dc_872_14

Ferromágneses Hiszterézis az Elektromágneses Térszámításban

Írta:

Kuczmann Miklós

a Széchenyi István Egyetem
egyetemi tanára

aki a Magyar Tudományos Akadémia doktora címre pályázik

a

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudományok Osztálya (VI.)
Elektrotechnikai Tudományos Bizottságában

2014. május 31.

Köszönetnyilvánítás

Elsőként köszönetet mondok családomnak, feleségemnek, Líviának, Anna lányomnak és Nándor fiamnak a mindennapos támogatásért, és a megértésért, hogy rengeteg időt töltöttem a számítógép előtt. Köszönöm szüleimnek, hogy lehetővé tették egyetemi tanulmányaim. Ezúton is szeretném megköszönni Iványi Amália professzorasszonynak (Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki és Informatikai Kar, Műszaki Informatika Tanszék), hogy elindított pályámon, és azt a buzdítást és támogatást, ami a jelen dolgozat megírásához is vezetett. Köszönetem fejezem ki Borbély Gábor tanszékvezető docens úrnak, aki támogatta Győrbe jövetelem, és lehetővé tette számomra a nyugodt, elmélyült munkát a Széchenyi István Egyetem Távközlési Tanszékén. Köszönöm az Egyetem vezetésének a kutatásaim során nyújtott támogatást a Kutatási Főirányok pályázatok (15-3002-51 2007-ben, 15-3210-02 2008-ban, 2009-ben és 2010-ben) és a Posztdoktori Kutatási pályázatok (15-3002-57 2007-ben, 15-3210-02 2008-ban) kapcsán. Jelen disszertáció méltó lezárása a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János Kutatási ösztöndíjának (BO/00064/06), amit 2006-ban három évre nyertem el és kiváló minősítéssel zártam, s köszönetem fejezem ki az Országos Tudományos Kutatási Alap posztdoktori támogatásáért (OTKA PD 73242), melynek zárása szintén a 2010-es évben történt. Köszönöm Alexandru Stancu és Laurentiu Stoleriu professzor uraknak a rendszeres konzultációkat, akikkel a kétoldalú kormányközi Tudományos és Technológiai egyezmény (OMFB-00725/2008, RO-46/2007) keretén belül sikerült szakmai kapcsolatot kialakítani. A szombathelyi székhelyű EPCOS TDK Kft. több alkalommal is támogatta munkám, ezt ezúton is szeretném megköszönni. Könyvem megírása során óriási segítséget kaptam Bíró Oszkár professzor úrtól (Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik, Technische Universität Graz, Ausztria), aki sok esetben volt segítségemre az egyes potenciálformalizmusok megértése során, s könyvem bírálójaként nagyban hozzájárult a sikerhez. Köszönöm Kis Péter barátomnak (kutatómérnök, Furukawa Electric Technológiai Intézet Kft.) a konzultációkat, valamint azt, hogy sok esetben együtt dolgoztunk egy-egy problémán. Rengeteget tanultam hallgató és doktorandusz koromban a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Elméleti Villamosságtan Tanszékének munkatársaitól, akiknek az ott eltöltött néhány inspiratív évet tisztelettel köszönöm. Köszönetem fejezem ki azon lelkes hallgatóimnak és kollégáimnak, akik mellettem, velem dolgozva fáradhatatlanul művelik ezt a nem könnyű tudományterületet (név szerint Budai Tamásnak, Csurgai Péter kutatómérnöknek, Friedl Gergelynek, Kovács Gergely tanársegédnek, Marcsa Dániel tanársegédnek, Pólik Zoltán kutatómérnöknek, Prukner Péternek, Unger Tamásnak). Köszönöm Füzi János docens úr (Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki és Informatikai Kar, Műszaki Informatika Tanszék, Központi Fizikai Kutató Intézet, Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet) és Mészáros István docens úr (Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Anyagtudomány és Technológia Tanszék) mérések során nyújtott segítségét és a konzultációkat. Köszönetem

fejezem ki Kovács Ákos és Drotár István kollégáimnak, akik a számítástechnikai háttér mindennapos biztosításával segítették munkámat. Köszönöm a Széchenyi István Egyetem Automatizálási Tanszéke munkaközösségének azt a barátságos légkört, amelyben nyugodtan lehet dolgozni. A Széchenyi István Egyetem Járműipari Kutató Központja által elnyert TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0012 (Hibrid és elektromos járművek fejlesztését megalapozó kutatások) pályázat keretében számos végeselem-technikával kapcsolatos kutatást tudtunk elvégezni. Köszönöm Bokor József, Földesi Péter, Égert János, Iványi Miklós, Keviczky László, Kóczy T. László, Nagy István, Vajda István és Várlaki Péter professzor urak ambicionálását arra, hogy a jelen dolgozatot megírjam. Köszönöm az ArcerolMittal cég támogatását, hogy az M250-35A jelzésű anyagból készült próbatesteket rendelkezésemre bocsájtotta.

dc_872_14

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **1**
1.1. A kutatás előzménye . . . 1
1.2. A kutatás tervezett célkitűzése . . . 2
1.3. A dolgozat felépítése . . . 4

2. Irodalmi áttekintés **5**
2.1. A ferromágneses hiszterézis karakterisztika . . . 5
2.1.1. A fizikai háttér villamosmérnöki megközelítésben . . . 5
2.1.2. A skalár Preisach-modell . . . 7
2.1.3. A dinamikus skalármodell . . . 10
2.1.4. A vektor Preisach-modell . . . 12
2.2. A mágneses hiszterézis karakterisztika mérése . . . 14
2.2.1. A skalár karakterisztika mérése . . . 14
2.2.2. A vektor karakterisztika mérése . . . 16
2.3. Elektrodinamikai problémák analízise numerikus módszerekkel . . . 19
2.3.1. A Maxwell-egyenletek . . . 19
2.3.2. Potenciálformalizmusok . . . 20
2.3.3. A súlyozott maradék elve, a végeselem-módszer . . . 26
2.3.4. A nemlinearitás figyelembe vétele . . . 32

3. A ferromágneses hiszterézis vizsgálata **33**
3.1. A skalár hiszterézis karakterisztika . . . 33
3.1.1. A skalár karakterisztika mérése . . . 33
3.1.2. A statikus modell bemutatása . . . 38
3.1.3. A modell dinamikus kiterjesztése . . . 40
3.1.4. A modell identifikációja . . . 41
3.1.5. A modell verifikációja . . . 41
3.2. A vektor hiszterézis karakterisztika . . . 42
3.2.1. A vektor karakterisztika mérése . . . 42
3.2.2. A statikus modell bemutatása . . . 48
3.2.3. A modell dinamikus kiterjesztése . . . 50
3.2.4. A modell identifikációja . . . 50
3.2.5. A modell verifikációja . . . 54
3.3. A tudományos eredmények összefoglalása . . . 56

4. A hiszterézis karakterisztika illesztése numerikus technikákhoz 58
4.1. A fixpontos technika rövid bemutatása 59
4.2. A polarizációs formula 60
4.3. A polarizációs formula alkalmazása a potenciálformalizmusokban 62
4.3.1. Nemlineáris statikus mágneses tér 62
4.3.2. Nemlineáris örvényáramú tér 63
4.4. A fixpontos iterációs sémák 67
4.4.1. Sémák az inverz hiszterézismodellre építve 67
4.4.2. Sémák a direkt hiszterézismodellre építve 69
4.4.3. A fixpontos iterációs sémák konvergenciája 71
4.5. A tudományos eredmények összefoglalása 71

5. Villamos tervezés hiszterézismodell figyelembevételével 73
5.1. Az áram-vektorpotenciál közelítése élmenti végeselemekkel 74
5.2. Veszteségek vékony lemezben 75
5.3. Háromfázisú transzformátor modellezése 79
5.4. Modellmotor 81
5.5. Vékony lemezekből álló háromdimenziós konfiguráció vizsgálata 82
5.6. A vektor hiszterézis mérésére alkalmas elrendezés numerikus analízise és tervezése 84
5.6.1. A szimulációk fontosabb adatai 85
5.6.2. A szimulációs eredmények bemutatása 86
5.7. A tudományos eredmények összefoglalása 92

6. Az új tudományos eredmények összefoglalása 93

7. Konklúzió 96

A. A mérések során használt eszközök 97
A.1. A mérési adatgyűjtő rendszer 98
A.2. A LabVIEW 99
A.3. A mérést vezérlő program 100
A.4. A mérések során használt egyéb eszközök 102

B. Az izotróp vektormodell identifikációja 105
B.1. Az Everett-függvény diszkretizálása 105
B.2. Az identifikáció első lépése 106
B.3. Az identifikáció második lépése 108

1. fejezet

Bevezető

1.1. A kutatás előzménye

A disszertáció középpontjában a ferromágneses anyagok hiszterézis karakterisztikájának mérése, modellezése és villamosmérnöki tervezésbe történő átültetése áll. A hiszterézis karakterisztikával jellemzett rendszer egy bonyolult nemlineáris és többértékű kapcsolatot realizál a rendszer által modellezett mérnöki objektum bemeneti és kimeneti jele között. Ferromágneses anyagok esetén a mágneses térerősség és a mágneses indukció között fennálló kapcsolatot kell modellezni. A matematikai és a villamosmérnöki, valamint az informatikai alkalmazások szempontjából a modell egy fekete doboz, amelynek bemenete és kimenete között a kapcsolatot a hiszterézismodell írja le. A mágneses anyagok viselkedésének leírása ugyanis többféleképp is megtehető. A fizikusok számára érdekes lehet az anyag belsejében lejátszódó mikromágneses hatások vizsgálata, azok modellezése; matematikailag a hiszterézis egy bonyolult nemlineáris operátor; villamosmérnöki oldalról pedig egy eszköz, amellyel a bonyolult bemenet-kimenet kapcsolat leírható, s a modell tervező rendszerekhez illeszthető. A dolgozatban ezen utóbbi szempont szerint foglalkozom a hiszterézis modellezésével.

A modell felépítéséhez, identifikációjához és validációjához elengedhetetlen a jelenség laboratóriumi körülmények között történő vizsgálata. A számomra fontos makroszkopikus kapcsolat a mágneses térerősség és a mágneses indukció között számos jól ismert eljárással vizsgálható. A skalár hiszterézis karakterisztika felvételére egyik elterjedten alkalmazott mérési eljárás toroid alakú tekercset alkalmaz. Munkám során én is a toroid transzformátort alkalmaztam. A szabványban (IEC 404-2) is rögzített Epstein-keret is a skalár karakterisztika vizsgálatára alkalmas. Skalár karakterisztika esetén a feltételezés az, hogy a mágneses térerősség és a mágneses indukció vektorok egymással párhuzamosak. Ez azonban számos, gyakorlatban is előforduló elrendezés esetén nem igaz. A legtöbb, ipari körülmények között előforduló probléma bonyolult alakzatokat tartalmaz. Például a villamos gépek hornyaiban a geometria miatt a mágneses térerősség és a mágneses indukció között nagyon bonyolult kapcsolat áll fenn, az E-I lemezekből felépített transzformátorok sarkokat tartalmaznak, ahol a kialakuló mágneses tér iránya megváltozik követve a vasmag alakját. Minden elrendezés alapvetően háromdimenziós, ahol a mágneses tér alakulása nehezen számítható. Ezen okok vezettek el az ún. vektoriális hiszterézis karakterisztika méréséhez és modellezéséhez. Az utóbbi egy-két évtizedben számos mérési elrendezés készült a jelenség vizsgálatára a legkülönfélébb alakú próbatestekkel és mérési technikákkal. A mérési eljárások közül

egyet én is megépítettem, melynek tervezése és analízise során a korszerű tervező technikákat alkalmaztam, s amelyet a dolgozatban részletesen bemutatok.

A hiszterézis jelenségének modellezése több módszerrel is végezhető. A Stoner–Wohlfarth-modell egy mágneses részecske viselkedését írja le és a részecskére felírható energia minimalizálásából indul el. Alkalmas a skalár jelenség és a vektoriális viselkedés modellezésére is, és a mágneses részecskék sokaságából felépített rendszer bonyolultabb folyamatok leírására is használható. A Jiles–Atherton-modell egy paramágneses momentum viselkedésének leírásából indult el, s számos módosítás után alkalmassá tették a ferromágneses hiszterézis modellezésére is. A Preisach-féle hiszterézismodell talán a legelterjedtebben alkalmazott technika a villamosmérnöki alkalmazások világában, magam is ezen modellt használom a munkám során. Ezeken kívül számos egyszerűbb modell is létezik, mint például a Rayleigh-modell, a Frölich-modell, a Duhem-modell, alkalmaznak egyszerű függvényekből felépített modelleket is. Az alkalmazás, az elérni kívánt pontosság, az identifikáció, a számítási sebesség, mind befolyásolja a megfelelő modell kiválasztását.

A villamosmérnöki gyakorlatban a numerikus térszámítást igénylő problémák megoldása, a különféle eszközök tervezése és analízise a Maxwell-egyenletek valamely numerikus módszerrel történő megoldásán alapszanak. A Maxwell-egyenletek rendszere az elektromágneses tér változóira felírt parciális differenciálegyenletek, vagy integrálegyenletek, amelyek minden elektromágneses térszámítást igénylő feladat megoldására alkalmasak. Potenciálok bevezetésével kevesebb ismeretlent tartalmazó parciális differenciálegyenletek formájában írhatók fel a megoldandó egyenletek. A számos numerikus technika közül a dolgozatban a végeselem-módszert alkalmazom, melynek lényege abban áll, hogy a vizsgált tartományt egyszerű alakzatokra bontjuk fel, amelyekre egyszerű egyenletek írhatók fel, végül ezen egyszerű egyenletek összesítésével a probléma egy közelítő megoldása áll elő. A végeselem-módszer a súlyozott maradék elvének gyenge alakjára épül, s a Galjorkin-eljárást alkalmazza. A végeselem-módszer a diszkretizálás eredményeképp a parciális differenciálegyenleteket algebrai egyenletek rendszerévé transzformálja. Amennyiben a konstitúciós reláció nemlineáris, ahogy az a hiszterézis karakterisztika figyelembe vételekor is fennáll, úgy a nemlineáris parciális differenciálegyenleteket alkalmas, konvergens nemlineáris egyenletrendszer-megoldóval kell összekapcsolni. A dolgozatban a fixpontos technikával foglalkozom.

1.2. A kutatás tervezett célkitűzése

Munkám során egy könnyen alkalmazható, egyszerűen identifikálható, gyors és pontos hiszterézismodell megalkotása az egyik cél, amihez eddigi tapasztalataim alapján a Preisach-féle hiszterézismodell a legalkalmasabb. Villamosmérnöki alkalmazási szempontból nagyon lényeges a gyors és pontos működés. Előbbi megcélozható a lépcsősgörbe alkalmas tárolásával és kezelésével, amely párhuzamos működést is lehetővé kell, hogy tegyen, ugyanis arra kell gondolnom, hogy a modellt numerikus térszimulációba is illeszteni kívánom. Végeselem-módszer esetén a vizsgált geometria meghatározott pontjaiban nagyszámú hiszterézismodell futtatására van szükség, és emiatt az implementálás rendkívül lényeges. A sebesség úgy is növelhető, hogy az Everett-függvényt alkalmazom a modell kimenetének számítása során. A pontos modell a megfelelő identifikációval elérhető. Identifikációhoz a koncentrikus görbékből kiindulva az Everett-függvényt célszerű alkalmazni. Mindez természetesen a vektoriális hiszterézismodell esetében is előnyös lesz,

hiszen a vektormodell kimenetét számos skalármodell szuperpozíciója adja. A numerikus térszimulációba történő illesztés szempontjából nagyon fontosnak ítélem, hogy a modell változtatás nélkül alkalmas legyen a direkt karakterisztika és az inverz karakterisztika modellezésére. Ezt az Everett-függvény identifikációja során lehet megvalósítani. A vektoriális hiszterézismodell és identifikációjának átdolgozására biztosan szükség van, mivel a Preisach-modell említett kiterjesztése forgó mágneses tér modellezésére nem tökéletesen alkalmas. Foglalkozni kívánok a frekvenciafüggés modellezésével is.

A mérések során a jól bevált toroid alakú próbatestet kívánom alkalmazni az ugyancsak jól bevált National Instruments mérési adatgyűjtő környezetben. A mért jelek esetemben mindig periodikusak, de sok esetben a mért jelek eddigi tapasztalataim alapján nagyon zajosak. A periodicitást kihasználva egy olyan Fourier-sorfejtésen alapuló digitális szűrési technikát kívánok kifejleszteni, amely a meglévő eszközökkel kidolgozható. A szűrés a vektoriális mérések során még fontosabb, mert a mérőtekercsek a levegőben helyezkednek el, aminek eredményeképp a mért indukált feszültség amplitúdója nagyon kicsi. Sok esetben szükség van a mágneses indukció időfüggvényének előírására, ami csakis szabályozás útján állítható elő. Ki kell dolgoznom tehát egy hatékony és robusztus szabályozási rendszert, amely ezt az előre nem ismert nemlineáris rendszert szabályozni képes. A vektoriális hiszterézis karakterisztika mérésére a laboratóriumomban is könnyedén megépíthető elrendezést kívánom megvalósítani, amely egy villamos gép átalakítását igényli, s amely kör alakú próbatest vizsgálatára szorítkozik. Mérnöki munka lévén, a mérések elvégzése során rendkívül fontosnak tartom, hogy a méréseket a saját magam által összeállított mérési elrendezéssel magam végezzem el, hiszen így a munka minden egyes fázisát jól megismerem és ellenőrizhetem, ami az esetleges hibák javítása, illetve új ötletek implementálása során előnyt jelent.

A mérések elvégzése során a mérési eredményeket pontról-pontra ellenőrizni és analizálni kívánom a végeselem-módszeren alapuló tervező rendszerrel. Ebben a fázisban ellenőrizni és igazolni szeretném az irodalomból ismeretes mérési elvek alapjait, s ezek által a saját mérési elrendezésem is tökéletesíteni tudom.

A Maxwell-egyenletekből kiindulva a lineáris statikus mágneses tér és a lineáris örvényáramú tér számítására alkalmas potenciálformalizmusok az irodalomból rendelkezésre állnak. Ezek nagyon aprólékos összeállítása, összegyűjtése oktatási szempontból is rendkívül fontos. Tudomásom szerint az elmúlt időszakban ilyen jellegű összefoglaló munka nem jelent meg, s ezt a hiányt pótolni igyekszem munkám összefoglalásával. Ehhez újat úgy kívánok adni, hogy a formalizmusokban bevezetem a nemlineáris hiszterézis karakterisztika kezelésére alkalmas polarizációs formulát, amely mellé a frekvenciafüggő hatásokat is illeszteni kívánom. Ezáltal minden formalizmus alkalmas lehet a nemlinearitás kezelésére, s a kapott nemlineáris parciális differenciálegyenleteket valamilyen nemlineáris egyenletrendszerek megoldására alkalmas technikával meg lehet oldani. Munkám során a fixpontos technika részleteinek kívánok utánajárni, s azt a végeselem-módszerben implementálni. Szeretném a polarizációs formula minden válfaját minden potenciálformalizmussal együttesen alkalmazni anélkül, hogy a modell kimeneti jelének ismeretében további iterációs lépésekre legyen szükség a modell bemenetének meghatározására.

A kidolgozott módszerek akkor működnek hatékonyan, ha azok alkalmazhatók a mérnöki tervezésben. Ennek igazolására számos feladatot meg szeretnék oldani. Ezek egy része nemzetközileg kiírt tesztfeladat, másik része pedig saját mérési eredményeim és a numerikus módszerek eredményeinek összevetése lesz.

Permanens mágneseket is tartalmazó szinkron forgógépeket (PMS motorok) például nagy számban alkalmaznak a különféle villamos hajtású járművekben, így hibrid és villamos hajtású autókban, motorbiciklikben, vonatokban. Ezen gépek tervezésében kulcsfontosságú szerepe van a motor vastestét alkotó lemezeknek. Nyilvánvaló cél az ezekben kialakuló veszteségek csökkentése az egyéb fizikai paraméterek (például mechanikai jellemzők) megtartása, vagy épp növelése mellett (például nyomaték, hatásfok); a megfelelő anyag kiválasztása nehéz feladat a tervezés során.

A tervezés során a mérnökök, az informatikai háttér hatalmas fejlődésének köszönhetően, ma már főleg számítógéppel támogatott tervező rendszereket használnak. A végeselem-módszer az egyik legjobban elterjedt módszer a tervezésben. A numerikus technikákhoz azonban megfelelő anyagmodellek szükségesek, amelyek hűen visszaadják a vizsgált anyag viselkedését.

1.3. A dolgozat felépítése

A dolgozat második fejezete az általam is művelt tudományterület irodalmi összefoglalását tartalmazza, ahol összefoglalom az általam is felhasznált elméleti és gyakorlati ismereteket. A további munkám ezen ismeretanyagra épül. Bemutatom a Preisach-modell alapötletét, felépítését, működését és vektoriális kiterjesztését. Bevezetem a Maxwell-egyenletek differenciális alakját, a potenciálokat és a potenciálformalizmusokat, amelyek alkalmasak a statikus mágneses tér és az örvényáramú tér számítására. Bemutatom a munkám során használt végeselem-módszert is, és röviden utalok a nemlinearitás kezelésére.

A harmadik fejezetben a hiszterézis jelenségének vizsgálatára fókuszálok, amely egyben munkám fő témája. Bemutatom a skalár hiszterézis karakterisztika mérésére alkalmas mérési elrendezést, a megvalósított szűrési és szabályozási technikákat. Részletezem a skalár Preisach-modell implementálását, amely nagymértékben befolyásolja a numerikus módszerekben történő alkalmazását, s elvégzem a modell implementálását saját méréseim alapján. A modell működésének helyességét is saját mérési eredményeimre alapozva teszem. Ezután mutatom be a vektoriális hiszterézis karakterisztika mérésére alkalmas elrendezést, valamint a vektoriális Preisach-modell felépítését, identifikációját és verifikációját. Foglalkozom a modellek dinamikus kiterjesztésével is.

A negyedik fejezetben a hiszterézis modellek numerikus térszimulációs eljárásokba történő illesztését mutatom be. A választott módszer a biztos konvergenciával bíró fixpontos technika. A nemlinearitást a polarizációs formulával linearizálom, s az így előálló problémát a fixpontos iterációs eljárással oldom meg. A fejezetben számos formalizmust bemutatok.

Az ötödik fejezet öt válogatott feladat megoldását tartalmazza, amelyben igazolom a kidolgozott eljárások alkalmazhatóságát. A vektoriális hiszterézis mérésére alkalmas mérőberendezés beható numerikus analízise nemcsak a mérés tervezése során nyújtott segítséget, hanem igazolni tudtam a szenzorok elhelyezésének helyességét, s a kidolgozott vektormodell alkalmazhatóságát.

A befejező két fejezetben összefoglalom a dolgozat eredményeit, s további megválaszolásra váró kérdéseket fogalmazok meg, melyekkel a jövőben foglalkozni kívánok.

Terjedelmi okok miatt néhány eredményt függelék formájában közlök.

A dolgozatot a felhasznált irodalom jegyzéke zárja.

A dolgozatot LaTeX szövegszerkesztővel készítettem.

2. fejezet

Irodalmi áttekintés

Ebben a fejezetben a szakirodalomra támaszkodva összefoglalom azon ismeretanyagot, amelyre a további fejezetek épülnek, amelyek alapot adtak kutatásaimhoz. Bemutatom a ferromágneses anyagok hiszterézis karakterisztikáját, s röviden bemutatom a skalár és a vektoriális Preisach-modellt. A disszertációban a ferromágneses hiszterézis karakterisztikával foglalkozom, s a megközelítés makroszkopikus jellegű, ami a mérnöki számításokhoz jól kapcsolható. Bemutatom az elterjedt mérési elrendezéseket. Bevezetem a kutatásaim során használt Maxwell-egyenleteket és a lineáris problémák megoldására alkalmas különféle potenciálformalizmusokat, valamint röviden bemutatom a végeselem-módszert. Végül utalok a nemlinearitás kezelésére.

2.1. A ferromágneses hiszterézis karakterisztika

2.1.1. A fizikai háttér villamosmérnöki megközelítésben

A villamosmérnöki gyakorlat számára oly fontos ferromágneses anyagok mágneses tulajdonságainak hátterében mikroszkopikus léptékű folyamatok, atomi szintű kvantumfizikai jelenségek állnak [1–13]. Az atomban az elektron saját nyomatéka, az elektron keringése során befutott pálya nyomatéka és az atommag saját nyomatéka együttesen hozza létre a mágnesezettséget. Ezen elemi nyomatékok, vagy mágneses momentumok térfogategységre vett sűrűsége az anyag $\vec{\boldsymbol{M}}$ mágnesezettsége. Ismeretes, hogy a ferromágneses anyagok domenekből állnak, amelyek azonos mágnesezettségi iránnyal bíró tartományok.

A villamosmérnöki tervezésben nem szükséges a ferromágneses anyagot alkotó mikrorendszerek modellezése, megelégszünk azok nagy sokaságának halmaza által adott, könnyen mérhető makroszkopikus jellemzők matematikai leírásával [1–4, 14]. Ilyen makroszkópikus jellemző a mágnesezettség, amely azon $\vec{\boldsymbol{H}}$ mágneses térerősségtől függ, amelyben a ferromágneses anyag helyet foglal. A két vektor között a kapcsolat bonyolult: nemlineáris és többértékű, az anyag fizikai jellemzőitől függ. Ez a kapcsolat a hiszterézis karakterisztika, amit a következő operátorral fogok jelölni:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\mathscr{H}}_M\{\vec{\boldsymbol{H}}\}. \tag{2.1}$$

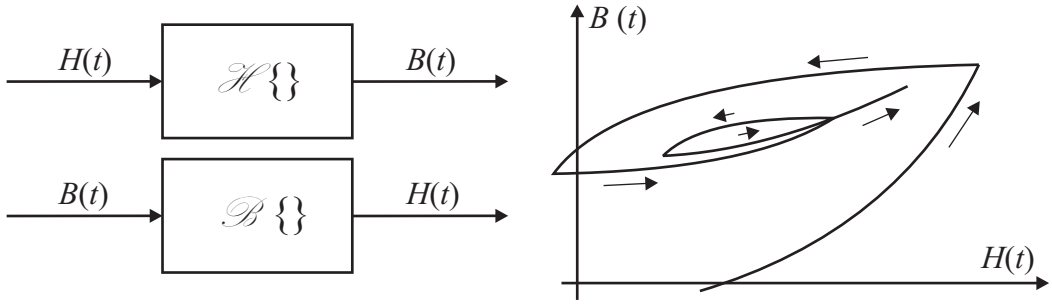
A $\vec{\boldsymbol{B}}$ mágneses indukciót a vákuum $\mu_0\vec{\boldsymbol{H}}$ mágneses indukciója és az anyag $\vec{\boldsymbol{M}}$ mágnesezettsége adja a következő összefüggés szerint:

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\left(\vec{\boldsymbol{H}} + \vec{\boldsymbol{M}}\right) = \mu_0\left(\vec{\boldsymbol{H}} + \vec{\mathscr{H}}_M\{\vec{\boldsymbol{H}}\}\right), \tag{2.2}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$H/m, a vákuum permeabilitása. A ferromágneses anyag mágnesezettsége az, ami bonyolult kapcsolatban áll a mágneses térerősséggel, a továbbiakban azonban a következő összefüggések által definiált operátorokat fogom használni (l. 2.1 ábra):

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\mathscr{H}}\{\vec{\boldsymbol{H}}\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\mathscr{B}}\{\vec{\boldsymbol{B}}\}. \tag{2.3}$$

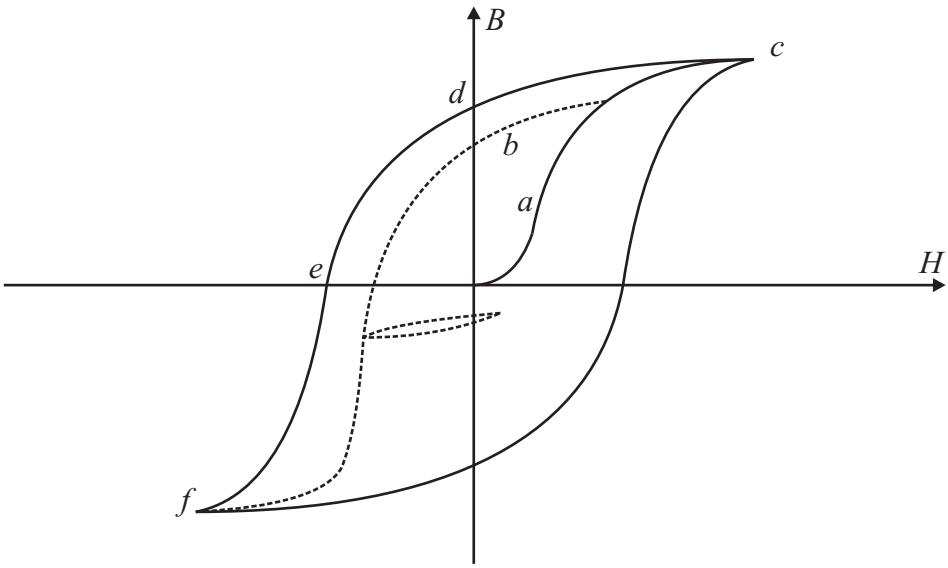
Előbbit direkt karakterisztikának, utóbbit pedig inverz karakterisztikának nevezzük. Speciális esetben a mágneses térerősség és a mágneses indukció valamely skalár értékű komponense használható, ekkor a $B = \mathscr{H}\{H\}$, illetve a $H = \mathscr{B}\{B\}$ jelölést alkalmazom, a mágnesezettséget pedig M-mel jelölöm.



2.1. ábra. A hiszterézis operátor és egy karakterisztikája

Ha a bemeneti jel és a kimeneti jel kapcsolata nemlineáris és többértékű, továbbá a kimeneti jel t_0 időpillanatban felvett értéke a bemeneti- és a kimeneti jel $t \leq t_0$, valamint $t < t_0$ időpontbeli értékeitől, azaz a rendszer előéletétől is függ, akkor beszélünk hiszterézissel bíró rendszerről. Az ily módon definiált rendszer memóriával rendelkezik. A 2.1 ábrán a kis nyilak reprezentálják a kimeneti jel változásának irányát, s látható, hogy a kimeneti jel értéke függ a rendszer előéletétől, azaz ugyanazon bemeneti jel mellett a válaszjel különböző lehet, attól függően, hogy a rendszer milyen állapotban van [1–4, 13, 15–19].

A jelenség modellezésének nehézségét és összetettségét a 2.2 ábrán látható, jól ismert görbékkel világítom meg [1–5, 7–13, 18–22]. Lemágnesezett állapotban az egyes domenek egymás hatását kölcsönösen kioltják, az anyag mágnesesen semleges, ekkor $H = 0$, $M = 0$, és $B = 0$. Nagyon kicsi mágneses tér hatására a domenek elfordulnak, a domenek közt húzódó falak elmozdulnak úgy, hogy azon tartományok térfogata növekedjék, amelyek mágnesezettsége a külső tér irányához közelebb esik. Ha a mágneses térerősség növekszik, akkor a mágnesezettség és a mágneses indukció is növekszik az a-val jelölt első mágnesezési görbe mentén. A domenek forgása és a domenfalak mozgása az első mágnesezési görbe kezdeti szakaszán reverzibilis, azaz csökkenő értékű külső tér eredményeképp az anyag lemágnesezett állapotba kerülhet. Nagyobb térerősség mellett a folyamat irreverzibilissé válik, egyes tartományok ugrásszerű átfordulása eredményeképp egyre több domen áll be a külső mágneses tér irányába, az indukció értéke pedig meredeken nő az első mágnesezési görbe mentén. A mágneses térerősség esetleges csökkentése ekkor már nem vezet vissza az origóba, a mágneses indukció a b-vel jelzett szaggatott vonalnak megfelelően alakul. A külső tér további növelése ugyanakkor ún. szaturációt eredményez, azaz bizonyos térerősség felett valamennyi domen a külső tér irányába áll, következésképp az indukció csak lassan, $\mu_0 H$ szerint növekedhet (c szakasz). A térerősség csökkentésével, a szaturációból indulva a karakterisztika lefelé vezető $c-d-e-f$ ága szerint alakul a mágneses indukció. A $H = 0$ helyen a nevezetes remanens indukció értékét



2.2. ábra. A hiszterézis karakterisztika

kapjuk (ennek szokásos jele B_r), a mágneses térerősség további csökkentése pedig az ún. koercitív teret adja, ahol $B = 0$, és $H = -H_c$. A külső tér további csökkentésével az f-fel jelölt szaturációhoz lehet eljutni. Látható, hogy a b-vel jelölt görbén is el lehet jutni az f szaturációs pontba. A mágneses térerősség megfelelő időfüggvényével például a b jelű görbén ún. minor hurkok, vagy minor görbék is előidézhetők. Ezek alakja függ a kiindulás helyétől, azaz az előélettől.

Ez a jelenség matematikailag hiszterézismodellek segítségével írható le [1–4, 12, 13, 20–22]. Számos makroszkopikus modell létezik az egyszerű függvények alkalmazásától a bonyolultabb modellekig, mint például a Jiles–Atherton-modell, a Rayleigh-modell, a Frölich-modell, a Duhem-modell, a Chua-modell stb. Jelen dolgozatban a Preisach-modellel foglalkozom.

2.1.2. A skalár Preisach-modell

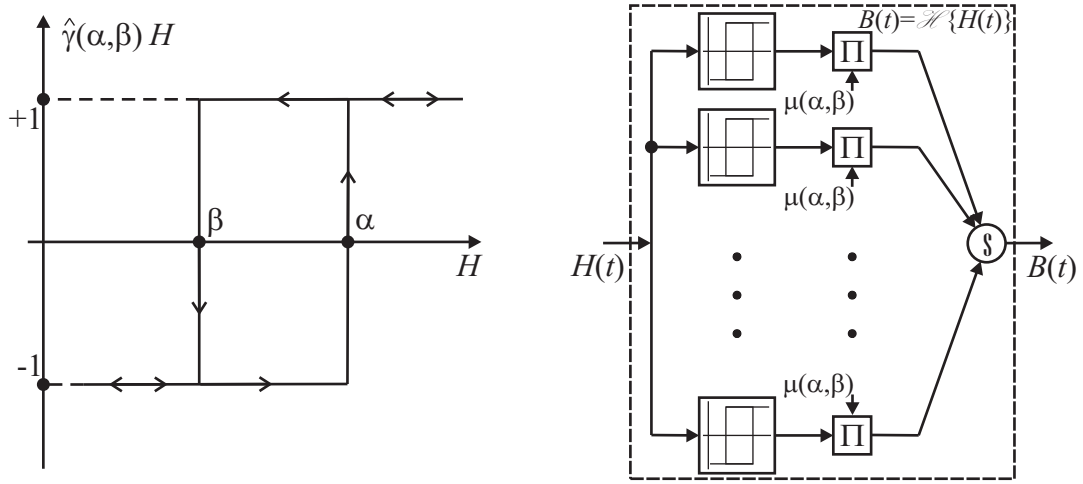
A Preisach-modell első változata a [23] cikkben jelent meg, amely egy intuitív modellt ad a ferromágneses anyagokban lejátszódó folyamatok egy lehetséges leírására. A modell azóta rengeteg változáson ment keresztül, melynek eredményeképp mára egy matematikai modell áll rendelkezésre a hiszterézis jelenségének általános leírására. Azaz a Preisach-modell nem csupán a ferromágneses hiszterézis leírására alkalmas, hanem egy általános modell [1–4, 18–20, 24–64]. Saját eredményeim a 3.1. fejezetben mutatom be.

A Preisach-modell kimenetét végtelen számú relé-típusú karakterisztikával rendelkező ún. hiszteron válaszának súlyozott összegeként, azaz szuperpozíciójaként lehet előállítani:

$$B(t) = \mathscr{H}\{H(t)\} = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta)\, \hat{\gamma}(\alpha, \beta)\, H(t)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta. \tag{2.4}$$

A relé-típusú karakterisztika jól ismert jellege a 2.3 ábrán látható, melynek a felkapcsolási értékét α, lekapcsolási értékét β jelöli, és $\alpha \geq \beta$. A karakterisztika bemeneti jele sok esetben valamely értékkel (pl. a bemeneti jel maximális értékével) normalizált.

Kimenete csupán két értéket vehet fel, $\hat{\gamma}(\alpha,\beta) = \pm 1$. A 2.3 ábra mutatja azt a hiszteronok párhuzamos kapcsolásából álló párhuzamos rendszert is, amely a (2.4) összefüggést hivatott reprezentálni. A $\mu(\alpha,\beta)$ ún. Preisach-eloszlásfüggvény az egyes hiszteronok kimenetét súlyozza. Az eloszlásfüggvény mérési adatok alapján identifikálható.



2.3. ábra. A relé-típusú karakterisztika és a belőle felépített párhuzamos rendszer

Az egyes hiszteronok α és β értékei más és más értékeket vesznek fel a fenti párhuzamos rendszer egyes ágaiban. Ennek egyszerű leírására dolgozták ki az ún. Preisach-háromszöget (l. 2.4 ábra). A Preisach-háromszög az a tartomány, amelyre igaz az $\alpha \geq \beta$ feltétel, azaz az a tartó, amely felett a (2.4) által definiált integrálást el kell végezni. A Preisach-háromszögön a rendszer előéletét az $L(t)$ lépcsősgörbe reprezentálja, amely balról jobb irányba mozog, ha a bemeneti jel növekszik, s fentről lefelé, ha a bemeneti jel csökken. A lépcsősgörbe bemeneti jelnek megfelelő mozgása kapcsolja fel vagy le az egyes α és β értékekkel reprezentált hiszteronokat. Alaphelyzetben a lépcsősgörbe egy egyenes, amely a $(0,0)$ és $(+1,-1)$ pontokat köti össze az $\alpha - \beta$ síkon, kettéválasztva ezáltal a háromszöget. A lépcsők sarkai a bemeneti jelben lévő maximum és minimum értékeknek megfelelően alakulnak ki, azaz a lépcsősgörbe segítségével a rendszer bemenetére érkező jel múltbéli értékei tárolódnak, vagyis a memóriát realizálja. A 2.4 ábrán a lépcsősgörbe kialakulása a karakterisztika ismeretében nyomon követhető.

A (2.4) kettős integrál kiértékelése meglehetősen időigényes művelet. Ezen oknál fogva célszerűbb használni az $E(\alpha,\beta)$ Everett-függvényt, ami a $\mu(\alpha,\beta)$ ismeretében a következőképp számítható:

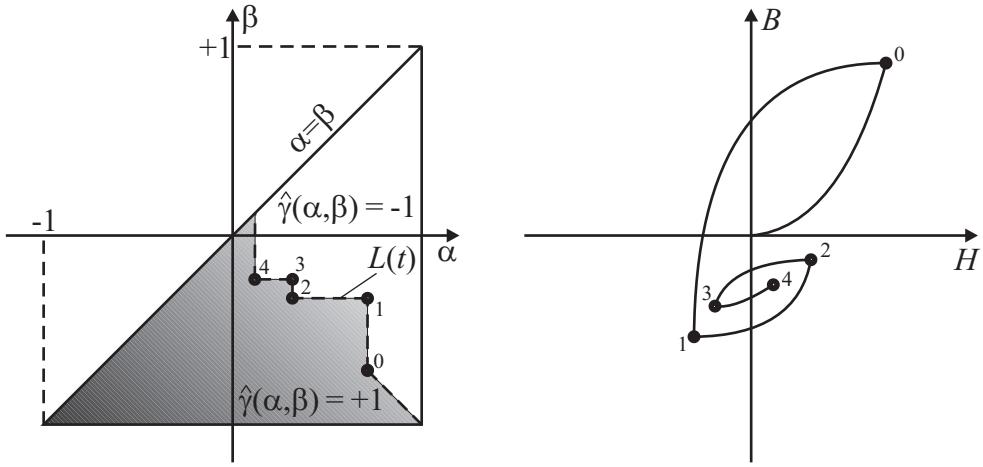
$$E(\alpha,\beta) = \iint_{\alpha\geq\beta} \mu(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{2.5}$$

azaz

$$\mu(\alpha,\beta) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,E(\alpha,\beta). \tag{2.6}$$

Az Everett-függvény ismeretében a hiszterézismodell kimenete számítástechnikailag sokkal takarékosabban előállítható, mint a (2.4) kettős integrállal. Felhasználva a (2.5) definíciós formulát a (2.4) összefüggésben, a következő összeg adódik:

$$B(t) = -E(\alpha_0,\beta_0) + 2\sum_{k=1}^{K}\left[E(\alpha_k,\beta_{k-1}) - E(\alpha_k,\beta_k)\right], \tag{2.7}$$



2.4. ábra. A Preisach-háromszög és a hozzá tartozó karakterisztika jellege

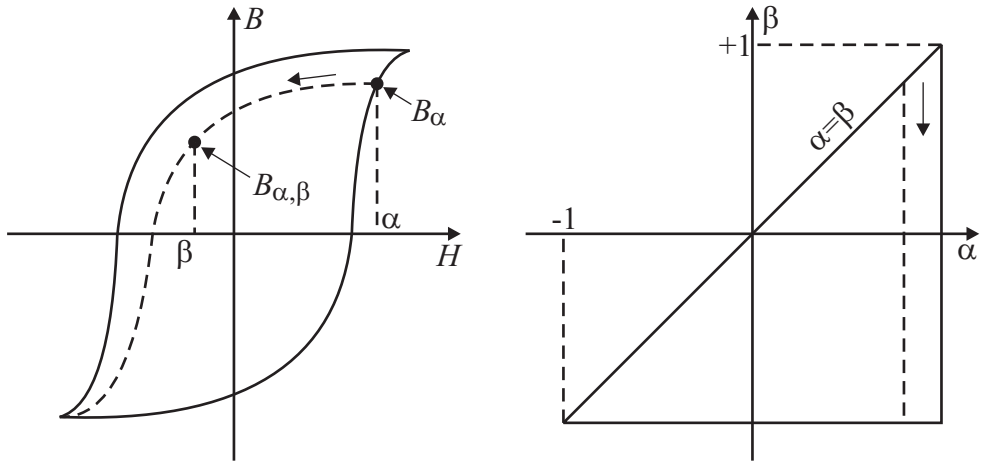
ahol K jelöli a lépcsősgörbe által tárolt sarkok számát.

Az Everett-függvény másik nagy előnye, hogy közvetlen kapcsolatban áll a mérési eredményekkel. Az ún. elsőrendű visszatérő görbék segítségével az Everett-függvény felépíthető az

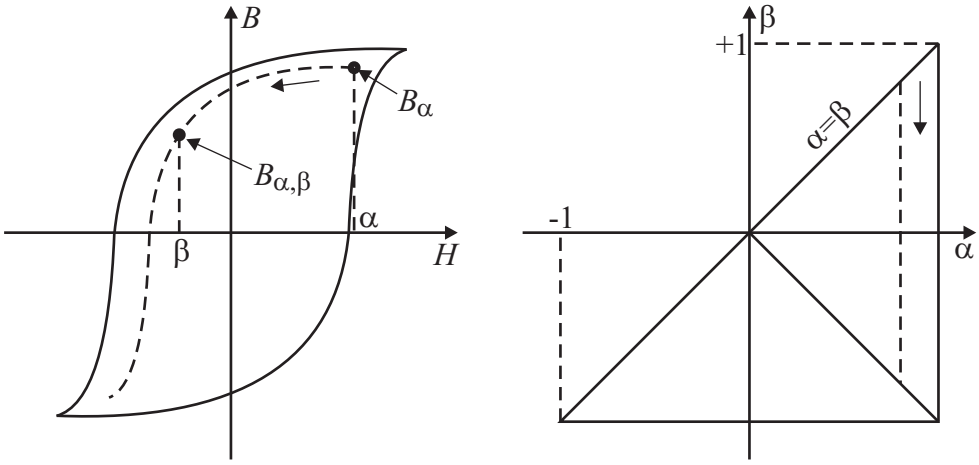
$$E(\alpha, \beta) = \frac{B_\alpha - B_{\alpha,\beta}}{2} \tag{2.8}$$

összefüggés szerint, ahol a B_α és $B_{\alpha,\beta}$ értékek értelmezése a 2.5 ábrán látható. Az (α, B_α) pont az elsőrendű visszatérő görbe kezdőpontja, amikor a visszatérő görbe a főhurokról elindul, α tehát rögzített. A $(\beta, B_{\alpha,\beta})$ pont pedig a visszatérő görbén β értékének megfelelően vándorol. Ezáltal az Everett-függvény rögzített α mellett minden β értékre számítható.

