

Bírálóí vélemény Szalay László
”Polinomiális-exponenciális diofantikus egyenletek
és egyenletrendszerek” c. doktori munkájáról

Biró András, 2015. március

Az értekezés olyan diofantikus egyenletekkel foglalkozik, amelyekben az egész ismeretleneknek polinomiális és exponenciális függvényei is szerepelnek. Ennek az igen kiterjedt és klasszikus gyökerekkel is rendelkező területnek öt konkrét résztémájával foglalkozik a jelölt. Az első téma a nevezetes Ramanujan-Nagell egyenlet általánosítása. Ramanujan sejtését, miszerint a $2^k - 7 = x^2$ egyenletnek $k > 15$ esetén nincs pozitív egész megoldása, Nagell igazolta 1960-ban. A 7 helyett más rögzített egészt írva kapjuk az általánosított Ramanujan-Nagell egyenleteket, ilyenekkel sokan foglalkoztak. A jelölt végtelen sok ilyen egyenletet megold.

A második témát (az $(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2$ egyenlet vizsgálatát adott a, b paraméterek mellett) a jelölt vetette fel. Ez azonban szorosan kapcsolódott korábbi kutatásokhoz, ugyanis sokat tanulmányozták korábban, hogy rekurzív sorozatokban találhatók-e teljes hatványok, és $(a^n - 1)(b^n - 1)$ egy negyedrendű rekurziót elégít ki.

A harmadik téma: adott másodrendű rekurzív sorozat és adott harmadfokú polinom esetén a polinom e sorozatba eső, egész helyeken felvett értékeinek a meghatározása.

A negyedik téma egy adott másodrendű rekurzív sorozatra vonatkozó ”diofantikus hármasok” megtalálása (azaz olyan a, b, c egész számhármaské, melyekre $ab + 1$, $ac + 1$ és $bc + 1$ is az adott sorozat eleme).

Az ötödik téma ún. (p, q) -diofantikus négyesek vizsgálata adott p, q prímek esetén (azaz olyan a, b, c, d egész számnégyeseké, melyekre $ab + 1$, $ac + 1$, $ad + 1$, $bc + 1$, $bd + 1$, $cd + 1$ egyikének sincs p -től és q -tól különböző prímosztója).

Az első témában a jelölt legfontosabb eredménye az 1. Tétel, azaz a $2^n + 2^m + 1 = x^2$ egyenlet megoldása. A bizonyítás nagyon szellemes elemi érvelésen és Beukers egy diofantikus approximációval kapcsolatos tételének az alkalmazásán alapul.

A második témában a jelölt először az $a = 2$, $b = 3$ esetet, majd később végtelen sok egyéb (a, b) pár esetét is tisztázza, jórészt elemi eszközökkel. Az eredmények jelentőségét az adja, hogy korábban többnyire csak alacsonyabb rendű rekurziók esetét sikerült kezelniük a kutatóknak.

A harmadik témában a jelölt harmadfokú polinomok egy osztályára kidolgozta a megoldás módszerét, egyszerűen visszavezetve a problémát Mordell elliptikus egyenletekre vonatkozó végességi tételére.

A negyedik téma legjelentősebb eredménye a disszertáció 12. Tétele, amely pozitív diszkriminánsú rekurzív sorozatok esetén feltételt ad arra, hogy a sorozat végtelen sok diofantikus hármast tartalmazzon.

Az ötödik témában a jelölt Zieglerrel közösen megfogalmazott sejtése szerint semmilyen p, q esetén sincs (p, q) -diofantikus négyes. Ez a sejtés nyitott marad, de a disszertáció végtelen sok (p, q) párra bizonyítja az állítást.

A negyedik és ötödik téma eredményeihez mély eszközökre (Altér Tétel, egységegyenletek, Baker-módszer) volt szükség.

Személyesen a disszertáció 1. és 12. Tételét tartottam a legérdekesebbnek. Ez utóbbival kapcsolatban két kérdésem is van.

1., Adható végülis szükséges és elégséges feltétel arra, hogy adott G_n bináris rekurzív nem degenerált sorozat (a $D > 0$ esetben) mikor tartalmaz végtelen sok diofantikus hármast?

Az ugyanis világos, hogy a 12. Tétel sokat elmond egy olyan G_n sorozatról, amely végtelen sok diofantikus hármast tartalmaz, de legalábbis explicite nincs kimondva G_n -re vonatkozó szükséges és elégséges feltétel.

2., A $D < 0$ esetben létezik-e valamilyen részeredmény vagy sejtés arra, hogy egy bináris rekurzív sorozat mikor tartalmaz végtelen sok diofantikus hármast?

Összefoglalva: a disszertáció számos jelentős, figyelemre méltó eredményt tartalmaz a diofantikus egyenletekkel kapcsolatban, és ezek eléréséhez elemi ötletekre és mély eszközök alkalmazására egyaránt szükség volt.

Ez alapján a nyilvános védés kitűzését és az MTA doktori cím odaítélését javaslom.

Biró András, az MTA doktora