Válasz Dr. Hajdu Lajos bírálatára

Mindenek előtt szeretném megköszönni Hajdu Lajosnak a benyújtott MTA doktori értekezésem részletes elemzését, és pályázatom pozitív megítélését. A bíráló az alábbi kérdést tette fel a bírálatában:

„*Lát-e a pályázó lehetőséget arra, hogy a τ leképezéshez hasonló leképezések más rokon jellegű problémák, egyenletek esetén is használhatók lehetnek?*"

A $2^n + 2^m + 1 = x^2$ egyenlet megoldásában kulcsszerepet játszott a τ-val jelölt transzformáció, amely az egyenlet egyik megoldását egy tőle különböző megoldásba vitte át. A leképezés tulajdonságai lehetővé tették, hogy a kérdéses egyenlet vizsálata – kissé szokatlan módon – egy két egyenletből álló egyenletrendszer vizsgálatával vált helyettesíthetővé.

Úgy gondolom, hogy vannak további polinomiális-exponenciális diofantikus egyenletek, melyek kezelhetők, vagy amelyeknél felvethető a τ transzformáció alkalmas változatának használata. Három problémát említek meg, melyek közül az elsőt részletesebben kifejtem.

1. Tekintsük a

$$2^n - 3 \cdot 2^m + 9 = x^2 \tag{1}$$

egyenletet, melynek nyilvánvalóan végtelen sok nemnegatív egész megoldása van:

$$(n, m, x) = (2t, t+1, |2^t - 3|), \qquad t \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Emellett még $(n, m, x) = (6, 3, 7)$ is kielégíti az egyenletet (tehát most is létezik egy sporadikus megoldás), ezzel ténylegesen megadtuk a megoldások teljes halmazát. Vázlatosan tekintsük át ennek igazolását.

Nyilván nem okoz gondot (1) vizsgálata $n \leq m$ esetén, ezért feltehetjük, hogy $n > m$. Kis m értékekre (1) most is könnyen kezelhető Beukers $2^k + D = u^2$ egyenletre vonatkozó korlátjával. A továbbiakban legyen $m \geq 3$. Vegyük észre, hogy az egyenletet modulo 3 tekintve a kvadratikus maradékok miatt n mindenképpen páros. Igaz továbbá, hogy x páratlan. Az aktuális τ transzformáció a

$$2^{n-m} - 3 = \frac{x^2 - 9}{2^m}$$

egyenlőség négyzetre emeléséből olvasható ki, és ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint a disszertációban szereplő cikk esetén. Követve annak vezérfonalát, belátható, hogy a

$$\begin{aligned} 2^n - 3 \cdot 2^m + 9 &= x^2, \\ 2^{n+d} - 3 \cdot 2^{m+d} + 9 &= y^2 \end{aligned} \tag{3}$$

rendszerből származó

$$2^d(x^2 - 9) = y^2 - 9$$

egyenletnek páratlan x, páratlan y, és $d > 0$ egészekben egyetlen megoldása létezik páros d esetén, mégpedig $(x, y, d) = (7, 13, 2)$, amely ráadásul nem jelenik meg (2)-ben. Valóban, ebből származik a (3) egyenletendszer

$$(n, m, d) = (6, 3, 2) \tag{4}$$

megoldása. Itt eltérés van a referencia cikktől, ahol nem volt ilyesfajta megoldás. Azaz most elvileg előfordulhat, hogy három különböző megoldás is ugyanabba a megoldásba megy át τ hatására, köztük pontosan egy helyen páros (pontosabban 2) a kitevők különbsége. Figyelembe véve (4)-et, a hármas

$$\begin{aligned} 2^n - 3 \cdot 2^m + 9 &= x^2, \\ 2^{n_1} - 3 \cdot 2^{m_1} + 9 &= y^2, \\ 2^{n_2} - 3 \cdot 2^{m_2} + 9 &= z^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszerben szereplő kitevőkre vonatkozó lehetőségek a

	I.	II.	III.
(n, m)	(n, m)	(n, m)	(n, m)
(n_1, m_1)	$(n + 2, m + 2)$	$(n + d, m + d)$	$(n + 1, m + 1)$
(n_2, m_2)	$(n + 2 + d, m + 2 + d)$	$(n + d + 2, m + d + 2)$	$(n + 2, m + 2)$

táblázatban vannak felsorolva. Hamar kiderült, hogy I., II. és III. egyike sem ad a feltételeknek megfelelő megoldást. Ezzel az egy adott megoldásba menő három különböző megoldás elvi lehetőségét elvetjük.

Tehát páratlan d mellett

$$\begin{aligned} 2^n - 3 \cdot 2^m + 9 &= x^2, \\ 2^{n+d} - 3 \cdot 2^{m+d} + 9 &= y^2 \end{aligned}$$

valamelyik egyenletét a végtelen megoldáshalmaz egy megoldása kell, hogy kielégítse. Az $n = 2(m - 1)$ és $n + d = 2(m + d - 1)$ esetek mindegyike az $n = 2m + d - 2$ feltételt adja a kisebb megoldás nagyobb kitevőjére. Ez ellentmondásra vezet, hiszen most d páratlan, az n kitevőnek pedig párosnak kellene lennie.

Bizonyos esetekben – analóg módon – kezelhetőnek tűnik a $2^n - \alpha \cdot 2^m + \alpha^2 = x^2$ egyenlet is adott pozitív, páratlan α mellett.

2. Hasonlóan vizsgálható a

$$2^n + 3 \cdot 2^m + 9 = x^2 \tag{5}$$

egyenlet, ha $n \geq m$ teljesül. Ekkor igazolható, hogy az $(n, m, x) = (2t, t + 1, 2^t + 3)$ megoldáscsalád mellett léteznek még az

$$(n, m, x) = (2, 0, 4),\ (6, 5, 13),\ (8, 3, 17)$$

egyedi megoldások. (5) esetén a gondot az $n < m$ tényleges lehetőség okozza, melynek kezelése egyenlőre nem ismert. Numerikus vizsgálatok azt sejttetik, hogy ezen az ágon csak az

$$(n, m, x) = (4, 5, 11),\ (6, 8, 29),\ (6, 13, 157)$$

megoldások fordulnak elő.

3. A τ transzformáció alkalmazására van esély a

$$3^n + 3^m + 3^\ell + 1 = x^3, \qquad (n \geq m \geq \ell \geq 0)$$

egyenlet vizsgálatánál is, hiszen

$$\left(3^{n-m} + 1\right)^3 = \left(\frac{x^3 - 1 - 3^\ell}{3^m}\right)^3$$

generálja a $\tau(n, m, \ell) = (3n - 3m, 2n - 2m + 1, n - m + 1)$ transzformációt. Sajnos a felmerülő technikai problémák egyenlőre túl sok nehézséget okoznak a siker eléréséhez.

Összefoglalva, látok néhány további lehetőséget a τ transzformáció alkalmazására.

Szalay László