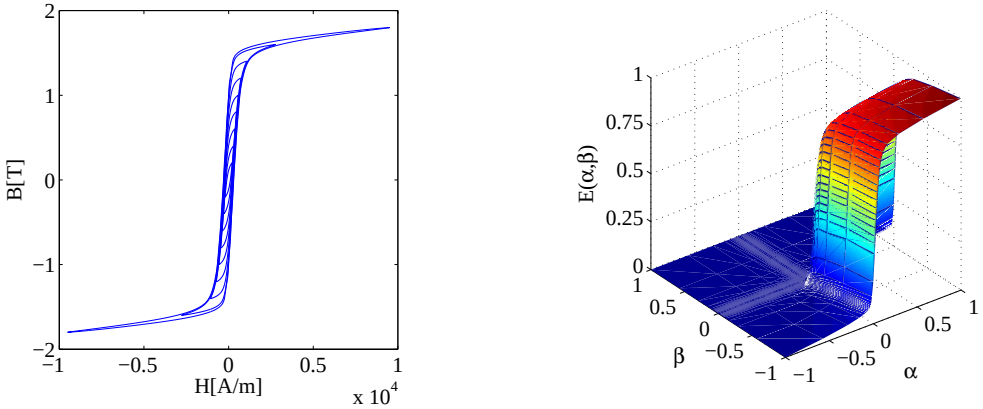
Ugyanez elvégezhető a koncentrikus minor görbék segítségével is, de ekkor egy koncentrikus görbén, s nem a visszatérő görbén mozog a kérdéses $(\beta, B_{\alpha,\beta})$ pont, ahogy az a 2.6 ábrán is látható. A koncentrikus görbék mérése bizonyos esetekben egyszerűbb. Egy általam felvett mérési sor és a belőle számított Everett-függvény a 2.7 ábrán látható.



2.5. ábra. Az Everett-függvény felépíthető az elsőrendű visszatérő görbék alapján



2.6. ábra. Az Everett-függvény felépíthető a koncentrikus görbék alapján



2.7. ábra. Mért koncentrikus görbék és az Everett-függvény

2.1.3. A dinamikus skalármodell

Az előző fejezetben bemutatott modell statikus, vagyis a hiszterézis karakterisztika független a bemeneti jel változási sebességétől, azaz a modell frekvenciafüggetlen. A valóságos $H - B$ kapcsolat azonban frekvenciafüggő, és szükséges az ezt leíró dinamikus modellek kidolgozása. Az irodalomból ismeretes megközelítések közül itt csak a viszkozitáson alapuló modell bemutatására szorítkozom, mert magam is ezzel a kiterjesztéssel foglalkoztam. Megjegyzem, hogy a villamos gépekben elektromágneses tér hatására fejlődő veszteségek számítása egy kurrens kutatási terület.

A vastestben disszipálódó W_{tot} teljes veszteség három fő részből tevődik össze [4, 13, 51, 64–73]:

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{hiszt}} + W_{\text{örv}} + W_{\text{jár}}, \tag{2.9}$$

ahol W_{hiszt} a statikus hiszterézis karakterisztika által felölelt frekvenciától független területe, $W_{\text{örv}}$ a Maxwell-egyenletekből számítható klasszikus örvényáramú veszteség, s végül $W_{\text{jár}}$ a domenfalak mozgása által indukált mikro-örvényáramok hatására létrejövő járulékos veszteség. Speciálisan szinuszos mágnesező tér esetén a veszteség jó közelítéssel leírható a következő összefüggéssel:

$$W_{\text{tot}} = C_{\text{hiszt}} + C_{\text{örv}} f + C_{\text{jár}} \sqrt{f}, \tag{2.10}$$

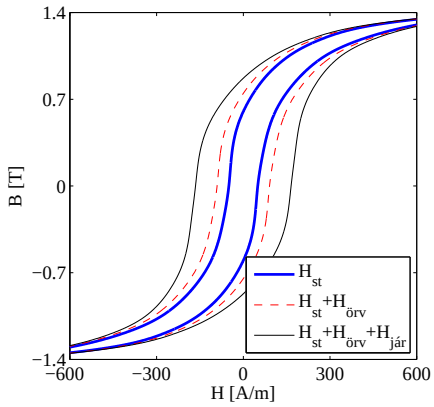
ahol f a frekvencia, a három konstans (C_{hiszt}, $C_{\text{örv}}$, $C_{\text{jár}}$) értéke pedig függ a mágneses indukció csúcsértékétől. Ebből az összefüggésből kiolvasható, hogy a hiszterézisveszteség konstans, a klasszikus örvényáramú veszteség a frekvenciának lineáris függvénye, a járulékos veszteség pedig a frekvencia négyzetgyökével arányos.

Ezen veszteségi komponensek számítására különféle egyszerű, analitikus formulák léteznek, amelyek megkönnyítik ugyan a tervezést, de sok esetben –az egyszerűsítő feltételezések miatt– pontatlanok [67, 71, 74–80]. A bonyolult geometriájú berendezésekben az elektromágneses térjellemzők számítása nehéz feladat, amelyre ma már numerikus módszereket használunk, és figyelembe vesszük a vastest anyagának tulajdonságait az anyagmodelleken keresztül [64, 65, 71, 77, 81–93]. A numerikus módszerek nagy előnye, hogy az elektromágneses térjellemzőket az analitikus módszereknél pontosabban adják vissza, automatikusan előáll a szkinhatás figyelembevétele, a legkülönfélébb gerjesztési módok minden nehézség nélkül realizálhatók, a hiszterézis karakterisztika modellje beépíthető a számításokba, a minor hurkok hatása is számítható stb.

A (2.9) összefüggésből levezethető, hogy a mágneses térerősség szintén három komponens összegeként írható fel [70, 77]:

$$H(B, \mathrm{d}B/\mathrm{d}t) = H_{\text{st}}(B) + \frac{\sigma d^2}{12}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + C\delta\sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right|}. \tag{2.11}$$

Az első komponens statikus, frekvenciafüggetlen hiszterézismodellel számítható. A második tag egy σ vezetőképességű, d vastagságú, nagy kiterjedésű lemez modelljéből határozható meg az egydimenziós örvényáramú Maxwell-egyenleteket felírva [71], s végül, a harmadik komponens a járulékos veszteségekért felelős [67, 68], amelyben C egy mérési eredményekhez illeszthető paraméter, δ pedig a $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ előjele. Az egyes komponensek hatását illusztráltam a 2.8 ábrán.



2.8. ábra. A hiszterézis karakterisztika alakulása az egyes komponensek figyelembe vételével

Ebbe a keretbe kiválóan illeszthető a [70, 92–101] irodalomban található alábbi formula:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = R\left(H - H_0\right), \tag{2.12}$$

ami a mágneses indukció időbeli változását írja elő, s ez a változási sebesség az R mágneses ellenállással és a H_0 paraméterrel szabályozható. Az egyenlet általánosítható

a következő módon [94]:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = r(B)\,(H - H_{\mathrm{st}})^{\gamma}\,, \tag{2.13}$$

ahonnan a mágneses térerősség kifejezhető:

$$H(B, \mathrm{d}B/\mathrm{d}t) = H_{\mathrm{st}}(B) + \delta \left| \frac{1}{r(B)} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \right|^{1/\gamma}. \tag{2.14}$$

Ebben a kifejezésben $H(B, \mathrm{d}B/\mathrm{d}t)$ a teljes mágneses térerősség a B mágneses indukció és annak megváltozása függvényében, $H_{\mathrm{st}}(B)$ a statikus modell által szolgáltatott mágneses térerősség szintén a mágneses indukció függvényében, azaz a formula inverz modellt feltételez, $r(B)$ a mágneses ellenállás, ami általánosan B függvénye. A $\delta = \mathrm{sign}(\mathrm{d}B/\mathrm{d}t)$ előjel azt a célt szolgálja, hogy felfelé haladó ágon a második tag hozzáadódik a statikus térerősséghez, a lefelé vezető ágon pedig kivonódik a statikus térerősségből, azaz a statikus karakterisztikát a második komponens kövéríti, s ennek mértéke a frekvencia függvénye, hiszen $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ függ a frekvenciától. A statikus modell ilyen kiterjesztése tehát két szabad paraméterrel rendelkezik ($r(B)$ és γ), amelyek meghatározása mérések alapján lehetséges.

Nagyon kicsi frekvencián a második tag nullához közelít ($\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \to 0$), a modell a statikus modellbe megy át, $H(B) = H_{\mathrm{st}}(B)$. A második tag tehát a modell kimenetének frekvenciafüggését képviseli, hatása növekvő frekvencia mellett egyre erőteljesebb.

Az $r(B)$ függvény egy alkalmas választása lehet a következő:

$$r(B) = \frac{R_0}{1 - \left(\frac{B}{B_s}\right)^2}, \tag{2.15}$$

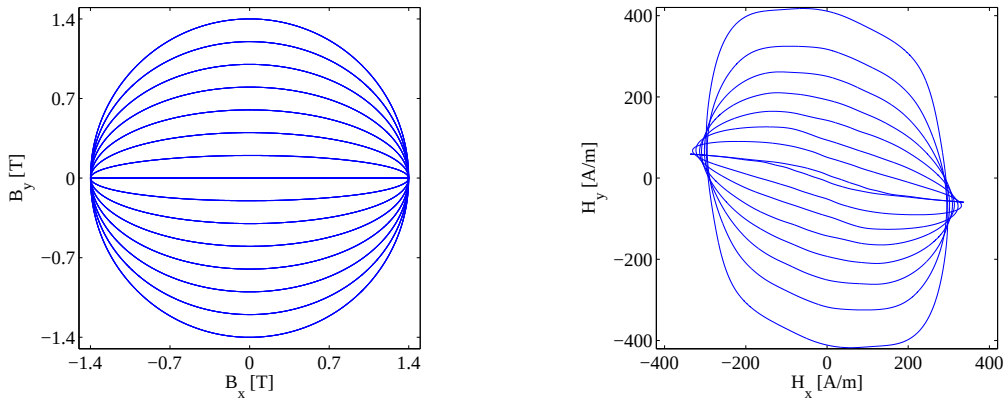
ahol R_0 egy mérések alapján meghatározandó konstans, B_s pedig a mágneses indukció értéke a technikai szaturációban. A [64, 70, 92–100] cikkekben különféle anyagokhoz különféle $r(B)$ függvényeket szerkesztettek a szerzők, a megfelelő formula előállítása nehéz feladat. A dinamikus modellre a 3.1. fejezetben visszatérek.

2.1.4. A vektor Preisach-modell

A forgó mágneses térben létrejövő veszteség nagyobb, mint a lineárisan polarizált mágneses térben termelődő veszteség [102, 103]. A 2.9 ábrán különböző trajektóriájú mágneses indukcióhoz tartozó mágneses térerősség-trajektóriák láthatók, amelyeket az M250-35A [104, 105] jelzésű anyagból kivágott lemezen mértem. Az ábrán az látható, hogy hogyan alakul a két térjellemző amidőn a gerjesztés a lineárisan polarizált alakjából átfordul cirkulárisan polarizálttá. Közben a veszteség jelentősen megnő, nevezetesen 0,125 W/kg-ról 0,289 W/kg-ra, vagyis több, mint kétszeresére.

Ez a fajta viselkedés analitikus formulákkal nem írható le, pontosabb megközelítés, ha a veszteségeket a térjellemzőkből határozzuk meg, miközben pontosabb vektoriális hiszterézismodellt használunk [88, 102, 103, 106–110].

A vektor Preisach-modell legtöbbet hivatkozott megvalósítása a skalármodell Mayergoyz által bevezetett –a 2.10 ábrán látható– általánosítása a kétdimenziós síkban [1, 3, 4, 20, 24, 62, 63, 88, 110–127]. Itt a citált irodalomra hivatkozva mutatom be a vektormodell legfontosabb tulajdonságait, saját eredményeim a 3.2. fejezetben közlöm.



(a) Mágneses indukció (b) Mágneses térerősség

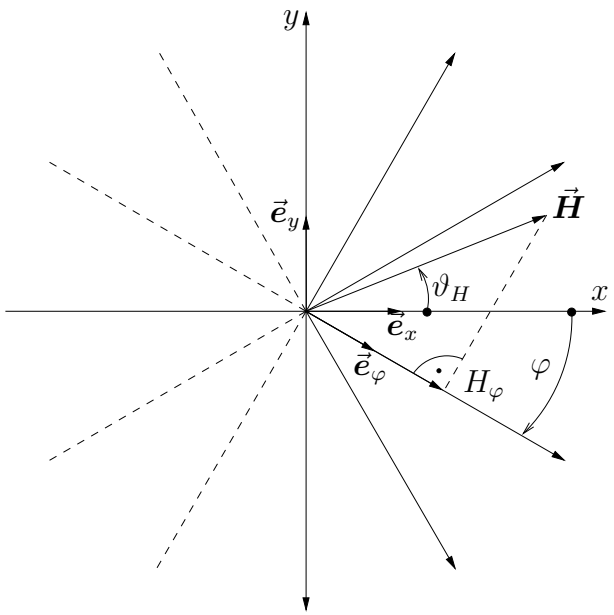
2.9. ábra. A mágneses térjellemzők alakulása lineárisan és elliptikusan polarizált mágneses térben

Az általánosítás lényege abban áll, hogy a vektoriális kimenetet végtelen számú skalármodell szuperpozíciójaként állítjuk elő. Ha a modell bemenete a mágneses térerősség vektora és a kimenet a mágneses indukció vektora, akkor a következő formulát alkalmazzuk:

$$\vec{\boldsymbol{B}}(t) = \vec{\mathscr{H}}\{\vec{\boldsymbol{H}}(t)\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \, \mathscr{H}_\varphi\{\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{H}}(t)\} \, \mathrm{d}\varphi. \tag{2.16}$$

Felhasználva a (2.4) összefüggést, a következő formula adódik:

$$\vec{\boldsymbol{B}}(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \left(\iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta, \varphi) \, \hat{\gamma}(\alpha, \beta) \left(\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{H}}(t) \right) \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta \right) \mathrm{d}\varphi. \tag{2.17}$$



2.10. ábra. A kétdimenziós vektormodellben definiált irányok értelmezéséhez

Az egyes skalármodellek bemenete az $\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{H}}(t)$ skalárszorzat szerint áll elő, ami a bemeneti $\vec{\boldsymbol{H}}(t)$ vektor φ irányban eső vetülete. Itt $\mu(\alpha, \beta, \varphi)$ jelöli a vektormodellt képező skalármodellek eloszlásfüggvényét, amely anizotrop modell esetén irányfüggő, az egyszerűbb izotrop esetben azonban iránytól független.

Kézenfekvő, hogy az egyes irányokban futtatandó skaláris modellek kettős integrálja kiváltható az Everett-függvény segítségével, s minden irány mentén használható a (2.7) összeg.

A $\mathscr{H}_\varphi\{\cdot\}$ operátorban szereplő eloszlásfüggvény vagy Everett-függvény az identifikáció során határozható meg. Itt az Everett-függvényt használom számos, már említett előnyös tulajdonsága miatt. Az identifikáció alapját jelentő integrálegyenlet formulája anizotrop és izotrop esetben a következő [3]:

$$F(\alpha, \beta, \varphi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi \, E(\alpha \cos\psi, \beta \cos\psi, \psi + \varphi) \, \mathrm{d}\psi, \tag{2.18}$$

illetve

$$F(\alpha, \beta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, E(\alpha \cos\varphi, \beta \cos\varphi) \, \mathrm{d}\varphi. \tag{2.19}$$

Itt $F(\alpha, \beta, \varphi)$ és $F(\alpha, \beta)$ jelöli a mérési eredményekből ismert Everett-függvényeket, a kérdéses $E(\alpha, \beta, \varphi)$ és $E(\alpha, \beta)$ Everett-függvény pedig az integranduszban szerepel. Anizotrop esetben a ψ integrálási változó a φ szög által definiált iránytól mérendő szöget jelöli. Az identifikáció során tehát integrálegyenletet kell megoldani, amely ebben az esetben csak numerikusan valósítható meg.

A vektor Preisach-modell egy fontos általánosítása érhető el a következő módon [3, 4, 120]:

$$\vec{\boldsymbol{B}}(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \left(\iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta, \varphi) \, \hat{\gamma}(\alpha, \beta) \left[|\vec{\boldsymbol{H}}(t)| \, \xi(\vartheta_H(t) - \varphi) \right] \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta \right) \mathrm{d}\varphi, \tag{2.20}$$

azaz az egyes irányokban számított vetületek meghatározását lehet módosítani. Itt $\vartheta_H(t)$ jelöli a bemeneti vektor x-tengellyel bezárt szögét (l. 2.10 ábra). A modellben szereplő $\xi(\vartheta_H(t) - \varphi)$ függvény $\cos(\vartheta_H(t) - \varphi)$ függvény szerinti választása mellett az eredeti (2.17) modell áll elő. Előnyös azonban a következő választás:

$$\xi(\vartheta_H(t) - \varphi) = \mathrm{sign}\{\cos(\vartheta_H(t) - \varphi)\} \, |\cos(\vartheta_H(t) - \varphi)|^{1/w}, \tag{2.21}$$

ahol w egy paraméter, amely tipikusan cirkulárisan polarizált mérési adatok alapján identifikálható. Tapasztalatok szerint ez a módosítás jó szolgálatot tesz, ha az izotrop anyag olyan anizotropiával bír, amely különösen cirkulárisan polarizált mérések során figyelhető meg.

2.2. A mágneses hiszterézis karakterisztika mérése

2.2.1. A skalár karakterisztika mérése

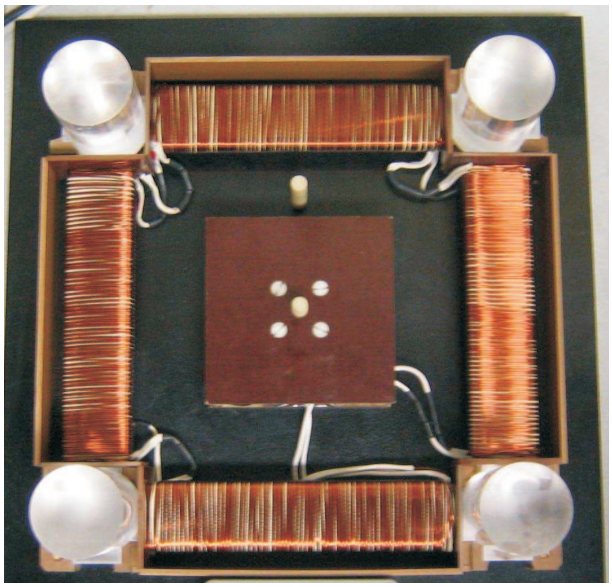
A skalár hiszterézis karakterisztika mérése során feltételezzük, hogy a próbatestben (de legalább a mérés helyén) kialakuló $\vec{\boldsymbol{H}}$ mágneses térerősség vektor és $\vec{\boldsymbol{B}}$ mágneses

indukció vektor egymással párhuzamos, azaz irányuktól eltekinthetünk, s a cél a közöttük fennálló skalár jellegű kapcsolat felvétele.

Hiszterézis karakterisztika mérésekor célszerű törekedni a zárt mágneses kör felépítésére, vagy eleve olyan alakú próbatestet kell alkalmazni, amely zárt [4].

Az egyik leggyakrabban alkalmazott mérési összeállítás toroid alakú próbatestet tartalmaz [4,128,129]. A dolgozat 3.1. fejezete egy általam épített mérési elrendezést mutat be, ezért itt csak egy rövid bevezetésre szorítkozom. A toroid transzformátor árammal átjárt primer tekercse adja a mágneses anyag gerjesztését, s válaszát a nyitott szekunder tekercsen mérhető indukált feszültségből lehet meghatározni. Nagy előnye, hogy a toroid alakú próbatest nem tartalmaz légrést, azaz a mágneskör zárt, továbbá a geometriából adódik, hogy a szórt mágneses fluxus elhanyagolható. Ennek eredményeképp a mágneses térerősség az áramból közvetlenül számítható. Hátránya viszont, hogy a különféle anyagokból készült próbatesteket külön-külön kell tekerccsel ellátni.

A másik etalonnak számító méréstechnikai eljárás a 2.11 ábrán látható ún. Epstein-keret alkalmazása [4, 129–134] (IEC Standard Ref. No. 404-2, 1996 [4, 24, 130]). Az Epstein-keret négy oldala 30 mm széles, 280 − 305 mm hosszúságú lemezekből épül fel, melyeket a sarkoknál átlapolással kell összeilleszteni. A sarkok hatását elhanyagolják. A négy keret mindegyikén gerjesztő tekercs van, melyek árama gerjeszti az elektromágneses teret a lemezeken belül. A négy egyforma tekercset természetesen egymással sorba kell kapcsolni. A mágneses indukció a próbatestek köré helyezett tekerccsel mérhető, a mágneses térerősség pedig a gerjesztő áram alapján számítható. A keret nagy előnye, hogy különféle anyagok viszonylag gyorsan cserélhetők, továbbá a kereskedelemben szabványosított mérési összeállítások beszerezhetők.



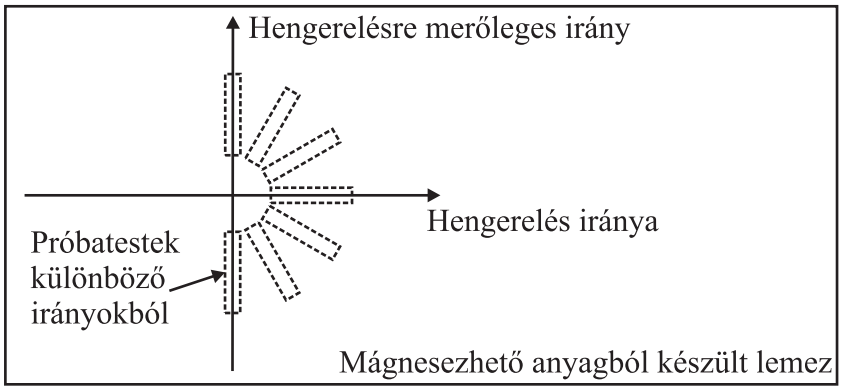
2.11. ábra. Az Epstein-keret [131]

Léteznek olyan mérési elrendezések is, amelyek a próbatestek még gyorsabb cseréjét teszik lehetővé. Ilyen például az U-alakú, nagy permeabilitású jármot tartalmazó összeállítás és ennek különböző változatai [4, 129, 135–137]. Az U-alakú járom gerjesztő tekercse hozza létre a mágneses teret. A járom szabadon álló végeire lehet ráhelyezni a próbatestet, azaz a próbatest zárja a mágneskört.

2.2.2. A vektor karakterisztika mérése

A vektoriális hiszterézis karakterisztika mérése során a próbatestben a $\vec{H}$ mágneses térerősség vektor és a $\vec{B}$ mágneses indukció vektor közötti kapcsolat felvétele a feladat. Erre szintén többféle elrendezés használatos. A vektoriális hiszterézis mérésekor főként vékony lemezekből készült próbatestek vizsgálata a cél.

Az Epstein-keret alkalmas a vizsgálni kívánt anyag karakterisztikájának felvételére [4, 132, 138, 139]. Az Epstein-kerettel alapvetően skalár karakterisztikát lehet mérni, de akár anizotrop anyagból készült lemez viselkedése is feltérképezhető vele, ha a keret a 2.12 ábrán látható módon kivágott lemezekből épül fel. Ebben az esetben minden irányból megfelelő számú lemezre van szükség, a mérés tehát időigényes. Az izotrop anyagoknak is van némi anizotrop viselkedése, mert a lemezeket hengereléssel gyártják, majd hőkezelik, ennek ellenére a hengerelés irányában az anyagot kis mértékben könnyebb mágnesezni, mint a hengerelésre merőleges irányban.

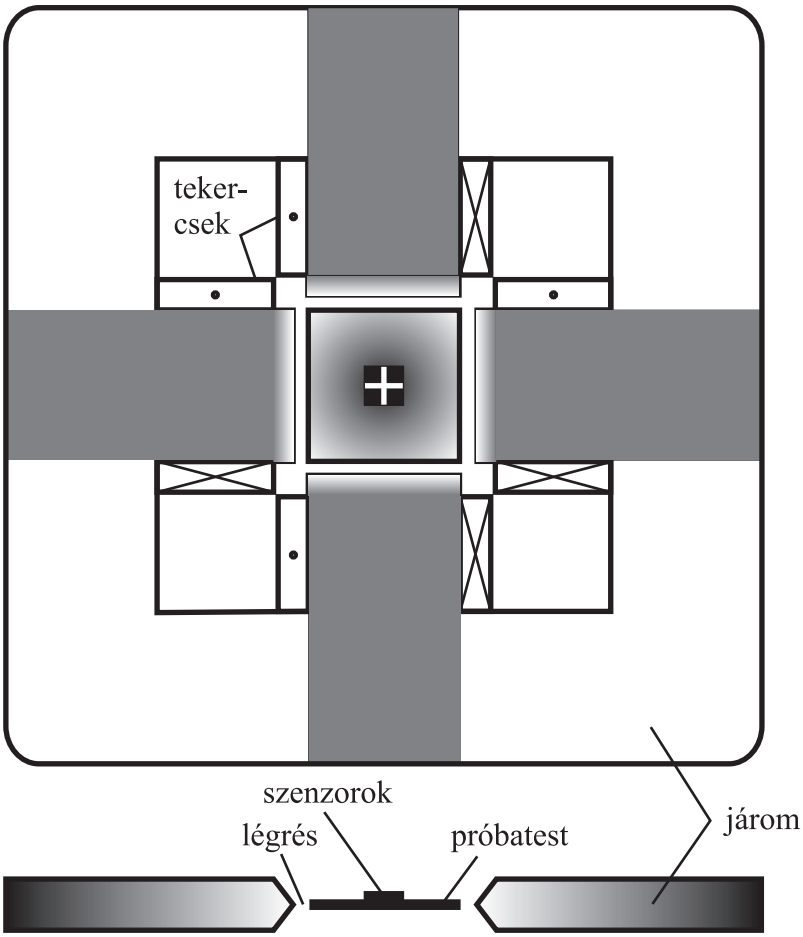


2.12. ábra. Lemezek készítése Epstein-kerethez

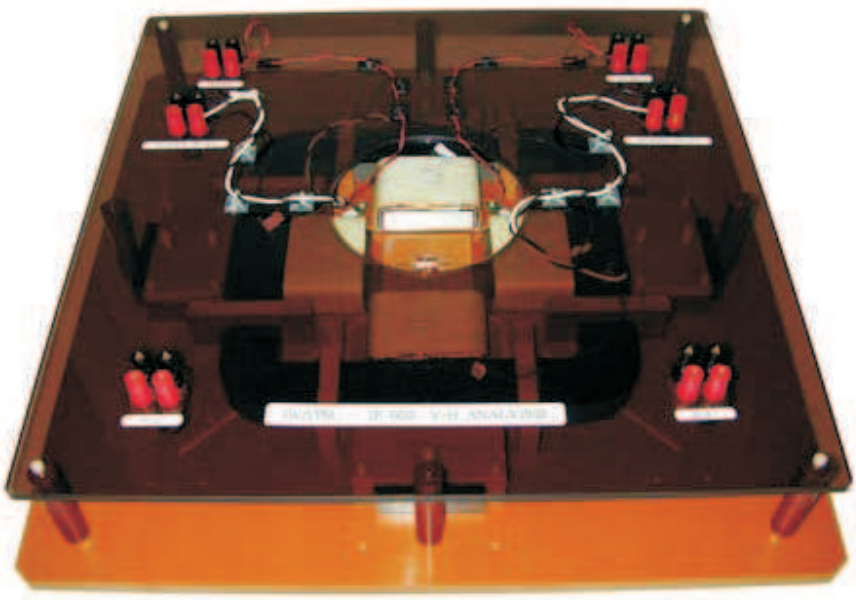
Az Epstein-keret esetében tehát a feltételezés az, hogy a mágneses térerősség és a mágneses indukció vektorai egymással párhuzamosak. Ezen oknál fogva kezdtek el foglalkozni más mérési elrendezésekkel, melyek különféle alakú próbatestet használva alkalmasak arra, hogy a mágneses térerősség és a mágneses indukció alakulását pontosabban meg tudják határozni [4, 139]. Három jellegzetes alak terjedt el: négyszög, hatszög, kör.

A négyszög alakú próbatestben lejátszódó folyamatok vizsgálatára már a kereskedelemben is kapható berendezés létezik [24, 103, 132, 137–153], amely alkalmas lineáris és cirkulárisan polarizált mágneses tér előállítására és mérésére. A próbatesthez a 2.13(a) ábrán látható módon vékony légrésen keresztül kapcsolódik a két, egymásra merőleges járom mágneses tere, melyeket egy-egy tekercs gerjeszt. A jármokat külön mágneskör zárja. Az x és az y irányú mágneses teret gerjesztő tekercsek két-két, egymással sorosan kapcsolt tekercsből állnak. A mérések elvégzéséhez két független, vezérelhető generátor szükséges. A mágneses indukció vektor két ortogonális komponensének mérése két egymásra merőleges tekerccsel történik, amelyeket a próbatestbe fúrt kis átmérőjű lyukakon keresztül lehet átvezetni. A minta felületén a mágneses térerősség vektor két komponensének mérése a próbatestre helyezett tekercsekkel történik. Az említett elrendezés a 2.13(b) ábrán látható [141].

Másik lehetőség a hatszög alakú próbatest alkalmazása [24, 154], amelyet általában nagyobb méretű próbatestek vizsgálatára alkalmaznak. Emiatt alkalmas anizotrop anyagok karakterisztikájának mérésére is. A mérés elve hasonló a fentiekhez, de háromfázisú



(a) Sematikus vázlat



(b) Egy megvalósított elrendezés [141]

2.13. ábra. Négyszög alakú próbatestet tartalmazó mérési összeállítás

gerjesztést alkalmaznak, hiszen a hatszög alakú próbatesthez három járom csatlakozik.

A dolgozat 3.2. fejezetében a kör alakú próbatest vizsgálatára alkalmas mérési elrendezéssel részletesen foglalkozom [138, 142, 155–160], ezért itt erre nem térek ki. A mérés elve a fentiekkel azonos, de az elrendezés lényegesen olcsóbb, mert egy villamos motorból kialakítható.

A vektoriális hiszterézis mérésére alkalmas elrendezések sarkalatos pontja a mágneses térerősség vektorának vagy a mágneses indukció vektorának szabályozása. Szabályozásra azért van szüksége, mert az árammal egyik mennyiség sincs egyszerű, közvetlen kapcsolatban, azaz előre definiált lefutású mágneses térerősség vagy mágneses indukció elérése csak visszacsatolás révén érhető el [129,138,139,149,152,153,157,161–163]. A szabályozás nehézsége abban áll, hogy a nemlineáris szabályozandó rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata nem ismert. Ezen oknál fogva sok esetben becslést is alkalmaznak a berendezés modelljének paraméterinek meghatározására [161, 162], de a cél a legegyszerűbb proporcionális szabályozóval is elérhető.

Ezen mérések során kulcskérdés, hogy a minta lehető legnagyobb részén homogén legyen a mágneses tér alakulása [138, 139, 146–149, 152, 159, 164]. A mágneses térerősség és a mágneses indukció tekercsekkel történő mérése a próbatest közepén történik, általában 20 mm × 20 mm-es felületen. Numerikus analízis által ismert, hogy a tér homogenitása növelhető azáltal, hogy a próbatest és a gerjesztő járom között légrés van [146, 147, 150, 159, 164]. Másik lehetőség, hogy a próbatest fölé ugyanolyan anyagból készült árnyékoló lapot helyeznek. Ez a megoldás kétdimenziós lineáris végeselem-módszerrel történő tervezés eredményeképp született [146, 147, 159, 164].

A mágneses indukció mérése tekercs segítségével történik. A tekercs Epstein-keret esetében körbeveszi az anyag teljes keresztmetszetét, a többi esetben a próbatestbe kis átmérőjű lyukakon keresztül lehet vezetni a mérőtekercset. A legtöbb esetben a mágneses térerősség mérése is tekercsek segítségével történik, amelyet a próbatest felületére kell helyezni. A cél a minta felületén a mágneses térerősség mérése. A szenzorok kalibrációja rendkívül fontos ezekben az esetekben [132, 136, 138, 145–150, 152, 165, 166]. Sok helyen ún. Rogowski–Chattock-tekercset, vagy Hall-szenzort alkalmaznak a mágneses térerősség mérésére [137–139, 153].

Különféle villamos berendezések korszerű tervezése számítógépen futó szoftverekkel lehetséges, amelyek valamely numerikus technikát alkalmaznak. A tervezés során a legjobb anyagokat, a legmegfelelőbb elrendezéseket kell a tervezőnek optimalizáció útján kiválasztania. Ez rendkívül időigényes és nagy számítási kapacitást kívánó feladat, amikor a különféle anyagok tulajdonságairól információt csak mérés útján lehet szerezni. Transzformátorok és villamos gépek számítása, tervezése során a fenti eljárások megbízhatósága, az eredmények reprodukálhatósága rendkívül fontos, amely nagymértékben befolyásolja a számítás kimenetét, hiszen a numerikus analízis során a használt modellek identifikációja a mérések alapján lehetséges [103, 138–140, 167]. Ezért nagyon fontos a numerikus technikák és a gyakorlati mérések párhuzamos alkalmazása.

A vektor hiszterézis mérésére alkalmas eszközök fő tervezési eszköze a végeselem-módszer [137,138,155,156,159,164]. A tervezés célja alkalmas szenzorrendszer, próbatest, gerjesztés stb. optimalizálása és analizálása. A numerikus technikák további nagy előnye a méréssel szemben, hogy lehetőség nyílik bepillantani a térváltozók alakulására olyan helyeken, ahol a mérés gyakorlatilag lehetetlen.

2.3. Elektrodinamikai problémák analízise numerikus módszerekkel

Az elektrodinamika alapegyenleteiből, azaz a Maxwell-egyenletekből kiindulva olyan bonyolult rendszerek behatóbb vizsgálata és tervezése lehetséges, mint például a transzformátorok, különféle motorok és villamos gépek, mérőberendezések, antennák, csőtápvonalak és üregrezonátorok stb. [14,24,168–185]. A problémát leíró Maxwell-egyenletek és a peremfeltételek ismeretében a potenciálfüggvény megválasztása után a vizsgálat tárgyát képező feladatkör parciális differenciálegyenletei előállíthatók. Egyszerű esetekben a kitűzött feladat megfogalmazható a térváltozókra is. Ezen parciális differenciálegyenletek és peremfeltételek jellemzik a vizsgált elektrodinamikai rendszert.

Az életben fellelhető összes probléma alapjában véve folytonos idejű bemeneti jelre folytonos idejű kimeneti jellel reagál, azaz a körvonalazott rendszerek túlnyomó többsége folytonos idejű, analóg rendszer [15–17]. A jelen dolgozatban tárgyalt elektrodinamikai rendszerek gerjesztés-válasz kapcsolata rendkívül bonyolult parciális differenciálegyenletekből és peremfeltételekből álló egyenletrendszer, amelyek számítógéppel történő megoldása csakis az egyenletek diszkretizálásával lehetséges [14, 178, 182, 183, 186–192]. A térbeli diszkretizálás többféle módon megoldható, a dolgozatban a legnépszerűbb, s a legdinamikusabban fejlődő technikára, a végeselem-módszerre szorítkozom [14, 178, 179, 181–183,186–197], azonban a közölt egyenletek megoldása más numerikus technikákkal is elvégezhető. Az időbeli diszkretizálás Euler hátralépő módszere, vagy a Crank–Nicolson-séma szerint egyszerű, és ezen technikák stabil megoldásra vezetnek [14, 24, 192]. A folytonos idejű rendszerek gerjesztés-válasz kapcsolatát alkalmas diszkretizálással tehát diszkrét idejű rendszerré lehet alakítani. Hangsúlyozom, hogy a diszkretizálás térben is megtörténik.

A Maxwell-egyenletekből potenciálok választásával tehát parciális differenciálegyenletek írhatók fel, melyek térbeli és időbeli diszkretizálásával algebrai egyenletek kaphatók. Az algebrai egyenletek megoldása pedig a potenciálok egy közelítését szolgáltatja, vagyis numerikus technikával mindig egy közelítés kapható. Analitikusan azonban csak nagyon kevés, egyszerű geometriával bíró feladat oldható meg.

A dolgozatban nemlineáris elektrodinamikai rendszerekkel foglalkozom, amikor a mágneses térerősség és a mágneses indukció között fennálló konstitúciós reláció nemlineáris, és hiszterézissel jellemzett. Ezen bevezető fejezet a lineáris elektrodinamikai rendszerek irodalomból ismert leírására, a végeselem-módszer rövid bemutatására, valamint a nemlineáris feladatok bevezető megfogalmazására koncentrál. A lineáris elektrodinamika feldolgozásában nagy segítségemre volt Bíró Oszkár professzor úr [183] disszertációja, s az abból visszafejthető széleskörű irodalom. Ebből a munkásságból kiindulva született meg a [14] monográfia.

2.3.1. A Maxwell-egyenletek

A dolgozatban használt numerikus technika, a végeselem-módszer, a Maxwell-egyenletek differenciális alakjából indul ki. A $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ mágneses térerősség, az $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ elektromos térerősség, a $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ mágneses indukció, a $\vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ áramsűrűség mellett a következő egyenletekről van szó:

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t), \tag{2.22}$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}, \tag{2.23}$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = 0, \tag{2.24}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\mathscr{H}}\{\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\}, \quad \text{vagy} \quad \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\mathscr{B}}\{\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\}, \tag{2.25}$$

$$\vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \begin{cases} \vec{\boldsymbol{J}}_0(\vec{\boldsymbol{r}},t), & \text{a tekercsben,} \\ \vec{\boldsymbol{0}}, & \text{a levegőben,} \\ \sigma\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t), & \text{az örvényáramú tartományban.} \end{cases} \tag{2.26}$$

Utóbbi egyenletben a σ az anyag vezetőképessége, $\vec{\boldsymbol{J}}_0(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ pedig az elektromágneses teret gerjesztő áramsűrűség. Munkám során olyan feladatokkal foglalkoztam, amelyekben a gerjesztő tekercs áramsűrűsége előírt volt. A $\vec{\mathscr{H}}\{\cdot\}$ és $\vec{\mathscr{B}}\{\cdot\}$ operátorok az anyag karakterisztikáját írják le. Levegőben ezek a $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mu_0\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$, vagy a $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \nu_0\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ konstitúciós egyenletekre egyszerűsődnek, és $\mu_0 = 1/\nu_0$ a levegő permeabilitása. Lineáris és izotrop karakterisztikájú mágneses anyagok esetében ezen egyenletek formája a $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mu_0\mu_r\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$, vagy a $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \nu_0\nu_r\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ összefüggés szerint alakul, ahol $\mu_r = 1/\nu_r$ az anyag relatív permeabilitása. Ezen kapcsolatnak számos egyéb formája ismeretes az irodalomban. Általános esetben azonban a karakterisztika valamely hiszterézismodell által reprezentált nemlineáris kapcsolatot jellemez, amelyet sok esetben (lágymágneses anyagok) egyértékű nemlinearitással írnak le.

A (2.22) egyenlet (Ampére-törvény) azt mondja ki, hogy örvényes mágneses tér áramsűrűség eredményeképp jön létre. Ezen áramsűrűség a (2.26) szerint lehet a vezetőben (például tekercs) folyó áram $\vec{\boldsymbol{J}}_0(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ áramsűrűsége, vagy épp a vezető anyagban kialakuló $\sigma\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ örvényáram. A (2.23) egyenlet a Faraday-féle indukciótörvény, amely azt mondja ki, hogy az időben változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt, amely a vezető anyagokban létrehozza az örvényáramokat. A (2.24) pedig a mágneses tér forrásmentességére utaló egyenlet.

Munkám során főleg statikus mágneses tér és örvényáramú problémákkal foglalkoztam, emiatt a fenti egyenletekben az eltolási áramot elhanyagoltam, s a közölt egyenletek az örvényáramú problémák leírására alkalmasak. Statikus mágneses tér problémák esetén az örvényáram hatása elhanyagolható, azaz a (2.23) egyenlet elhagyható, ahogy a (2.26) reláció utolsó tagja is.

A Maxwell-egyenletek a térjellemzők közötti kapcsolatokat adják meg, azonban különféle közeghatár- és peremfeltételeket kell megfogalmazni, hogy azok egyértelműen írják le a megoldandó problémákat. Két különböző közeggel kitöltött térfogat határán közeghatár feltételeket kell megfogalmazni, amely az elektromos térerősség és a mágneses térerősség tangenciális komponensének, valamint a mágneses indukció és az áramsűrűség normális komponensének folytonosságát jelenti. A mágneses térerősség tangenciális komponense akkor nem folytonos, ha a közeghatáron $\vec{\boldsymbol{K}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ felületi áram folyik. A peremfeltétel a probléma tartományát lezáró peremeken előírt feltételekben merül ki, amely a fenti tangenciális és normális komponensekre ad előírást, amelyeknek teljesülni kell.

A következőkben az egyszerűbb írásmód érdekében a vektorfüggvények argumentumát, azaz az $(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ jelölést elhagyom.

2.3.2. Potenciálformalizmusok

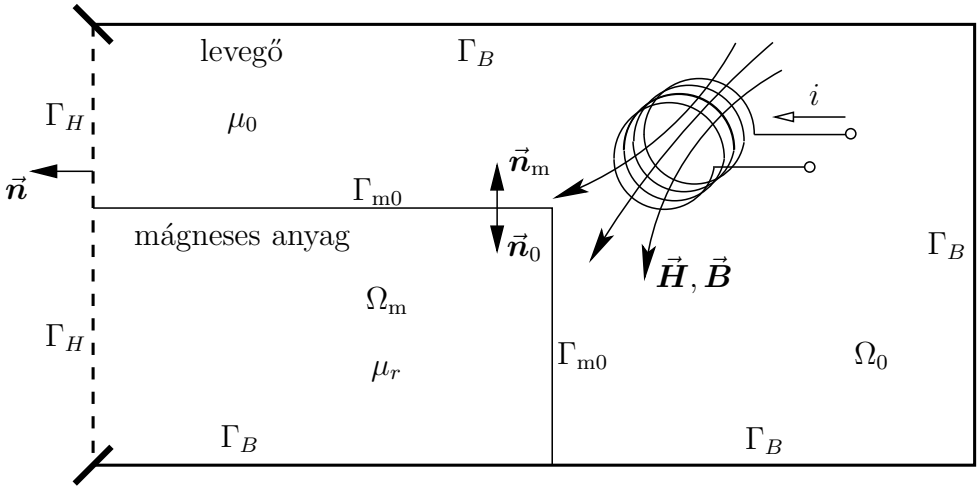
A Maxwell-egyenletek megoldása potenciálok bevezetésével lehetséges, amelynek eredményeképp az ismeretlenek (a térjellemzők) száma csökkenthető, s mindez a po-

tenciálokra felírható parciális differenciálegyenletek megoldására vezet. A potenciálok ismeretében a térjellemzők, s egyéb adatok természetesen számíthatók. Alapvetően skalárpotenciál, vagy vektorpotenciál alkalmazható a megfogalmazott problémák leírására, melyek elliptikus, valamint parabolikus típusú parciális differenciálegyenletekre vezetnek.

A következőkben a legfontosabb potenciálok bemutatására szorítkozom, amikor a probléma lineáris [14, 63, 169–179, 181–183, 185–187, 191, 198–231]. Erre építve aztán a 4. fejezetben bemutatom a nemlinearitás figyelembevételének egy lehetséges módozatát.

Statikus mágneses tér

A statikus mágneses tér problémák általános felépítése a 2.14 ábrán látható. A mágneses teret itt a tekercs i árama gerjeszti, amely a levegővel kitöltött Ω_0 tartományban helyezkedik el, s van egy tartomány (Ω_m), amelyet mágneses anyag tölt ki. A Γ_m0 jelöli a közeghatárt, a Γ_B peremen a $\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = -b$ (b a fiktív mágneses töltések felületi sűrűsége, amely szimmetriasík esetében zérus, egyébként elő kell állítani), a Γ_H peremen pedig a $\vec{\boldsymbol{H}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{K}}$ feltétel kell teljesüljön. Az $\vec{\boldsymbol{n}}$ normálvektor a 2.14 ábra szerint a kérdéses tartományból kifelé mutat.



2.14. ábra. Statikus mágneses tér feladat sematikus rajza

A statikus mágneses tér alapvetően a mágneses skalárpotenciállal, vagy a mágneses vektorpotenciállal számítható. Itt a legfontosabb összefüggésekre mutatok rá.

