Le, Maohua, The exponential Diophantine equation $p^a-p^b-p^c=z^2$, J. Foshan Univ., Nat. Sci., **25** (2007), 11-12.

[41] Le, Maohua, The exponential Diophantine equation $p^a+p^b-p^c=z^2$, J. Hubai Univ. Nat., **27** (2009), (oldalszám ismeretlen).

[42] Le, Maohua, A note on the exponential Diophantine equation $(2^n-1)(b^n-1)=x^2$, Publ. Math. Debrecen, **74** (2009), 403-405.

[43] Le, Maohua, On the Diophantine equation $(2^n-1)((6k)^n-1)=x^2$, J. Zhoukou Norm. Univ., **26** (2009), 1-2.

[44] Le, Maohua, Conditions for the solubility of the Diophantine equation $(a^n-1)((a+1)^n-1)=x^2$, J. Zhanjiang Norm. Coll., **31** (2010), (oldalszám ismeretlen).

[45] Lebesque, M., Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^m=y^2+1$, Nouv. Ann. Math. (1), **9** (1850), 178-181.

[46] Li, Zhaojun – Tang, Min, On the Diophantine equation $(2^n-1)(a^n-1)=x^2$, J. Anhui Norm. Univ., **33** (2010), 515-517.

[47] Li, Zhaojun – Tang Min, A remark on a paper of Luca and Walsh, Integers, **11** (2011), 827-832.

[48] Li, Zhaojun – Jin, Qiaoxiao, On the Diophantine equation $(9^n-1)(19^n-1)=x^2$, J. Sci. Teachers' Coll. Univ., **30** (2010), (oldalszám ismeretlen).

[49] Liang, Ming, On the Diophantine equation $(a^n-1)((a+1)^n-1)=x^2$, J. Math., **32** (2012), 511-514.

[50] Ljunggren, W., Some theorems on indeterminate equations of the form $(x^n-1)/(x-1)=y^q$ (Norvegian), Norsk Mat. Tidsskr., **25** (1943), 17-20.

[51] Luca, F., On the diophantine equation $p^{x_1}-p^{x_2}=q^{y_1}-q^{y_2}$, Indag. Mathem., **14** (2003), 207-222.

[52] Luca, F., The diophantine equation $x^2=p^a\pm p^b+1$, Acta Arithm., **112** (2004), 87-101.

[53] Luca, F., Arithmetic properties of positive integers with fixed digit sum, Rev. Mat. Iberoam., **22** (2006), 369-412.

[54] Luca, F. – Walsh, P. G., The product of like-indexed terms in binary recurrences, J. Number Theory, **96** (2002), 152-173.

[55] McDaniel, W. L., Square Lehmer numbers, Colloq. Math., **66** (1993), 85-93.

[56] Mihăilescu, P., Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, J. Reine Angew. Math., **572** (2004), 167-195.

[57] Mordell, L. J., On the integer solutions of the equation $ey^2=ax^3+bx^2+cx+d$, Proc. London Math. Soc., **21** (1923), 415-419.

[58] Nagell, T., The Diophantine equation $x^2+7=2^n$, Norsk Mat. Tidsskr., **30** (1948), 62-64; Ark. F. Mat., **4** (1960), 185-187.

[59] Nemes, I. – Pethő, A., Polynomial values in linear recurrences I., Publ. Math. Debrecen, **31** (1984), 229-233.

[60] Pethő, A., Perfect powers in second order linear recurrences, J. Number Theory, **15** (1982), 5-13.

[61] Pethő, A., Diophantine properties of linear recursive sequences II., Acta Math. Acad. Paed. Nyházi., **17** (2001), 81-96.

[62] Ramanujan, S., Collected papers, Cambridge Univ. Press, 1927, p. 327.

[63] Rotkiewicz, A. – Złotokowski, W., On the Diophantine equation $1 + p^{\alpha_1} + p^{\alpha_1} + \cdots + p^{\alpha_k} = y^2$, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 51 Number Theory, Vol II., Eds.: Győry/Halász, North-Holland Publishing Company, Amsterdam - Oxford - New York, 1990, 917-937.

[64] Scott, R. – Styre, R., On the generalized Pillai equation $\pm a^x \pm b^y = c$, J. Number Theory, **118** (2006), 236-265.

[65] Scott, R., Elementary treatment of $p^x \pm p^y + 1 = x^2$, ArXiv:math/0608796v1 (2006).

[66] Scott, R. The equation $|p^x \pm q^y| = c$ in nonnegative x, y, ArXiv:1112.4548v1 (2011).

[67] Shorey, T. N. – Stewart, C. L., On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrences, Math. Scand., **52** (1983), 24-36.

[68] Stewart, C. L. – Tijdeman, R., On the greatest prime factor of $(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)$, Acta Arith., **79** (1997), 93-101.

[69] Tang, Min, A note on the exponential diophantine equation $(a^m - 1)(b^n - 1) = x^2$, J. Math. Res. Exposition, **31** (2011) 1064-1066.

[70] Tang, Bo – Yang, Shichun, Solutions on the Diophantine equation $((10k_1 + 2)^n - 1)((10k_2 + 3)^n - 1) = x^2$, Guangxi Sci., **14** (2007), (oldalszám ismeretlen).

[71] Tengely, Sz., On the Diophantine equation $L_n = \binom{x}{5}$, Publ. Math. Debrecen, **79** (2011), 749-758.

[72] Yang, Shichun – Wu, Wenquan – Zheng, Hui, On the solutions of the Diophantine equation $(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$, J. Southwest Univ. Nationalities (Nat. Sci. Ed.), **37** (2011), 31-34.

[73] Yuan, P. – Zhang, Z., On the diophantine equation $(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$, Publ. Math. Debrecen, **80** (2012), 327-331.

[74] Yuan, Wei, On the solutions of Diophantine equation $[(37k_1 + 6)^n - 1][(37k_2 + 31)^n - 1] = x^2$, China Sci. Technol. Inform., **9** (2009), 5.

[75] Walsh, P. G., On the diophantine equations of the form $(x^n - 1)(y^n - 1) = z^2$, Tatra Mt. Math. Publ., **20** (2000), 87-89.

[76] Ward, H. N., Block designs with SDP parameters, Electron. J. Combin., **19** (2012), Research Paper P11.

[77] De Weger, B., The weighted sum of two S-units being a square, Indag. Mathem., **1** (1990), 243-262.

[78] Zannier, U., Diophantine equations with linear recurrences. An overwiev of some recent progress, J. Theo. Nombres Bordeaux, **17** (2005), 423-435. (p. 434.)