

Bírálati vélemény Szalay László "Polinomiális-exponenciális
diofantikus egyenletek és egyenletrendszerek" című MTA
doktori rövid értekezéséről

A pályázó két fejezetbe csoportosítja új tudományos eredményeinek leírását. Az első fejezetben polinomiális-exponenciális diofantikus egyenletekkel foglalkozik. Vizsgálja a

$$\pm 2^{n_1} \pm 2^{n_2} \pm \dots \pm 2^{n_k} = x^2$$

egyenletet, a $k = 3$ esetben meghatározza az összes megoldást. Eredménye azért jelentős, mert korábban hasonló problémáknál legfeljebb kéttagú összegekre tudták az összes megoldást megadni. Egy sokat vizsgált témakörhöz, a rekurzív sorozatokban előforduló négyzetszámokhoz is kapcsolódik a következő egyenlet. Legyenek a, b rögzített pozitív egészek, és tekintsük az

$$(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$$

egyenletet ismeretlen n és x egészekben. Szalay, részben szerzőtársakkal, több eredményt nyer különböző a, b egészekre.

Az első fejezet másodrendű rekurzív sorozatokban előforduló polinomiális értékek vizsgálatával zárul, általános végességi tételek mellett numerikus eredményeket is tartalmaz.

A második fejezet a pályázó diofantikus halmazokra vonatkozó eredményeit tartalmazza. Pozitív egész számok (vagy pozitív racionális számok) egy $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ halmazát diofantikus szám m -esnek nevezzük, ha bármely $1 \leq i < j \leq m$ esetén $a_i a_j + 1$ egész szám négyzete (vagy racionális szám négyzete). Az első racionális számnégyest Diofantosz adta meg:

$$\left\{ \frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16} \right\}.$$

Fermat jegyezte meg az $\{1, 3, 8, 120\}$ halmazt, példát mutatva egész számokból álló diofantikus négyesre. Szalay, társszerzőkkel közösen, a diofantikus számhalmazok két változatát tárgyalja. Az első esetben a négyzetszámok helyett egy adott másodrendű rekurzív tagjait vizsgálja, a második esetben pedig adott S -egységekkel helyettesíti a négyzetszámokat. Legyen $\{G_n\}$ egy

nem degenerált, bináris rekurzív sorozat pozitív diszkriminánssal. Ekkor az első változat az

$$ab + 1 = G_x,$$

$$ac + 1 = G_y,$$

$$bc + 1 = G_z$$

diofantikus egyenletrendszer vizsgálatára vezet, ahol $1 \leq a < b < c$ és x, y, z nem negatív egész ismeretlenek. Az Altér-tétel segítségével véghességi állítást nyert a megoldásokra, továbbá abban a speciális esetben, amikor $\{G_n\}$ a Fibonacci sorozat, bebizonyította, hogy az előző egyenletrendszernek nincs megoldása.

Legyen S a $p_1, p_2, \dots, p_r$ prímek halmaza. S -egységnek nevezzük minden

$$s = p_1^{\tau_1} p_2^{\tau_2} \cdots p_r^{\tau_r}$$

alakú racionális számot, ahol a τ_i kitevők racionális egészek. Az $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ pozitív egészekből álló halmazt S -diofantikus szám m -esnek hívjuk, ha

$$a_i a_j + 1 = s_{i,j}$$

S -egység bármely $1 \leq i < j \leq m$ mellett. Részletesen vizsgálta azt az esetet, amikor az S halmaz számossága kettő. Ekkor Zieglerrel közösen azt sejtik, hogy nincsenek olyan p és q prímek, amelyekre létezne $\{p, q\}$ -diofantikus négyes. Több más eredmény mellett a sejtést is sikerült belátni, ha p és q is $4k + 3$ alakú prím.

A fentiek alapján elmondható, hogy Szalay alkotó módon használja a modern diofantikus számelmélet mély eszközeit, új problémákat vet fel, és képes azokat megoldani. A doktori munka első és második fejezetében felsorolt eredményeket új tudományos eredményeknek fogadom el. A doktori munka tudományos eredményeit elegendőnek tartom az MTA doktora cím megszerzéséhez, a nyilvános védés kitűzését javaslom.

Debrecen, 2015. március 15.



Pintér Ákos