A mágneses skalárpotenciál. A mágneses térerősség felbontható egy rotációval bíró és egy rotációmentes komponensre, azaz

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{T}}_0 + \vec{\boldsymbol{H}}_m, \tag{2.27}$$

ahol

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_0 = \vec{\boldsymbol{J}}_0, \quad \text{és} \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_m = \vec{\boldsymbol{0}}. \tag{2.28}$$

Ez a dekompozíció kielégíti a (2.22) egyenletet. A $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál a μ_0 permeabilitású közegben számított mágneses térerősséggel egyezik meg, amely többféleképp

számítható az ismert $\vec{\boldsymbol{J}}_0$ áramsűrűségből, azaz ismertnek tekinthető [14,183]. A rotációmentes komponens előállítható egy Φ skalárpotenciál (mágneses skalárpotenciál) negatív gradienseként, azaz

$$\vec{\boldsymbol{H}}_m = -\nabla\Phi, \tag{2.29}$$

vagyis a mágneses térerősség alakja az alábbi:

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{T}}_0 - \nabla\Phi, \quad \text{az} \quad \Omega_0 \cup \Omega_\mathrm{m} \quad \text{tartományon.} \tag{2.30}$$

Ezen potenciálformalizmusnak és a lineáris anyagmodellnek megfelelő Laplace–Poisson-egyenlet a (2.24) egyenletből az alábbi:

$$\nabla \cdot (\mu\nabla\Phi) = \nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0), \quad \text{az} \quad \Omega_0 \cup \Omega_\mathrm{m} \quad \text{tartományon,} \tag{2.31}$$

ahol $\mu = \mu_0$ az Ω_0, és $\mu = \mu_0\mu_r$ az Ω_m tartományban. A feladatkörhöz a következő Dirichelt-típusú, illetve Neumann-típusú peremfeltételek tartoznak:

$$\Phi = \Phi_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen,} \tag{2.32}$$

$$(\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0 - \mu\nabla\Phi) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = -b, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen,} \tag{2.33}$$

ahol a Φ_0 konstans a skalárpotenciál gradiense tangenciális komponensének vonalmenti integrálásával számítható. Ezt Φ-formalizmusnak is nevezik.

A fenti potenciált redukált mágneses skalárpotenciálnak is nevezik, mert a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áramvektorpotenciál tartalmazza a gerjesztés hatását. Sok esetben (pl. mágneses pólusok számításakor) alkalmazható a teljes mágneses skalárpotenciál, melyet a $\vec{\boldsymbol{H}} = -\nabla\Psi$ összefüggés definiál, ekkor ugyanis az áramsűrűség a vizsgált tartományban zérus. Létezik még a két skalárpotenciál kombinációja, az ún. $\Phi - \Psi$-formalizmus.

A mágneses vektorpotenciál. Az $\vec{\boldsymbol{A}}$ mágneses vektorpotenciál a (2.24) egyenlet alapján vezethető be a

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} \tag{2.34}$$

összefüggés szerint, amely az $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\mathrm{m}$ tartományban érvényes. A fenti kifejezés a (2.22) egyenlet és a lineáris konstitúciós reláció szerint a következő lineáris parciális differenciálegyenletre vezet:

$$\nabla \times (\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla(\nu\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) = \vec{\boldsymbol{J}}_0, \quad \text{az} \quad \Omega_0 \cup \Omega_\mathrm{m} \quad \text{tartományon.} \tag{2.35}$$

A ν paraméter a permeabilitás reciproka, amely $1/\mu_0$ az Ω_0, és $1/(\mu_0\mu_r)$ az Ω_m tartományban. Az egyenlet bal oldalának második tagja a mágneses vektorpotenciál divergenciájának megválasztása eredményeképp került az egyenletbe, ugyanis itt a $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0$ Coulomb-mértéket célszerű alkalmazni. Az egyenlethez a következő peremfeltételek tartoznak:

$$(\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{K}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen,} \tag{2.36}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen,} \tag{2.37}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}, \tag{2.38}$$

$$\nu \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}, \tag{2.39}$$

ahol $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ a $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}} = b$ összefüggés alapján számítható. A (2.35)-(2.39) egyenletek által definiált formalizmus a mértékkel ellátott $\vec{\boldsymbol{A}}$-formalizmus. Ezt kötött formalizmusnak is hívják a divergencia megkötése miatt.

A divergencia rögzítésének hiányára érzéketlen numerikus technikával dolgozva, s felhasználva a (2.28) összefüggés első egyenletét, a következő ún. szabad $\vec{\boldsymbol{A}}$-formalizmusra jutunk:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_0, \quad \text{az} \quad \Omega_0 \cup \Omega_\mathrm{m} \quad \text{tartományon}, \tag{2.40}$$

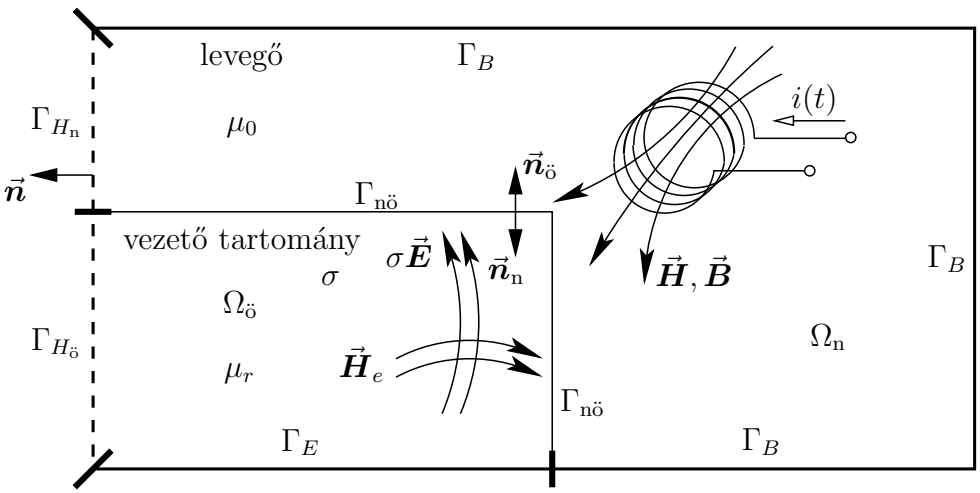
$$(\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{K}, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen}, \tag{2.41}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}. \tag{2.42}$$

Létezik a skalárpotenciál és a vektorpotenciál kombinációjaként eredményezett $\vec{\boldsymbol{A}}-\Phi$-formalizmus is, melynek célja az ismeretlenek csökkentése.

Örvényáramú tér

Az örvényáramú tér problémák általános felépítése a 2.15 ábrán látható. A mágneses teret ebben az esetben is a tekercs $i(t)$ árama gerjeszti, amely a levegővel kitöltött Ω_n nemvezető tartományban helyezkedik el, s az $\Omega_\mathrm{ö}$ tartományt σ vezetőképességű anyag tölti ki, amely esetleg még mágnesezhető is. Ebben a tartományban jön létre a $\sigma\vec{\boldsymbol{E}}$ örvényáram által keltett $\vec{\boldsymbol{H}}_e$ mágneses tér, amely visszahat az azt létrehozó mágneses térre. A $\Gamma_\mathrm{nö}$ felület választja el a két tartományt, ahol a közeghatár feltételeknek teljesülni kell, a Γ_B peremen a $\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = -b$, a Γ_{H_n} peremen a $\vec{\boldsymbol{H}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{K}}$, a $\Gamma_{H_\mathrm{ö}}$ peremen a $\vec{\boldsymbol{H}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, a Γ_E peremen pedig az $\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ feltétel kell teljesüljön. Belátható, hogy a $\Gamma_{H_\mathrm{ö}}$ peremen a $\vec{\boldsymbol{J}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0$, a Γ_E peremen pedig a $\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0$ feltétel is teljesül.



2.15. ábra. Örvényáramú probléma sematikus rajza

Ebben a fejezetben csak az $\Omega_\mathrm{ö}$ tartományban kialakuló elektromágneses tér számításával foglalkozom, a következő fejezetben pedig az itt összefoglalt formalizmusokat csatolom a levegő tartományában kialakuló statikus mágneses tér formalizmusaival.

Az örvényáramú tartomány számítása is többféleképp lehetséges. Alapvetően a $\vec{\boldsymbol{T}}$ áram-vektorpotenciál kiegészítve a Φ redukált mágneses skalárpotenciállal, és az $\vec{\boldsymbol{A}}$ mágneses vektorpotenciál a V elektromos skalárpotenciállal alkalmazható. Ebben a fejezetben a legfontosabb összefüggésekre utalok.

Az áram-vektorpotenciál és a mágneses skalárpotenciál. Az örvényáram forrásmentessége a folytonossági egyenlet szerint jól ismert összefüggés, amelyből a $\vec{\boldsymbol{T}}$ áram-vektorpotenciál származtatható, azaz a $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{J}} = 0$ összefüggés szerint a

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}, \quad \text{az} \quad \Omega_{\ddot{o}} \quad \text{tartományon} \tag{2.43}$$

bevezethető. A (2.22) Ampére-féle gerjesztési törvény alapján a mágneses térerősség alakja az alábbi:

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{T}}_0 + \vec{\boldsymbol{T}} - \nabla\Phi, \quad \text{az} \quad \Omega_{\ddot{o}} \quad \text{tartományon}, \tag{2.44}$$

ahol a Φ a fentiekben már bemutatott redukált mágneses skalárpotenciál. A $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ tag hozzáadása a $\vec{\boldsymbol{T}} - \nabla\Phi$ összefüggéshez numerikus szempontból előnyös.

Az elektromos térerősség a (2.26) egyenlet utolsó összefüggése szerint tehát a következő módon számítható az áram-vektorpotenciálból:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\sigma}\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}, \quad \text{az} \quad \Omega_{\ddot{o}} \quad \text{tartományon}. \tag{2.45}$$

A (2.23) Faraday-törvénybe, a (2.24) egyenletbe, és a peremfeltételekbe helyettesítve az alábbi egyenletrendszer definiálja a $\vec{\boldsymbol{T}}, \Phi$-formalizmust:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma}\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}\right) + \mu\frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}}{\partial t} - \mu\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}_0}{\partial t}, \quad \text{az} \quad \Omega_{\ddot{o}} \quad \text{tartományon}, \tag{2.46}$$

$$\nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}} - \mu_o\nabla\Phi) = -\nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0), \quad \text{az} \quad \Omega_{\ddot{o}} \quad \text{tartományon}, \tag{2.47}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\ddot{o}}} \quad \text{peremen}, \tag{2.48}$$

$$\Phi = \Phi_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\ddot{o}}} \quad \text{peremen}, \tag{2.49}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma}\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}\right) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}, \tag{2.50}$$

$$(\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0 + \mu\vec{\boldsymbol{T}} - \mu\nabla\Phi) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}. \tag{2.51}$$

Ebben a formalizmusban a $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{T}} = 0$ Coulomb-mérték egyelőre nem szerepel, ezt a szabad formalizmust megfelelően választott numerikus technikával kell realizálni.

A Coulomb-mértéket is magába foglaló kötött formalizmus egyenletei az alábbiak:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma}\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}\right) - \nabla\left(\frac{1}{\sigma}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{T}}\right) + \mu\frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}}{\partial t} - \mu\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}_0}{\partial t}, \quad \text{az} \quad \Omega_{\ddot{o}} \quad \text{tartományon}, \tag{2.52}$$

$$\nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}} - \mu\nabla\Phi) = -\nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0), \quad \text{az} \quad \Omega_{\ddot{o}} \quad \text{tartományon}, \tag{2.53}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\ddot{o}}} \quad \text{peremen}, \tag{2.54}$$

$$\Phi = \Phi_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_ö} \quad \text{peremen}, \tag{2.55}$$

$$\frac{1}{\sigma}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{T}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_ö} \quad \text{peremen}, \tag{2.56}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma}\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}\right) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}, \tag{2.57}$$

$$(\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0 + \mu\vec{\boldsymbol{T}} - \mu\nabla\Phi) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}, \tag{2.58}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}. \tag{2.59}$$

A mágneses vektorpotenciál és az elektromos skalárpotenciál. A mágneses vektorpotenciál a mágneses indukció forrásmentességéből vezethető le, miszerint

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}, \quad \text{az} \quad \Omega_ö \quad \text{tartományon}. \tag{2.60}$$

A második Maxwell-egyenlet alapján az elektromos térerősség is definiálható,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} - \nabla V, \quad \text{az} \quad \Omega_ö \quad \text{tartományon}, \tag{2.61}$$

ahol V az elektromos skalárpotenciál.

Az Ampére-féle gerjesztési törvény és az örvényáram forrásmentessége szolgáltatja a felírható parciális differenciálegyenleteket, melyeket a peremfeltételek egészítenek ki az alábbi módon:

$$\nabla \times (\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) + \sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma\nabla V = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{az} \quad \Omega_ö \quad \text{tartományon}, \tag{2.62}$$

$$-\nabla \cdot \left(\sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma\nabla V\right) = 0, \quad \text{az} \quad \Omega_ö \quad \text{tartományon}, \tag{2.63}$$

$$(\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_ö} \quad \text{peremen}, \tag{2.64}$$

$$\left(-\sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} - \sigma\nabla V\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_ö} \quad \text{peremen}, \tag{2.65}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}, \tag{2.66}$$

$$V = V_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}. \tag{2.67}$$

Itt V_0 értéke konstans. Ezen szabad formalizmus a Coulomb-mértéket nem foglalja magába, de alkalmas numerikus technikával megoldható.

A Coulomb-mértéket is tartalmazó kötött $\vec{\boldsymbol{A}}, V$-formalizmus a következő egyenletek által definiált:

$$\nabla \times (\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla(\nu\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) + \sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma\nabla V = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{az} \quad \Omega_ö \quad \text{tartományon}, \tag{2.68}$$

$$-\nabla \cdot \left(\sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma\nabla V\right) = 0, \quad \text{az} \quad \Omega_ö \quad \text{tartományon}, \tag{2.69}$$

$$(\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_ö} \quad \text{peremen}, \tag{2.70}$$

$$-\left(\sigma\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}+\sigma\nabla V\right)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}=0,\quad \text{a}\quad \Gamma_{H_{\ddot{o}}}\quad \text{peremen,} \tag{2.71}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}=0,\quad \text{a}\quad \Gamma_{H_{\ddot{o}}}\quad \text{peremen,} \tag{2.72}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{A}}=\vec{\boldsymbol{0}},\quad \text{a}\quad \Gamma_{E}\quad \text{peremen,} \tag{2.73}$$

$$V=V_0,\quad \text{a}\quad \Gamma_{E}\quad \text{peremen,} \tag{2.74}$$

$$\nu\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=0,\quad \text{a}\quad \Gamma_{E}\quad \text{peremen.} \tag{2.75}$$

Csatolt problémák

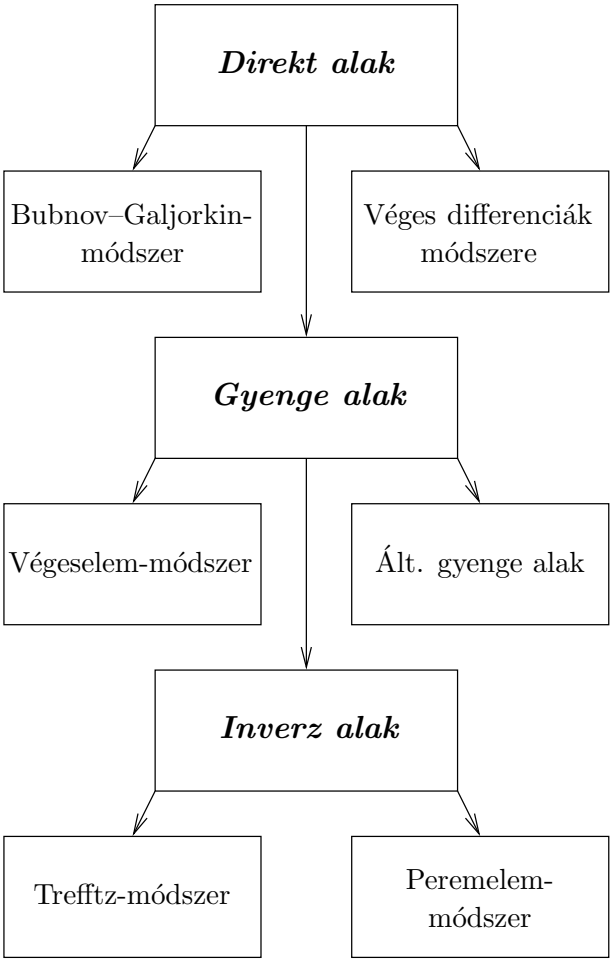
A 2.15 ábra szerint az örvényáramú tartományt egy örvényáramtól mentes tartomány veszi körül. Az örvényáramú tartományt vagy a $\vec{\boldsymbol{T}},\Phi$-alakban megfogalmazott formalizmus, vagy az $\vec{\boldsymbol{A}},V$-formalizmus írja le. A levegőben lejátszódó statikus mágneses tér leírására a Φ skalárpotenciál, vagy az $\vec{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciál alkalmazható. A kapcsolódó $\Gamma_{\text{nö}}$ közeghatáron a különféle formalizmusokat csatolni kell egymáshoz, s ezen a felületen a mágneses térerősség tangenciális komponense, valamint a mágneses indukció normális irányú komponense folytonos kell legyen. A csatolás a legkülönfélébb formalizmusokat eredményezheti: $\vec{\boldsymbol{T}},\Phi-\Phi$, $\vec{\boldsymbol{A}},V-\vec{\boldsymbol{A}}$, $\vec{\boldsymbol{A}}^*-\vec{\boldsymbol{A}}$, $\vec{\boldsymbol{T}},\Phi-\vec{\boldsymbol{A}}$, $\vec{\boldsymbol{T}},\Phi-\vec{\boldsymbol{A}}-\Phi$, $\vec{\boldsymbol{A}},V-\Phi$, $\vec{\boldsymbol{A}},V-\vec{\boldsymbol{A}}-\Phi$. Minden egyes formalizmusnak lehet kötött és szabad kivitele.

Az egyes potenciálformalizmusok levezetése és bemutatása rendkívül hosszadalmas, de a [14] szakkönyvben mindez megtalálható.

2.3.3. A súlyozott maradék elve, a végeselem-módszer

Az előző fejezetben bemutatott, és a továbbiakban bemutatásra kerülő elliptikus és parabolikus típusú parciális differenciálegyenletek közelítő megoldása többek között a súlyozott maradék elv alapján lehetséges [14, 24, 169, 170, 174, 178, 179, 181, 183, 192, 198, 223, 232–237]. A súlyozott maradék elv körén belül három fő csoportba sorolhatók a különféle módszerek, ahogy az a 2.16 ábrán is látható. Ezek közül csak a gyenge alakkal, a Galjorkin-technikával, és ezen belül a végeselem-módszerrel foglalkozom [14, 169, 170, 178, 179, 181–183, 186, 187, 189–191, 193, 198, 238, 239]. A végeselem-módszer (Finite Element Method, FEM) a legnépszerűbb és a legelterjedtebben alkalmazott numerikus technika parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására.

A súlyozott maradék elv lényege abban áll, hogy nem törekszik sem a parciális differenciálegyenletek, sem a peremfeltételek tökéletes kielégítésére, hanem a parciális differenciálegyenletek és a peremfeltételek maradékának egy tetszőleges súlyfüggvénnyel vett ún. belső szorzatát teszi zérussal egyenlővé, s ennek a súlyozott maradéknak a megoldása szolgáltatja a probléma megoldásának egy lehetséges közelítését. A belső szorzatban szereplő integrálás változatlan formában történő alkalmazása a direkt alakot eredményezi. Amennyiben a szorzatfüggvényre vonatkozó integrálási tétel kerül alkalmazásra, úgy a gyenge alak nyerhető, melynek eredményeképp a deriválás rendje eggyel csökken. A harmadik alak pedig az inverz alak. A súlyfüggvény tetszőlegesen megválasztható. Az ún. Galjorkin-eljárás kapcsán a súlyfüggvényt és a potenciálokat közelítő függvényt azonosnak kell választani, s ezúton lehet eljutni a végeselem-módszerhez is. Megjegyzem, hogy a végeselem-módszer a Dirichlet-típusú peremfeltételeket tökéletesen, míg a Neumann-típusú peremfeltételeket a térbeli diszkretizálás finomságától függően, közelítőleg elégíti ki.



2.16. ábra. A numerikus térszámítási eljárások főbb csoportjai

Az egyes potenciálformulák gyenge alakjának bemutatása terjedelmes, nagyon részletes összefoglalását a [14] tartalmazza.

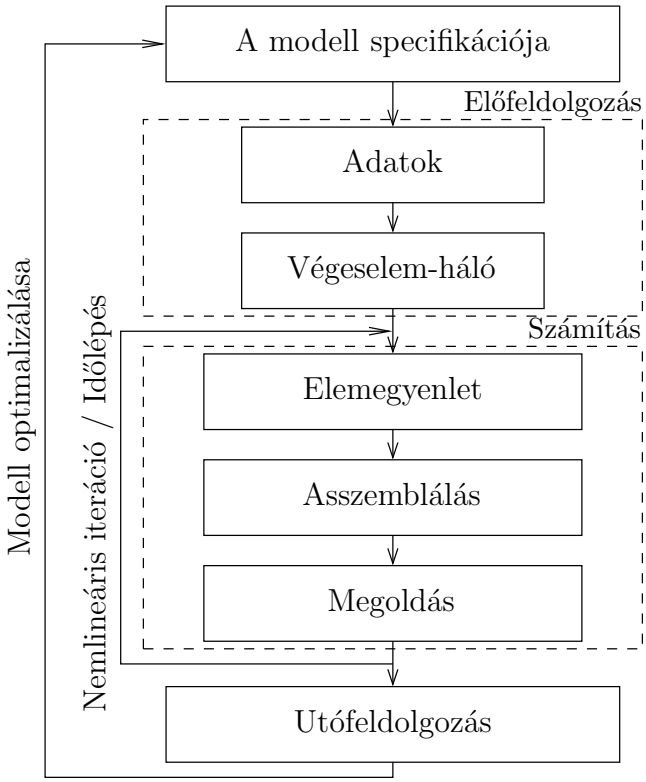
A végeselem-módszer áttekintése

A végeselem-módszer tehát egy numerikus technika parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására, melynek lényege, hogy a megoldandó probléma geometriáját egyszerű geometriájú elemek segítségével diszkretizálva, azokon egyszerű egyenleteket felírva lehet a feladatot megoldani. Munkám során elsősorban a `COMSOL Multiphysics` [240, 241] és a `Matlab` [185, 242] szoftvereket alkalmaztam, amelyek kiválóan alkalmasak a gyenge alakkal megfogalmazott problémák kezelésére, illetve saját fejlesztésű rutinok gyors tesztelésére. A Széchenyi István Egyetem Automatizálási Tanszékén egy saját fejlesztésű végeselem-szoftver fejlesztésébe kezdtünk C-nyelven [243], amely a szabad forráskódú `GMSH` [244] és `PETSc` [245] programcsomagokra épül, s célul tűztük ki az összegyűjtött nemlineáris formalizmusok implementációját [14, 243, 246]. A `GMSH` biztosítja a keretrendszert, a végeselem-környezetet, a hálógenerálót és a megjelenítőt, a `PETSc` függvényeivel pedig a modern számítástechnika előnyeit (például párhuzamos számítások különféle hardvereken) is kihasználva lehet megvalósítani a konkrét formalizmusokat, s azok megoldását.

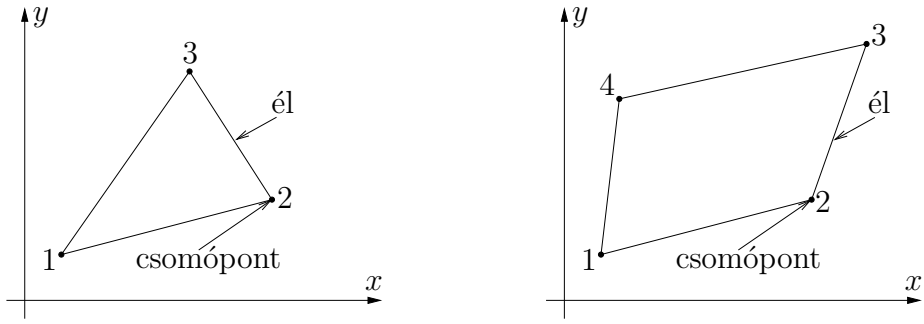
A végeselem-módszer lépései a 2.17 ábrán láthatók. Az első lépés a helyes modell megalkotása, ami áll egyrészt a vizsgált geometria CAD-rendszerben (Computer Aided Design, CAD, azaz számítógéppel történő tervezés) történő leképezéséből, másrészt a megfelelő fizikai képből kiindulva, a megoldandó parciális differenciálegyenletek és peremfeltételek felírásából. Ebben a lépésben kell kidolgozni a diszkretizálás eredményeképp kapott megoldandó egyenleteket is, amelyek a súlyozott maradék elvnek megfelelően lineáris, vagy nemlineáris algebrai egyenletek.

Az előfeldolgozási fázisban a feladat a különféle anyagi jellemzők és a gerjesztés pontos definiálása, valamint a geometria végeselem-ráccsal történő diszkretizálása. A végeselem egyszerű geometriai alakzat, két dimenzióban például háromszög (2.18(a) ábra) és négyszög (2.18(b) ábra), három dimenzióban pedig tetraéder (2.19(a) ábra) és hexaéder (2.19(b) ábra) a legelterjedtebben alkalmazott forma, amelyekkel egy geometria egyszerű szabályokkal felbontható. Az így előálló háló definiálja a megoldandó egyenletrendszert is, ugyanis a háló csomópontjaiban vagy a háló élei mentén helyezkednek el az ismeretlen potenciál közelítésére használt polinomok együtthatói. Előbbi esetben csomóponti, utóbbi esetben vektoriális vagy élelemes közelítésről beszélünk.

Ezután a súlyozott maradék elv gyenge alakjára támaszkodva az egyetlen végeselemre felírható lokális egyenletek (elemegyenlet) alapján fel kell építeni a megoldandó globális egyenletrendszert. Ez az ún. asszemblálás, amikor ciklusban végig kell menni valamennyi végeselemen, s a megfelelő egyenletek együtthatóit a globális egyenletrendszerben a megfelelő helyre hozzá kell adni. Ennek eredménye egy nagyméretű, ritka (sparse) mátrix, mivel nagyon kevés eleme különbözik zérustól. A megoldó algoritmus szempontjából sok esetben célszerű szimmetrikus mátrixot generálni, amennyiben az lehetséges. Az egyenletrendszer megoldására számos algoritmus létezik. A számítási

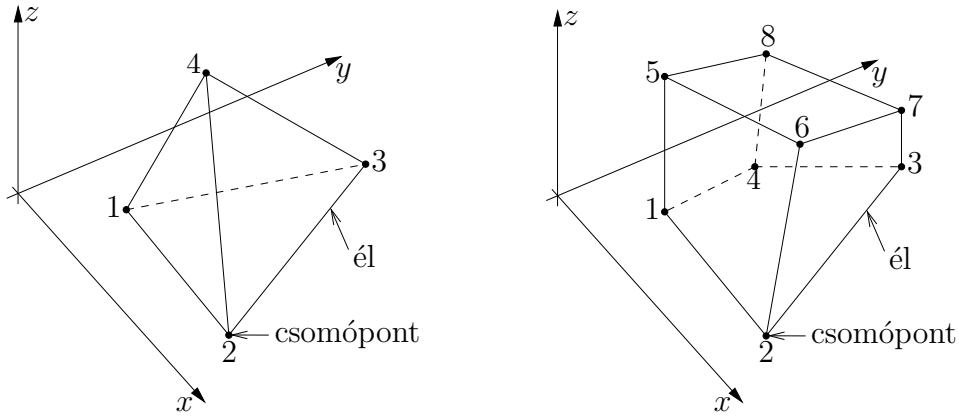


2.17. ábra. A szimuláció lépései végeselem-módszer esetén



(a) Háromszög (b) Négyszög

2.18. ábra. Tipikus végeselemek a kétdimenziós $x - y$ síkon



(a) Tetraéder (b) Hexaéder

2.19. ábra. Tipikus végeselemek három dimenzióban

ciklust különböző bemeneti feltételek mellett ismételni kell az időfüggő örvényáramú problémák időtartományban történő megoldása esetén, míg a nemlineáris egyenletrendszer megoldása iterációt is igényel.

Az egyenletrendszer megoldása után a közelítő potenciálfüggvény ismeretében gyakorlatilag az összes kérdéses mennyiség számítható. Ez az utófeldolgozási fázis. A szimulációs eredmények birtokában a modell javítható, a végeselemen alapuló és időbeli diszkretizálás finomítható, azaz a modell jósága iteratívan növelhető.

A potenciálok közelítése

A numerikus módszerek a megoldandó problémák egy közelítését szolgáltatják. Végeselem-módszer esetén a parciális differenciálegyenletekben szereplő potenciálokat a végeselemekre felírt polinomok segítségével lehet közelíteni, amelyeket formafüggvényeknek is neveznek. Ebben a fejezetben az approximáció lényegét foglalom össze.

A skalár súlyfüggvényt (vektor-skalár függvény) és az approximáció során alkalmazott közelítő formafüggvényt a továbbiakban $N = N(\vec{\boldsymbol{r}})$ jelöli, a vektor súlyfüggvényt (vektor-vektor függvény) a közelítő formafüggvényt pedig $\vec{\boldsymbol{W}} = \vec{\boldsymbol{W}}(\vec{\boldsymbol{r}})$.

A $\Phi = \Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$ vagy $\Phi = \Phi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ reprezentatív skalár potenciálfüggvények m számú

lineárisan független függvény lineáris kombinációjával approximálhatók:

$$\Phi \simeq \Phi_a = \Phi_D + \sum_{i=1}^{m} N_i \Phi_i, \tag{2.76}$$

ahol Φ_a jelöli a Φ potenciálfüggvény közelítését. Az $N_i = N_i(\vec{\boldsymbol{r}})$ az approximáció formafüggvénye, $\Phi_i = \Phi_i(t)$ pedig az ismeretlen együtthatókat jelöli (statikus esetben ezek természetesen időtől függetlenek). A fenti közelítés első tagja a Dirichlet-féle peremfeltételek kielégítését hivatott biztosítani,

$$\Phi_D = g, \quad \text{a} \quad \Gamma_D \quad \text{peremen}, \tag{2.77}$$

ahol g egy előre megadott érték. Ennek következménye, hogy a Γ_D peremen a második összeg minden tagja zérus kell legyen, azaz teljesülnie kell az

$$N_i = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_D \quad \text{peremen} \quad (\forall i,\ i = 1, \cdots, m) \tag{2.78}$$

feltételnek.

Az $\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ vagy $\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ reprezentatív vektor potenciálfüggvények k számú lineárisan független formafüggvény segítségével közelíthetők a következő módon:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \simeq \vec{\boldsymbol{A}}_a = \vec{\boldsymbol{A}}_D + \sum_{j=1}^{k} \vec{\boldsymbol{W}}_j A_j. \tag{2.79}$$

Itt $\vec{\boldsymbol{A}}_a$ jelöli az $\vec{\boldsymbol{A}}$ vektorfüggvény approximációját, a $\vec{\boldsymbol{W}}_j = \vec{\boldsymbol{W}}_j(\vec{\boldsymbol{r}})$ az approximáció formafüggvényét, $A_j = A_j(t)$ pedig az ismeretlen együtthatókat, amelyek statikus esetben nem függenek az időtől. Az első tag a Dirichlet-típusú peremfeltételek pontos kielégítésére szolgál, azaz ismert $\vec{\boldsymbol{G}}$ vektorváltozó, vagy ismert G skalárváltozó mellett az alábbi feltételek valamelyikét elégíti ki:

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}}_D = \vec{\boldsymbol{G}}, \quad \text{vagy} \quad \vec{\boldsymbol{A}}_D \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = G, \quad \text{a} \quad \Gamma_D \quad \text{peremen}. \tag{2.80}$$

Ennek következménye, hogy a Γ_D peremen a formafüggvény a következő feltételek egyikét kell teljesítse:

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{W}}_j = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{vagy} \quad \vec{\boldsymbol{W}}_j \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_D \quad \text{peremen} \quad (\forall j,\ j = 1, \cdots, k). \tag{2.81}$$

A formafüggvények

A skalárpotenciálok csomóponti végeselemekkel közelíthetők, míg a vektorpotenciálok approximálhatók akár csomóponti, akár élelemek (vektorelemek) segítségével. A csomóponti elemek alkalmazása során az N_i formafüggvények segítségével kell közelíteni a potenciálokat, s az ismeretlenek a végeselem-háló csomópontjaihoz kapcsolódnak. Az élmenti végeselemek esetén a $\vec{\boldsymbol{W}}_j$ formafüggvényekből és az élekhez rendelt ismeretlenekből áll elő a közelítő potenciál. A közelítő formafüggvények egyszerű folytonos polinomokból épülnek fel, melyek tartója egyetlen végeselem.

A formafüggvények a következő tulajdonságokkal bírnak [181]:

(i) Minden formafüggvény a teljes problématér felett értelmezett;

(*ii*) Minden csomóponti formafüggvény egyetlen csomóponthoz, illetve minden élmenti vektor-formafüggvény egyetlen élhez tartozik;

(*iii*) Minden csomóponti függvény azon végeselemeken különbözik nullától, amelyek érintkeznek annak csomópontjával, s minden vektorfüggvény csak azon végeselemeken nem nulla, amelyekhez az él tartozik;

(*iv*) A csomóponti függvény értéke egységnyi az adott csomópontban, illetve minden más csomópontba zérus. A vektorfüggvény vonalmenti integrálja az adott él mentén egységnyi, az összes többi él mentén pedig zérus;

(*v*) A formafüggvények lineárisan függetlenek.

A végeselem-módszerrel számított közelítő megoldás pontossága alapvetően három módon javítható. A végeselemek számát növelve, vagyis a felbontást finomítva az ún. h-FEM nyerhető. A közelítő polinomok fokszámának növelése a p-FEM-et eredményezi, míg a kettő alkalmas kombinációja a hp-FEM.

A csomóponti formafüggvények. Skalárfüggvények approximációja a (2.76) összefüggés szerint lehetséges. Végeselem-módszer esetében az $N_i = N_i(\vec{\boldsymbol{r}})$ bázisfüggvényeket csomóponti formafüggvényeknek hívják. A formafüggvények tulajdonságai alapján a csomóponti formafüggvények az alábbi összefüggés szerint definiálhatók:

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{az } i\text{-edik csomópontban,} \\ 0, & \text{bármely más csomópontban.} \end{cases} \tag{2.82}$$

A csomóponti formafüggvények segítségével vektorpotenciálok közelítése is lehetséges, habár újabban az ún. élmenti formafüggvények alkalmazása hódít. A reprezentatív $\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ potenciálfüggvény háromdimenziós esetben három komponens segítségével írható fel az alábbi módon:

$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + A_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + A_z \vec{\boldsymbol{e}}_z \tag{2.83}$$

ahol $\vec{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{e}}_y$ és $\vec{\boldsymbol{e}}_z$ az x, y és z irányokba mutató egységvektorok, az $A_x = A_x(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$, az $A_y = A_y(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$, és az $A_z = A_z(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ függvények pedig ezen három irányban az $\vec{\boldsymbol{A}}$ vektorpotenciál ortogonális komponensei.

Kézenfekvő az alábbi közelítés:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} &\simeq \sum_{i=1}^{m} N_i \left(A_{x,i}\, \vec{\boldsymbol{e}}_x + A_{y,i}\, \vec{\boldsymbol{e}}_y + A_{z,i}\, \vec{\boldsymbol{e}}_z \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} N_i A_{x,i}\, \vec{\boldsymbol{e}}_x + \sum_{i=1}^{m} N_i A_{y,i}\, \vec{\boldsymbol{e}}_y + \sum_{i=1}^{m} N_i A_{z,i}\, \vec{\boldsymbol{e}}_z, \end{aligned} \tag{2.84}$$

azaz az egyes komponenseket külön-külön lehet csomóponti formafüggvényekkel közelíteni. A kutatások eredményeképp kiderült azonban, hogy a vektorpotenciálok ily módon történő közelítése számos numerikus problémát okoz. A Coulomb-mérték előírására különös gondot kell fordítani, különben az iteratív módszerek sok esetben nem konvergensek. A Coulomb-mértékkel egyértelművé tett kötött formalizmust csomóponti végeselem-módszerrel szokás megoldani. A másik lényeges probléma, hogy nagy permeabilitású közeg és kis permeabilitású közeg határán (például vas/levegő határ) a megoldás

nem helyes. Itt külön feltételt kell generálni a közeghatáron, ami azonban nem következik az egyenletekből, de az élmenti formafüggvények irányába mutat. A probléma ugyanis abban áll, hogy a csomóponti formafüggvény folytonos, azaz a mágneses vektorpotenciál normális irányú komponense is és tangenciális irányú komponense is folytonos. A eredmények viszont azt mutatják, hogy vas/levegő határon a normális irányú komponens nem folytonos.

Az élmenti formafüggvények. Az élmenti formafüggvények a fenti problémák vizsgálatának eredményeként alakultak ki. A $\vec{\boldsymbol{W}}_j$ élmenti formafüggvények segítségével az $\vec{\boldsymbol{A}}$ reprezentatív vektorpotenciál a következő módon közelíthető:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \simeq \sum_{j=1}^{k} \vec{\boldsymbol{W}}_j \, A_j. \tag{2.85}$$

A $\vec{\boldsymbol{W}}_j$ élmenti formafüggvény definíciója az alábbi:

$$\int_l \vec{\boldsymbol{W}}_j \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \begin{cases} 1, & \text{a } j\text{-edik él mentén,} \\ 0, & \text{bármely más él mentén,} \end{cases} \tag{2.86}$$

azaz a formafüggvény élmenti vonalintegrálja a j-edik él mentén egységnyi, s az összes többi él mentén nulla. Ez azt jelenti, hogy a $\vec{\boldsymbol{W}}_j$ vektor formafüggvénynek tangenciális komponense csak a j-edik él mentén van, míg az összes többi élre merőleges. Háromdimenziós esetben nemcsak a j-től különböző élekre merőleges a formafüggvény, hanem minden olyan oldalra is, amely a j-edik éllel nincs kapcsolatban.

Ha két végeselemnek van közös éle, akkor ezen az élen az approximált potenciálfüggvény tangenciális komponense folytonos, míg normális komponense nem feltétlenül az.

Megjegyzem, hogy a szabad formalizmust ezen élmenti formafüggvényekkel jellemzett vektoriális végeselem-módszerrel szokás megoldani.

2.3.4. A nemlinearitás figyelembe vétele

Munkám fő célja a kidolgozott hiszterézismodellek és a különféle potenciálformalizmusok összekapcsolása alkalmas numerikus technikával. Az így előálló, a hiszterézis karakterisztika beillesztésére is alkalmas eljárás kidolgozása bonyolultsága és gépigénye miatt ma is a kutatások középpontjában áll. Kutatásom a [14,62,63,72,192,238,247–268] műveken alapul, amelyek a fixpontos eljárást helyezik előtérbe a nemlineáris egyenletrendszer megoldására. A Maxwell-egyenletekből levezethető potenciálformalizmusok és a hiszterézis karakterisztika linearizálására alkalmas polarizációs formula összekapcsolása konvergens iterációs eljáráshoz vezet, amely kiválóan használható bonyolult háromdimenziós problémák megoldására. Eredményeim didaktikailag is egybefüggően a 4. fejezetben foglalom össze.

3. fejezet

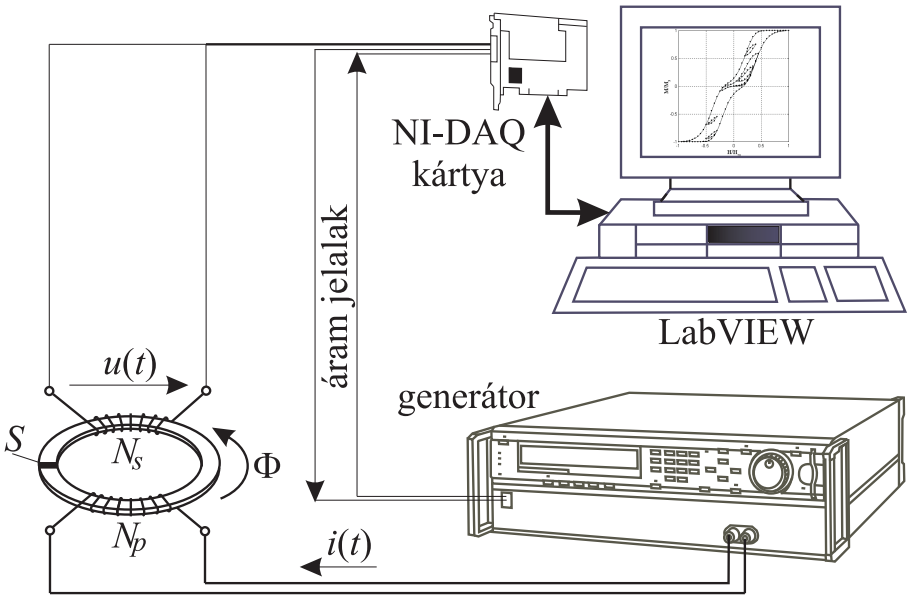
A ferromágneses hiszterézis vizsgálata

3.1. A skalár hiszterézis karakterisztika

3.1.1. A skalár karakterisztika mérése

A mérési elrendezés bemutatása

Az általam megvalósított, a skalár hiszterézis karakterisztika mérésére alkalmas elrendezés blokkvázlata a 3.1 ábrán látható [64, 269–274]. A 2.2. fejezetben már ismertettem, hogy ez a mérési összeállítás kihasználja, hogy egy toroid alakú próbatesten belül a $\vec{\boldsymbol{H}}(t)$ mágneses térerősség vektor és a $\vec{\boldsymbol{B}}(t)$ mágneses indukció vektor egymással minden pontban párhuzamos. A toroid keresztmetszetén áthaladó térjellemzők $H(t)$ és $B(t)$ átlaga mérhető, s ezen két skalár időbeli változása írja le a mágneses anyag viselkedését.



3.1. ábra. A realizált skalár hiszterézis mérésére alkalmas elrendezés blokkvázlata

A karakterisztika mérése során a toroid N_p menetszámú primer tekercsét előre definiált időfüggvényű $i(t)$ árammal lehet gerjeszteni, aminek hatására a transzformátor

N_s menetszámú, szakadással lezárt szekunder tekercsében $u(t)$ üresjárási feszültség indukálódik. Az áram és az indukált feszültség időfüggvénye mérhető a számítógépbe helyezett National Instruments mérési adatgyűjtő (Data Acquisition, NI-DAQ) kártya segítségével. Az áram jelalakját ugyanezen kártyán keresztül lehet a generátorhoz eljuttatni. A számítógépen futó, általam `LabVIEW` környezetben kifejlesztett eljáráscsomag vezérli a teljes mérést, szabályozza az áramgenerátort, méri és feldolgozza a bejövő jeleket, valamint megjeleníti a mérési eredményeket. A mérések során felhasznált eszközök részletes bemutatása az A. függelékben tekinthető meg.

A mágneses térerősség átlagos értéke a toroidon belül Ampére törvénye értelmében a következő összefüggés szerint számítható:

$$H(t) \cong \frac{N_p\, i(t)}{l}, \tag{3.1}$$

ahol l a toroid közepes hossza. A mágneses indukció Faraday törvénye szerint az indukált feszültség ismeretében számítható:

$$B(t) = B_0 + \frac{1}{S\, N_s} \int_0^t u(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{3.2}$$

ahol S a toroid keresztmetszete, B_0 pedig konstans.

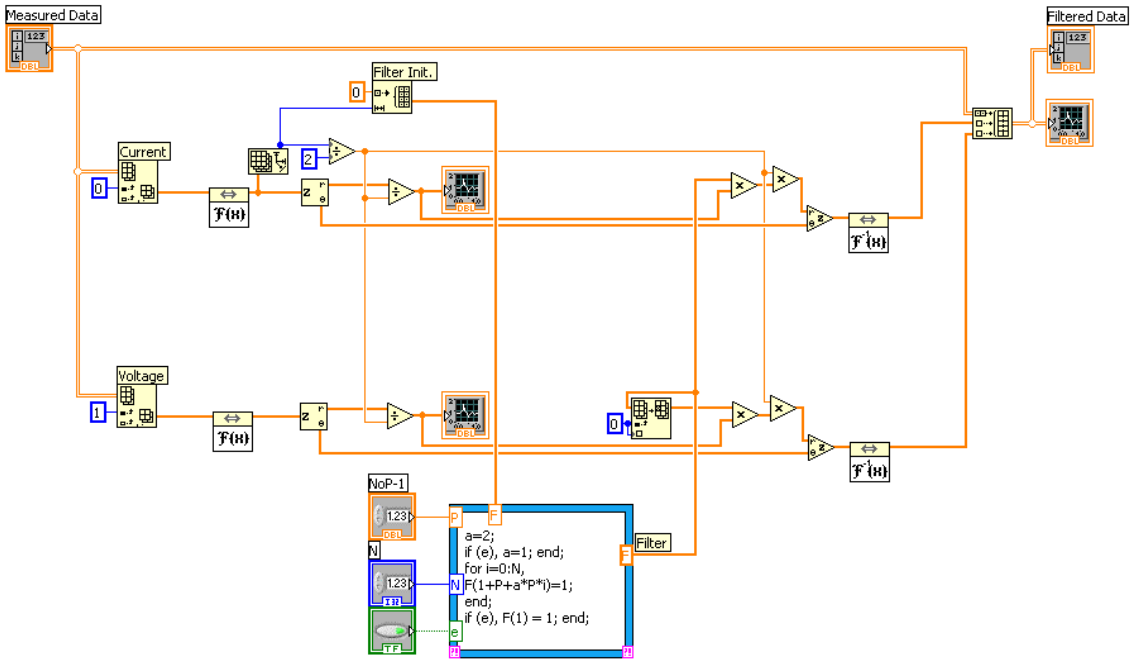
A kísérleti mérések során kétféle lágymágneses anyagból készült toroid karakterisztikáját vizsgáltam. Az egyik próbatest C19 jelzésű szerkezeti acélból készült, a másik pedig az ArcerolMittal által gyártott M250-35A [64,104,105] jelzésű anyagból. Utóbbiból különféle villamos forgógépeket gyártanak például villamos hajtású járművekben történő felhasználásra. A jelölésben az M betű utal a mágnesezhető acélra, 2,5 W/kg a maximális veszteség 1,5 T mágneses indukció mellett, 50 Hz frekvencián, s a lemez vastagsága 0,35 mm. A jelölés végén álló A betű a hengerelésre és a gyártásra utal, az anyagban nincs kitüntetett mágnesezési irány. A méréseket különböző frekvenciákon is elvégeztem, miáltal a dinamikus hatások frekvenciafüggését is vizsgáltam.

A C19 jelzésű anyagból készült toroid transzformátor adatai a következők: $N_p = 236$, $N_s = 246$, $l = 314\,\mathrm{mm}$, $S = 10\,\mathrm{mm}^2$. Az M250-35A anyagból készített toroid transzformátor adatai pedig a következők: $N_p = 175$, $N_s = 65$, $l = 163\,\mathrm{mm}$, $S = 26{,}25\,\mathrm{mm}^2$. Előbbi egyetlen lemezből áll, utóbbi viszont tizenöt összeragasztott 0,35 mm vastagságú lemezből. A vastagabb lemezben a kialakuló örvényáramok jelentősen befolyásolják a mérési eredményeket, a lemezelt vastest viszont gyakorlati szempontból jelentősebb.

Zajszűrés

A mérések során kapott hiszterézis karakterisztika meglehetősen zajos, amely különösen kicsiny gerjesztések mellett és alacsony frekvencián számottevő. Megfigyeléseim szerint a zaj időbeli átlaga pozitív, ami az integrálás eredményeképp kapott $B(t)$ jelben egyre növekvő offszetet jelent. Tapasztalataim szerint ez a zaj a hardver különböző beállításai mellett sem eliminálható, ezért a 3.2 ábrán látható, nagyon hatékony szoftveres megoldást dolgoztam ki `LabVIEW` környezetben, amely Fourier-transzformáción és digitális szűrésen alapul [270, 271, 273].

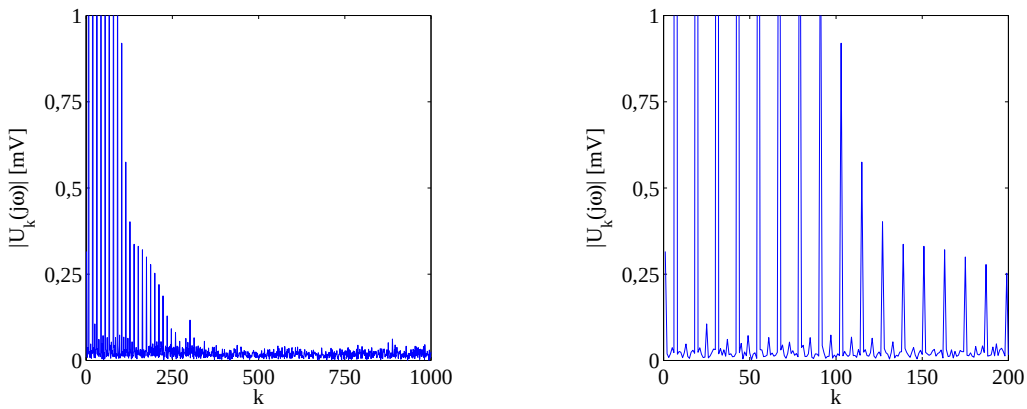
Első lépésben a mért áramjelet és feszültségjelet a `LabVIEW` FFT (Fast Fourier Transform) blokkjával Fourier-transzformáltam, majd a nem kívánt harmonikusokat egy `LabVIEW`-ban implementált digitális szűrő segítségével eliminátam. Ez egyszerűen annyit



3.2. ábra. A `LabVIEW` környezetben implementált szűrési eljárás

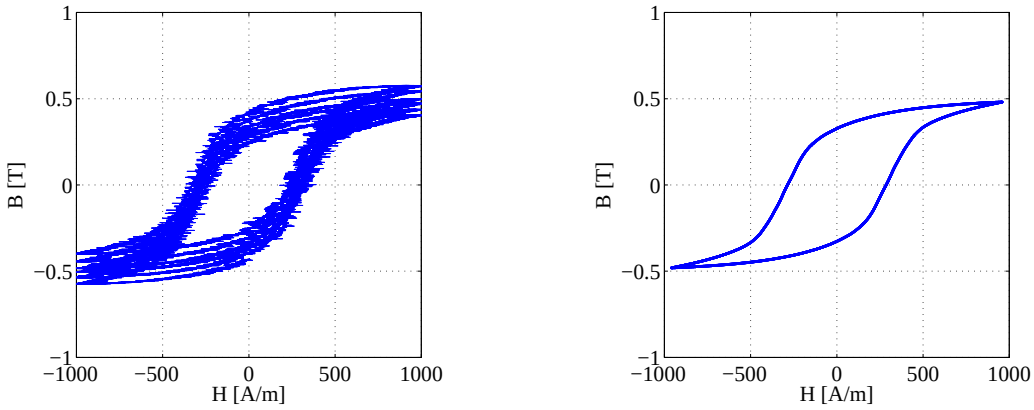
jelent, hogy az amplitúdóspektrum megfelelő elemeit zérussal beszoroztam. Végezetül a szűrt spektrumot visszatranszformáltam az időtartományba.

A 3.3(a) ábrán egy mért zajos indukált feszültség amplitúdóspektrumának egy részlete látható példaként, s egy nagyított intervallumot mutat a 3.3(b) ábra. Ezen ábrákon jól látható, hogy a hasznos jel spektruma mellett gyakorlatilag minden frekvencia képviselteti magát valamekkora amplitúdóval. Ezen nem kívánt komponenseket kell zérussal beszorozni a szűrés során. A 3.4(a) ábrából kitűnik, hogy a zajos mérési eredményekből számított mágneses térerősség és az integrálás útján számított mágneses indukció is zajos, utóbbi időben növekvő offszettel is terhelt. A 3.4(b) ábrán látható a szűréssel nyert karakterisztika, ami a zajok hatásaitól mentes.



(a) Az amplitúdóspektrum (b) Egy nagyított intervallum

3.3. ábra. Példa a mért indukált feszültség amplitúdóspektrumára



(a) Zajszűrés előtt (b) Zajszűrés után

3.4. ábra. A mért karakterisztika

A szabályozó algoritmus

A mágneses indukció időfüggvényének szabályozása több szempontból is fontos. Skalár hiszterézis mérése esetén az áram és a mágneses térerősség a (3.1) összefüggésnek megfelelően egymással arányosan alakulnak. Ha a karakterisztika a könyök és a koercitív térerősség környékén nagyon gyorsan változik, akkor az gyors indukcióváltozást jelent, ami tüskeszerű indukált feszültséget okoz a szekunder tekercs kapcsain. Ezeket a tüskéket mintavételezésen alapuló technikával azonban nehéz mérni, ugyanis nagyon sok mintavételezési pont szükséges a pontos és megismételhető mérésekhez. Mindemellett a gyors fluxusváltozás Faraday törvényének megfelelően nagy örvényáramokat is indukál a próbatestben, ami meghamisítja a statikus karakterisztika mérésének eredményeit. Ezen okoknál fogva célszerű a nagy fluxusváltozási sebességet csökkenti oly módon, hogy a szekunder tekercs kapcsain mérhető indukált feszültség időfüggvényét írjuk elő például szinuszos lefutásúra, vagy a vele kapcsolatban álló mágneses indukció időfüggvényét. Az ezt megvalósító proporcionális típusú szabályozó algoritmus az alábbi [270, 271, 273]:

1. Inicializálás: szinuszos lefutású áramjellel indul a mérés;
2. A mágneses térerősség és a mágneses indukció mérése a fenti szűrési technikával;
3. A mért $B(t)$ és az előre definiált $B_{\mathrm{ref}}(t)$ mágneses indukció időfüggvényének összehasonlítása, ami egy $\Delta B(t)$ hibafüggvényt eredményez,

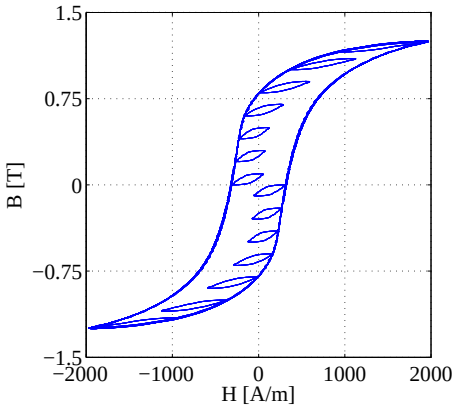
$$\Delta B(t) = B(t) - B_{\mathrm{ref}}(t); \tag{3.3}$$

4. Az áramjel megváltoztatása a $\Delta i(t) = P\Delta B(t)$ jellel, ami egy proporcionális szabályozót definiál ($0 < P < 1$, $[P] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}}$);
5. Ha $|\Delta B(t)|$ átlaga nem éri el a kívánt értéket visszalépés a 2. pontra, egyébként a mérés véget ér.

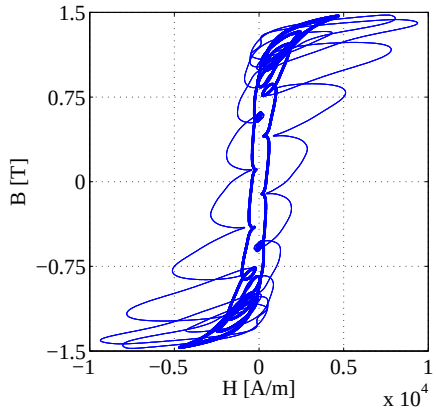
Itt jegyzem meg, hogy a vektoriális hiszterézis mérése során a szabályozás még nagyobb szerepet kap.

Mérési eredmények

A fenti, virtuális műszerekkel támogatott mérési környezetben a gyakorlat számára fontos indukció-jelformák mérhetők. A 3.5(a) ábrán egy koncentrikus hurok mentén kialakuló minor hurkok láthatók, amelyek hűen követik azt a jól ismert tényt, hogy a minor hurkok reverzibilis permeabilitása a mágneses indukció növelésével csökken [1].



(a) Minor hurkok egy koncentrikus hurok mentén



(b) A (3.4) jelhez tartozó karakterisztika

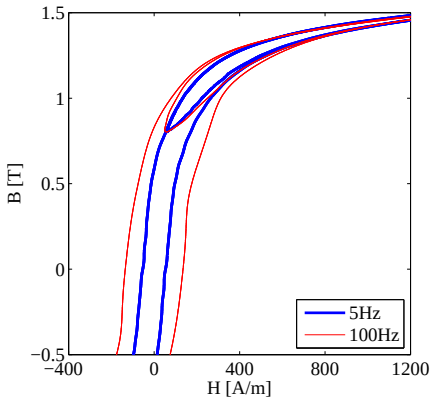
3.5. ábra. Néhány mérési eredmény a C19 anyaggal kapcsolatban

A 3.5(b) ábrán a

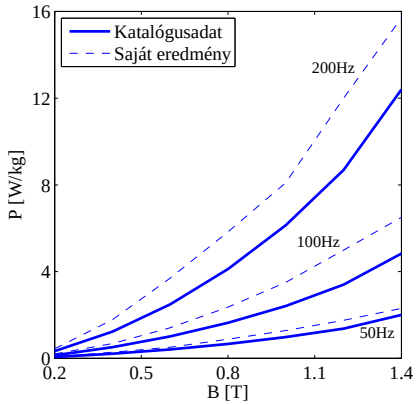
$$B_{\mathrm{ref}}(t) = \big[0.67\cos(\omega t + 16.6^\circ) + 0.072\cos(17\omega t + 163.8^\circ) + 0.034\cos(19\omega t - 177^\circ)\big]\ \mathrm{T} \tag{3.4}$$

formulának megfelelő időfüggvény szerint alakuló mérési eredmények láthatók $f = 5\,\mathrm{Hz}$ és $f = 50\,\mathrm{Hz}$ alapharmonikus-frekvencián. Magasabb frekvencián a karakterisztika jelentősen szélesedik az örvényáramú veszteségek miatt [65].

Ezen válogatott mérési eredmények jól illusztrálják a nagyon egyszerű algoritmus robusztusságát.



(a) A karakterisztika frekvenciafüggése



(b) A mért veszteségi adatok összevetése a katalógusbeli adatokkal

3.6. ábra. Néhány mérési eredmény az M250-35A anyaggal kapcsolatban

A 3.6(a) ábra az M250-35A lemezből készült anyag koncentrikus és minor hurkainak frekvenciafüggésére mutat eredményt, amikor az alapharmonikus frekvenciája 5 Hz, s amikor 100 Hz. A karakterisztika a frekvencia növelésével itt csak kismértékben szélesedik.

A gyártó katalógusai alapján a gyártó különféle méréseket végzett Epstein-keret segítségével az IEC 60404-2 szabványban rögzített szabályzatoknak megfelelően [104, 105]. Méréseit 50 Hz frekvencián, időben szinuszosan váltakozó mágneses indukciót generálva valósította meg, s néhány veszteségi adatot közölt (az anyag sűrűség a katalógus alapján $\rho = 7600\,\mathrm{kg/m^3}$). Ezen adatokkal összehasonlítottam saját eredményeim is:

- 1 T csúcsérték mellett 1,0 W/kg maximális veszteséget közölnek, méréseim alapján ez az érték 1,3 W/kg;
- 1,5 T csúcsérték mellett 2,5 W/kg maximális veszteséget közölnek, méréseim alapján ez az érték 2,7 W/kg.

Az adatok részletes összehasonlítása a 3.6(b) ábrán látható. Az általam mért veszteségek nagyobbak a gyártó által közölt adatoknál.

További mérési eredmények láthatók a következő fejezetben, a Preisach-modell validációját tárgyaló részben.

3.1.2. A statikus modell bemutatása

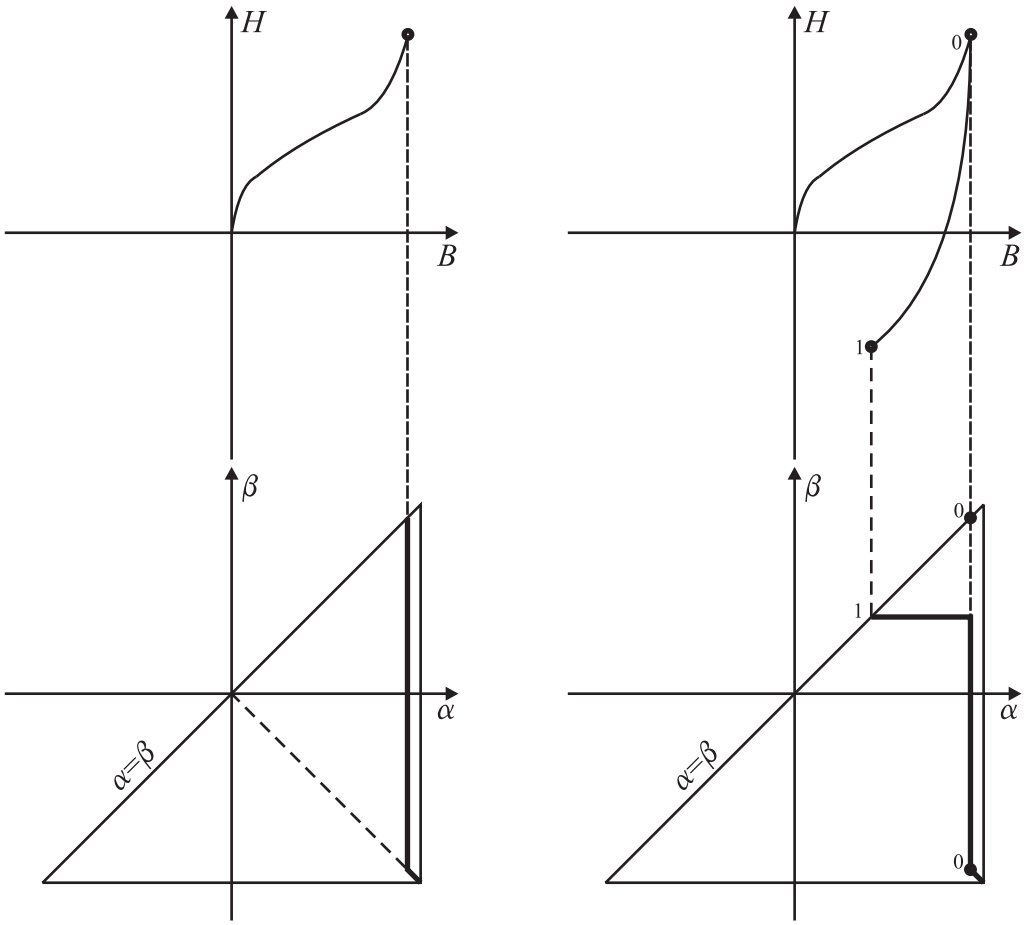
Kutatásaim során a Preisach-féle hiszterézismodellt alkalmaztam, melynek általam is felhasznált tulajdonságait a 2. fejezetben bemutattam. A modell implementálása során két fontos szempontot tartottam szem előtt: egyszerű identifikáció, amely közvetlenül a mérési eredményekhez kapcsolódik; valamint gyors működés, ami a mérnöki alkalmazás szempontjából rendkívül fontos [14, 64, 275].

A modell felépítése során az Everett-függvényt alkalmaztam, amely jól illeszkedik az elvégzett mérések eredményeihez.

Az Everett-függvény másik nagy előnye, hogy segítségével a modell kimenetének számítása során nem kell integrálást végezni, hanem a (2.7) összefüggést lehet alkalmazni. A következőkben bemutatásra kerülő algoritmus a lépcsősgörbe olyan tárolását alkalmazza, amely alkalmassá teszi a modellt párhuzamos módon történő realizálásra. A párhuzamosíthatóság az alkalmazás szempontjából rendkívül fontos.

A mágnesezési folyamatokat célszerű a $t = 0$ időpillanatban lemágnesezett állapotból indítani, amikor $H(0) = 0$ és $B(0) = 0$. Itt az inverz modell működését mutatom be, mert a vektormodell inverz alakban működik, a direkt modell működése pedig az itt leírtakkal analóg.

Ha a mágneses indukció nő, akkor a mágneses térerősség az első mágnesezési görbének megfelelően alakul, és a lépcsősgörbe balról jobbra halad, ahogy az a 3.7(a) ábrán látható. Az ábrán szaggatott vonal jelzi a lemágnesezett állapotnak megfelelő lépcsősgörbét. Ha a mágneses indukció ezután csökken, akkor egy koncentrikus görbének megfelelő visszatérési görbén halad a mágnesezési folyamat. Ezt illusztrálja a 3.7(b) ábra. Az ábrán megjelöltem a háromszögön értelmezett lépcsőfokot és a neki megfelelő eltárolt, illetve felhasznált pontot az $\alpha = \beta$ egyenes mentén. A lépcsősgörbe egy vízszintes szakasza ekkor fentről lefelé halad egyre növelve a negatív előjellel rendelkező hiszteronok területét, miáltal a mágneses térerősség is csökken. A 0-val jelzett pont az első pont, amit a memóriában tárolni kell, és ami az első lépcsőfokot jelenti. Ennek koordinátái:



(a) Az első mágnesezési görbe (b) A visszatérő görbe

3.7. ábra. Az illusztráció első és második lépése

$(\alpha_0, \beta_0 = -\alpha_0)$. Nem szükséges azonban mindkét érték tárolása. Az $\alpha = \beta$ egyenesen ugyanis alkalmas algoritmussal ezt egyetlen adat tárolásával meg lehet tenni, azaz $L = \{\alpha_0\}$. Ekkor a mágneses térerősség a következőképp számítható (2.7) alapján:

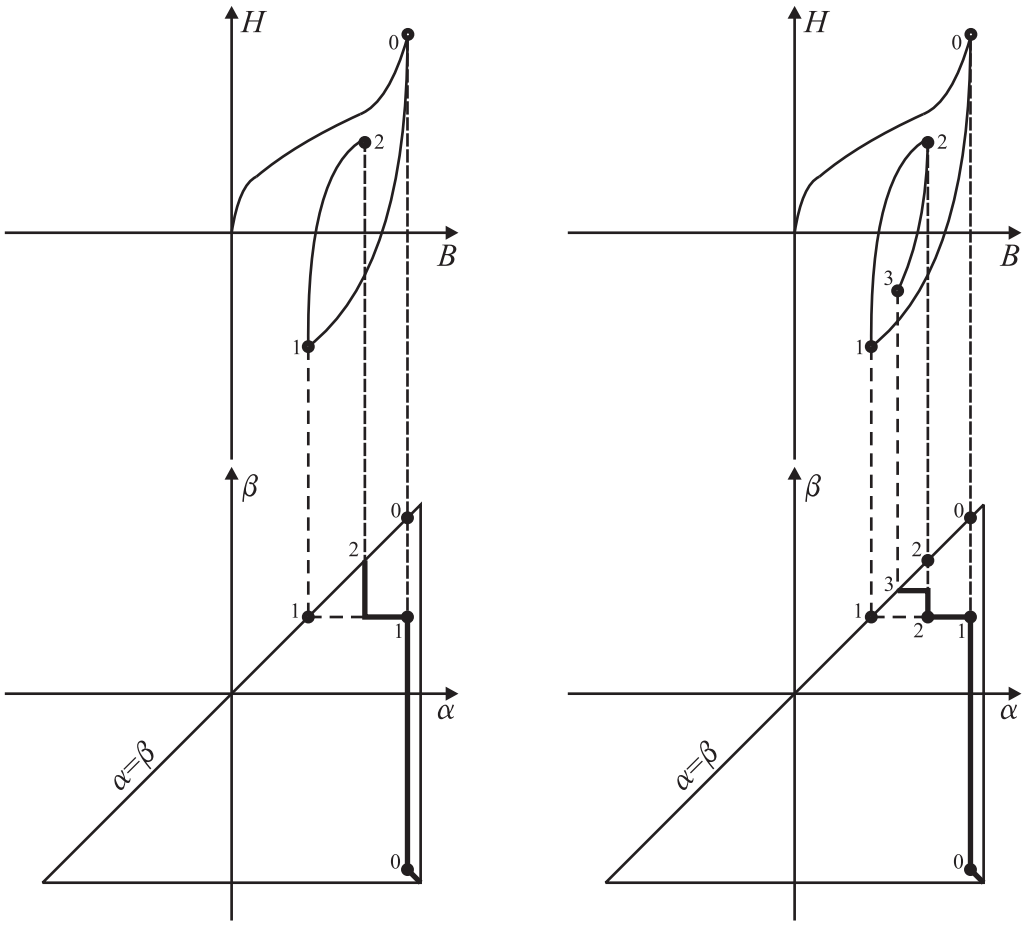
$$H(t) = H_{\max}\left(-E(\alpha_0, \beta_0) + 2\left[E(\alpha_1, \beta_0) - E(\alpha_1, \beta_1)\right]\right), \tag{3.5}$$

ahol $\beta_0 = -\alpha_0$ az L listában tárolt egyetlen érték, valamint $\alpha_1 = \alpha_0$ és $\beta_1 = B(t)/B_{\max}$. A $H_{\max}$ és $B_{\max}$ értékek a technikai szaturációhoz tartozó maximális mágneses térerősség és indukció értékek, melyekkel a modell bemenete és kimenete normalizálható. A β_1 tehát ebben a lépésben csökken, s mozgatja a lépcsősgörbét. Ha a mágneses indukció elérné a $-\alpha_0 B_{\max}$ értéket, akkor az L listából törölni kell az α_0 értéket, s vissza kell térni az első mágnesezési görbére.

A 3.8(a) ábra szerint az 1 pontban a modell bemenete nő, s egy minor hurok alakul ki. Ennek eredményeképp a lépcsősgörbe egy függőleges szakasza balról jobbra halad, s kialakult egy újabb lépcsőfok, amit tárolni kell, azaz az L lista a következő módon gyarapszik: $L = \{\beta_1, \alpha_0\}$. Itt β_1 a második, 1-gyel jelzett lépcsőfok koordinátája. Ebben az esetben a kimenet számítása a

$$H(t) = H_{\max}\left(-E(\alpha_0, \beta_0) + 2\left[E(\alpha_1, \beta_0) - E(\alpha_1, \beta_1) + E(\alpha_2, \beta_1) - E(\alpha_2, \beta_2)\right]\right) \tag{3.6}$$

összefüggésnek megfelelően alakul. Itt $\alpha_2 = B(t)/B_{\max}$, ami változik, az utolsó tag pedig az Everett-függvény definíciója miatt zérus. Ha a bemeneti jel értéke eléri az L listában



(a) Egy minor hurok nyitása (b) Harmadrendű minor hurok nyitása

3.8. ábra. Az illusztráció harmadik és negyedik lépése

tárolt α_0-nak megfelelő értéket, akkor a lista mindkét elemét törölni kell. Ebben az esetben a minor hurok bezárul.

Ha a 2-vel jelzett pontban a mágneses indukció csökken, akkor egy magasabb rendű minor hurok alakul ki, s ahogy a 3.8(b) ábrán látható, a lépcsősgörbe egy vízszintes szakasza lefelé mozog. A 2-vel jelzett pont bekerül az L listába, azaz $L = \{\beta_1, \alpha_2, \alpha_0\}$. Ha a bemeneti jel addig csökken, hogy elérje az 1 pontot, akkor a kialakult minor hurok bezárul, s a lista 1 és 2 jelzésű eleme törlődik. Más szóval a modell állapota visszatér a 3.7(b) ábrán feltüntetett állapothoz.

Az L lista tehát dinamikusan változik attól függően, hogy a modell bemenete hogy alakul.

3.1.3. A modell dinamikus kiterjesztése

A kidolgozott statikus skalármodell frekvenciafüggő kiterjesztésére a 2.1.3. fejezetben bemutatott (2.14) viszkozitáson alapuló összefüggést alkalmaztam, azaz a statikus modell kimenetéhez egyszerűen hozzáadtam egy frekvenciafüggő komponenst.

A frekvenciafüggés vizsgálata során csak az M250-35A anyaggal foglalkoztam, annak nagyobb gyakorlati jelentősége miatt [64].

3.1.4. A modell identifikációja

Az identifikáció két lépésből áll: először a statikus mérések alapján a frekvenciafüggetlen modell Everett-függvényét határoztam meg [275], s csak azután illesztettem a frekvenciafüggésért felelős komponens paramétereit [64].

A mérések során egyszerűbb a koncentrikus görbék felvétele, ezen oknál fogva a 2.6 ábrán felvázolt módon határoztam meg a statikus modell Everett-függvényét. Az Everett-függvény approximációját harmadfokú spline interpolációval végeztem.

A dinamikus komponens identifikációját kétféleképp is megoldottam. A következő összefüggés szerint számolt mágneses térerősség nagyon gyors identifikációt tesz lehetővé:

$$H(B, \mathrm{d}B/\mathrm{d}t) = H_{\mathrm{st}}(B) + \frac{\sigma d^2}{12}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \delta \left| \frac{1}{r(B)} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \right|^{1/\gamma}. \tag{3.7}$$

Az első komponens a fentiek alapján felépített statikus Preisach-modell kimenete, a második komponens a lemez adatait tartalmazza (σ a vezetőképesség, d a lemez vastagsága) és a mágneses indukció idő szerinti első deriváltját, a harmadik komponens pedig a meghatározásra váró paramétereket.

Elvégeztem az identifikációt úgy is, hogy a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti kapcsolatot végeselem-módszerrel számoltam ki (l. 5.2. fejezet), ami nyilvánvalóan időben tovább tart, de az identifikációs eredmények gyakorlatilag megegyeztek. Ezzel elvégeztem a (3.7) összefüggés validálását is.

Az identifikációs algoritmus futtatása során a modellezett karakterisztikát vetettem össze a mért koncentrikus görbével, s az így nyert hibát minimalizáltam a `MATLAB` programcsomag `fminsearch` utasítását felhasználva [185, 242, 276].

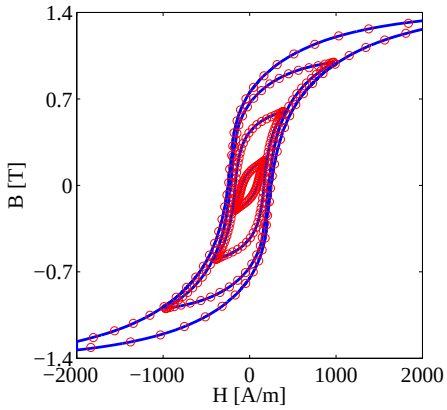
A dinamikus komponens paramétereinek identifikációjához néhány mért dinamikus koncentrikus görbét használtam fel, amelyeket az $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián mértem. Elegendőnek bizonyult a (2.15) bonyolultságú $r(B)$ függvény használata, $R_0 = 23{,}79$ értékkel. A γ paraméter értéke 1,0-nek adódott, ami arra enged következtetni, hogy a klasszikus örvényáramok hatása erőteljesebb, mint a mikro-örvényáramok hatása.

3.1.5. A modell verifikációja

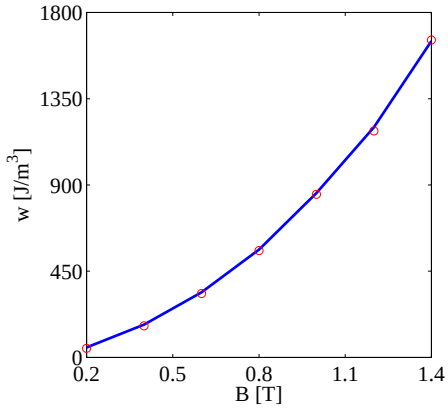
A 3.9(a) ábra mutatja a C19 szerkezeti acélból készült próbatesten végzett alacsonyfrekvenciás mérésekből kapott koncentrikus görbék és a szimuláció eredményeinek összehasonlítását. A két eredmény gyakorlatilag megegyezik, ahogy ezt a 3.9(b) ábrán felvázolt összehasonlítás is mutatja, ami a hiszterézis által határolt terület alakulását ábrázolja az indukció függvényében. Ez a jó egyezés a statikus modell felépítése révén várható is volt. Az M250-35A típusú anyag karakterisztikájának, s gyakorlatilag tetszőleges karakterisztikának a modellezése hasonló jó eredménnyel elvégezhető.

A (3.7) összefüggés alapján identifikált dinamikus Preisach-modell által szimulált eredményeket összevetettem a mérési eredményekkel, s ez az összehasonlítás látható a 3.10(a) ábrán, ahol a statikus görbét is felvázoltam szaggatott vonallal. Az ábrán rendre folytonos vonal, illetve pontsor jelöli a mérési, illetve a szimulációs eredményeket. A szimuláció során tehát figyelembe vettem az örvényáramok hatását, illetve a járulékos veszteség hatását is egy-egy formula segítségével. A 3.10(b) ábra a hiszterézis által határolt terület alakulását ábrázolja a frekvencia függvényében, különböző amplitúdójú indukciók mellett.

Az 5.2. fejezetben további összehasonlító eredményeket mutatok be.

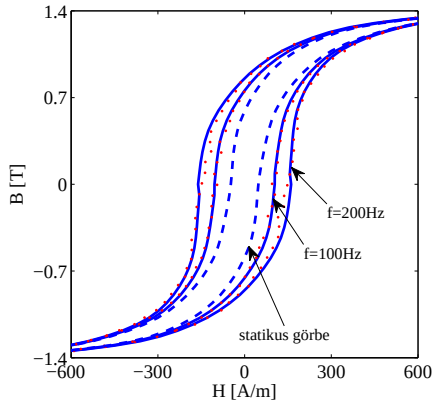


(a) A mért és szimulált koncentrikus hurkok

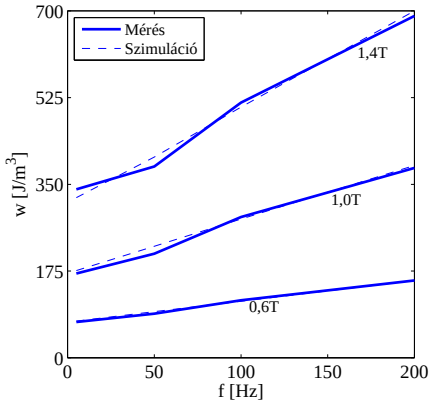


(b) A hiszterézishurok alatti terület

3.9. ábra. Mért és szimulált statikus görbék összevetése (C19, mérés: –, szimuláció: ○)



(a) A mért és szimulált koncentrikus hurkok



(b) A hiszterézishurok alatti terület

3.10. ábra. Mért és szimulált dinamikus görbék összevetése (M250-35A)

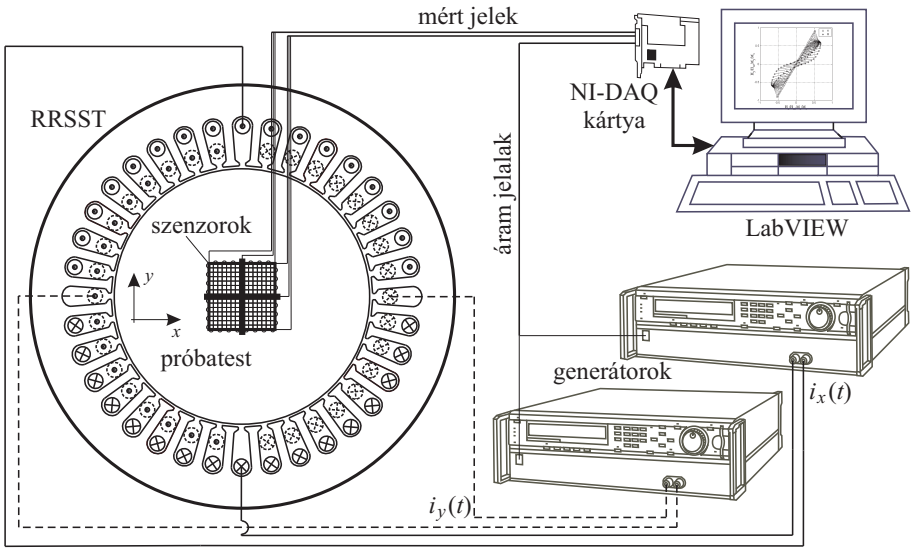
3.2. A vektor hiszterézis karakterisztika

3.2.1. A vektor karakterisztika mérése

A mérési elrendezés bemutatása

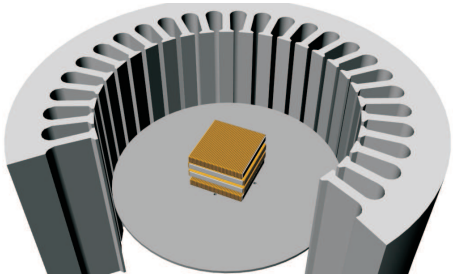
A kutatómunka során a 3.11 ábrán látható ún. RRSST-rendszert építettem, amely alkalmas a vektoriális hiszterézis jelenségének mérésére [277–289]. Az RRSST a **R**ound shaped **R**otational **S**ingle **S**heet **T**ester elnevezésből származik, azaz ez egy olyan forgó mágneses tér előállítására alkalmas eszköz, amelybe kör alakú próbatestet lehet helyezni.

Az elrendezés lelke egy átalakított villamos gép, melynek forgórészét eltávolítottam, s tekercsrendszerét lecseréltem. A forgórész helyén lehet elhelyezni a kör alakú, legfeljebb 80 mm átmérőjű próbatestet (l. még 3.12 ábra). A próbatest ez esetben is lágymágneses anyagból készült, a C19 lemez vastagsága 1 mm, az M250-35A lemez vastagsága pedig 0,35 mm. Az állórész és a próbatest között 1 mm-es légrés van, a próbatest átmérője 78 mm (l. 3.13 ábra). A háromfázisú tekercselést kétfázisúra cseréltem, melynek speciális kialakítása (3.14 ábra) biztosítja, hogy a motor belsejében homogén mágneses tér alakul



3.11. ábra. A realizált vektoriális hiszterézis mérésére alkalmas elrendezés blokkvázlata

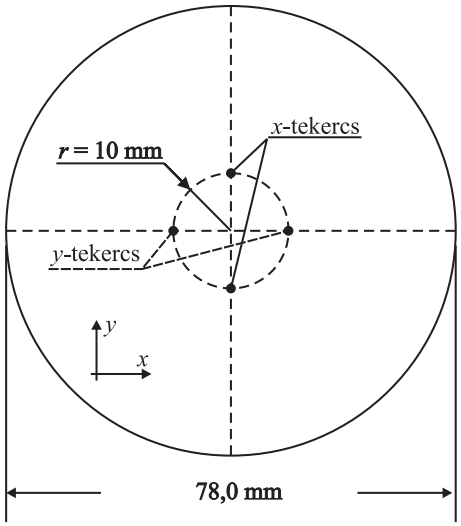
ki. A berendezésen belül kialakuló mágneses tér előállítását két, egymástól függetlenül vezérelhető áramgenerátor szolgáltatja, melyek árama számítógép segítségével szabályozható. A próbatestben létrejövő $\vec{\boldsymbol{H}}(t)$ mágneses térerősség és $\vec{\boldsymbol{B}}(t)$ mágneses indukció mérésére alkalmas szenzorok jelét szintén a számítógépbe helyezett National Instruments mérőkártya gyűjti össze. Ebben az esetben is a számítógépen futó, általam `LabVIEW` környezetben kifejlesztett eljáráscsomag felügyeli a mérést. A mérések során felhasznált eszközök részletes bemutatása az A. függelékben tekinthető meg.



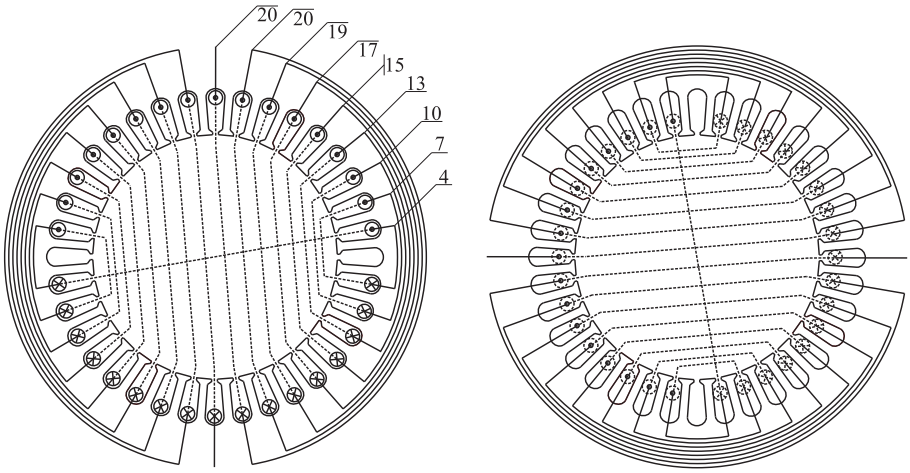
3.12. ábra. A mérési elrendezés, a próbatest és a szenzorok elhelyezése

A mágneses térerősség ortogonális komponenseit mérő szenzor négy tekercsből áll, melyből kettő-kettő méri az x és y komponensek értékét a következő módon. A mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos két különböző anyaggal kitöltött közeg határán, azaz a próbatest felszínén, s a próbatest felszínével párhuzamos komponenst kell mérni. Közvetlenül a próbatest felszínén azonban tekercs segítségével nem lehet mérést végezni. Végeselem-módszerrel végzett szimulációk segítségével igazoltam, hogy a próbatest felszínéhez közel a mágneses térerősség a próbatesttől távolodva közel lineárisan változik. Ha tehát két mérési eredmény rendelkezésre áll, akkor egy egyenes egyenletéből a mágneses térerősség a próbatest felszínén egyszerű lineáris extrapolációval számítható (l. 5.5. fejezet) [136, 138].

Az x komponens mérésére szolgáló két tekercs menetszáma $N_{H_{x,1}} = 810$ illetve $N_{H_{x,2}} = 820$, az y komponenset mérő két tekercs menetszáma pedig $N_{H_{y,1}} = 800$ és $N_{H_{y,2}} = 820$. Az egyes tekercsek hatásos keresztmetszetét szolenoiddal valamint



3.13. ábra. A próbatest és a B-tekercsek méretei



3.14. ábra. A speciális tekercsrendszer a menetszámokkal

Helmholtz-tekerccsel történő kalibrációval határoztam meg (l. A. függelék), ezek a következők: $S_{H_{x,1}} = 31{,}2764\,\mathrm{mm}^2$, $S_{H_{x,2}} = S_{H_{y,1}} = S_{H_{y,2}} = 29{,}3842\,\mathrm{mm}^2$. Az egyes tekercsek által mért mágneses térerősség értéke a

$$H(t) = H_0 + \frac{1}{S\,N\,\mu_0} \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.8}$$

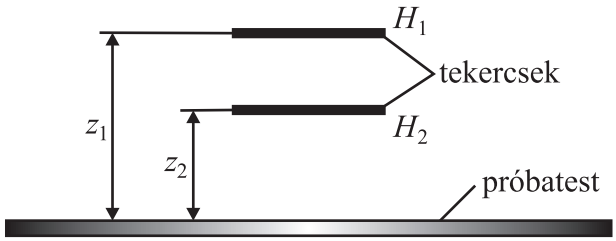
összefüggés szerint számítható, ahol H_0 az integrálási konstans, S és N a fent említett hatásos felület és menetszám, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ a vákuum permeabilitása, $u(t)$ pedig az egyes tekercsek által mért indukált feszültség. A fenti integrálás tehát négy mágneses térerősség-időfüggvényt ad. Az egyes tekercsek felülettől mért távolsága a következő: $z_{H_{x,1}} = 9{,}85\,\mathrm{mm}$, $z_{H_{x,2}} = 2{,}25\,\mathrm{mm}$, $z_{H_{y,1}} = 7{,}25\,\mathrm{mm}$, $z_{H_{y,2}} = 4{,}75\,\mathrm{mm}$. Ezen adatok, valamint a mérési eredmények birtokában a mágneses térerősség két komponense lineáris extrapolációval számítható, azaz

$$H_x(t) = \frac{H_{x,2}(t)\,z_{H_{x,1}} - H_{x,1}(t)\,z_{H_{x,2}}}{z_{H_{x,1}} - z_{H_{x,2}}}, \tag{3.9}$$

és

$$H_y(t) = \frac{H_{y,2}(t)\, z_{H_{y,1}} - H_{y,1}(t)\, z_{H_{y,2}}}{z_{H_{y,1}} - z_{H_{y,2}}}, \tag{3.10}$$

amit a 3.15 ábra illusztrál, és $H_1 = H_{x,1}(t)$, $H_2 = H_{x,2}(t)$, $z_1 = z_{H_{x,1}}$, $z_2 = z_{H_{x,2}}$ a $H_x(t)$ számítása során, valamint $H_1 = H_{y,1}(t)$, $H_2 = H_{y,2}(t)$, $z_1 = z_{H_{y,1}}$, $z_2 = z_{H_{y,2}}$ a $H_y(t)$ komponens meghatározásakor. A négy tekercs elrendezése a 3.12 ábrán is látható.



3.15. ábra. A két H-szenzor elhelyezkedése

A mágneses indukció két ortogonális komponensét egy-egy tekercs méri, amelyeket a próbatestbe fúrt kicsiny lyukakon keresztül fűztem át. A két tekercs elhelyezkedését a 3.13 ábra mutatja. Ezek menetszáma $N_{B_x} = N_{B_y} = 20$, keresztmetszetük pedig $S_{B_x} = S_{B_y} = 20\,\mathrm{mm}^2$ (C19 esetén), illetve $S_{B_x} = S_{B_y} = 7\,\mathrm{mm}^2$ (M250-35A esetén). Az általuk mért mágneses indukció komponensek a következő összefüggéssel számíthatók:

$$B(t) = B_0 + \frac{1}{S\,N} \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{3.11}$$

ahol B_0 az integrálási konstans, S és N pedig a fenti keresztmetszeti és menetszám adatok.

Zajszűrés

A (3.8) és (3.11) integrálokból látható, hogy mind a mágneses térerősség, mind a mágneses indukció meghatározása indukált feszültség mérésére vezethető vissza. Előbbi jele különösen zajos, utóbbi értéke viszont könnyebben mérhető, de érzékelhető zajjal terhelt. A mágneses térerősséghez tartozó indukált feszültséget a próbatest felett a levegőben elhelyezett tekercs méri, levegőben viszont nagyon kicsi a fluxusváltozás, s a mérőszenzor méretei sem túl nagyok. Emiatt a zaj sokkal nagyobb mértékben jelentkezik, gyakorlatilag a jel a zajban elveszik (l. A.6 ábra). A mágneses indukció meghatározásához mért indukált feszültség a nagy permeabilitású próbatestben kialakuló fluxusváltozás eredménye, amely sokkal kényelmesebben mérhető, de a zaj hasonló eredményeket szül (időben növekvő offszet), mint a skalár hiszterézis mérésekor. Ezen problémák a skalár hiszterézis mérésekor is használt Fourier-transzformáción és digitális szűrési technikán alapuló eljárással nagyon hatékonyan feloldhatók. Ebben az esetben azonban hat csatorna jelét kell szűrni, de a technika ugyanaz [277–289].

A szabályozó algoritmus

A gerjesztő áramokat szabályozóval kell hangolni úgy, hogy közben a mágneses indukció vektor vagy a mágneses térerősség vektor két ortogonális komponensének időfüggvénye előre definiált időbeli lefutású legyen. Vektoriális hiszterézis karakterisztika

mérése során ugyanis sem a mágneses térerősség sem a mágneses indukció nincs olyan egyszerű kapcsolatban egymással mint ahogy a skaláris esetben. A szabályozást megvalósító proporcionális típusú szabályozó algoritmus alább bemutatott formája mindezt automatikusan megvalósítja. A szabályozó lépései a következők (3.16 ábra) [277–289]:

1. Inicializálás: szinuszos lefutású áramjelekkel indul a mérés, azaz $i_x(t)$ és $i_y(t)$ csúcsértéke, frekvenciája és fázisa megadható;

2. A mágneses térerősség és a mágneses indukció mérése a fenti szűrési technikával;

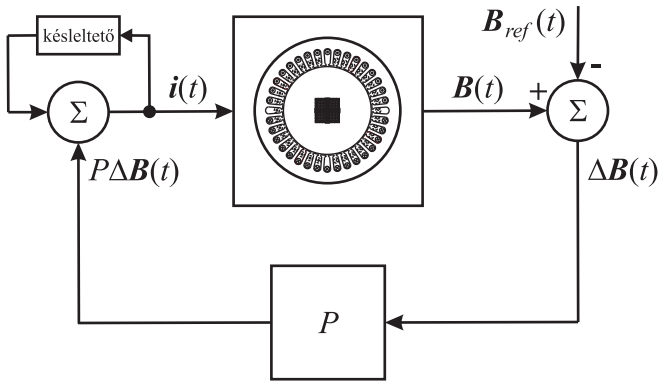
3. A mért $\vec{\boldsymbol{B}}(t)$ és az előre definiált $\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{ref}}(t)$ mágneses indukció időfüggvényének összehasonlítása, ami egy $\Delta\vec{\boldsymbol{B}}(t)$ hibafüggvényt eredményez, amelynek itt természetesen két komponense van,

$$\Delta\vec{\boldsymbol{B}}(t) = \vec{\boldsymbol{B}}(t) - \vec{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{ref}}(t); \tag{3.12}$$

4. A két áramjel megváltoztatása a $P\Delta\vec{\boldsymbol{B}}(t)$ jelekkel, ami egy proporcionális szabályozót definiál ($0 < P < 1$, $[P] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}}$);

5. Ha $|\Delta\vec{\boldsymbol{B}}(t)|$ átlaga nem éri el a kívánt értéket visszalépés a 2. pontra.

Ugyanezen algoritmussal tetszőleges $\vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{ref}}(t)$ trajektória is elérhető.

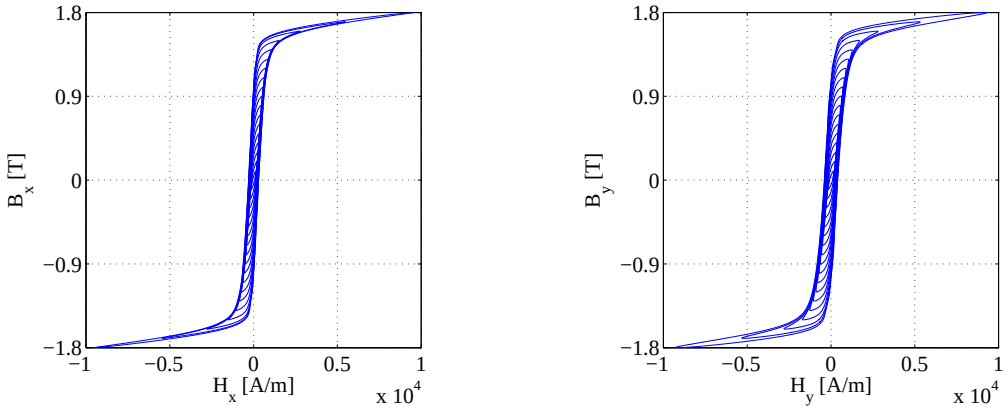


3.16. ábra. A mérőrendszer szabályozása visszacsatolással

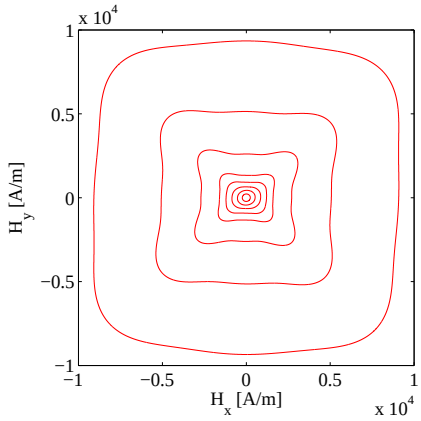
Mérési eredmények

A C19 szerkezeti acélból vágott próbatesten mért hiszterézis karakterisztikák a 3.17 ábrán láthatók. A mérés során a mágneses indukció időfüggvényét szabályoztam oly módon, hogy az szinuszos időbeli lefutású legyen. Az ábrából kitűnik, hogy ugyanazon mágneses indukcióértékhez az y irányban nagyobb mágneses térerősség szükségeltetik, azaz a vizsgált anyag az y irányban kis mértékben nehezebben mágnesezhető, mint az x irányban. Megjegyzem, hogy az anyag a gyártó szerint izotrop, de a vizsgálat tárgyát képező próbatest lemeze hengereléssel készült, s a hengerelés iránya egybeesik az x tengely irányával. A gyártási technológiából eredő kicsiny anizotropia jól érzékelhető a mérés során [143, 290, 291].

A 3.18 ábrán a szabályozott cirkulárisan polarizált mágneses indukció hatására létrejövő mágneses térerősség-trajektóriákat rajzoltam fel. Az ábrán az jól megfigyelhető,



3.17. ábra. Az x és az y irányban mért hiszterézis karakterisztikák C19 acél esetében



3.18. ábra. A C19 anyagban a mágneses térerősség alakulása cirkulárisan polarizált mágneses indukció mellett

hogy a 45° és a 135° körüli irányokban az anyag nehezebben mágnesezhető, a mágneses térerősség trajektóriája erősen eltér a kör alaktól.

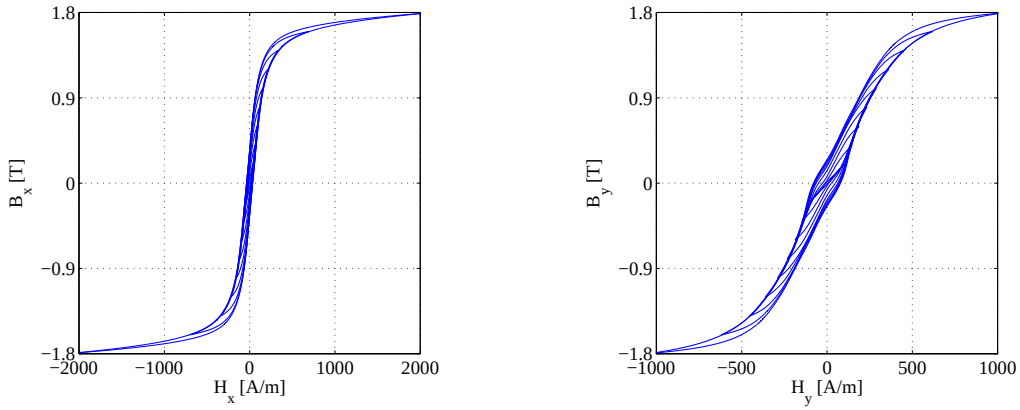
Az elvégzett mérések alapján [277–289] megállapítottam, hogy a mért hiszterézis karakterisztikák π szerint periodikusan ismétlődnek amidőn a gerjesztés irányát elforgatjuk az x tengelyhez képest, továbbá a kapott Everett-függvények az x tengelyre közel szimmetrikusak, azaz

$$F(\alpha, \beta, \varphi + \pi) = F(\alpha, \beta, \varphi), \tag{3.13}$$

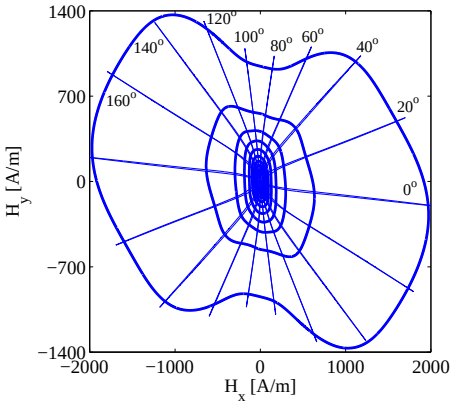
$$F(\alpha, \beta, -\varphi) = F(\alpha, \beta, \varphi). \tag{3.14}$$

Az M250-35A anyagból készült próbatest erősebb és bonyolultabb anizotropiát mutat, különösen kisebb indukcióértékek mellett, ahogy az a 3.19 ábrán látható.

A 3.20 ábrán a szabályozott cirkulárisan polarizált és a szabályozott lineárisan polarizált mágneses indukció hatására létrejövő mágneses térerősség-trajektóriákat rajzoltam fel $k \cdot 0{,}2\,\mathrm{T}$ amplitúdók mellett, $k = 1, \cdots, 9$. Az anyag anizotropiája szembetűnő: 1,6 T alatt y irányban nehezebb az anyagot mágnesezni, 1,6 T felett pedig az x irányba, továbbá a 45° és a 135° körüli irányokban az anyag szintén nehezebben mágnesezhető. Ugyanezen jellemzőket mutatják a különböző irányokban végzett lineárisan polarizált mérések is.



3.19. ábra. Az x és az y irányban mért hiszterézis karakterisztikák M250-35A anyag esetében



3.20. ábra. Az M250-35A anyagban a mágneses térerősség alakulása cirkulárisan és lineárisan polarizált mágneses indukció mellett

Az elvégzett mérések alapján megállapítottam, hogy a mért hiszterézis karakterisztikákra csak a (3.13) π szerinti periodicitás érvényes, a (3.14) szimmetria azonban nem.

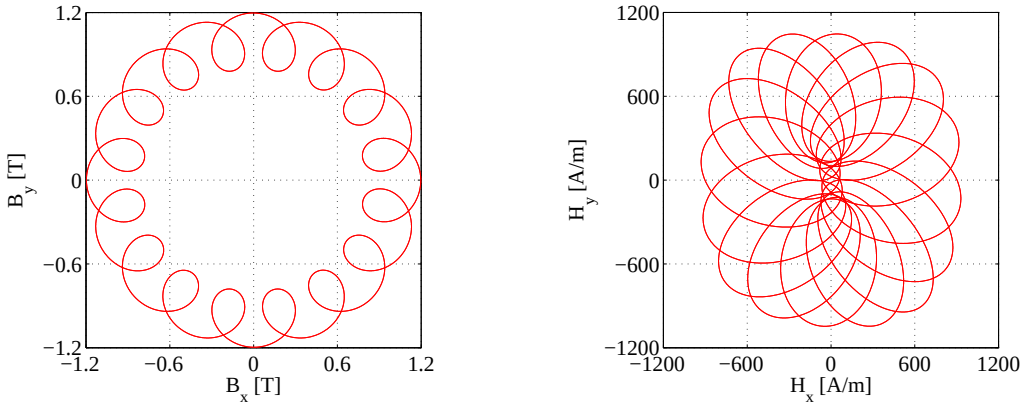
A szabályozó megfelelő működését bizonyítja a 3.21(a) ábrán és a 3.22(a) ábrán látható bonyolult mágneses indukció szabályozással történő elérése, a kialakuló mágneses térerősség a 3.21(b) ábrán, illetve a 3.22(b) ábrán látható. A kidolgozott vektormodell validációja során további mérési eredményeket is bemutatok (l. 3.2.5. fejezet).

3.2.2. A statikus modell bemutatása

A vektoriális hiszterézismodell építőköve a 3.1. fejezetben bemutatott skalár Preisach-modell. A vektormodell skalármodellek segítségével a következő integrál által definiált módon építhető fel (l. 2.10 ábra a 2.1. fejezetben) [277–280, 282, 283]:

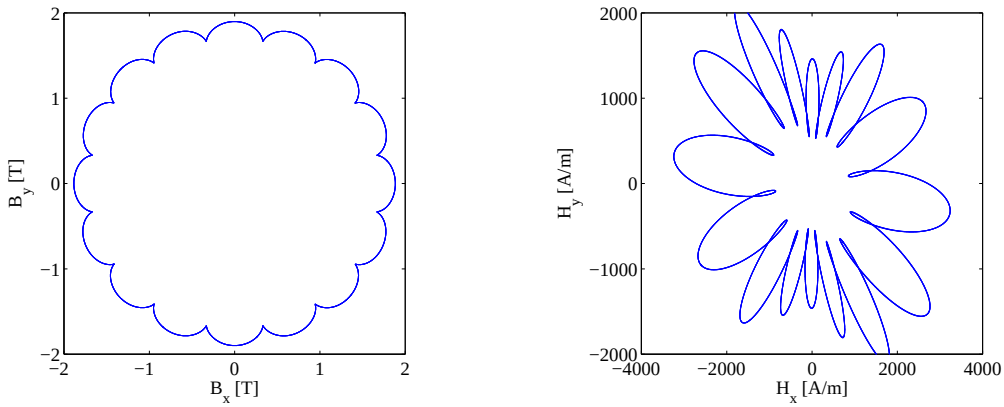
$$\vec{\boldsymbol{H}}(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \, H_\varphi(t) \, \mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \, \mathscr{B}\{B_\varphi(t)\} \, \mathrm{d}\varphi. \tag{3.15}$$

A fenti integrálkifejezés szerint a vektormodell kimenetét a kétdimenziós síkban értelmezett $[-\pi/2, \cdots, \pi/2]$ intervallumban egyenletesen, az $\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi$ egységvektor által definiált



(a) A mágneses indukció (b) A mágneses térerősség

3.21. ábra. Bonyolult mágneses indukció trajektóriára adott mágneses térerősség alakulása a C19 anyagban



(a) A mágneses indukció (b) A mágneses térerősség

3.22. ábra. Bonyolult mágneses indukció trajektóriára adott mágneses térerősség alakulása az M250-35A anyagban

irányokban egy-egy skalármodellt futtatva, azok kimenetét aztán vektoriálisan összegezve kapom meg. Jelen dolgozat fő témája a kétdimenziós vektormodell, ezért itt csak erre fókuszálok. Ezen összefüggést számítógépre vinni a

$$\vec{\boldsymbol{H}}(t) \cong \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{e}}_{\varphi_i} \, \mathscr{B}\{B_{\varphi_i}(t)\} \, \Delta\varphi \tag{3.16}$$

közelítéssel lehet, ahol

$$\varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \frac{i-1}{n}\pi, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{3.17}$$

a $[-\pi/2, \cdots, \pi/2]$ intervallumban ekvidisztánsan felvett irányokat adja meg az $\vec{\boldsymbol{e}}_{\varphi_i}$ egységvektorral, azaz n számú skalármodell szükséges a vektormodell felállításához, s így $\Delta\varphi = \pi/n$.

A klasszikus vektormodell esetén –ahogy azt a 2.1. fejezetben bemutattam– az egyes skalármodellek bemenete a vektormodell bemenetére adott $\vec{\boldsymbol{B}}(t)$ vektor $\vec{\boldsymbol{e}}_{\varphi}$ irányába eső

vetülete, azaz

$$B_{\varphi_i}(t) = |\vec{\boldsymbol{B}}(t)| \cos(\vartheta_B - \varphi_i) = B_x(t) \cos\varphi_i + B_y(t) \sin\varphi_i, \tag{3.18}$$

ahol $B_x(t)$ és $B_y(t)$ a $\vec{\boldsymbol{B}}(t)$ vektor két ortogonális komponense. Ehelyett a következő vetületképzési módot alkalmaztam [277–280, 282, 283]:

$$B_{\varphi_i}(t) = B_x(t) \operatorname{sign}(\cos\varphi_i) \, |\cos\varphi_i|^{1/w} + B_y(t) \operatorname{sign}(\sin\varphi_i) |\sin\varphi_i|^{1/w}. \tag{3.19}$$

Amennyiben a w paraméter értéke 1, úgy a (3.18) klasszikus modellt kapjuk vissza. A w paraméter segítségével lehetőség nyílik a cirkulárisan polarizált eredmények pontosabb szimulációjára, $w = 1$ esetén ugyanis a bemenet és a kimenet hasonló jelleg szerint alakul: ha a bemeneti jel cirkuláris, akkor a kimeneti jel is cirkuláris, habár köztük fáziskésleltetés tapasztalható. Mérési eredmények (l. 3.18 ábra és 3.20 ábra) viszont azt mutatják, hogy szabályozott cirkulárisan polarizált indukció mellett a mágneses térerősség nem kör alakot vesz fel, hanem bizonyos irányokban kisebb-nagyobb mértékben eltér attól. Az eltérés mértéke az anyag gyártási folyamata során szerzett anizotropiájától függ. A w értékét az egyszerűség kedvéért konstansnak választják, tapasztalatom szerint azonban célszerű lehet ezt irányfüggőnek feltételezni,

$$B_{\varphi_i}(t) = B_x(t) \operatorname{sign}(\cos\varphi_i) \, |\cos\varphi_i|^{1/w(\varphi_i)} + B_y(t) \operatorname{sign}(\sin\varphi_i) |\sin\varphi_i|^{1/w(\varphi_i)}, \tag{3.20}$$

miáltal pontosabb bemenet-kimenet kapcsolat realizálható.

A (3.19) összefüggést izotrop modell esetére dolgozták ki, ahogy azt az irodalmi összefoglalóban is közöltem. Itt ennek általánosításával foglalkozom.

3.2.3. A modell dinamikus kiterjesztése

A kidolgozott statikus vektormodell frekvenciafüggő kiterjesztését a skalármodell frekvenciafüggővé tételéhez hasonló módon végeztem el [64]. A vektormodellt alkotó skalármodelleket egyszerűen a viszkozitáson alapuló komponenssel bővítettem.

3.2.4. A modell identifikációja

Az identifikáció ennél a modellnél is két lépésből áll: először a statikus mérések alapján a frekvenciafüggetlen modell paramétereit határoztam meg [277–280, 282, 283], s csak azután illesztettem a frekvenciafüggésért felelős komponens paramétereit [64].

A statikus komponens identifikációja

A mérési eredményekkel is alátámasztott (3.13) periodicitási feltételből kiindulva a mért Everett-függvények Fourier-sorba fejtése kézenfekvő. A Fourier-sorral való approximáció lehetővé teszi a mért Everett-függvény a mérés irányától való függésének eliminálását, miáltal a modell identifikációja jelentősen egyszerűsödik. A következő sorfejtés alkalmazható:

$$F(\alpha, \beta, \varphi) = F_0(\alpha, \beta) + \sum_m \left(F_m^A(\alpha, \beta) \cos(2m\varphi) + F_m^B(\alpha, \beta) \sin(2m\varphi) \right), \tag{3.21}$$

ahol az $F_0(\alpha,\beta)$, $F_m^A(\alpha,\beta)$ és $F_m^B(\alpha,\beta)$ Fourier-együtthatók a mérési eredményekből meghatározhatók. Szimmetria esetén, ahogy az a C19 szerkezeti acél esetében is fennáll, az $F_m^B(\alpha,\beta)$ együtthatók értéke zérus.

Az $F_0(\alpha,\beta)$ állandó összetevő az

$$F_0(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\alpha,\beta,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \tag{3.22}$$

definíciós formula alapján számítható, a harmonikus komponensek pedig a következő definíciós összefüggések szerint:

$$F_m^A(\alpha,\beta) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\alpha,\beta,\varphi)\cos(2m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.23}$$

és

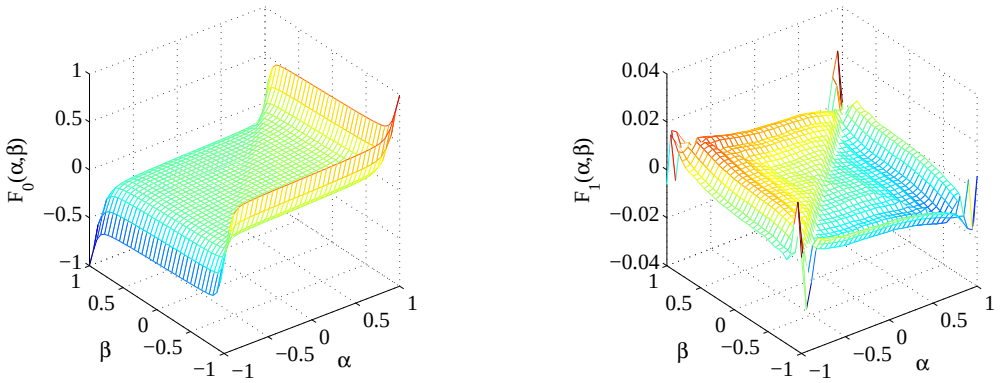
$$F_m^B(\alpha,\beta) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\alpha,\beta,\varphi)\sin(2m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3.24}$$

Az integrálokat az implementáció során a trapézmódszerrel közelítettem.

Az állandó összetevő és az alapharmonikus összege, azaz az

$$F(\alpha,\beta,\varphi) \cong F_0(\alpha,\beta) + F_1^A(\alpha,\beta)\cos(2\varphi) + F_1^B(\alpha,\beta)\sin(2\varphi) \tag{3.25}$$

közelítés a C19 anyag és az M250-35A anyag esetében 10^{-4} és 10^{-2} nagyságrendű relatív hibával approximálja a mérési eredményeket. Ezen Fourier-komponensek is egy-egy Everett-függvényt definiálnak, a 3.23 ábrán példaképp felrajzoltam a C19 anyag esetében kapott két Everett-függvényt. Látható, hogy az állandó összetevő a domináns, de legalább az alapharmonikusra szükség van a pontos approximáció érdekében.



3.23. ábra. A Fourier-sorfejtés eredményeképp kapott $F_0(\alpha,\beta)$ és $F_1(\alpha,\beta) = F_1^A(\alpha,\beta)$ Everett-függvények a C19 anyag esetében

Az egyes irányokban az ismeretlen Everett-függvények hasonlóképp Fourier-sorba fejthetők, s

$$E(\alpha,\beta,\varphi) = E_0(\alpha,\beta) + \sum_m \left(E_m^A(\alpha,\beta)\cos(2m\varphi) + E_m^B(\alpha,\beta)\sin(2m\varphi)\right), \tag{3.26}$$

alakban előállíthatók. Ez nagymértékben megkönnyíti az identifikációt. Az identifikáció alapja ugyanis a bevezetőben ismertetett

$$F(\alpha,\beta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,E(\alpha\cos\varphi,\beta\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \tag{3.27}$$

összefüggés, amely izotrop esetben érvényes, az egyes harmonikusok között pedig a következő alakú kapcsolat áll fenn:

$$F_m^A(\alpha,\beta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,\cos(2m\varphi)E_m^A(\alpha\cos^{1/w}\varphi,\beta\cos^{1/w}\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.28}$$

illetve

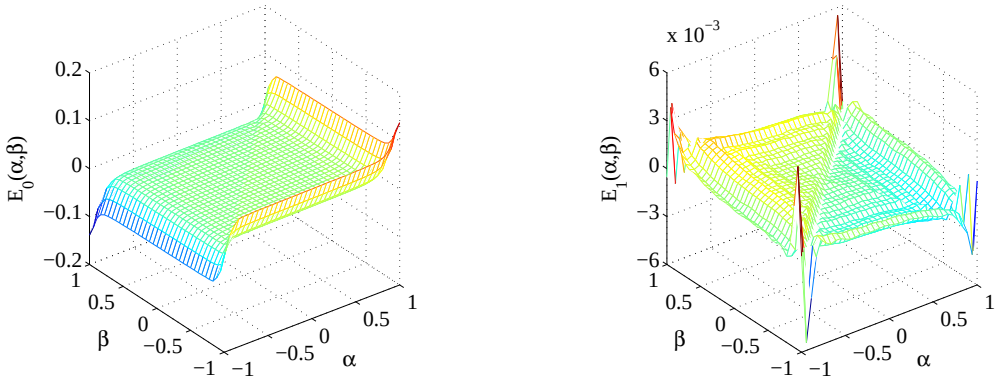
$$F_m^B(\alpha,\beta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,\cos(2m\varphi)E_m^B(\alpha\cos^{1/w}\varphi,\beta\cos^{1/w}\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.29}$$

amelyek tartalmazzák az új w paramétert, vagy a $w=w(\varphi)$ függvényt is. Az identifikáció nehézsége abban áll, hogy az ismeretlen Everett-függvény az integranduszon belül szerepel. Az identifikációs algoritmus a B. függelékben található, ahol részletesen bemutatom az izotrop esetre vonatkozó eljárást, amelyben a w paramétert is alkalmazom. A fenti összefüggésből látható, hogy a $\cos(2m\varphi)$ az m értékétől függően változik. Ez azonban elvi nehézséget nem okoz az algoritmus alkalmazása során, hiszen a jobb oldalon nem az $E(\alpha\cos^{1/w}\varphi,\beta\cos^{1/w}\varphi)$ integrandusszal kell számolni, hanem a bővített taggal, a $\cos(2m\varphi)E_m(\alpha\cos^{1/w}\varphi,\beta\cos^{1/w}\varphi)$ kifejezéssel. A (3.28) és (3.29) integrálegyenletek tetszőleges w mellett megoldhatók, amelynek kapcsolata van a mérési eredményekkel, megjegyzem ugyanakkor, hogy tapasztalatom szerint a paraméter értéke általában 1,0 körüli.

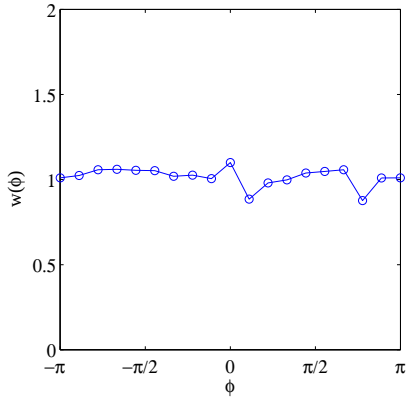
Az identifikációs algoritmus végezetül a következő:

1. Az algoritmus $w=1{,}0$-gyel indul;
2. Az $E_m^A(\alpha,\beta)$, illetve $E_m^B(\alpha,\beta)$ Fourier-együtthatók meghatározása a (3.28), illetve a (3.29) integrálegyenletnek megfelelően;
3. Cirkulárisan polarizált mérési eredményekkel gerjesztve a vektormodellt, a w paraméterek minimumkereső algoritmussal meghatározhatók (a `MATLAB` programcsomag `fminsearch` utasítását használtam [185, 242, 276]);
4. Amennyiben a mérési eredmények és a szimulációs adatok közti eltérés nem megfelelő, az algoritmus a 2. lépéstől kezdve újabb iterációval folytatdódik.

A vektormodell felépítése során $n=28$ (C19), illetve $n=18$ (M250-35A) irányt használtam. Az optimalizáció eredményeképp kapott w modellparaméter a C19 anyag esetében $w=1{,}1076$. Ez az identifikáció mindössze pár percet vett igénybe, az identifikációval kapott Everett-függvények pedig a 3.24 ábrán láthatók. Az M250-35A anyagon végzett mérésekhez illesztve a modellt, minden irányban más-más w értéket használtam, s a 3.25 ábrán látható függvényt kaptam.



3.24. ábra. Az identifikáció eredményeképp kapott $E_0(\alpha,\beta)$ és $E_1(\alpha,\beta) = E_1^A(\alpha,\beta)$ Fourier-együtthatók a C19 anyag esetében



3.25. ábra. Az M250-35A anyag identifikációja kapcsán kapott $w(\varphi)$ függvény

A dinamikus komponens identifikációja

A járulékos veszteségért felelős dinamikus komponens identifikációját a (3.7) összefüggést felhasználva oldottam meg. A vektormodellt felépítő skalármodellek mindegyikét bővítettem a klasszikus örvényáramú taggal, illetve a meghatározásra váró komponenssel, irányonként tehát a következő modell fut:

$$H_\varphi(B_\varphi, \mathrm{d}B_\varphi/\mathrm{d}t) = H_{\mathrm{st},\varphi}(B_\varphi) + \frac{\sigma d^2}{12}\frac{\mathrm{d}B_\varphi}{\mathrm{d}t} + \delta\left|\frac{1}{r(B_\varphi)}\frac{\mathrm{d}B_\varphi}{\mathrm{d}t}\right|^{1/\gamma}. \tag{3.30}$$

Így gyors identifikációs algoritmust nyertem. Az első komponens a statikus Preisach-modell kimenete, amely modellt a fentiek szerint identifikáltam. A második komponens a lemez adatait tartalmazza (σ a vezetőképesség, d a lemez vastagsága) és a mágneses indukció idő szerinti első deriváltját. Itt is feltételeztem, hogy a vizsgált lemez kiterjedése jóval nagyobb, mint a lemez vastagsága, amely feltételezés helytálló, végeselem-módszeren alapuló szimulációkkal ellenőriztem azt (l. 5.5. fejezet). A harmadik komponens pedig a meghatározásra váró paramétereket tartalmazza.

A $\vec{\boldsymbol{H}} - \vec{\boldsymbol{B}}$ kapcsolat numerikus módszerrel történő meghatározását és identifikációban való felhasználását itt elvetettem a nagy számításigény miatt, de a validációban felhasználtam a végeselem-módszeren alapuló modellt is (l. 5.5. fejezet).

Az identifikációs algoritmus futtatása során a modellezett karakterisztikát vetettem össze lineáris és cirkulárisan polarizált mérési adatokkal, s az így nyert hibát minimalizáltam a `MATLAB` programcsomag `fminsearch` utasítását felhasználva [185, 242, 276].

A (2.15) függvényt használtam a modell felépítése során, az identifikációs algoritmus $R_0 = 23{,}79 \cdot 18$ értéket adott eredményül. A γ paraméter értéke gyakorlatilag 1,0-nek adódott. Ezen adatok összecsengenek a skalármodell identifikációjánál nyert adatokkal.

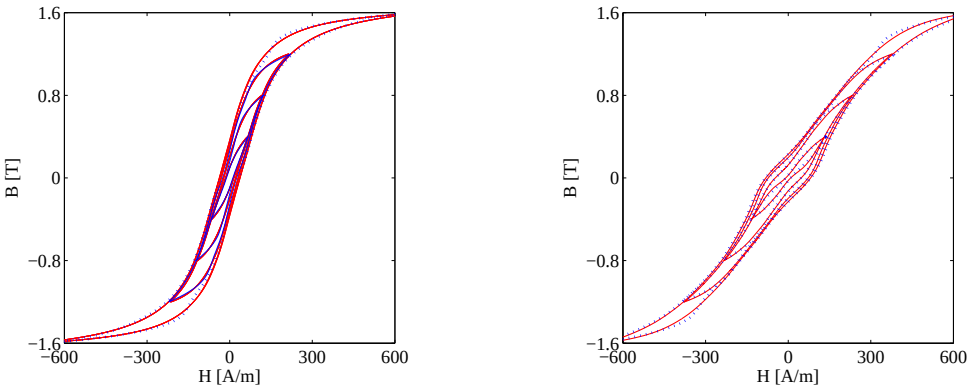
3.2.5. A modell verifikációja

A 3.26(a) és a 3.26(b) ábrákon látható, hogy az x és az y irányban mért és számított karakterisztikák jó egyezést mutatnak. Az is látható, hogy az egyes irányokban a karakterisztikák nem azonosak az anyag anizotropiájának megfelelően. Ez a jellegzetes viselkedés izotrop anyagmodellel nem írható le ilyen jó egyezéssel.

A 3.27 ábrán az óramutató járásával ellentétes irányban forgatott mágneses indukció eredményeképp kialakuló mágneses térerősség vektorának trajektóriája látható. Itt is jól kivehető az anizotropia.

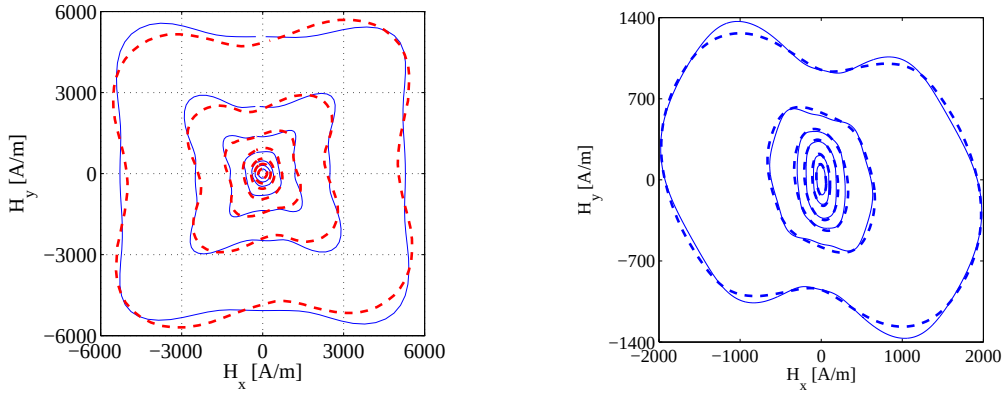
A 3.28(a) ábra bonyolultabb trajektóriát mutat, amely mentén a mágneses indukció vektorának végpontja szabályozás révén végigfut. A trajektória az alapharmonikus mellett magasabb harmonikust is tartalmaz, amelynek következtében alakul ki a $\pm 45°$-os és a $\pm 135°$-os irányokban egy-egy „leszívás”. A mágneses térerősség vektora szintén bonyolult pályát ír le, ahogy az a 3.28(b) ábrán is látható. A modell kimenete kis hibával ugyan, de hűen követi a mért mágneses térerősség alakulását. A C19 anyagból készült próbatest anizotrop viselkedése itt is megmutatkozik, hiszen a kimenet az x irányban kissé lapított.

A 3.29(a) ábrán $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián mért és szimulált lineárisan polarizált eredmények összehasonlítása látható, s a gerjesztés iránya az x tengellyel 30°-os szöget zár be. Az ábrán a 30°-os irányra eső vetületet ábrázoltam. A 3.29(b) ábrán az óramutató járásával megegyező irányba forgatott mágneses indukció eredményeképp kialakuló mágneses térerősség vektor trajektóriája látható $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián. A frekvenciafüggés mindkét esetben érzékelhető, a hiszterézis karakterisztika szélesebb lett, a trajektória pedig kissé elfordult (v.ö. 3.27(b) ábra).



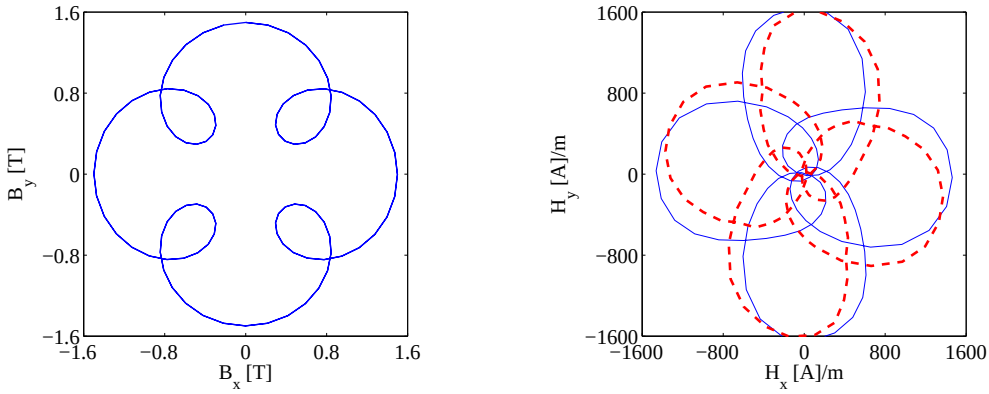
(a) Az x irány (b) Az y irány

3.26. ábra. Az x és az y irányban mért és szimulált koncentrikus görbék összehasonlítása az M250-35A anyag esetében (mérés: –, számított: $\cdots$)



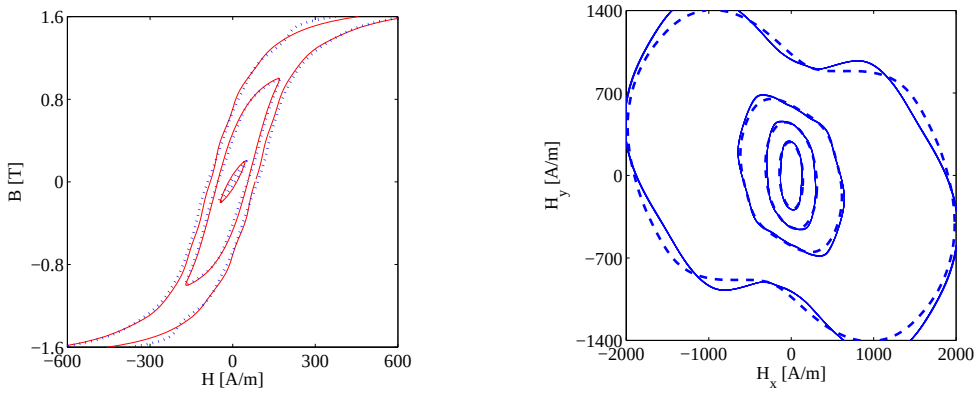
(a) C19 (b) M250-35A

3.27. ábra. A forgó mágneses térben mért és szimulált eredmények összehasonlítása (mérés: –, számított: – –)



(a) A mágneses indukció (b) A mért és szimulált mágneses térerősség

3.28. ábra. Bonyolult mágneses indukció trajektóriára adott mágneses térerősség (mérés: –, számított: – –)



(a) Lineárisan polarizált tér (b) Forgó mágneses tér

3.29. ábra. A dinamikus vektormodell eredményeinek méréssel való összehasonlítása $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián (mérés: –, számított: – –)

3.3. A tudományos eredmények összefoglalása

1. Tézis

Realizáltam a Preisach-féle hiszterézismodell-család egy, a mérnöki szimulációkban rendkívül előnyösen alkalmazható verzióját, amely kis futási ideje mellett nagy pontossággal bír. A gyors működést a lépcsősgörbe alkalmas szervezésével, a pontosságot pedig az Everett-függvény spline technikán alapuló közelítésével biztosítottam. Kidolgoztam az izotrop és az anizotrop vektor Preisach-modell egy általánosítását, amely alkalmas a forgó mágnesezési folyamatok még pontosabb leírására, a modellek identifikációjára pedig eljárást javasoltam. Kidolgoztam a modellek dinamikus általánosítását is, amelyek alkalmasak a frekvenciafüggés pontos reprezentálására, a modellek identifikációjára pedig eljárást javasoltam. Az egyes modellek elemzésén túl a modellek saját mérési eredményekkel történő összevetésével igazoltam elméleti eredményeim helyességét.

1.a A skalár hiszterézis karakterisztika mérésére egy automatizált mérési elrendezést dolgoztam ki, amely a különféle hiszterézismodellek identifikációjához szükséges tanítási mintahalmazt felveszi. A zajjal terhelt mért jelekből a zavaró összetevőket egy Fourier-transzformáción alapuló, digitális elveken megvalósított szűrési technikával tökéletesen elimináltam. Az előre definiált jelalakú mágneses indukció elérésére egy proporcionális szabályozó eljárást implementáltam, amelynek robusztusságát nagymértékben befolyásolja a szűrés sikeressége.

1.b A skalár hiszterézis karakterisztika modellezésére a frekvenciafüggetlen Preisach-modellt alkalmaztam oly módon implementálva, hogy az gyors és pontos legyen a mérnöki szimulációkban. A megvalósított modell képes kihasználni a mai modern párhuzamos számítástechnika előnyeit. A modell felállítása során az Everett-függvényt identifikáltam, ami tökéletes egyezést biztosít a mért és a szimulált eredmények között. A frekvenciafüggetlen modellt kiegészítettem a járulékos veszteségeket makroszkopikusan leíró komponenssel, s elvégeztem annak identifikálását.

1.c Kidolgoztam a vektor hiszterézis karakterisztika mérésére alkalmas automatizált mérési elrendezést, amely alkalmas a kialakuló mágneses tér rögzítésére egy kör alakú próbatestben. Realizáltam a mérések pontos elvégzéséhez szükséges szenzorokat. A szenzorok jele ebben a mérésben gyakorlatilag elveszik a környezeti zajban, emiatt a skalár mérésnél kidolgozott szűrési technika itt még nagyobb jelentőségű volt. A vektoriális mérések során nemcsak a mágneses indukció, de a mágneses térerősség előírt jelalakja is csak szabályozással érhető el. Ezen oknál fogva általánosítottam a skalár mérésnél alkalmazott proporcionális szabályozót. Az általam implementált mérési elrendezés kiválóan alkalmas a vektoriális karakterisztika felvételére, s a vektoriális hiszterézismodellek identifikációjához szükséges minták előállítására.

1.d A klasszikus izotrop vektor Preisach-hiszterézismodellt általánosítottam oly módon, hogy egy új paraméter bevezetésével az alkalmas legyen a forgó mágnesezési folyamatok pontosabb leírására. Az izotrop modell identifikációjára általam korábban kidolgozott eljárást ennek megfelelően módosítottam. A klasszikus anizotrop vektor Preisach-hiszterézismodellt pedig általánosítottam oly módon, hogy az alkalmas legyen az anizotropia kezelésére úgy, hogy a forgó mágnesezési folyamatok

során tapasztalható jelenségek leírása még pontosabb legyen. Ezt a mért Everett-függvények térbeli irányok szerinti Fourier-sorba fejtésével értem el, s az izotrop modellre alkalmazható identifikációs technikát tudtam alkalmazni, de ebben az esetben több paramétert kell a forgó mágnesezési folyamatok alapján identifikálni. A modellek kimeneti jelét saját mérési eredményekkel vetettem össze, ami igazolta elméleti eredményeim helyességét. A frekvenciafüggetlen modellt kiegészítettem a járulékos veszteségeket makroszkopikusan leíró komponenssel, s elvégeztem annak identifikálását.

4. fejezet

A hiszterézis karakterisztika illesztése numerikus technikákhoz

A 3. fejezetben egy nagyon hatékony, a mérési eredmények alapján viszonylag egyszerűen identifikálható, és a mérnöki számításokban kiválóan alkalmazható hiszterézismodell-családot dolgoztam ki. A bevezető fejezetben röviden felvázoltam a lineáris statikus mágneses tér és a lineáris örvényáramú tér számítására alkalmas jól ismert potenciálformalizmusokat. Ebben a fejezetben a mágnesezési karakterisztika modellezésére alkalmas eljárásokat és a numerikus térszámítást kapcsolom össze egy stabil, konvergens és egyszerűen implementálható technikával, a fixpontos módszerrel [14, 62–64, 72, 192, 238, 247–265, 277, 281, 284–289, 292–302].

Olyan technika kidolgozását tartottam célszerűnek, amely figyelembe veszi a vizsgálat tárgyát képező eszköz geometriáját és az anyag karakterisztikáját. A geometria kiválóan leképezhető a végeselem-módszer diszkretizálása által, a megoldandó Maxwell-egyenletek a súlyozott maradék elve gyenge alakjának végeselem-módszerbe történő átültetése szintén jól ismert, a kidolgozott hiszterézismodell pedig a fixpontos iterációs sémán keresztül illeszthető a rendszerbe. Ezáltal egy olyan komplex, elosztott modell áll elő, amely figyelembe veszi a geometriát, a fizikai képet és az anyagmodellt.

A fixpontos technika az egyik legelterjedtebben alkalmazott módszer olyan nemlineáris numerikus térszimulációt igénylő problémák megoldására, amelyekben a nemlinearitás bonyolult, hiszterézis jellegű karakterisztika által definiált.

A fixpontos módszernek számos előnye van:

(i) Tetszőleges monoton, Lipschitz-folytonos nemlinearitás mellett bizonyítottan konvergens technika, és a nemlineáris karakterisztika inflexiós pontot is tartalmazhat, ahogy a hiszterézisgörbe is;

(ii) A karakterisztika nem kell, hogy sima függvény legyen, szakaszonként lineáris függvény is alkalmazható;

(iii) Tetszőleges kiindulási értékből indítható;

(iv) A diszkretizáció eredményeképp felírt egyenletrendszer jobb oldala módosul az iterációs lépések során, a bal oldalon álló mátrixot csak egyszer kell feltölteni.

A módszer hátránya, hogy rendkívül lassú a konvergenciája, vagyis a nemlineáris elektrodinamikai problémák megoldása időigényes.

A fixpontos módszer alkalmazásához a nemlineáris konstitúciós relációt az ún. polarizációs formulának megfelelően fel kell bontani egy lineáris komponensre, amely a modell bemeneti változójának lineáris függvénye, és egy nemlineáris tagra, amely a karakterisztikától függ, s amely a fixpontos nemlineáris iteráció eredményeképp számítható.

Ezt a felbontást egészítettem ki úgy, hogy a járulékos veszteségeket modellező mágneses térerősséget is leíró komponenst a Maxwell-egyenletekben figyelembe lehessen venni. A 3. fejezetben bemutatott koncentrált paraméterű modellcsalád így alkalmas bonyolult elrendezések hatékony tervezésére is. A módszer nagy előnyének tekintem, hogy a nemlineáris statikus mágneses tér és a nemlineáris örvényáramú tér szimulációjára alkalmas fixpontos eljárás implementációjában az új komponens nagyon egyszerűen realizálható, a programcsomag nagyon egyszerűen alkalmassá tehető a járulékos veszteségek modellezésére.

4.1. A fixpontos technika rövid bemutatása

A fixpontos módszer a nemlineáris egyenletekből álló egyenletrendszer

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{4.1}$$

alakban felírt formuláját iteratívan oldja meg a szukcesszív approximációnak, azaz az

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

iterációsorozatnak megfelelően, ahol az n-edik iteráció eredménye függ az $(n-1)$-edik iterációs lépés eredményétől, $\mathbf{x}$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, $\mathbf{f}(\cdot)$ pedig a nemlineáris leképezés fixpontos alakja.

A fixpontos technika a 4.1 ábrán látható egyismeretlenes esetben akkor konvergál a $c = f(c)$ fixponthoz, azaz az $x = f(x)$ egyenlet megoldásához, ha található olyan $\mathbb{I}$ intervallum, ahol az $y = f(x)$ függvény deiváltja nem nagyobb, mint az $y = x$ függvény deriváltja, azaz, ha teljesül a

$$\left|\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right| < 1 \tag{4.3}$$

feltétel. Ekkor az $x^{(n)} = f(x^{(n-1)})$ iterációs sorozat tetszőleges $x_0 \in \mathbb{I}$ pontból indítható, és $n = 1, 2, 3 \cdots$. A 4.1 ábrából az is kitűnik, hogy minél laposabb az $f(x)$ függvény, azaz a deriváltja minél közelebb van a nullához, a konvergencia annál gyorsabb.

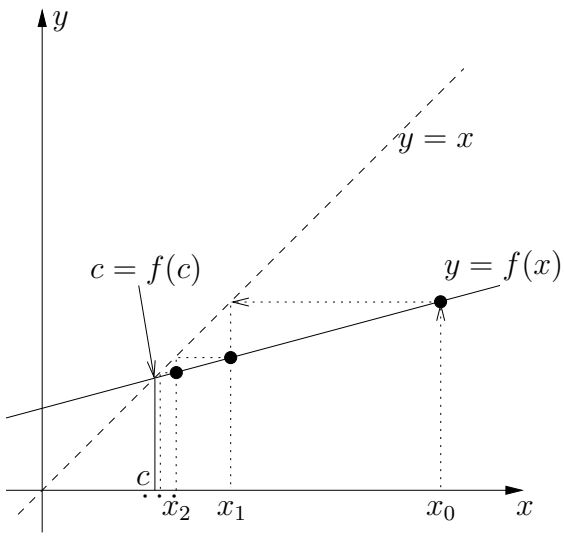
Általánosan a (4.3) feltétel a következő módon fogalmazható meg:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < 1, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{I}. \tag{4.4}$$

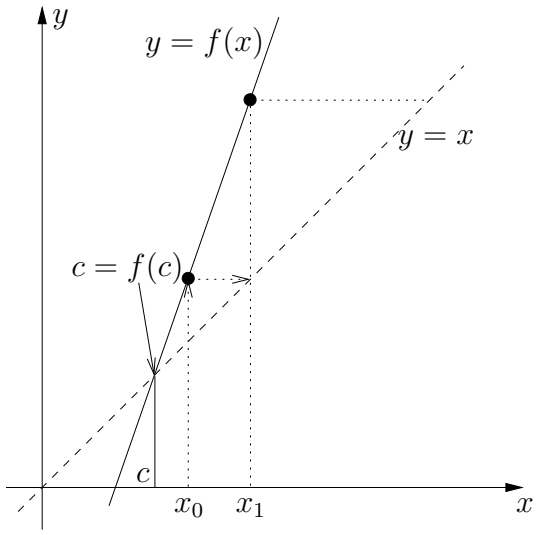
Az utóbbi formula alapján a kontrakció definíciója is felírható:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{I}, \tag{4.5}$$

és $0 < q < 1$. Amennyiben ez a feltétel teljesül, úgy az $f(x)$ függvényt kontraktív leképezésnek, vagy kontrakciónak hívjuk, mert az csökkenti az x_1 és x_2 pontok közötti távolságot. A kontraktív leképezés konvergens $x^{(n)} = f(x^{(n-1)})$ $(n \geq 1)$ iteratív eljárást



4.1. ábra. Kontraktív leképezés esetén a fixpontos módszer a $c = f(c)$ fixponthoz konvergál



4.2. ábra. Amennyiben az $y = f(x)$ leképezés nem kontraktív, úgy az iteráció divergens

eredményez, amely az $x = f(x)$ egyenlet megoldásához konvergál. A 4.2 ábra egy divergens iterációs sorozatot mutat, amikor a kontrakció feltétele nem teljesül.

Tetszőleges $F(x) = 0$ alakú egyenlet átalakítható az $x = f(x)$ alakra a következő módon:

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \lambda F(x^{(n-1)}) \equiv f(x^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{4.6}$$

ahol a λ paraméter alkalmas megválasztásával az $f(x)$ függvény kontraktív, azaz a konvergencia biztosítható.

4.2. A polarizációs formula

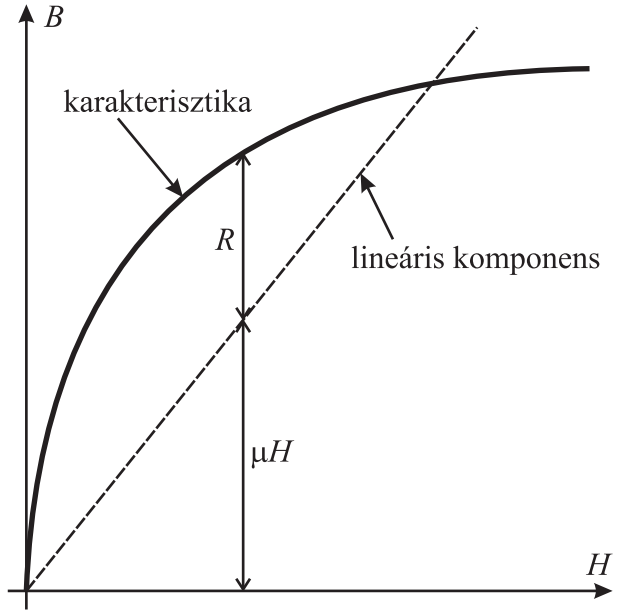
A polarizációs formula a mágneses térerősség és a mágneses indukció között fennálló nemlineáris karakterisztikát egy lineáris és egy nemlineáris komponensre bontja, miáltal

a nemlineáris elektrodinamikai problémák iteratív megoldása előállítható. A polarizációs formulát a mágneses indukció, illetve a mágneses térerősség felbontására lehet használni.

A mágneses indukció a 4.3 ábrán látható módon felbontható egy lineáris és egy nemlineáris komponens összegére:

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}} + \vec{\boldsymbol{R}}, \tag{4.7}$$

ahol a μ értéke konstans, azaz az első tag lineáris és a mágneses térerősség függvénye, továbbá az $\vec{\boldsymbol{R}}$ komponens rejti magában a nemlinearitást, ami a karakterisztikától függ. A μ természetesen lehet tenzor is, ha anizotróp a karakterisztika, de ebben a dolgozatban a tenzor elemei ekkor is konstans értékek. A μ megválasztása kulcskérdés az iteratív eljárás konvergenciája szempontjából.



4.3. ábra. A mágneses indukció felbontható egy lineáris és egy nemlineáris komponens összegére

A mágneses térerősség a fentivel analóg módon felírható a következő alakban:

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \nu\vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{I}}, \tag{4.8}$$

ahol a ν értéke konstans, és $\vec{\boldsymbol{I}}$ nemlineáris. A ν paraméter alkalmas megválasztása befolyásolja a konvergencia sikerét, illetve annak gyorsaságát.

Az iteráció során a nemlineáris komponens módosítása történik, s így lépésről-lépésre az ismeretlen potenciálok és térjellemzők is konvergálnak a megoldáshoz.

A (4.7) és a (4.8) formulák a statikus mágneses teret, illetve az örvényáramú teret leíró Maxwell-egyenletekhez történő illesztése csak a hiszterézisveszteséget, illetve az örvényáramokból származó veszteségi komponenst reprezentálja. A két formulát ezért kiegészítettem a járulékos veszteségekből származó mágneses térerősség-komponenssel:

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{H}} - \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right)}_{\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{st}}} + \vec{\boldsymbol{R}}, \tag{4.9}$$

illetve

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \underbrace{\nu\vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{I}}}_{\vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{st}}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{jár}}. \tag{4.10}$$

A $\vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{st}}$ itt arra utal, hogy a polarizációs formulával csak a statikus hiszterézismodell által leírt konstitúciós kapcsolatot bontom fel, a dinamikus komponenst pedig külön választom.

4.3. A polarizációs formula alkalmazása a potenciálformalizmusokban

A 2.3 fejezetben bemutattam a statikus mágneses tér és az örvényáramú tér számítására alkalmas két-két, leggyakrabban alkalmazott potenciálformalizmust. Ebben a fejezetben ezen lineáris egyenleteket egészítem ki a fentiekben bevezetett konstitúciós relációkkal.

4.3.1. Nemlineáris statikus mágneses tér

A mágneses skalárpotenciál

A (2.31) lineáris parciális differenciálegyenlet, a (2.32) és a (2.33) peremfeltételek polarizációs formulával reprezentált nemlineáris anyagmodell esetén a következő alakot öltik:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \Phi) = \nabla \cdot (\mu \vec{\boldsymbol{T}}_0) + \nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{R}} - \mu \vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{jár}} \right), \quad \text{az} \quad \Omega_{\mathrm{m}} \quad \text{tartományon}, \tag{4.11}$$

$$\Phi = \Phi_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen}, \tag{4.12}$$

$$\left[\mu \left(\vec{\boldsymbol{T}}_0 - \nabla \Phi - \vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{jár}} \right) + \vec{\boldsymbol{R}} \right] \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = -b, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}. \tag{4.13}$$

Levegőben, az Ω_0 tartományban $\mu = \mu_0$ helyettesítendő és $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, valamint $\vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{jár}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

A Φ-formalizmus gyenge alakját a következő egyenlet definiálja:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \nabla N_k \cdot \nabla \Phi_a \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \mu \nabla N_k \cdot \vec{\boldsymbol{T}}_{0,a} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_{\mathrm{m}}} \nabla N_k \cdot \left(\vec{\boldsymbol{R}}_a - \mu \vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{jár},a} \right) \mathrm{d}\Omega \\ + \int_{\Gamma_B} N_k b_a \, \mathrm{d}\Gamma, \end{aligned} \tag{4.14}$$

és

$$N_k = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen}. \tag{4.15}$$

Az a alsó index arra utal, hogy az egyes változók végeselem-formafüggvények segítségével approximált függvényei szerepelnek a gyenge alakokban.

A mágneses vektorpotenciál

Ebben a dolgozatban a nemlineáris statikus mágneses tér problémák mágneses vektorpotenciállal történő megoldása kapcsán főleg a szabad formalizmussal foglalkoztam, itt is csak erre a formalizmusra szorítkozom.

A (2.40) lineáris parciális differenciálegyenlet, valamint a (2.41) és a (2.42) peremfeltételek a következő alakú egyenletekként írhatók fel a kiterjesztett polarizációs formula esetén:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_0 - \nabla \times \left(\vec{\boldsymbol{I}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right), \quad \text{az} \quad \Omega_{\text{m}} \quad \text{tartományon}, \tag{4.16}$$

$$\left(\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{I}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{K}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen}, \tag{4.17}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}. \tag{4.18}$$

Levegőben, az Ω_0 tartományban $\nu = 1/\mu_0$ helyettesítendő, és $\vec{\boldsymbol{I}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

A gyenge alak pedig a következő:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu (\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}_k) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_a) \, \mathrm{d}\Omega = & \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}_k) \cdot \vec{\boldsymbol{T}}_{0,a} \, \mathrm{d}\Omega \\ & - \int_{\Omega_{\text{m}}} (\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}_k) \cdot \left(\vec{\boldsymbol{I}}_a + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár},a}\right) \mathrm{d}\Omega, \end{aligned} \tag{4.19}$$

ahol

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{W}}_k = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}. \tag{4.20}$$

Megjegyzem, hogy a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál alkalmazása csak háromdimenziós feladatok megoldása során szükséges, két dimenzióban a $\vec{\boldsymbol{J}}_0$ áramsűrűséget lehet használni.

4.3.2. Nemlineáris örvényáramú tér

Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben csak a csatolt problémák két potenciálformalizmusára szorítkozom, a szabad $\vec{\boldsymbol{T}}, \Phi - \Phi$-formalizmusra és a szabad $\vec{\boldsymbol{A}}, V - \vec{\boldsymbol{A}}$-formalizmusra. Előbbiben az örvényáramú tér leírása áram-vektorpotenciállal és mágneses skalárpotenciállal történik, s ehhez kell a nemvezető tartomány reprezentálására szolgáló mágneses skalárpotenciált csatolni. A másik formalizmusban az örvényáramú tér leírása mágneses vektorpotenciál és elektromos skalárpotenciál segítségével történik, amihez a nemvezető tartományban definiált mágneses vektorpotenciál csatolandó. A következőkben az örvényáramú tartomány $\vec{\boldsymbol{H}} - \vec{\boldsymbol{B}}$ kapcsolata nemlineáris, de a leírtak tovább általánosíthatók. A többi formalizmus kiegészítése hasonló módon megtehető. A potenciálformalizmusok nagyon részletes levezetése megtalálható a [14] monográfiában, itt csak a lényeges pontokat emelem ki.

A szabad $\vec{\boldsymbol{T}}, \Phi - \Phi$-formalizmus

A (2.46)-(2.51) egyenletek polarizációs formulával kiegészített változata érvényes az örvényáramú tartományban, a (2.31)-(2.33) egyenletek pedig változatlanul felírhatók az örványáram-tartományt körülvevő nemvezető tartományban. A két régiót elválasztó határon ennek megfelelően határfeltételeket kell definiálni.

A mágneses térerősség a $\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{T}}_0 + \vec{\boldsymbol{T}} - \nabla\Phi$ összefüggés szerint alakul az $\Omega_{\text{ö}}$ örvényáram-tartományban, míg $\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{T}}_0 - \nabla\Phi$ szerint az Ω_{n} tartományban. A Φ mágneses skalárpotenciál folytonos, csakúgy mint a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál tangenciális komponense a teljes $\Omega_{\text{ö}} \cup \Omega_{\text{n}}$ tartományon, s így a $\vec{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{n}}_{\text{ö}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ feltételt kell előírni a $\Gamma_{\text{nö}}$ határfelületen, hogy a $\vec{\boldsymbol{H}} \times \vec{\boldsymbol{n}}$ folytonossága teljesüljön. A $\vec{\boldsymbol{J}}$ örvényáram normális irányú komponense a $\vec{\boldsymbol{T}}$ áram-vektorpotenciál bevezetése és tangenciális komponensének előírása miatt automatikusan zérus értékű a $\Gamma_{\text{nö}}$ határon. A mágneses indukció normális irányú komponensének folytonossága Neumann-típusú feltétellel írható elő.

A megoldandó egyenletek tehát az alábbiak:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma}\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}\right) + \mu\frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}}{\partial t} - \mu\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\mu\frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}_0}{\partial t} \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right), \quad \text{az} \quad \Omega_{\text{ö}} \quad \text{tartományon,}\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}} - \mu\nabla\Phi) &= -\nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0) \\ &\quad -\nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{R}} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right), \quad \text{az} \quad \Omega_{\text{ö}} \quad \text{tartományon,}\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$-\nabla \cdot (\mu\nabla\Phi) = -\nabla \cdot (\mu\vec{\boldsymbol{T}}_0), \quad \text{az} \quad \Omega_{\text{n}} \quad \text{tartományon,} \tag{4.23}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{ö}}} \quad \text{peremen,} \tag{4.24}$$

$$\Phi = \Phi_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{ö}}} \quad \text{peremen,} \tag{4.25}$$

$$\Phi = \Phi_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{n}}} \quad \text{peremen,} \tag{4.26}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma}\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}\right) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen,} \tag{4.27}$$

$$\left[\mu\left(\vec{\boldsymbol{T}}_0 + \vec{\boldsymbol{T}} - \nabla\Phi - \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right) + \vec{\boldsymbol{R}}\right] \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen,} \tag{4.28}$$

$$\mu\left(\vec{\boldsymbol{T}}_0 - \nabla\Phi\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = -b, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen,} \tag{4.29}$$

$$\Phi \quad \text{folytonos a} \quad \Gamma_{\text{nö}} \quad \text{peremen,} \tag{4.30}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{n}}_{\text{ö}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{\text{nö}} \quad \text{peremen,} \tag{4.31}$$

$$\mu\left(\vec{\boldsymbol{T}}_0 - \nabla\Phi\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_n + \left[\mu\left(\vec{\boldsymbol{T}}_0 + \vec{\boldsymbol{T}} - \nabla\Phi - \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right) + \vec{\boldsymbol{R}}\right] \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_{\text{ö}} = 0, \text{ a } \Gamma_{\text{nö}} \text{ peremen.} \tag{4.32}$$

A szabad formalizmus gyenge alakja a megfelelő matematikai átalakítások után a következő két egyenlettel írható le:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{\text{ö}}} \left[\frac{1}{\sigma}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}_k) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_a) + \mu\vec{\boldsymbol{W}}_k \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}_a}{\partial t} - \mu\vec{\boldsymbol{W}}_k \cdot \nabla\frac{\partial \Phi_a}{\partial t}\right] \mathrm{d}\Omega = \\ &-\int_{\Omega_{\text{ö}}} \mu\vec{\boldsymbol{W}}_k \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}_{0,a}}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_{\text{ö}}} \vec{\boldsymbol{W}}_k \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\boldsymbol{R}}_a - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár},a}\right)\mathrm{d}\Omega,\end{aligned} \tag{4.33}$$

és

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega_{\text{ö}}} \mu \nabla N_k \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}_a}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_{\text{ö}}\cup\Omega_{\text{n}}} \mu \nabla N_k \cdot \nabla \frac{\partial \Phi_a}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\Omega_{\text{ö}}\cup\Omega_{\text{n}}} \mu \nabla N_k \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{T}}_{0,a}}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_B} N_k \frac{\partial b_a}{\partial t}\,\mathrm{d}\Gamma \\
&+ \int_{\Omega_{\text{ö}}} \nabla N_k \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\boldsymbol{R}}_a - \mu \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár},a}\right)\,\mathrm{d}\Omega,
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

ahol

$$
\vec{\boldsymbol{W}}_k \times \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{ö}}} \cup \Gamma_{\text{nö}} \quad \text{peremen}, \tag{4.35}
$$

és

$$
N_k = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{ö}}} \cup \Gamma_{H_{\text{n}}} \quad \text{peremen}. \tag{4.36}
$$

A gyenge alak második egyenletében az idő szerinti derivált az előálló egyenletrendszer szimmetriáját biztosítja.

A szabad $\vec{\boldsymbol{A}}, V - \vec{\boldsymbol{A}}$-formalizmus

A (2.62)-(2.67) egyenleteket a polarizációs formulával kiegészítve használhatók az örvényáramú tartományban, a (2.40)-(2.42) egyenletek pedig változatlanul felírhatók a nemvezető tartományban. A két régiót elválasztó határon ennek megfelelően határfeltételeket kell definiálni.

Az $\vec{\boldsymbol{A}}$ mágneses vektorpotenciál tangenciális komponense folytonos a teljes $\Omega_{\text{ö}} \cup \Omega_n$ tartományon, ami biztosítja a mágneses indukció normális komponensének folytonosságát. A mágneses térerősség tangenciális irányú komponensének folytonossága Neumann-típusú határfeltétel előírásával lehetséges, akárcsak az örvényáram normális komponensének eltűnését biztosító feltétel ugyanezen közeghatáron. Az így előálló egyenletrendszer végül a következő:

$$
\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) + \sigma \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma \nabla V = -\nabla \times \left(\vec{\boldsymbol{I}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right), \quad \text{az} \quad \Omega_{\text{ö}} \quad \text{tartományon}, \tag{4.37}
$$

$$
-\nabla \cdot \left(\sigma \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma \nabla V\right) = 0, \quad \text{az} \quad \Omega_{\text{ö}} \quad \text{tartományon}, \tag{4.38}
$$

$$
\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_0, \quad \text{az} \quad \Omega_{\text{n}} \quad \text{tartományon}, \tag{4.39}
$$

$$
\left(\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{I}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{ö}}} \quad \text{peremen}, \tag{4.40}
$$

$$
-\left(\sigma \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma \nabla V\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{ö}}} \quad \text{peremen}, \tag{4.41}
$$

$$
(\nu \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{K}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{H_{\text{n}}} \quad \text{peremen}, \tag{4.42}
$$

$$
\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}, \tag{4.43}
$$

$$
V = V_0, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}, \tag{4.44}
$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}, \tag{4.45}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}_{\text{ö}} \times \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{n}}_{\text{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{\text{nö}} \quad \text{peremen}, \tag{4.46}$$

$$\left(\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{I}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\right) \times \vec{\boldsymbol{n}}_{\text{ö}} + (\nu\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \times \vec{\boldsymbol{n}}_{\text{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_{\text{nö}} \quad \text{peremen}, \tag{4.47}$$

$$-\left(\sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} + \sigma\nabla V\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_{\text{ö}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_{\text{nö}} \quad \text{peremen}. \tag{4.48}$$

Ebben a formalizmusban a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál a teljes $\Omega_{\text{ö}} \cup \Omega_n$ tartományra kiterjeszthető annak definíciója miatt. Ezáltal a gyenge alak egyszerűsödik.

A $V = V(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ elektromos skalárpotenciál helyett a $v = v(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ függvényt célszerű bevezetni, mert így a kialakuló egyenletrendszer szimmetrikus lesz,

$$v = \int_{-\infty}^{t} V(\vec{\boldsymbol{r}}, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{4.49}$$

azaz

$$V = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{4.50}$$

A formalizmus gyenge alakja a fentiek alapján az alábbi:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{\text{ö}}\cup\Omega_{\text{n}}} \nu(\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}_k) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_a)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_{\text{ö}}} \vec{\boldsymbol{W}}_k \cdot \left(\sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_a}{\partial t} + \sigma\nabla\frac{\partial v_a}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega_{\text{ö}}\cup\Omega_{\text{n}}} (\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}_k) \cdot \vec{\boldsymbol{T}}_{0,a}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_{\text{ö}}} (\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}_k) \cdot \left(\vec{\boldsymbol{I}}_a + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár},a}\right)\mathrm{d}\Gamma, \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\int_{\Omega_{\text{ö}}} \nabla N_k \cdot \left(\sigma\frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_a}{\partial t} + \sigma\nabla\frac{\partial v_a}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega = 0, \tag{4.52}$$

ahol

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{W}}_k = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \cup \Gamma_B \quad \text{peremen}, \tag{4.53}$$

és

$$N_k = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_E \quad \text{peremen}. \tag{4.54}$$

Ha az $\Omega_{\text{ö}}$ tartomány vezetőképessége konstans, akkor a V skalárpotenciál elhagyható, s vele minden olyan egyenlet, amelyben a V szerepel. Ez az ún. $\vec{\boldsymbol{A}}^* - \vec{\boldsymbol{A}}$-formalizmus.

Végeredményben elmondható, hogy a járulékos veszteségeket reprezentáló mágneses térerősség-komponens Maxwell-egyenletekhez, illetve a potenciálformalizmusokhoz történő illesztése nagyon egyszerű: az egyenletek jobb oldalán megjelent egy $\vec{\boldsymbol{R}}' = \vec{\boldsymbol{R}} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}$, illetve egy $\vec{\boldsymbol{I}}' = \vec{\boldsymbol{I}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}$ alakú tagot tartalmazó integrál, amelyek hatással vannak a potenciálok, illetve a térváltozók értékére, meghatározásuk pedig a következőkben bemutatásra kerülő technikával történik. A járulékos komponens nélküli egyenletek ismertek, ezeket az irodalom feldolgozása és továbbgondolása után a [14] monográfiában gyűjtöttem össze, itt arra kívánok rávilágítani, hogy a járulékos veszteség modellezése a már meglévő formalizmusokban milyen egyszerű módon implementálható.

4.4. A fixpontos iterációs sémák

A bevezetőben bemutatott Maxwell-egyenletekben szereplő (2.25) konstitúciós relációk mindegyike átírható tehát a (4.7)-(4.10) polarizációs formulák valamelyikére. A polarizációs alak a fentiek alapján beírható a Maxwell-egyenletekbe, illetve a megfelelő potenciálformalizmusba. Az így előálló egyenletrendszert a fixpontos iterációs sémával lehet megoldani.

A mágneses skalárpotenciálon, illetve áram-vektorpotenciálon alapuló potenciálformalizmusok a $\vec{\boldsymbol{H}}$ mágneses térerősséget szolgáltatják az $\vec{\boldsymbol{R}}'$ függvényében, a mágneses vektorpotenciálra épülő formalizmusok pedig a $\vec{\boldsymbol{B}}$ mágneses indukciót az $\vec{\boldsymbol{I}}'$ függvényében. A továbbiakban ezeket a műveleteket a $\vec{\boldsymbol{H}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}'\}$, illetve a $\vec{\boldsymbol{B}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}'\}$ operátorokkal fogom jelölni, az $\mathscr{M}\{\cdot\}$ arra utal, hogy a Maxwell-egyenletek megoldásáról van szó.

A polarizációs formula nagy előnye, hogy a mágneses térerősség és a mágneses indukció egyszerűen átszármaztathatók egymásba. A mágneses indukció a (4.7), vagy a (4.9) összefüggések valamelyikével meghatározható a mágneses térerősségből, s fordítva, a mágneses térerősség számítható a (4.8), vagy a (4.10) formulák valamelyikével. Így a fenti két operátor kiegészíthető másik kettővel: $\vec{\boldsymbol{B}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}'\}$, illetve $\vec{\boldsymbol{H}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}'\}$. Előbbi azt jelenti, hogy a mágneses térerősséget a $\vec{\boldsymbol{H}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}'\}$ művelettel számítva, és felhasználva a (4.7), vagy a (4.9) összefüggések valamelyikét, a mágneses indukció is meghatározható. Az egyszerűbb jelölés miatt ezt a műveletsort is $\mathscr{M}\{\cdot\}$-mel jelölöm. A $\vec{\boldsymbol{H}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}'\}$ ezek alapján egyértelmű.

4.4.1. Sémák az inverz hiszterézismodellre építve

A 3. fejezetben az inverz hiszterézis karakterisztika frekvenciafüggő kiterjesztésével foglalkoztam, amely a mágneses térerősséget nemcsak a mágneses indukció, hanem annak változási sebessége alapján határozza meg. Kézenfekvő tehát, hogy a fixpontos iterációs sémákat először az inverz modellre fogalmazzam meg.

A

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}'\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}'\} \tag{4.55}$$

operátorokkal számított térváltozók alapján az $\vec{\boldsymbol{R}}$, illetve az $\vec{\boldsymbol{I}}$ változók az

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{B}} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{st}}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{I}} = \vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{st}} - \nu\vec{\boldsymbol{B}} \tag{4.56}$$

összefüggések szerint frissíthetők. A statikus inverz modell alapján mindezt az

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{B}} - \mu\mathscr{B}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_R}\{\vec{\boldsymbol{B}}\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{I}} = \mathscr{B}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} - \nu\vec{\boldsymbol{B}} = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_I}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} \tag{4.57}$$

műveletekkel lehet megtenni. Az

$$\vec{\boldsymbol{R}}' = \vec{\boldsymbol{R}} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}} = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{R'}}\{\vec{\boldsymbol{B}}\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{I}}' = \vec{\boldsymbol{I}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}} = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{I'}}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} \tag{4.58}$$

számítások elvégzése után a következő fixpont alakú egyenletek fogalmazhatók meg:

$$\vec{\boldsymbol{R}}' = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{R'}}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}'\}\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{I}}' = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{I'}}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}'\}\}. \tag{4.59}$$

Minden fixpontos iterációban tehát nemcsak az $\vec{\boldsymbol{R}}$, illetve az $\vec{\boldsymbol{I}}$ változók módosulnak, hanem a $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}$ komponens is.

Fennáll a következő két összefüggés:

$$f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{R'}}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_R}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}, \quad \text{illetve} \quad f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{I'}}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} = f_{\vec{\boldsymbol{B}}_I}\{\vec{\boldsymbol{B}}\} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}. \tag{4.60}$$

A következőkben részletesen mutatom be a két algoritmust.

Séma a mágneses indukcióra építve

Az iteráció tetszőleges $\vec{\boldsymbol{I}}'^{(0)}$ értékből indítható, az n-edik iterációs lépés ($n > 0$) a következőket foglalja magában:

(i) A $\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}$ mágneses indukció a Maxwell-egyenletek alapján az $(n-1)$-edik lépésre támaszkodva számítható, $\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}'^{(n-1)}\}$;

(ii) A $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{st}}^{(n)}$ mágneses térerősség a $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{st}}^{(n)} = \mathscr{B}\{\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}\}$ operátor szerint a statikus inverz modellel számítható;

(iii) Az $\vec{\boldsymbol{I}}^{(n)}$ nemlineáris reziduál a következő módon javítható:

$$\vec{\boldsymbol{I}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{st}}^{(n)} - \nu\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} = \mathscr{B}\{\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}\} - \nu\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}; \tag{4.61}$$

(iv) Az $\vec{\boldsymbol{I}}'^{(n)}$ kiterjesztett nemlineáris reziduál pedig a következő módon javítható:

$$\vec{\boldsymbol{I}}'^{(n)} = \vec{\boldsymbol{I}}^{(n)} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\left(\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}, \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}}{\mathrm{d}t}\right); \tag{4.62}$$

(v) Az (i)–(iv) lépéseket addig kell ismételni, amíg például az

$$||\vec{\boldsymbol{I}}'^{(n)} - \vec{\boldsymbol{I}}'^{(n-1)}|| < \varepsilon \tag{4.63}$$

kritérium alkalmas ε küszöb mellett nem teljesül.

Itt az optimális ν érték a következő:

$$\nu = \frac{\nu_{\max} + \nu_{\min}}{2}, \tag{4.64}$$

ahol $\nu_{\max}$ és $\nu_{\min}$ a $\mathrm{d}H/\mathrm{d}B$ differenciálhányados maximális és minimális értéke a statikus fő koncentrikus görbén.

Séma a mágneses térerősségre építve

Ebben az esetben:

$$\mu = \frac{2\,\mu_{\max}\,\mu_{\min}}{\mu_{\max} + \mu_{\min}} = \frac{2}{\nu_{\max} + \nu_{\min}}, \tag{4.65}$$

ahol $\mu_{\max}$ és $\mu_{\min}$ a $\mathrm{d}B/\mathrm{d}H$ permeabilitás maximális és minimális értéke a statikus fő koncentrikus görbén.

Az iteráció tetszőleges $\vec{\boldsymbol{R}}'^{(0)}$ értékből indítható, az n-edik iterációs lépés ($n > 0$) a következőket foglalja magában:

(*i*) A $\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)}$ mágneses térerősség a Maxwell-egyenletek alapján számítható, s az eredmény az $(n-1)$-edik lépésben kapott eredménytől függ, $\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}'^{(n-1)}\}$;

(*ii*) A $\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}$ mágneses indukció

$$\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} = \mu\left(\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)} - \vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}^{(n-1)}\right) + \vec{\boldsymbol{R}}^{(n-1)} \tag{4.66}$$

becslése után lehet futtatni a statikus inverz modellt, $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{st}}^{(n)} = \mathscr{B}\{\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}\}$, illetve lehet számolni a járulékos veszteségeket reprezentáló $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}^{(n)}$ komponenst;

(*iii*) Az $\vec{\boldsymbol{R}}^{(n)}$ nemlineáris reziduál a következő módon javítható:

$$\vec{\boldsymbol{R}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} - \mu\mathscr{B}\{\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}\}; \tag{4.67}$$

(*iv*) Illetve

$$\vec{\boldsymbol{R}}'^{(n)} = \vec{\boldsymbol{R}}^{(n)} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}^{(n)}; \tag{4.68}$$

(*v*) Az (i)–(iv) lépéseket addig kell ismételni, amíg például az

$$||\vec{\boldsymbol{R}}'^{(n)} - \vec{\boldsymbol{R}}'^{(n-1)}|| < \varepsilon \tag{4.69}$$

kritérium alkalmas ε küszöb mellett nem teljesül.

4.4.2. Sémák a direkt hiszterézismodellre építve

A direkt hiszterézismodell frekvenciafüggő kiterjesztésével nem foglalkoztam, de a modellt alkalmaztam statikus mágneses tér és örvényáramú mágneses tér szimulációjára. A teljesség kedvéért megadom a direkt modellre épülő iterációs sémát is, értelemszerűen a (4.7) és (4.8) formulákkal, amikor $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

A

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{H}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}\} \tag{4.70}$$

operátorokkal számított térváltozók alapján az $\vec{\boldsymbol{R}}$, illetve az $\vec{\boldsymbol{I}}$ változók az

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{B}} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{I}} = \vec{\boldsymbol{H}} - \nu\vec{\boldsymbol{B}} \tag{4.71}$$

összefüggések szerint frissíthetők. A direkt modell alapján mindezt az

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \mathscr{H}\{\vec{\boldsymbol{H}}\} - \mu\vec{\boldsymbol{H}} = f_{\vec{\boldsymbol{H}}_R}\{\vec{\boldsymbol{H}}\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{I}} = \vec{\boldsymbol{H}} - \nu\mathscr{H}\{\vec{\boldsymbol{H}}\} = f_{\vec{\boldsymbol{H}}_I}\{\vec{\boldsymbol{H}}\} \tag{4.72}$$

műveletekkel lehet megtenni. Ez a két-két műveleti lépés a következő fixpont alakú egyenletek formájában írható fel:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = f_{\vec{\boldsymbol{H}}_R}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}\}\}, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{I}} = f_{\vec{\boldsymbol{H}}_I}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}\}\}. \tag{4.73}$$

A következőkben részletesen mutatom be a két algoritmust.

Séma a mágneses térerősségre építve

Az algoritmus lépései a

$$\mu = \frac{\mu_{\max} + \mu_{\min}}{2} \tag{4.74}$$

optimális permeabilitást alkalmazva a következőképp foglalhatók össze. Az iteráció tetszőleges $\vec{\boldsymbol{R}}^{(0)}$ értékkel indítható, s az n-edik lépésben a következők történnek ($n > 0$):

(*i*) A $\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)}$ mágneses térerősség meghatározása az alkalmazott formalizmus segítségével, ami az $\vec{\boldsymbol{R}}^{(n-1)}$-re épül, azaz $\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}^{(n-1)}\}$;

(*ii*) A $\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}$ mágneses indukció vektor a direkt modell futtatásával határozható meg, vagyis $\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} = \mathscr{H}\{\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)}\}$;

(*iii*) Az $\vec{\boldsymbol{R}}$ nemlineáris reziduál értéke javítható az

$$\vec{\boldsymbol{R}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)} = \mathscr{H}\{\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)}\} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)} \tag{4.75}$$

összefüggésnek megfelelően;

(*iv*) Az (i)–(iii) lépéseket addig kell ismételni, amíg az eljárás nem konvergál. Az iterációs technika leállási feltétele például az alábbi:

$$||\vec{\boldsymbol{R}}^{(n)} - \vec{\boldsymbol{R}}^{(n-1)}|| < \varepsilon, \tag{4.76}$$

ahol ε küszöb egy kellően kis érték.

Séma a mágneses indukcióra építve

Az iteráció tetszőleges $\vec{\boldsymbol{I}}^{(0)}$ értékből indítható. Az n-edik iterációs lépés ($n > 0$) a következőkből áll:

(*i*) A $\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)}$ mágneses indukció a Maxwell-egyenletek alapján számítható az $(n-1)$-edik lépésbeli értékekre támaszkodva, $\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{I}}^{(n-1)}\}$;

(*ii*) A $\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)}$ mágneses térerősség a következő módon becsülhető:

$$\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)} = \nu\vec{\boldsymbol{B}}^{(n)} + \vec{\boldsymbol{I}}^{(n-1)}; \tag{4.77}$$

(*iii*) Az $\vec{\boldsymbol{I}}^{(n)}$ nemlineáris reziduál a direkt modell segítségével javítható:

$$\vec{\boldsymbol{I}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{H}}^{(n)} - \nu\mathscr{H}\{\vec{\boldsymbol{H}}^{(n)}\}; \tag{4.78}$$

(*iv*) Az (i)–(iii) lépéseket addig kell ismételni, amíg az

$$||\vec{\boldsymbol{I}}^{(n)} - \vec{\boldsymbol{I}}^{(n-1)}|| < \varepsilon \tag{4.79}$$

kritérium alkalmas ε küszöb mellett nem teljesül.

Az algoritmusban az optimális ν a következő formulával számítandó:

$$\nu = \frac{2\,\nu_{\max}\,\nu_{\min}}{\nu_{\max} + \nu_{\min}} = \frac{2}{\mu_{\max} + \mu_{\min}}. \tag{4.80}$$

4.4.3. A fixpontos iterációs sémák konvergenciája

A fenti fixpontos iterációs sémák akkor konvergensek, ha az iterációt definiáló (4.59), valamint (4.73) operátorok kontraktív leképezést valósítanak meg.

Például a (4.59) első kifejezése által definiált fixpontos iterációs séma akkor konvergens, ha teljesül az

$$||f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{R'}}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}_1'\}\} - f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{R'}}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}_2'\}\}|| \leq q||\vec{\boldsymbol{R}}_1' - \vec{\boldsymbol{R}}_2'|| \tag{4.81}$$

kontrakciós feltétel $\forall \vec{\boldsymbol{R}}_1', \vec{\boldsymbol{R}}_2'$-re, és $0 < q < 1$. Hasonló feltétel írható fel a (4.59) második sémájára, és a (4.73) mindkét sémájára. Az itt szereplő $||\cdot||$ norma a belső szorzat négyzetgyökét jelöli,

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\int_\Omega |\boldsymbol{x}|^2 \mathrm{d}\Omega}. \tag{4.82}$$

A (4.81) azonban redukálható az

$$||f_{\vec{\boldsymbol{B}}_R}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}_1\}\} - f_{\vec{\boldsymbol{B}}_R}\{\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}_2\}\}|| \leq q||\vec{\boldsymbol{R}}_1 - \vec{\boldsymbol{R}}_2|| \tag{4.83}$$

kontrakciós feltétellé a Maxwell-egyenleteket reprezentáló $\mathscr{M}\{\cdot\}$ operátor linearitása miatt,

$$\mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}'\} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}} - \mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}\} - \mathscr{M}\{\mu\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{jár}}\}. \tag{4.84}$$

Az első komponens pontosan a statikus mágneses térerősség, $\vec{\boldsymbol{H}}_{\text{st}} = \mathscr{M}\{\vec{\boldsymbol{R}}\}$, a második komponens pedig a járulékos veszteségnek megfelelő térerősség. Az $\vec{\boldsymbol{R}}$ változó (4.57) kifejezés szerinti javítása a statikus komponens alapján számított mágneses indukciót felhasználva történik. A járulékos komponens, s így a (4.58) formulának megfelelően $\vec{\boldsymbol{R}}'$ is ugyanezen mágneses indukció és annak deriváltja alapján módosul. A fixpontos iteráció során elegendő tehát az $f_{\vec{\boldsymbol{B}}_R}\{\cdot\}$ operátor által definiált séma konvergenciájára ügyelni, az $f_{\vec{\boldsymbol{B}}_{R'}}\{\cdot\}$ által rejtett járulékos komponens konvergenciája ezáltal ugyanis biztosított. A (4.83) kifejezés kontrakciója viszont a fentebb felsorakoztatott optimális ν és μ értékek mellett bizonyított [14, 62–64, 72, 192, 238, 247–265, 277, 281, 284–289, 292–302].

4.5. A tudományos eredmények összefoglalása

2. Tézis

A kidolgozott Preisach-féle hiszterézismodelleket a polarizációs formulát használva numerikus térszimulációt alkalmazó eljárásokba illesztettem. A polarizációs formulával linearizáltam a nemlineáris karakterisztikát, a lineáris tag meredekségének alkalmas megválasztásával pedig kontraktív leképezést nyertem, amely a Maxwell-egyenleteken keresztül bizonyítottan konvergens fixpontos iterációs sémára vezet. A polarizációs formulát általánosítottam oly módon, hogy a járulékos veszteségek reprezentálására alkalmas mágneses térerősséget figyelembe lehessen venni, így a fixpontos technikát alkalmassá tettem dinamikus modellek beillesztésére is. Kidolgoztam a statikus mágneses tér és az örvényáramú tér számítására alkalmas potenciálformalizmusok nemlineáris hiszterézis figyelembevételére alkalmas alakját, s kidolgoztam az egyes formalizmusok gyenge

alakját is, amelyek a végeselem-módszerben is alkalmazhatók. A polarizációs formula két alakját és az egyes formalizmusok elsődleges változóját alapul véve kidolgoztam az összes lehetséges variációt, ahogy a formalizmusok és a direkt, vagy inverz alakban implementált hiszterézismodellek összekapcsolhatók. Mindez összesen négy lehetséges módszercsaládot eredményez, amelyek mentesek a további belső iterációktól, miáltal a futási idő jelentősen redukálható.

5. fejezet

Villamos tervezés hiszterézismodell figyelembevételével

Ebben a fejezetben a dolgozatban bemutatott modellek, formalizmusok és numerikus módszerek alkalmazhatóságát igazolom különféle nemlineáris problémák megoldása kapcsán. Megjegyzem, hogy kutatásaim során számos lineáris és nemlineáris feladatot oldottam meg a közölt technikákkal, itt egy válogatott halmazt mutatok be. A fejezet öt olyan feladatot tartalmaz, amelyek rávilágítanak egy-egy lényeges momentumra. Minden egyes példát a végeselem-módszerrel oldottam meg: a `COMSOL Multiphysics` [240, 241] szoftver függvényeit alkalmaztam a `MATLAB` programrendszerben [185, 242], illetve a kutatócsoportom által C-nyelven fejlesztett szoftvert [243, 246], amely a szabad forráskódú `GMSH` [244] és `PETSc` [245] programcsomagokra épül.

A tervezést támogató fejezet elején gondoltam bemutatni azt az általam megfogalmazott szabad formalizmust, amely a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál előállítására alkalmas. A formalizmus nagy előnye, hogy például a szabad formalizmusban megfogalmazott mágneses vektorpotenciált számító eljárás változtatás nélkül használható a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ meghatározására, és az approximáció vektor végeselemek segítségével történik.

Az első feladat egy vékony transzformátorlemez vizsgálata, amely triviálisnak tűnő probléma ugyan, de kiválóan alkalmas az egyes modellek viselkedésének bemutatására, továbbá a statikus és dinamikus modellek alkalmazhatóságának igazolására.

A második feladatot a különböző bonyolultságú nemlineáris modellek igen eltérő viselkedésének bemutatására, és a kidolgozott hiszterézismodellek fontosságának hangsúlyozása céljából tettem a dolgozatba. A háromfázisú transzformátor lemezeinek csatlakozási pontjainál a forgó mágneses mező nem megfelelő modellel történő leírása például a veszteségek számításánál nagy hibát okozhat a tervezés során.

A harmadik probléma egy háromfázisú villamos gép modellezése hiszterézis karakterisztika figyelembe vételével.

A negyedik pont olyan háromdimenziós feladat megoldását mutatja be, amely egy tekercset, s körülötte vékony, mágnesezhető lemezekből felépített elrendezést tartalmaz. A tesztfeladat az egyes formalizmusok hiszterézismodellel történő összekapcsolását mutatja be az eredményeken keresztül.

A dolgozatot záró feladat a 3.2. fejezetben bemutatott vektor hiszterézis mérésére alkalmas berendezés számítógéppel támogatott tervezése. A végeselem-analízis számos tervezési kérdésre adott választ, a numerikus eredmények és a megvalósított méréstechnikai eszköz együttesen vezetett el a kidolgozott vektoriális Preisach-modell megalkotásához.

5.1. Az áram-vektorpotenciál közelítése élmenti végeselemekkel

A $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál lényeges szerepet tölt be az árammal átjárt tekercsek forrásterének reprezentálásában, ahogy azt a 2. fejezetben és a 4. fejezetben bemutattam. Az áram-vektorpotenciál előállítására számos technika létezik, amelyek összefoglalása a [14] monográfiában megtalálható, itt az általam szabad formalizmusban megfogalmazott peremérték-feladatot közlöm, a potenciál közelítésére pedig az élmenti végeselemek alkalmazását javaslom.

A $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciált a következő egyenlet definiálja (l. (2.28)):

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_0 = \vec{\boldsymbol{J}}_0, \quad \text{az} \quad \Omega \quad \text{tartományon}, \tag{5.1}$$

kiegészítve a következő peremfeltételekkel:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_0 \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen}, \tag{5.2}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_0 \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}. \tag{5.3}$$

Mindez az

$$\mathscr{F}\{\vec{\boldsymbol{T}}_0\} = \int_\Omega \left| \nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_0 - \vec{\boldsymbol{J}}_0 \right|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{5.4}$$

funkcionál minimalizálásával ekvivalens, miközben az (5.2) és (5.3) peremfeltételeket is figyelembe kell venni.

A funkcionál első variációjából [14, 24] kiindulva a következő parciális differenciálegyenlet és a hozzá kapcsolódó peremfeltételek vezethetők le:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_0 = \nabla \times \vec{\boldsymbol{J}}_0, \quad \text{az} \quad \Omega \quad \text{tartományon}, \tag{5.5}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_0 \times \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \text{a} \quad \Gamma_H \quad \text{peremen}, \tag{5.6}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}_0 \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \text{a} \quad \Gamma_B \quad \text{peremen}. \tag{5.7}$$

Ez egy peremérték-feladat, amelynek gyenge alakja a következő:

$$\int_\Omega (\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{T}}_{0,a})\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega (\nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}) \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_0\, \mathrm{d}\Omega, \tag{5.8}$$

és az áram-vektorpotenciál végeselem-módszerrel történő approximációja előállítható.

Nyilvánvaló, hogy a fenti peremérték-feladat megoldása nem egyértelmű, hiszen a $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{T}}_0$ nem definiált. Ebben a dolgozatban az élmenti végeselem-módszerrel történő közelítő megoldásra koncentrálok, amelyről ismeretes, hogy érzéketlen az egyértelműség hiányára [183].

A javasolt technika előnye tehát, hogy szabad formalizmus, ami élmenti végeselemekkel megoldható, s könnyedén implementálható olyan szabad formalizmust is támogató végeselem-környezetben, amely alkalmas a szabad vektorpotenciállal történő számításokra. A javasolt szabad formalizmus másik nagy előnye, hogy a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál élmenti végeselemekkel reprezentálható, amely jól illeszkedik a modern szabad formalizmusokhoz.

Az áram-vektorpotenciál közelítő megoldása természetesen előállítható olyan peremérték-feladat megoldásaként is, amelynek megoldása egyértelmű. Ezzel a lehetőséggel itt nem foglalkozom, utalok a [14] monográfiára.

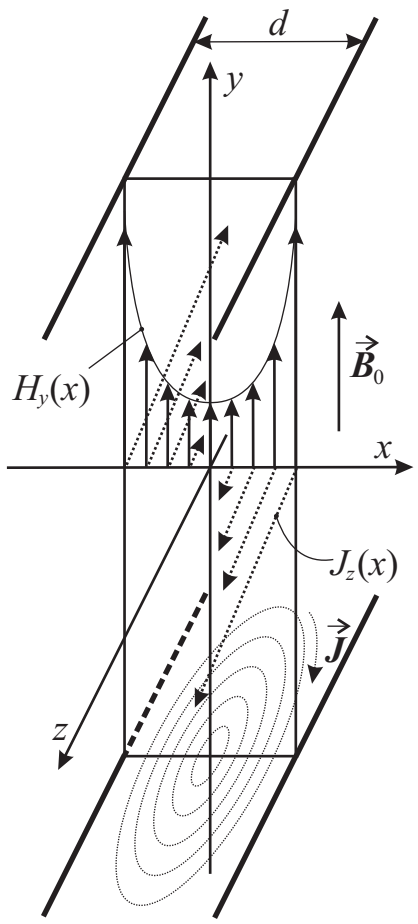
5.2. Veszteségek vékony lemezben

Ahogy azt a 2.1.3. fejezetben bemutattam, ismeretes, hogy a vasveszteség három komponensből áll [4, 51, 64–71, 275]. A hiszterézisveszteség a statikus hiszterézismodell segítségével számítható, az örvényáramú veszteség az örvényáramú Maxwell-egyenletek megoldásával, a hiszterézist és a geometriát is figyelembe véve határozható meg. A mikro-örvényáramok hatására kialakuló veszteségek számítása makroszkopikus dinamikus hiszterézismodell numerikus technikához történő illesztését igényli. A kialakuló térjellemzők időfüggvénye függ mindhárom veszteségi komponenstől.

A vékony lemez (l. 5.1 ábra) villamos gépek alapvető építő eleme. A lemezben külső gerjesztő tér hatására kialakuló elektromágneses tér számítása kulcskérdés a gépek tervezésekor, ami a következő diffúziós egyenlet megoldásával számítható:

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} + \mu \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{exc}}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{R}}}{\partial t}. \tag{5.9}$$

Az egyenlet időtartománybeli megoldását végeselem-módszerrel végeztem, az időbeli diszkretizálásra a Crank–Nicolson-sémát használtam, s feltételeztem, hogy a lemez $d = 0{,}35\,\mathrm{mm}$ vastagságához képest a másik két méret elég nagy ahhoz, hogy a problémát



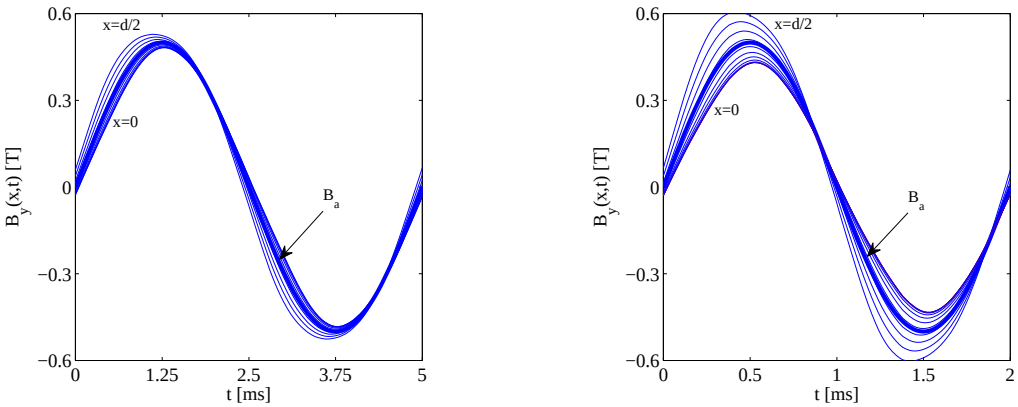
5.1. ábra. Vékony lemezben külső homogén tér hatására kialakuló elektromos és mágneses tér egy rögzített időpillanatban

egydimenziósnak foghassam fel [65, 70, 303, 304], s így (5.9) jelentősen egyszerűsödik:

$$-\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \mu\sigma\frac{\partial H_y}{\partial t} = \mu\sigma\frac{\partial H_{y,\mathrm{exc}}}{\partial t} - \sigma\frac{\partial R_y}{\partial t}. \tag{5.10}$$

A modellben a mágneses térerősségnek és a mágneses indukciónak csak y irányú komponense van, köztük a 3.1. fejezetben bemutatott skalármodell tartja a kapcsolatot. Az örvényáram-sűrűség és az elektromos térerősség az 5.1 ábrán látható módon szintén egykomponensű. Áramgerjesztés esetén a mágneses térerősség y irányú komponense írható elő Dirichlet-peremfeltételként az $x = \pm d/2$ helyeken. Feszültséggel történő gerjesztés esetén a lemez keresztmetszetén (1D esetén a $-d/2 \leq x \leq d/2$ vonal mentén) kialakuló mágneses fluxus írható elő Neumann-típusú peremfeltételként. Itt az utóbbival foglalkozom, és a $\vec{\boldsymbol{B}}_0 = \vec{\boldsymbol{B}}_0(t)$ időfüggvényt írom elő.

Az 5.2(a) és az 5.2(b) ábrán a mágneses indukció időbeli alakulása látható a lemez különböző pontjaiban $f = 200\,\mathrm{Hz}$ és $f = 500\,\mathrm{Hz}$ frekvencián. Az ábrán felrajzoltam az indukció $B_a = B_a(t)$ átlagát is, ami a peremfeltételnek megfelelően szinuszosan alakul. A magasabb frekvencián jól kivehető az örvényáramok hatása: az elektromágneses tér kiszorul a lemez felületére, az indukció abszolút értéke ezáltal a lemez felülete felé haladva növekszik.



(a) $f = 200\,\mathrm{Hz}$ (b) $f = 500\,\mathrm{Hz}$

5.2. ábra. A mágneses indukció alakulása a vékony lemezben

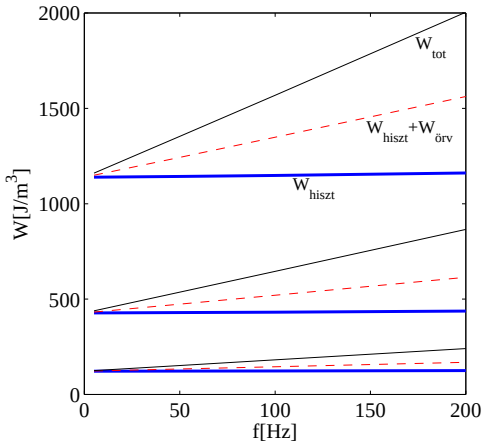
A lemezben keletkező W_{tot} teljes veszteség három komponensre bontható [4,51,64–71]:

$$W_{\mathrm{tot}} = W_{\mathrm{hiszt}} + W_{\mathrm{örv}} + W_{\mathrm{jár}}, \tag{5.11}$$

ahol W_{hiszt} a statikus hiszterézis karakterisztika által felölelt, frekvenciától független területe, $W_{\mathrm{örv}}$ a Maxwell-egyenletekből származó klasszikus örvényáramú veszteség, s végül $W_{\mathrm{jár}}$ a mikro-örvényáramok hatására létrejövő járulékos veszteség. Ezen komponensek láthatók a frekvencia függvényében az 5.3 ábrán szinuszos külső tér három különböző amplitúdója mellett, amikot $\hat{B}_0 = 0{,}5\,\mathrm{T}$, $\hat{B}_0 = 1{,}0\,\mathrm{T}$, illetve $\hat{B}_0 = 1{,}5\,\mathrm{T}$.

A teljes veszteség a következő formula szerint számítható [93]:

$$W_{\mathrm{tot}} = \int_0^T H_0(t)\frac{\mathrm{d}B_a(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t, \tag{5.12}$$



5.3. ábra. Vékony lemezben elektromágneses tér hatására termelődő veszteségek

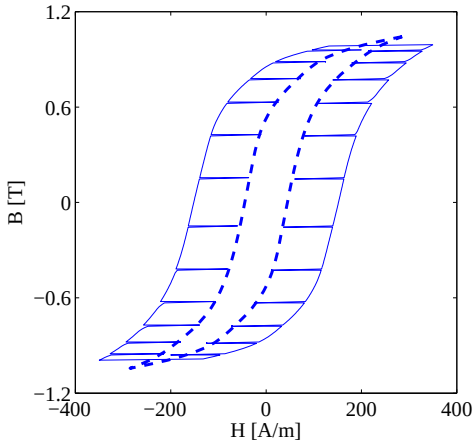
ahol $H_0(t)$ a lemez felületén a mágneses térerősség tangenciális komponense, ebben az esetben $H_0(t) = H_y(d/2, t)$, $B_a(t)$ pedig a lemezben kialakuló mágneses indukció átlaga. Ezen két mennyiség mérhető. Az örvényáramú veszteséget pedig a $J_z(x, t)$ örvényáramsűrűség és $E_z(x, t)$ elektromos térerősség ismeretében a

$$W_{\text{örv}} = \frac{2}{d} \int_0^T \int_0^{d/2} J_z(x, t) E_z(x, t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \tag{5.13}$$

összefüggéssel számoltam.

A W_{hiszt} hiszterézisveszteséget $f = 5\,\text{Hz}$ frekvenciájú gerjesztéssel számítottam, amikor az örvényáramok hatása még elhanyagolható. A $W_{\text{hiszt}} + W_{\text{örv}}$ összeg az (5.9) egyenlet megoldásaként számítható a jobb oldal első tagjának elhagyása mellett. Ez a veszteségi függvény a frekvencia növelésével lineáris nő. A W_{tot} és a $W_{\text{hiszt}} + W_{\text{örv}}$ görbék különbsége a járulékos veszteségek modellezése által áll elő.

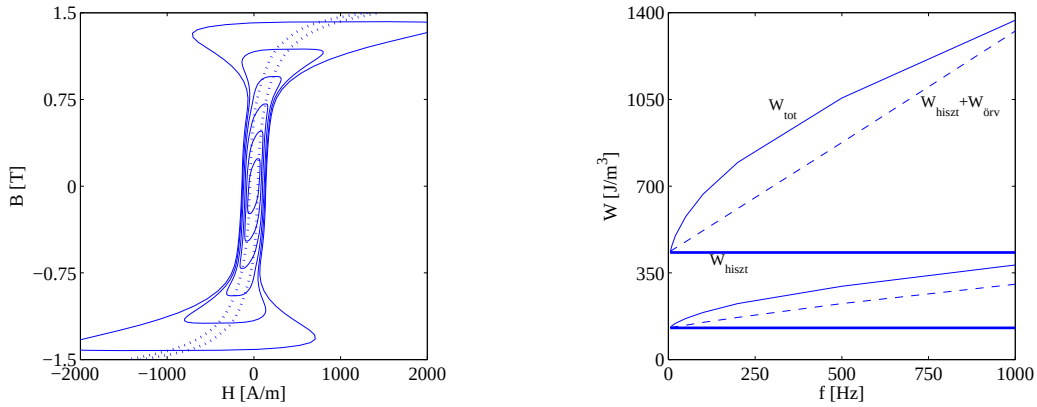
A modellel impulzusszélesség-modulált (Pulse Width Modulation, PWM) gerjesztésre adott választ is lehet szimulálni, ahogy az az 5.4 ábrán látható. Az ábrán szaggatott vonallal felrajzoltam a statikus hiszterézis karakterisztikát is. A rendelkezésemre álló



5.4. ábra. A transzformátorlemez karakterisztikájának alakulása PWM-gerjesztés esetén

generátorral PWM-gerjesztést nem tudok előállítani, de a szimulált eredmény az irodalomból ismert görbékkel egybevág [133, 134].

Az 5.5(a) ábrán vázoltam fel egy bonyolultabb $H - B$ kapcsolat karakterisztikáját, amellyel elvégeztem a diffúziós egyenlet megoldását, a veszteségek alakulása az 5.5(b) ábrán láthatók. A veszteségi görbékből kitűnik, hogy a járulékos veszteség a $\sqrt{f}$ függvénynyel arányos.



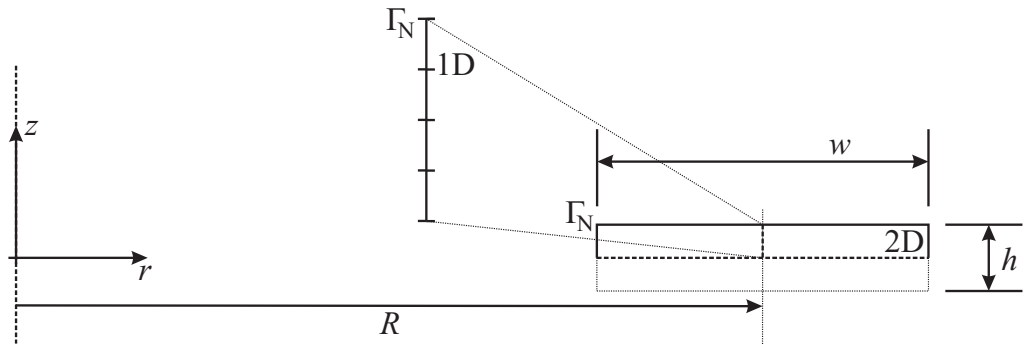
(a) A karakterisztika $f = 500\,\mathrm{Hz}$ frekvencián

(b) A veszteségek alakulása

5.5. ábra. Számítási eredmények egy más típusú karakterisztikával

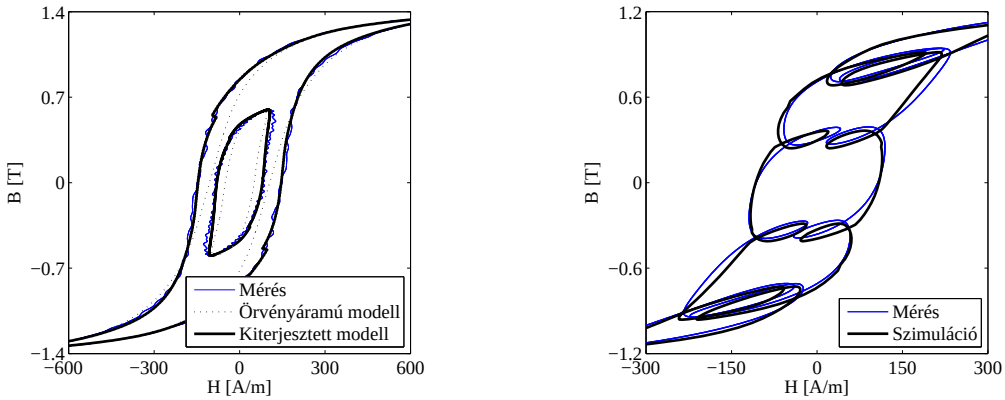
Ez a modell felfogható, mint egy lemez pontosabb modellje, amely figyelembe veszi az anyag elektromos és mágneses tulajdonságait, a szkinhatást, a mikro-örvényáramok hatását stb, és beépíthető például villamos gépek modelljébe [77, 99], miáltal a szimulációk eredménye pontosabb lesz.

A 3.1.4. fejezetben bemutatott identifikációs eljárás egyik változatában az (5.9) modellt használtam a toroid transzformátorban kialakuló elektromágneses tér számítására. A forgásszimmetrikus elrendezés sematikus vázlata az 5.6 ábrán látható. A $w = 5\,\mathrm{mm}$ szélességű és $h = 0{,}35\,\mathrm{mm}$ vastagságú téglalapból generált toroid közepes sugara $R = 26\,\mathrm{mm}$. A szinuszos időbeli lefutású feszültség megadása a Γ_N peremen Neumann-peremfeltétel előírásával történik. A dinamikus skalármodell identifikációja során az 1D modellt használtam a $H - B$ kapcsolat modellezéséhez. Elvégeztem a 2D modell vizsgálatát is, ebben az elrendezésben az 1D és a 2D modell szimulációs eredményei praktikusan megegyeznek [64].



5.6. ábra. A toroid transzformátor modellje

Az identifikált Preisach-modell végeselem-módszerhez történő illesztésével szimuláltam a toroid transzformátort tartalmazó elrendezést. A szimuláció során figyelembe vettem az örvényáramok hatását, illetve a járulékos veszteség hatását, s ezen eredményeket hasonlítottam össze. Az 5.7(a) ábrán három görbét vázoltam fel két különböző indukciómaximum mellett. Az ábrából kitűnik, hogy csupán az örvényáramú komponens alkalmazása nagy hibát okoz már egy egyszerű elrendezés esetén is. Az identifikált járulékos komponens figyelembevétele szükségszerű. Az 5.7(b) ábra egy bonyolultabb, harmonikusokat is tartalmazó $H - B$ kapcsolatot mutat. Látható, hogy a kiterjesztett modell hűen követi a mérési eredményeket.



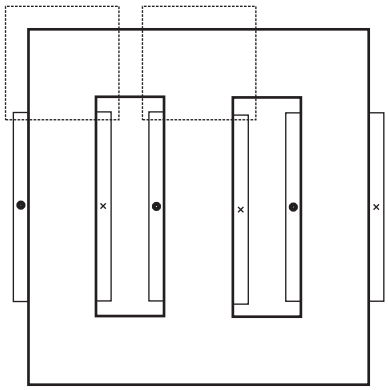
(a) A mért és szimulált koncentrikus hurkok, $f = 200\,\mathrm{Hz}$

(b) Bonyolultabb viselkedés mérése és modellezése

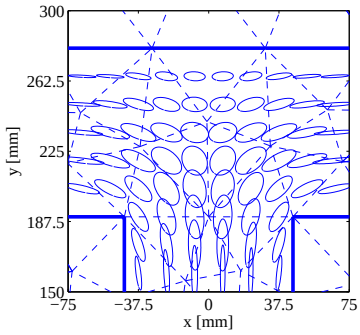
5.7. ábra. Mért és szimulált dinamikus görbék összevetése (M250-35A)

5.3. Háromfázisú transzformátor modellezése

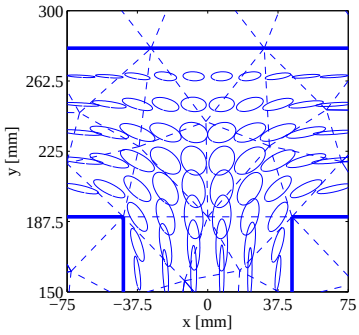
A háromfázisú transzformátor modelljén a különféle hiszterézismodellek kiválóan tanulmányozhatók és bemutathatók [297, 301, 305–307]. Az általam mágneses vektorpotenciállal és mágneses skalárpotenciállal is modellezett transzformátor az 5.8 ábrán látható, ahol szaggatott vonallal bejelöltem azon két tartományt is, ahol az eredményeket ábrázoltam. A két statikus formalizmus természetesen ugyanarra az eredményre vezetett.



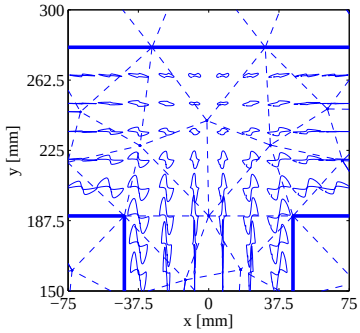
5.8. ábra. A háromfázisú transzformátor



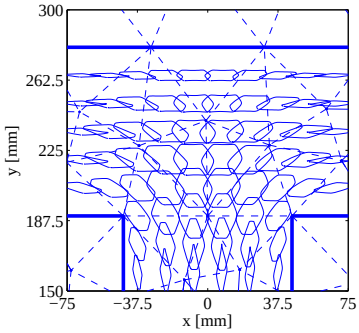
(a) Lineáris modell, $\vec{H}$



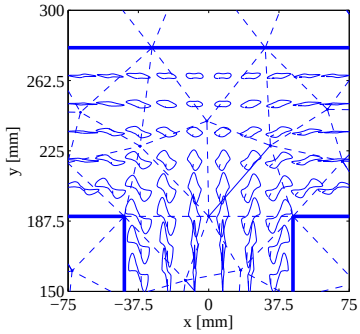
(b) Lineáris modell, $\vec{B}$



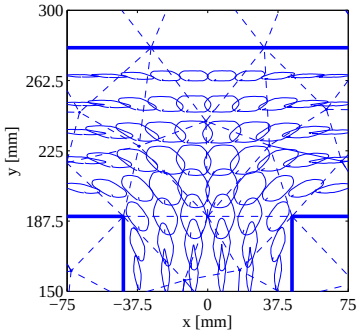
(c) Telítődésfüggvény, $\vec{H}$



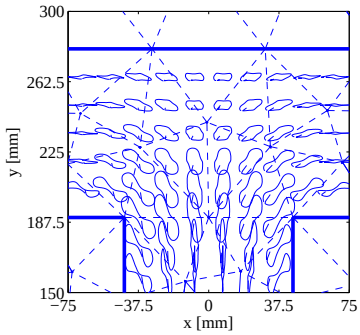
(d) Telítődésfüggvény, $\vec{B}$



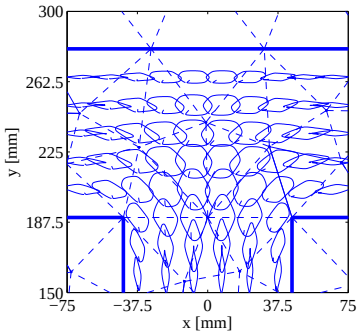
(e) Skalár Preisach-modell, $\vec{H}$



(f) Skalár Preisach-modell, $\vec{B}$



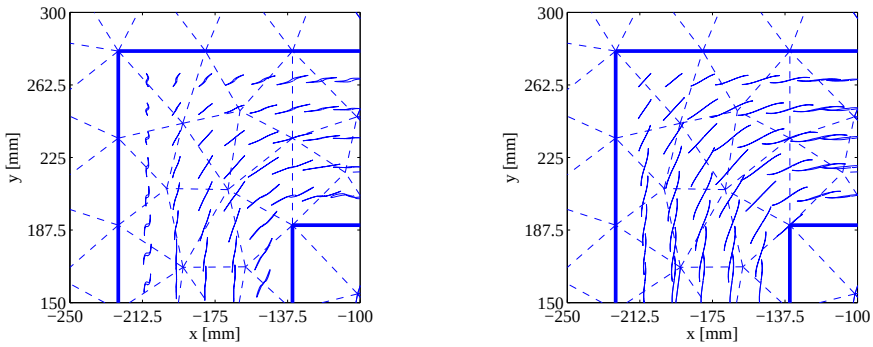
(g) Vektor Preisach-modell, $\vec{H}$



(h) Vektor Preisach-modell, $\vec{B}$

5.9. ábra. A mágneses térerősség és a mágneses indukció alakulása különböző modellek esetén

A modellezést különféle anyagmodellekkel végeztem el. Az 5.9(a) és 5.9(b) ábrákon a mágneses térerősség és a mágneses indukció trajektóriája látható lineáris anyagmodell mellett. A $\vec{\boldsymbol{H}}$ és $\vec{\boldsymbol{B}}$ trajektóriák jellegre azonosak a $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}}$ kapcsolatnak megfelelően. Ha figyelembe veszem az anyag karakterisztikájának telítődését, akkor kapom a 5.9(c) és 5.9(d) ábrákon felvázolt térerősség és indukció trajektóriákat, amelyek jelentősen eltérnek a lineáris modellel számítottaktól. Itt az x és az y irányban vettem fel egy-egy független inverz tangens típusú nemlinearitást. A 5.9(e) és 5.9(f) ábrákon a skalár Preisach-modellel számított eredmények láthatók, s ezen modellek is függetlenek. A vektor Preisach-modellel számított trajektóriák láthatók a 5.9(g) és 5.9(h) ábrákon. A 5.10(a) és 5.10(b) ábrákon a sarokban kialakuló trajektóriákat ábrázoltam. A transzformátor vízszintes és függőleges ágaiban a mágneses térerősség és a mágneses indukció iránya nagyjából azonos, de a csatlakozási pontban forgó mágneses tér alakul ki, ahogy az a fenti ábrákon is jól látható.



(a) Mágneses térerősség (b) Mágneses indukció

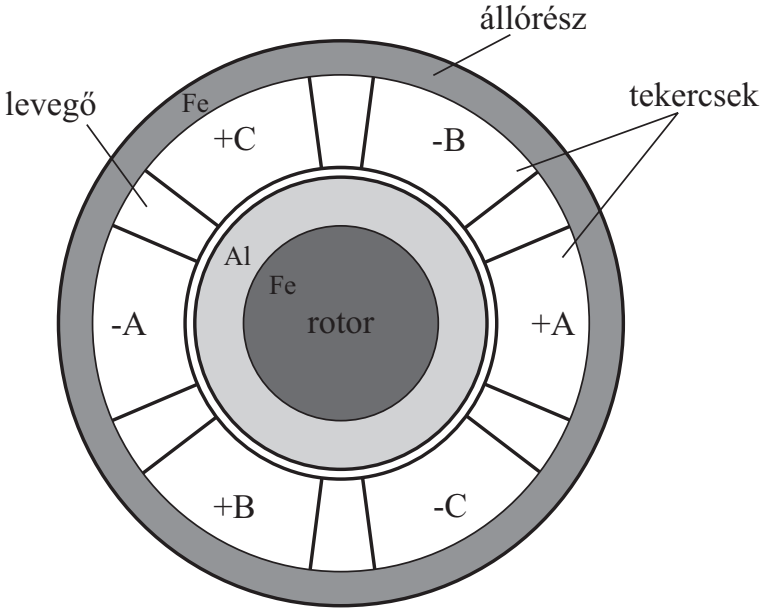
5.10. ábra. A sarokban kialakuló trajektóriák a vektor Preisach-modellel számolva

Nyilvánvaló, hogy a vektor Preisach-modell szolgáltatja a legpontosabb eredményeket, s ezen lokális adatok nagyban befolyásolják az integrális mennyiségeket, mint például a veszteségeket [307].

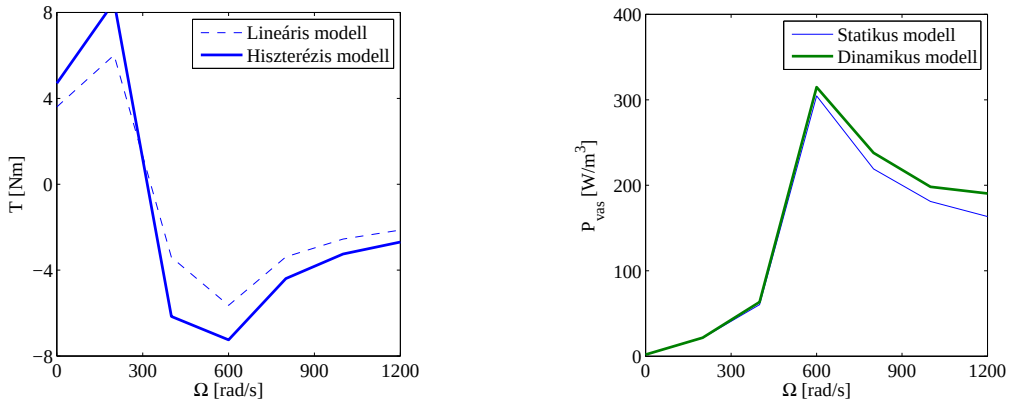
5.4. Modellmotor

Ez a probléma a T.E.A.M. (Testing Electromagnetic Analysis Methods, International Compumag Society) tesztfeladatok közül a 30-as sorszámú (l. 5.11 ábra) egy módosítása [64, 298, 300, 308, 309]. A háromfázisú villamos motor gerjesztését biztosító tekercsek nincsenek hornyokba süllyesztve, és a gerjesztő áramsűrűség ismert ($f = 60\,\mathrm{Hz}$). Az eredeti kiírás szerint valamennyi Fe jelzésű mágnesezhető tartomány lineáris konstitúciós relációval írható le, a forgórészen egy alumíniumból készült gyűrű is van. A vasból és az alumíniumból készült tartományokban örvényáramok is keletkezhetnek. A módosítás abban áll, hogy a mágnesezhető tartományok lineáris anyagkarakterisztikáját lecseréltem a jelen dolgozatban bemutatott Preisach-modellre.

A forgórész Ω körfrekvenciáját a kiírásnak megfelelően a $[0, \cdots, 1200]$rad/s tartományban változtattam, s a nyomatékot, valamint a rotor vasveszteségét határoztam meg. Az 5.12(a) ábrán látható a nyomatékgörbe, amely jellegre a lineáris feladat eredményéhez hasonló [71, 308, 309]. Az 5.12(b) ábrán látható a vasveszteség-körfrekvencia görbe, a dinamikus Preisach-modellel számolt veszteség értelemszerűen nagyobb.



5.11. ábra. A 30-as sorszámú T.E.A.M. tesztfeladat: háromfázisú villamos gép



(a) A nyomatékgörbe (b) A rotor vasvesztesége

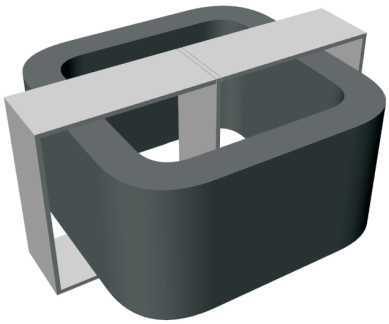
5.12. ábra. A szimulációs eredmények bemutatása

A feladat megoldására az $\vec{\boldsymbol{A}}, V - \vec{\boldsymbol{A}}$-formalizmust használtam, amit kiegészítettem a $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ taggal [64, 309].

5.5. Vékony lemezekből álló háromdimenziós konfiguráció vizsgálata

Ebben a fejezetben a 10-es sorszámú T.E.A.M. tesztfeladat [14, 206, 211, 294, 302, 310] különféle módosításainak megoldását mutatom be. Az elrendezés két, U alakban meghajlított, és egy I alakú vékony lemezt tartalmaz, amelyek körül az 5.13 ábrán látható módon egy tekercs helyezkedik el. A lemezekben a tekercs által gerjesztett mágneses tér jön létre.

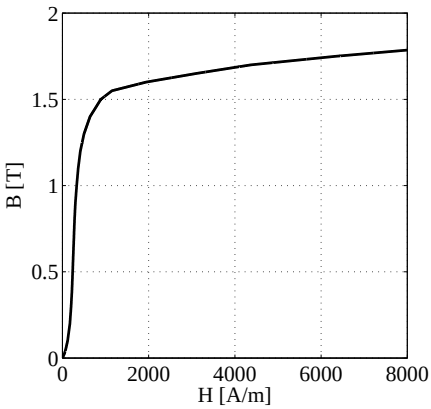
A lineáris feladat megoldásának bemutatását itt elhagyom, az irodalomból ismert



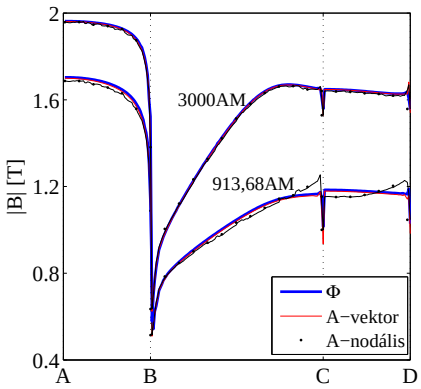
5.13. ábra. A 10-es sorszámú T.E.A.M. tesztfeladat: mágnesezhető lemezek egy tekercs körül

eredményekkel megegyező szimulációim a [14] monográfiában megtalálhatók.

Az 5.14(a) ábrán látható egyértékű nemlineáris karakterisztikával végzett egyenáramú szimulációk eredményei láthatók az 5.14(b) ábrán, ahol a mágneses indukció alakulását ábrázoltam körbe a lemez mentén két különböző gerjesztőáram mellett. Az egyes formalizmusok gyakorlatilag ugyanazon eredményre vezetnek, a kötött vektorpotenciál formalizmusa adja ugyanazon végeselem-háló mellett a leggyengébb megoldást. Az I-lemez közepén a kisebb áramerősség mellett végzett mérésekből ismert a mágneses indukció értéke [211]: 1,67 T, a Φ-formalizmussal számolt érték 1,72 T, a szabad vektorpotenciállal számolt érték pedig 1,68 T.



(a) Az egyértékű karakterisztika

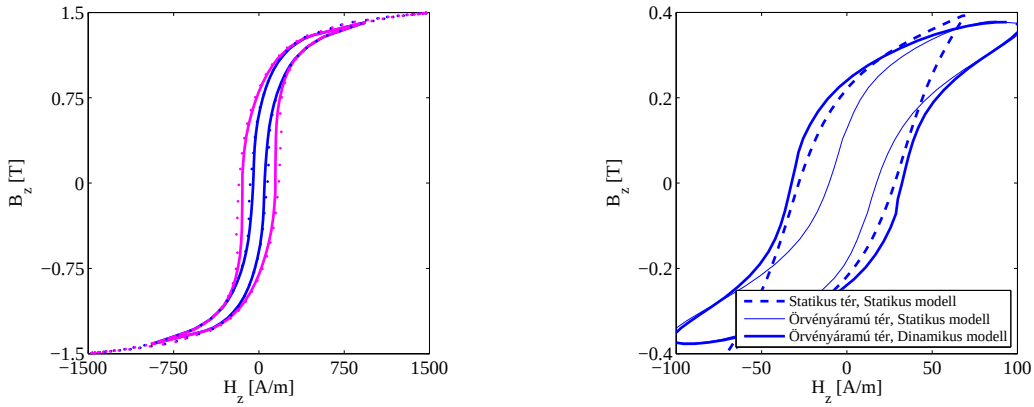


(b) A mágneses indukció abszolút értéke a lemezek mentén

5.14. ábra. Az egyes statikus formalizmusok összehasonlítása

Az egyértékű függvénykapcsolatot ezután hiszterézises jellegű kapcsolatra cseréltem, s elvégeztem újra a statikus számításokat. A szimuláció során feltételeztem, hogy az örvényáramok hatása elhanyagolható, de a járulékos veszteségek hatása nem. Az $f = 1\,\mathrm{Hz}$, és $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián végzett szimulációk eredménye látható az 5.15(a) ábrán. A folytonos vonallal rajzolt görbe a mágneses vektorpotenciállal számolt eredmény, a pontsor jelöli a skalárpotenciállal történt szimuláció eredményét.

Végül, az 5.15(b) ábra az örvényáramok figyelembevételével kapott szimulációs eredményeket mutatja, ahol felrajzoltam a statikus szimuláció eredményét is. Az örvényáramú szimulációkat $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián végeztem el statikus és dinamikus modellel



(a) A statikus mágneses térszimuláció eredménye

(b) Az örvényáramú mágneses térszimuláció eredménye

5.15. ábra. A szimulált hiszterézis karakterisztika az I-lemez közepén

egyaránt. Jól látható a dinamikus komponens hatása. Ebben a példában olyan sűrű végeselem-felbontást használtam, amellyel a közölt potenciálformalizmusok praktikusan ugyanazon eredményt szolgáltatták.

5.6. A vektor hiszterézis mérésére alkalmas elrendezés numerikus analízise és tervezése

Ebben a fejezetben a 3.11 ábrán látható mérési elrendezés numerikus analízisét és a mérés összeállítása során végzett, a tervezést és a mérés megépítését segítő számítások és szimulációk eredményeit foglalom össze. A 3. fejezetben bemutatott végleges mérési elrendezés számos javítás eredménye, itt ezen lépések végeselem-módszerrel történő támogatására fókuszálok a [14, 64, 277, 278, 281–289] publikációim alapján.

Fő tervezési kérdés, hogy a mérés során a gerjesztés, a próbatest és a szenzorok elhelyezkedése milyen legyen, azaz milyen módon lehet pontos képet kapni a mágneses térerősség és a mágneses indukció alakulásáról a mérés során, s milyen tényezők befolyásolják a mérési eredményeket. Ez egyrészt abban áll, hogy meg lehessen határozni, hogy a próbatesten belül mekkora az a lehető legnagyobb terület, ahol a kialakuló térjellemzők a mérési frekvencián közel homogén teret adnak, továbbá, hogy a próbatest felszínéhez közel milyen a mágneses térerősség változása. Előbbi ugyanis befolyásolja az alkalmazandó szenzorok méretét, utóbbi pedig a mágneses térerősség mérési technikáját. A mágneses térerősség felvétele kritikus pontja a mérésnek. Fontos kérdés az alkalmazott frekvencia megválasztása is. Alacsony frekvencián, szabályozást is alkalmazva, a mérési idő nagyon megnőhet, míg nagy frekvencián az örvényáramok befolyásolhatják a statikus karakterisztika felvételének pontosságát. Érdekes kérdés a speciálisan erre a célra kidolgozott gerjesztő tekercsrendszer is, amely az átalakított motoron belül homogén mágneses tér gerjesztésére alkalmas.

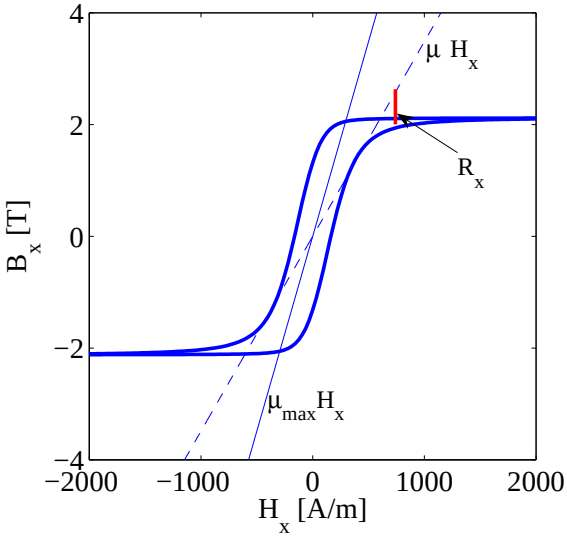
Azon kérdések, amelyek a próbatesten belül kialakuló elektromágneses tér ismeretében válaszolhatók meg, csak numerikus analízissel vizsgálhatók, s a kapott eredmények mérésekkel validálhatók. Nagyon fontos tehát a mérések és a numerikus szimulációk egyensúlya, hogy azok egymást kiegészítsék a munka során.

A numerikus analízist több módon is elvégeztem. Először egy nemlineáris örvényáramú feladatot oldottam meg egy feltételezett izotrop vektor hiszterézis karakterisztikával, amiből képet kaptam az elrendezés főbb tulajdonságairól, majd a mérések alapján identifikált modellekkel is végeztem számításokat. Utóbbi számítások során az alacsony frekvencia miatt statikus nemlineáris mágneses tér szimulációjával foglalkoztam. A mérések és szimulációk együtt tökéletesítették a mérési elrendezést, s a dolgozatban bemutatott végső modellcsalád is ezen munka eredményeképp született meg.

5.6.1. A szimulációk fontosabb adatai

A villamos gép állórésze lemezelt, emiatt ebben a tartományban az örvényáramok hatását minden szimulációban elhanyagoltam. Az állórész z irányú méretei sokkal nagyobbak, mint a próbatest vastagsága, emiatt az állórész nemlineáris karakterisztikáját elhanyagoltam, hiszen a benne kialakuló mágneses indukció sokkal kisebb, aminek következtében az állórészben lejátszódó mágnesezési folyamatok a karakterisztika lineáris szakaszán történnek. A feltételezett relatív permeabilitás $\mu_r = 4000$.

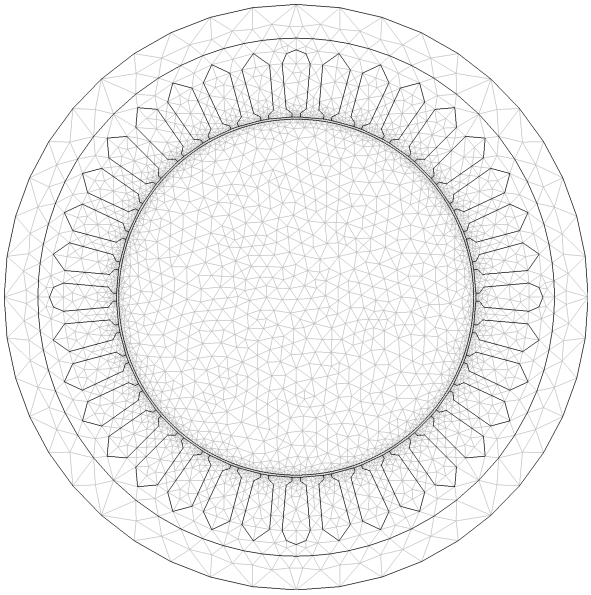
A próbatestet örvényáramú számítások során örvényáramú tartományként vettem figyelembe, $\sigma = 2 \cdot 10^6$S/m vezetőképességet feltételezve. A próbatesten belül először izotrop vektoriális karakterisztikát tételeztem fel, amelynek x irányú komponense példaként az 5.16 ábrán látható, később az identifikáció útján nyert karakterisztikával is végeztem számításokat.



5.16. ábra. A hiszterézis karakterisztika, valamint a μH_x és R_x komponensek jelentése

A szimulációt a kutatás során több potenciálformalizmussal is elvégeztem. A lineáris analízis során, amikor a motor belsejében kialakuló homogén tér vizsgálatát végeztem a próbatest nélkül, akkor a Φ-formalizmust alkalmaztam. Ezekben a számításokban és mérésekben vizsgáltam az állórész modelljét. A Φ-formalizmust a viszonylag kevés ismeretlen miatt alkalmaztam nemlineáris számításokban is. Örvényáramú számítások során az $\vec{\boldsymbol{A}}^* - \vec{\boldsymbol{A}}$ és a $\vec{\boldsymbol{T}}, \Phi - \Phi$ módszerekkel dolgoztam.

Az elrendezést az 5.17 ábrán látható módon az $x - y$ síkban háromszög alakú végeselemekkel diszkretizáltam, s az így előálló kétdimenziós végeselem-hálót a z irányban



5.17. ábra. A kétdimenziós végeselem-háló, amely a háromdimenziós prizmaelemek alapját képezi

kiterjesztettem. Így prizma alakú háromdimenziós elemeket kaptam. Az örvényáramú számítások során a behatolási mélység eredményekre gyakorolt hatása miatt a próbatesten belül három réteg van.

5.6.2. A szimulációs eredmények bemutatása

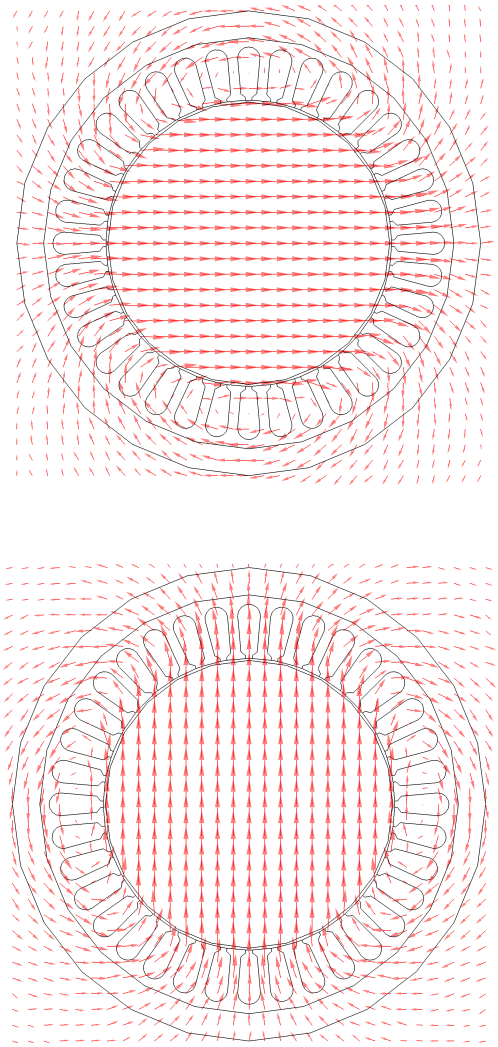
A szimuláció első lépése a két tekercs áramának megfeleltethető $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál számítása (l. 5.1. fejezet) külön-külön, amelyek approximációját nulladfokú és elsőfokú élmenti végeselemekkel is elvégeztem. Két tekercs van, emiatt mindkét tekercs által generált $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ számítására szükség van, az eredő tér pedig szuperpozícióval számítható. Az 5.18 ábrán ennek x és y irányú komponense látható a szabad térben (az ábrán feltüntettem a motor hornyait is). Az ábrákból kitűnik, hogy a speciálisan kialakított tekercselrendezés valóban alkalmas a motoron belül a homogén mágneses tér generálására.

A két független áram időbeli lefutása szabályozás nélkül az alábbiak szerint alakul:

$$i_x(t) = I_x \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{és} \quad i_y(t) = I_y \sin(\omega t + \beta). \tag{5.14}$$

A számításokat $f = 5\,\mathrm{Hz}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ és $f = 500\,\mathrm{Hz}$ frekvencián végeztem el (a körfrekvencia $\omega = 2\pi f$), s az áram csúcsértéke $I_x = I_y = 1\,\mathrm{A}$ volt. Az α és β fázisok pedig beállíthatók attól függően, hogy lineárisan vagy cirkulárisan polarizált mágneses tér szimulációja a cél.

Az 5.19 ábrán a mágneses térerősséget először az x irányba növeltem az áram növelésével, majd az áram amplitúdóját konstansnak tartva, az óramutató járásával ellentétes irányba körbeforgattam a mágneses teret. Az ábrákon a próbatest középpontjában ($x = y = z = 0$) lejátszódó folyamatok láthatók a stacionárius állapotban. Az ábrából kitűnik, hogy az örvényáramok hatása csak az $f = 500\,\mathrm{Hz}$ frekvencián számottevő, azaz a kisebb frekvenciákon, ahol a méréseket is végeztem, az örvényáram elhanyagolható,

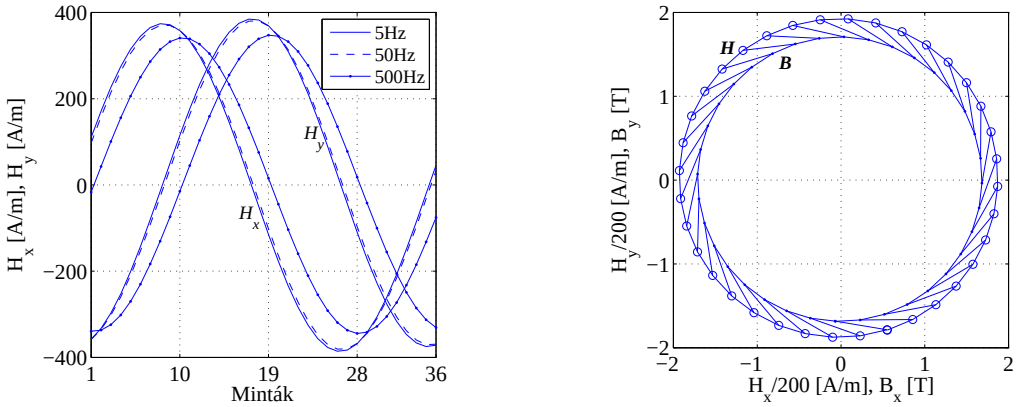


5.18. ábra. A $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál x és y komponense

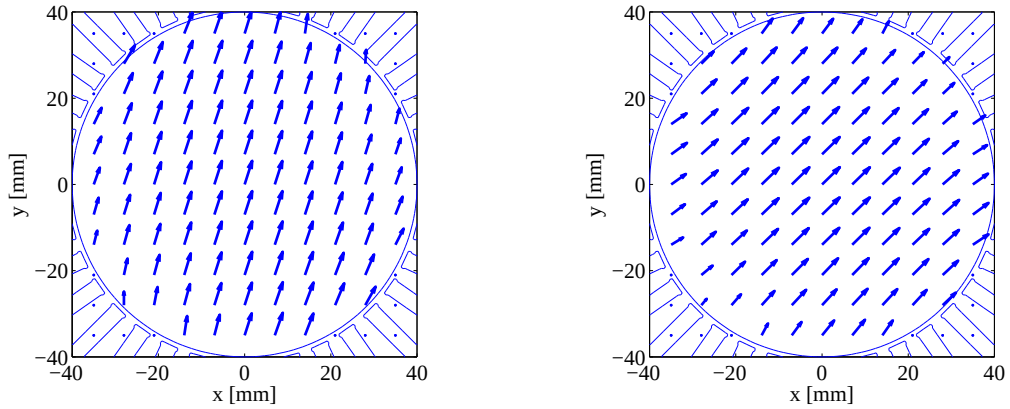
és az elrendezés alkalmas a statikus karakterisztika felvételére. A méréseket végül az $f = 5\,\mathrm{Hz}$ frekvencián végeztem. A hiszterézis karakterisztika hatása is érzékelhető, mert fáziskülönbség tapasztalható a mágneses térerősség és a mágneses indukció között (l. még 5.20 ábra). Mindkét trajektória kör alakú, amit azonban a mérések megcáfoltak. Ez vezetett el a kidolgozott modell megalkotásához.

Az 5.21 ábrán a növekvő frekvencia hatására kialakuló áramkiszorítási jelenség egyre nagyobb mértékben érezteti hatását. A $\vec{\boldsymbol{J}}$ áramsűrűség a frekvencia növelésével egyre jobban kiszorul a próbatest felszínének irányába, aminek hatására a kialakuló elektromágneses tér is módosul. Látható, hogy alacsony frekvencián a mágneses indukció nagysága konstans a próbatesten belül, de nagyobb frekvencián ez nem igaz.

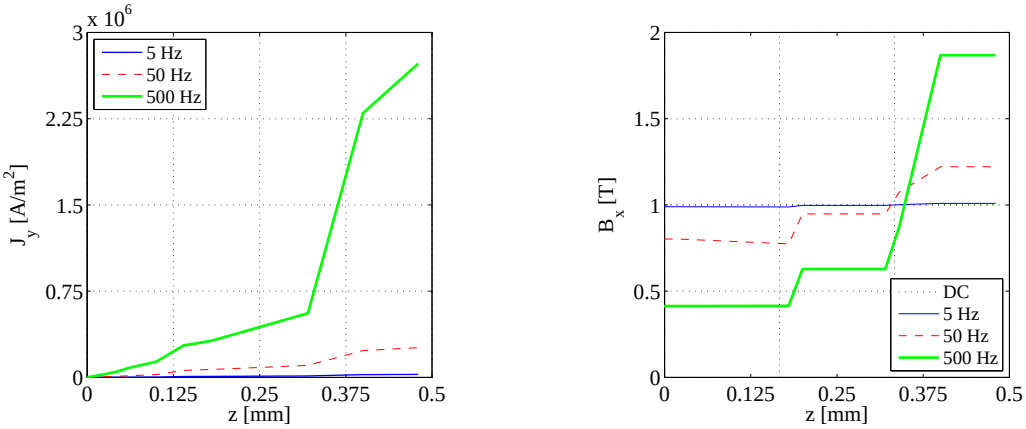
Az 5.22 ábra a mágneses térerősség trajektóriáját mutatja cirkulárisan polarizált mágneses tér esetén. A mágneses térerősség mérésére általában egy $20\,\mathrm{mm} \times 20\,\mathrm{mm}$ méretű szenzort használnak, ahogy azt a 3. fejezetben már bemutattam. A cél a minél nagyobb homogén terület elérése, ahol a szenzor által átlagolt mért térjellemzők megegyeznek a terület bármely pontjában mérhető értékkel. Az 5.22 ábrán mm-ben fel-



5.19. ábra. A mágneses térerősség ortogonális x és y komponenseinek alakulása az idő függvényében, valamint a térjellemzők trajektóriája az $x = y = z = 0$ pontban

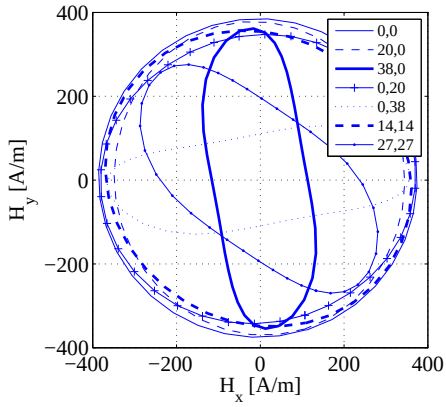


5.20. ábra. A mágneses térerősség (bal oldal) és a mágneses indukció (jobb oldal) vektorainak alakulása cirkulárisan polarizált mágnesezési folyamat egy időpillanatában

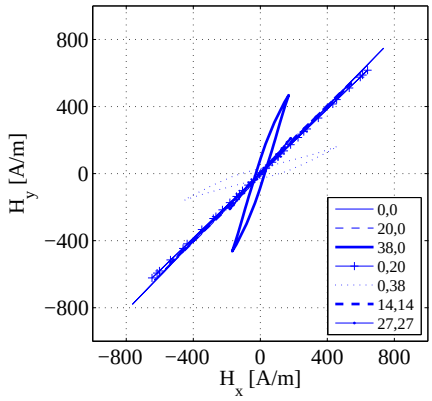


5.21. ábra. Az áramkiszorítás hatása növekvő frekvencia esetén nő

tüntetett koordináták azt mutatják, hogy a 20 mm × 20 mm méretű szenzor helyes választásnak bizonyult, de ennél nagyobb méret csak akkor alkalmazható, ha a próbatest is nagyobb. Az 5.23 ábra ugyanezt hivatott igazolni, de ebben az esetben lineárisan polarizált mágneses térerősség előállítása a cél. A (38 mm, 0 mm) és a (0 mm, 38 mm)



5.22. ábra. Cirkulárisan polarizált gerjesztés, a mágneses térerősség alakulása a próbatest különböző pontjaiban



5.23. ábra. Lineárisan polarizált gerjesztés, a mágneses térerősség alakulása a próbatest különböző pontjaiban

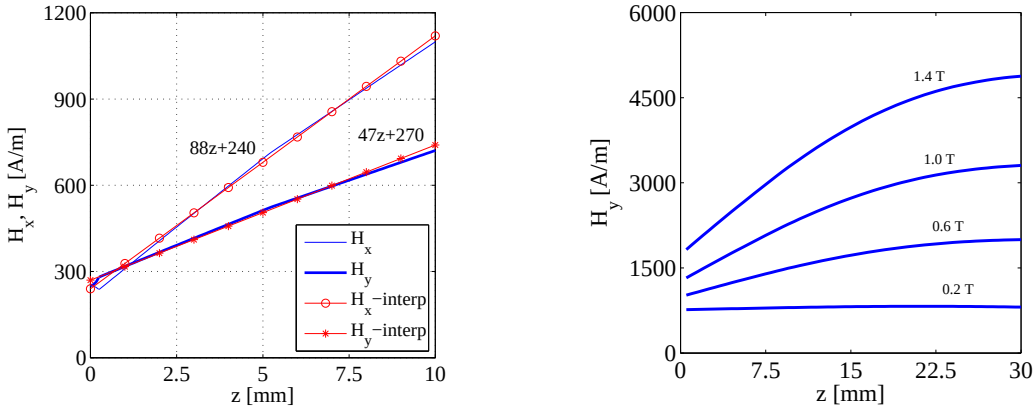
koordinátájú pontokban számított értékek nagy mértékben eltérnek a próbatest közepén mért értékektől.

Az 5.24(a) ábrán a mágneses térerősség két komponense abszolút értékének alakulása látható a próbatest felszínére merőleges z irányban a próbatesttől távolodva. Az ábrán feltüntettem egy-egy lehetséges lineáris interpolációt is, amely bizonyítja a 3. fejezetben bemutatott lineáris extrapoláción alapuló mérési technika alkalmazhatóságát.

Az 5.24(b) ábra alapján különböző nagyságú gerjesztés mellett is alkalmazható a lineáris extrapolációs technika.

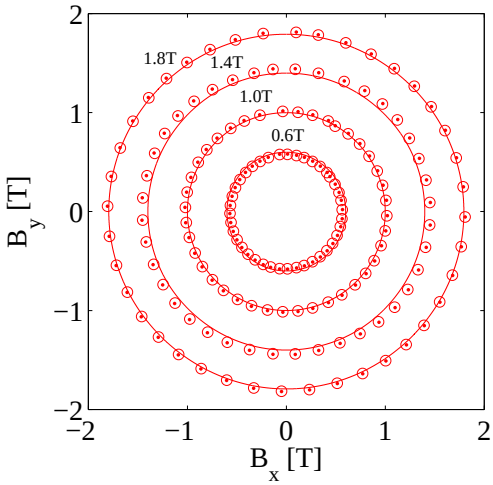
Az 5.25 ábrán a mért cirkulárisan polarizált mágneses indukció trajektóriája látható folytonos vonallal, amint azt szabályozással sikerült elérni. A szabályozás eredményeképp kapott áramjelet használtam aztán a szimuláció során. A próbatest középpontjában számított mágneses indukció (pontsorral ábrázolva) és a szimulált szenzor által átlagolt indukció (körökkel ábrázolva) gyakorlatilag ugyanaz, s mindkét érték nagyon jó egyezést mutat a mérési eredményekkel.

Az 5.26 ábrán a mért és szimulált mágneses térerősségek trajektóriája látható. Ebben van némi eltérés. A szimulációt ugyanis az izotrop karakterisztikával végeztem, amikor egyetlen w paramétert használtam. Ezután került sor a 3. fejezetben bemutatott egy-



(a) Lineáris polarizáció (b) Cirkuláris polarizáció

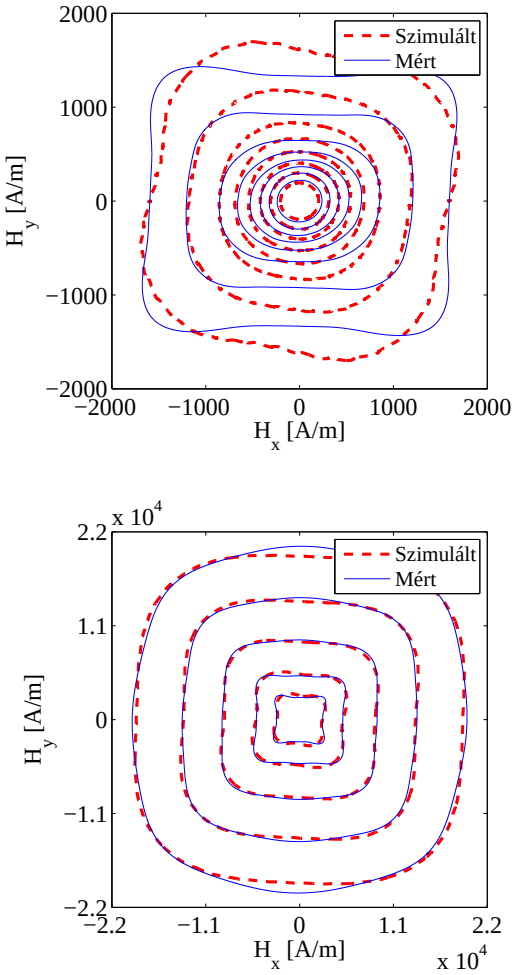
5.24. ábra. A mágneses térerősség jó közelítéssel lineárisan nő a próbatest felett



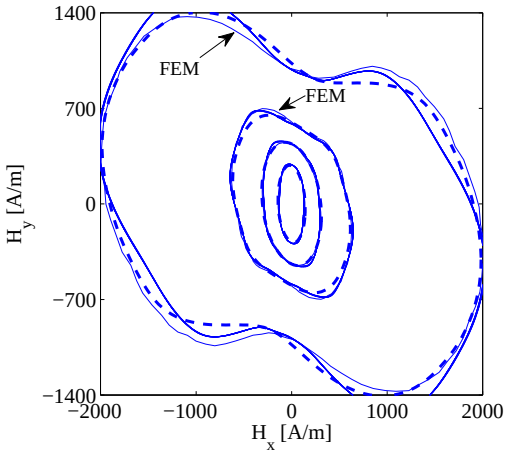
5.25. ábra. A mért és szimulált mágneses indukció értékek összevetése

tengelyű anizotropiával bíró modell kidolgozására, amely pontosabb szimulációt tesz lehetővé.

Végül elvégeztem az M250-35A anyag dinamikus hiszterézismodelljének végeselem-módszerhez történő illesztését az RRSTT-rendszer modellezésében. Az 5.27 ábrán az óramutató járásával megegyező irányba forgatott mágneses indukció eredményeképp kialakuló mágneses térerősség vektor trajektóriája látható $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián. A mérési eredményeket összevetettem a 3. fejezetben már bemutatott eredményekkel (v.ö. 3.29(b) ábra), s itt a rendszer végeselem-módszerrel modellezett eredményei is láthatók.



5.26. ábra. A mért és szimulált mágneses térerősség értékek összevetése



5.27. ábra. A dinamikus vektormodell eredményeinek méréssel való összehasonlítása $f = 200\,\mathrm{Hz}$ frekvencián (mérés: vastag folytonos vonal, (3.30) összefüggés szerint számított: $- -$, FEM: vékony folytonos vonal)

5.7. A tudományos eredmények összefoglalása

3. Tézis

Elvégeztem a nemlineáris statikus és örvényáramú problémák megoldására alkalmas potenciálformalizmusok beható analízisét különféle problémák megoldásának előállítása és elemzése során. Az egyes formalizmusokat alkalmazva implementáltam a fixpontos iterációs sémát, miközben a nemlinearitást és a frekvenciafüggést az általánosított polarizációs formulával kezeltem. A realizált mérési elrendezések tervezése és validálása kapcsán igazoltam a kidolgozott skalár és vektoriális Preisach-féle hiszterézismodellek alkalmazhatóságát a villamosmérnöki tervező eljárásokban. Ezen tézishez kapcsolódóan olyan új szabad formalizmust alkalmazó peremérték-feladatot fogalmaztam meg a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál meghatározására, amely jól illeszkedik a modern vektoriális végeselem-módszerhez.

3.a Elvégeztem a villamos gépeket alkotó lemezek vizsgálatát. Igazoltam a kidolgozott dinamikus skalár Preisach-modell helyességét különböző jellegű veszteségi komponenseket, és különféle gerjesztési módokat realizálva.

3.b A toroid transzformátor modellezésével és a szimulációs eredmények saját mérési adatokkal történő összevetésével igazoltam, hogy a frekvenciafüggetlen hiszterézismodell örvényáramú problémák esetén nem ad teljesen pontos eredményt, azaz a Maxwell-egyenletekből számítható örvényáramok okozta veszteségek csupán a teljes veszteség egy részét modellezik. A járulékos veszteségekkel kiegészített modell viszont jó közelítést ad.

3.c Igazoltam, hogy a kidolgozott numerikus térszimuláció hatékonyan alkalmazható a villamosmérnöki tervező munkában: elvégeztem egy háromfázisú transzformátor és egy háromfázisú villamos szinkrongép analízisét, s figyelembe vettem a különféle hiszterézismodelleket, vizsgáltam azok viselkedését; elvégeztem egy bonyolultabb háromdimenziós elrendezés vizsgálatát, amelyben a várt eredményeket értem el; a vektor hiszterézis felvételére alkalmas mérési összeállítás numerikus analízisével igazoltam, hogy a méréseket végző H-szenzorok elhelyezése optimális, s a mágneses térerősség felületmenti komponensének számítása a lineáris extrapolációval valóban helyes.

3.d Olyan új peremérték-feladatot fogalmaztam meg, amely egy szabad formalizmus keretében alkalmas a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál előállítására, és a gyenge alakban megfogalmazható probléma megoldásaként meghatározható vektorpotenciál közvetlenül kapcsolódhat a modern élmenti végeselem-módszerhez.

6. fejezet

Az új tudományos eredmények összefoglalása

Végül összefoglalom a dolgozatban bemutatott új tudományos eredményeim.

1. Tézis

Realizáltam a Preisach-féle hiszterézismodell-család egy, a mérnöki szimulációkban rendkívül előnyösen alkalmazható verzióját, amely kis futási ideje mellett nagy pontossággal bír. A gyors működést a lépcsősgörbe alkalmas szervezésével, a pontosságot pedig az Everett-függvény spline technikán alapuló közelítésével biztosítottam. Kidolgoztam az izotrop és az anizotrop vektor Preisach-modell egy általánosítását, amely alkalmas a forgó mágnesezési folyamatok még pontosabb leírására, a modellek identifikációjára pedig eljárást javasoltam. Kidolgoztam a modellek dinamikus általánosítását is, amelyek alkalmasak a frekvenciafüggés pontos reprezentálására, a modellek identifikációjára pedig eljárást javasoltam. Az egyes modellek elemzésén túl a modellek saját mérési eredményekkel történő összevetésével igazoltam elméleti eredményeim helyességét.

1.a A skalár hiszterézis karakterisztika mérésére egy automatizált mérési elrendezést dolgoztam ki, amely a különféle hiszterézismodellek identifikációjához szükséges tanítási mintahalmazt felveszi. A zajjal terhelt mért jelekből a zavaró összetevőket egy Fourier-transzformáción alapuló, digitális elveken megvalósított szűrési technikával tökéletesen elimináltam. Az előre definiált jelalakú mágneses indukció elérésére egy proporcionális szabályozó eljárást implementáltam, amelynek robusztusságát nagymértékben befolyásolja a szűrés sikeressége.

1.b A skalár hiszterézis karakterisztika modellezésére a frekvenciafüggetlen Preisach-modellt alkalmaztam oly módon implementálva, hogy az gyors és pontos legyen a mérnöki szimulációkban. A megvalósított modell képes kihasználni a mai modern párhuzamos számítástechnika előnyeit. A modell felállítása során az Everett-függvényt identifikáltam, ami tökéletes egyezést biztosít a mért és a szimulált eredmények között. A frekvenciafüggetlen modellt kiegészítettem a járulékos veszteségeket makroszkopikusan leíró komponenssel, s elvégeztem annak identifikálását.

1.c Kidolgoztam a vektor hiszterézis karakterisztika mérésére alkalmas automatizált mérési elrendezést, amely alkalmas a kialakuló mágneses tér rögzítésére egy kör alakú próbatestben. Realizáltam a mérések pontos elvégzéséhez szükséges szenzorokat. A szenzorok jele ebben a mérésben gyakorlatilag elveszik a környezeti

zajban, emiatt a skalár mérésnél kidolgozott szűrési technika itt még nagyobb jelentőségű volt. A vektoriális mérések során nemcsak a mágneses indukció, de a mágneses térerősség előírt jelalakja is csak szabályozással érhető el. Ezen oknál fogva általánosítottam a skalár mérésnél alkalmazott proporcionális szabályozót. Az általam implementált mérési elrendezés kiválóan alkalmas a vektoriális karakterisztika felvételére, s a vektoriális hiszterézismodellek identifikációjához szükséges minták előállítására.

1.d A klasszikus izotrop vektor Preisach-hiszterézismodellt általánosítottam oly módon, hogy egy új paraméter bevezetésével az alkalmas legyen a forgó mágnesezési folyamatok pontosabb leírására. Az izotrop modell identifikációjára általam korábban kidolgozott eljárást ennek megfelelően módosítottam. A klasszikus anizotrop vektor Preisach-hiszterézismodellt pedig általánosítottam oly módon, hogy az alkalmas legyen az anizotropia kezelésére úgy, hogy a forgó mágnesezési folyamatok során tapasztalható jelenségek leírása még pontosabb legyen. Ezt a mért Everett-függvények térbeli irányok szerinti Fourier-sorba fejtésével értem el, s az izotrop modellre alkalmazható identifikációs technikát tudtam alkalmazni, de ebben az esetben több paramétert kell a forgó mágnesezési folyamatok alapján identifikálni. A modellek kimeneti jelét saját mérési eredményekkel vetettem össze, ami igazolta elméleti eredményeim helyességét. A frekvenciafüggetlen modellt kiegészítettem a járulékos veszteségeket makroszkopikusan leíró komponenssel, s elvégeztem annak identifikálását.

2. Tézis

A kidolgozott Preisach-féle hiszterézismodelleket a polarizációs formulát használva numerikus térszimulációt alkalmazó eljárásokba illesztettem. A polarizációs formulával linearizáltam a nemlineáris karakterisztikát, a lineáris tag meredekségének alkalmas megválasztásával pedig kontraktív leképezést nyertem, amely a Maxwell-egyenleteken keresztül bizonyítottan konvergens fixpontos iterációs sémára vezet. A polarizációs formulát általánosítottam oly módon, hogy a járulékos veszteségek reprezentálására alkalmas mágneses térerősséget figyelembe lehessen venni, így a fixpontos technikát alkalmassá tettem dinamikus modellek beillesztésére is. Kidolgoztam a statikus mágneses tér és az örvényáramú tér számítására alkalmas potenciálformalizmusok nemlineáris hiszterézis figyelembevételére alkalmas alakját, s kidolgoztam az egyes formalizmusok gyenge alakját is, amelyek a végeselem-módszerben is alkalmazhatók. A polarizációs formula két alakját és az egyes formalizmusok elsődleges változóját alapul véve kidolgoztam az összes lehetséges variációt, ahogy a formalizmusok és a direkt, vagy inverz alakban implementált hiszterézismodellek összekapcsolhatók. Mindez összesen négy lehetséges módszercsaládot eredményez, amelyek mentesek a további belső iterációktól, miáltal a futási idő jelentősen redukálható.

3. Tézis

Elvégeztem a nemlineáris statikus és örvényáramú problémák megoldására alkalmas potenciálformalizmusok beható analízisét különféle problémák megoldásának előállítása és elemzése során. Az egyes formalizmusokat alkalmazva implementáltam a fixpontos iterációs sémát, miközben a nemlinearitást és a frekvenciafüggést az általánosított polarizációs formulával kezeltem. A realizált mérési elrendezések tervezése és validálása

kapcsán igazoltam a kidolgozott skalár és vektoriális Preisach-féle hiszterézismodellek alkalmazhatóságát a villamosmérnöki tervező eljárásokban. Ezen tézishez kapcsolódóan olyan új szabad formalizmust alkalmazó peremérték-feladatot fogalmaztam meg a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál meghatározására, amely jól illeszkedik a modern vektoriális végeselem-módszerhez.

3.a Elvégeztem a villamos gépeket alkotó lemezek vizsgálatát. Igazoltam a kidolgozott dinamikus skalár Preisach-modell helyességét különböző jellegű veszteségi komponenseket, és különféle gerjesztési módokat realizálva.

3.b A toroid transzformátor modellezésével és a szimulációs eredmények saját mérési adatokkal történő összevetésével igazoltam, hogy a frekvenciafüggetlen hiszterézismodell örvényáramú problémák esetén nem ad teljesen pontos eredményt, azaz a Maxwell-egyenletekből számítható örvényáramok okozta veszteségek csupán a teljes veszteség egy részét modellezik. A járulékos veszteségekkel kiegészített modell viszont jó közelítést ad.

3.c Igazoltam, hogy a kidolgozott numerikus térszimuláció hatékonyan alkalmazható a villamosmérnöki tervező munkában: elvégeztem egy háromfázisú transzformátor és egy háromfázisú villamos szinkrongép analízisét, s figyelembe vettem a különféle hiszterézismodelleket, vizsgáltam azok viselkedését; elvégeztem egy bonyolultabb háromdimenziós elrendezés vizsgálatát, amelyben a várt eredményeket értem el; a vektor hiszterézis felvételére alkalmas mérési összeállítás numerikus analízisével igazoltam, hogy a méréseket végző H-szenzorok elhelyezése optimális, s a mágneses térerősség felületmenti komponensének számítása a lineáris extrapolációval valóban helyes.

3.d Olyan új peremérték-feladatot fogalmaztam meg, amely egy szabad formalizmus keretében alkalmas a $\vec{\boldsymbol{T}}_0$ áram-vektorpotenciál előállítására, és a gyenge alakban megfogalmazható probléma megoldásaként meghatározható vektorpotenciál közvetlenül kapcsolódhat a modern élmenti végeselem-módszerhez.

7. fejezet

Konklúzió

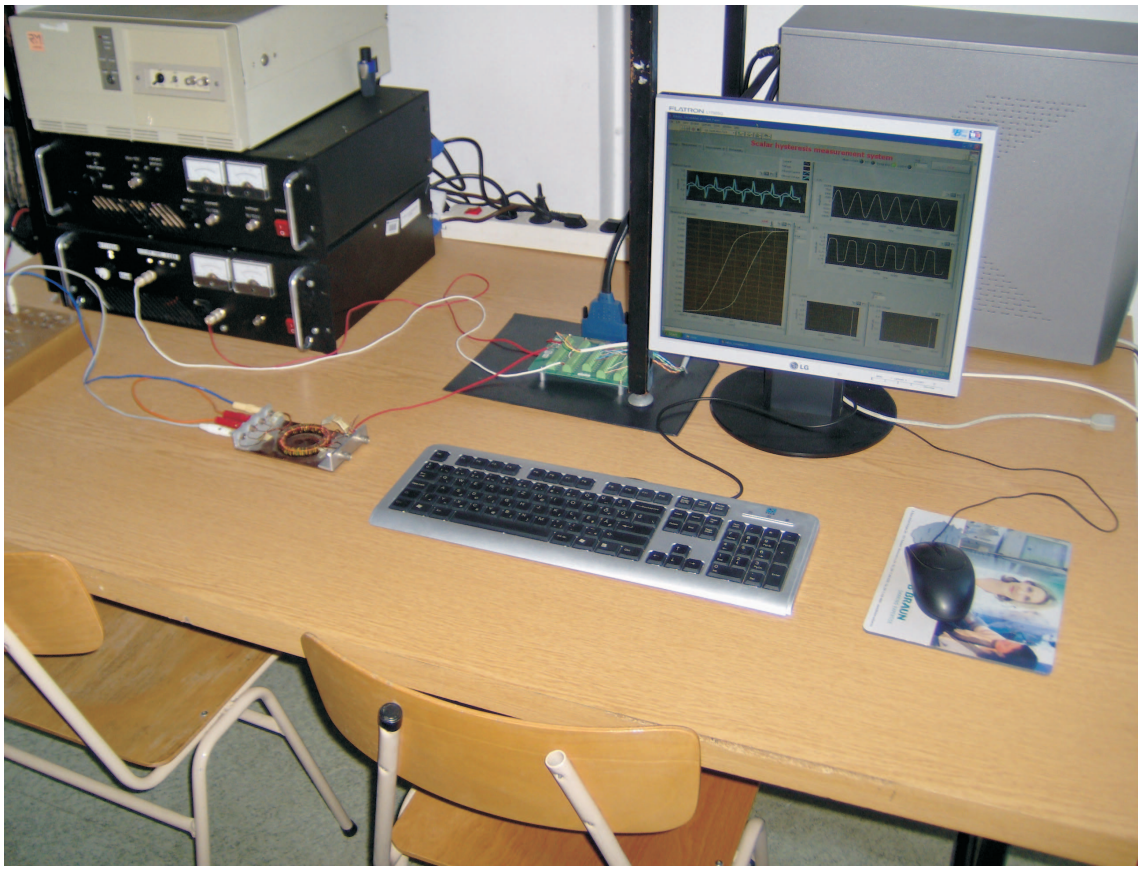
A disszertáció fő témája a hiszterézis karakterisztika mérése és modellezése, valamint a kidolgozott modellek numerikus térszimulációba, jelen esetben a végeselem-módszerbe történő illesztése volt. A skalár karakterisztika mérése során a toroid transzformátort alkalmaztam, de nem vizsgáltam más méréstechnikai megoldásokat, mint például a bevezető fejezetben említett I alakú lemezek vizsgálatára alkalmas Epstein-keretet. A vektoriális hiszterézis karakterisztika mérésére egy saját magam által épített mérési elrendezést használtam, amelynek tervezése során az irodalmi ismeretanyagra támaszkodva saját végeselem-módszeren alapuló tervező eljárással is alátámasztva végeztem el az eszköz megvalósítását. A mérési eredmények birtokában implementáltam a Preisach-féle hiszterézismodellt és annak kétdimenziós kiterjesztését mind izotróp, mind anizotróp esetre. A modellek identifikációjára eljárást is javasoltam, a modellek viselkedésének helyességét pedig saját mérési eredményeim által validáltam és igazoltam. Elvégeztem továbbá a modellek dinamikus kiterjesztését, miáltal Maxwell-egyenletekből számítható örvényáram-veszteségek mellett a járulékos veszteségek hatását is modellezni tudom.

A végeselem-módszer a súlyozott maradék elv gyenge alakjának megoldására alkalmas technika a Galjorkin-eljárásnak megfelelően. Ennek kapcsán megvizsgáltam a Maxwell-egyenletekből levezethető különféle potenciálformalizmusokat, s azokat kiterjesztettem a nemlinearitás figyelembe vételére a polarizációs formulán keresztül. Az így előálló egyenletek megoldására a fixpontos technikát alkalmaztam, amely bizonyítottan konvergens a polarizációs formulában szereplő lineáris tag meredekségének alkalmas megválasztása mellett. A módszer nagy hátránya a lassú konvergencia. Ezen oknál fogva célszerű foglalkozni a különféle gyorsítási lehetőségekkel. Megjegyzem, hogy a hiszterézis karakterisztikát is tartalmazó elektrodinamikai rendszerek modellezése még nem elterjedt, egyszerű karakterisztikák kezelésére alkalmasak a kereskedelemben is beszerezhető szoftverek, de bonyolultabb nemlinearitás kezelése ma is nyitott kérdés. Ezt a hiányt igyekszünk pótolni a fejlesztés alatt álló szoftverünkkel, aminek elsődleges célja a járműiparban is felhasználásra kerülő különféle villamos gépek modellezése, és tervezésének elősegítése. A másik nagyon ígéretes irány a numerikus szimulációk gyorsításának területén a módszerek párhuzamosíthatósági kérdéseinek vizsgálata a különböző domen dekompozíciós technikákon, vagy az eljárások párhuzamosításán keresztül [311–313]. Mindez előnyösen kihasználná a mai modern számítástechnikai hátteret.

A. Függelék

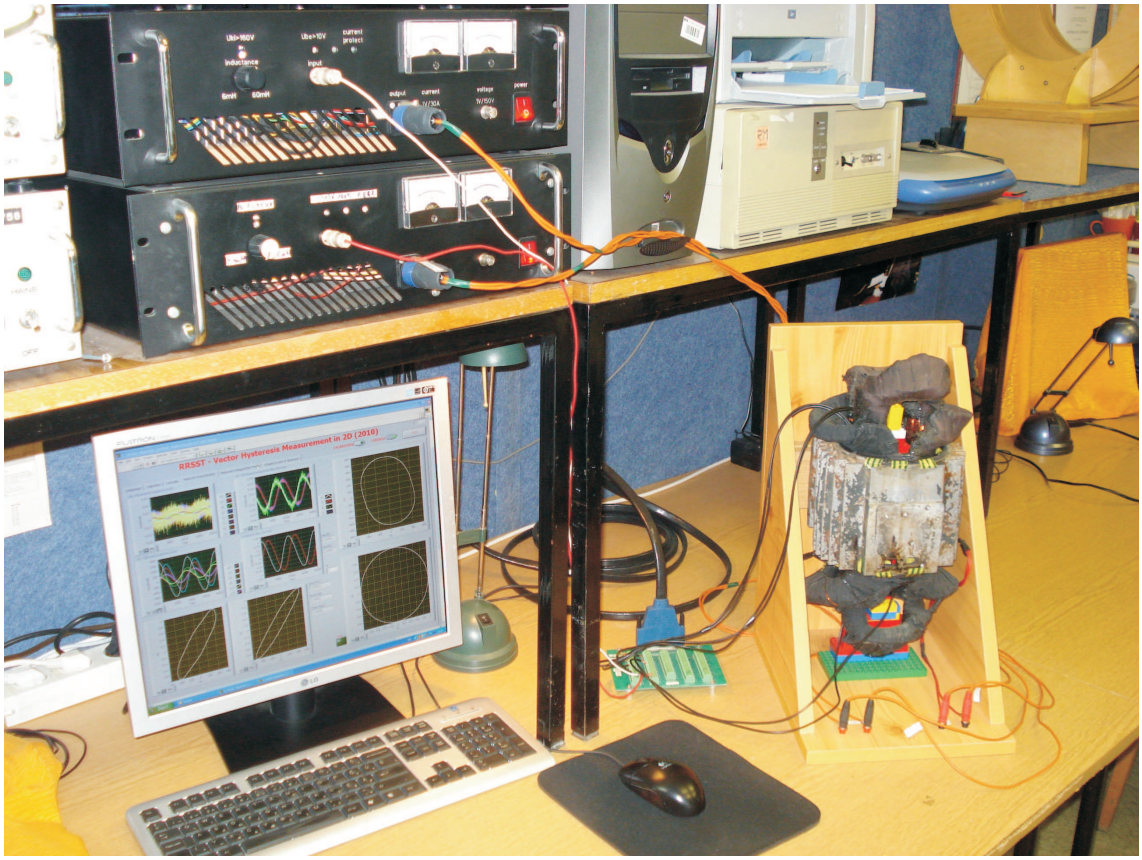
A mérések során használt eszközök

A 3.1 valamint a 3.11 ábrán blokkvázlatukkal bemutatott mérőrendszerek a Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Kara Automatizálási Tanszékének, illetve Távközlési Tanszékének Laboratóriumaiban általam megépített változatai az A.1, valamint az A.2 ábrán láthatók. A fényképeken látható a mérést felügyelő számítógép, a rajta futó, általam kifejlesztett szoftver kezelői felülete, az áramgenerátorok, a csatlakozósor, a toroid tekercs valamint az átalakított villamos motor.



A.1. ábra. A skalár hiszterézis karakterisztika vizsgálatára alkalmas mérési elrendezés az Elektromágneses Terek Laboratóriumban

A mérések során a `National Instruments` cég által gyártott mérési adatgyűjtő rendszert használtam. A mérések számítógéppel történő felügyeletét, a generátorok



A.2. ábra. A vektoriális hiszterézis karakterisztika felvétele laboratóriumi körülmények között

vezérlését, a mért jelek összegyűjtését, feldolgozását és megjelenítését a `LabVIEW 8` fejlesztői környezetben általam kifejlesztett programrendszerrel végeztem, amely ugyanezen cég terméke. Itt ezen rendszer rövid bemutatására szorítkozom. Bemutatom továbbá a mérésnél felhasznált különféle eszközöket is.

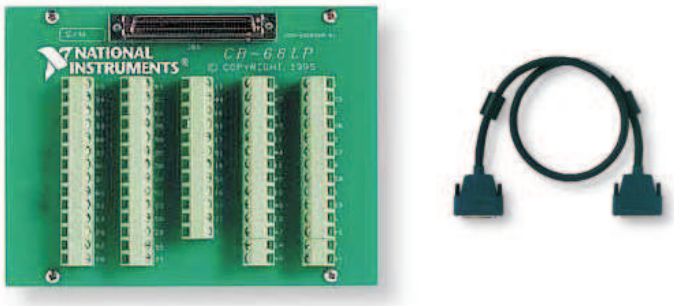
A.1. A mérési adatgyűjtő rendszer

A mérések során az ún. M-szériába tartozó többfunkciós `NI PCI-6251` mérési adatgyűjtő kártyát (Data Acquisition Card, NI-DAQ Card) használtam, amely a számítógépbe építhető (l. A.3 ábra). Ez a kártya alkalmas a vektoriális hiszterézis mérésére is, mert két független analóg kimenete van, amelyekkel a két független áramgenerátor vezérelhető. A kimeneti feszültség a ± 10 V-os tartományba eshet, azaz ± 10 V értékekhez tartozik a maximális és a minimális áram értéke. Az áramgenerátor követi az analóg kimeneten generált jelformát, ami szoftveresen állítható elő. A kártya nyolc analóg bemenettel rendelkezik, melyek a ± 10 V határok között képesek feszültségjelet mérni, azonban ez a határ szoftverúton beállítható, módosítható. Egymástól függetlenül tehát nyolc jel mérhető egy időben. Nyolc csatorna ezen mérésekhez bőségesen elegendő: skalár karakterisztika mérésekor csupán két jelet (a primer oldali árammal arányos feszültséget és a szekunder oldali üresjárási feszültséget), vektoriális karakterisztika mérésekor pedig hat jelet (a négy térerősség-szenzor feszültsége és a két mágneses indukciót mérő tekercs feszültsége) kell szimultán mérni. A kártya maximális mintavételezési sebessége 1 MSample/s. A

16 bites analóg-digitális átalakító pontossága ebben a mérési környezetben elegendőnek bizonyult. Mind a jelgenerálás, mind a mért jelek feldolgozása szoftveresen végezhető.

A.3. ábra. Az `NI PCI-6251` mérési adatgyűjtő kártya fényképe

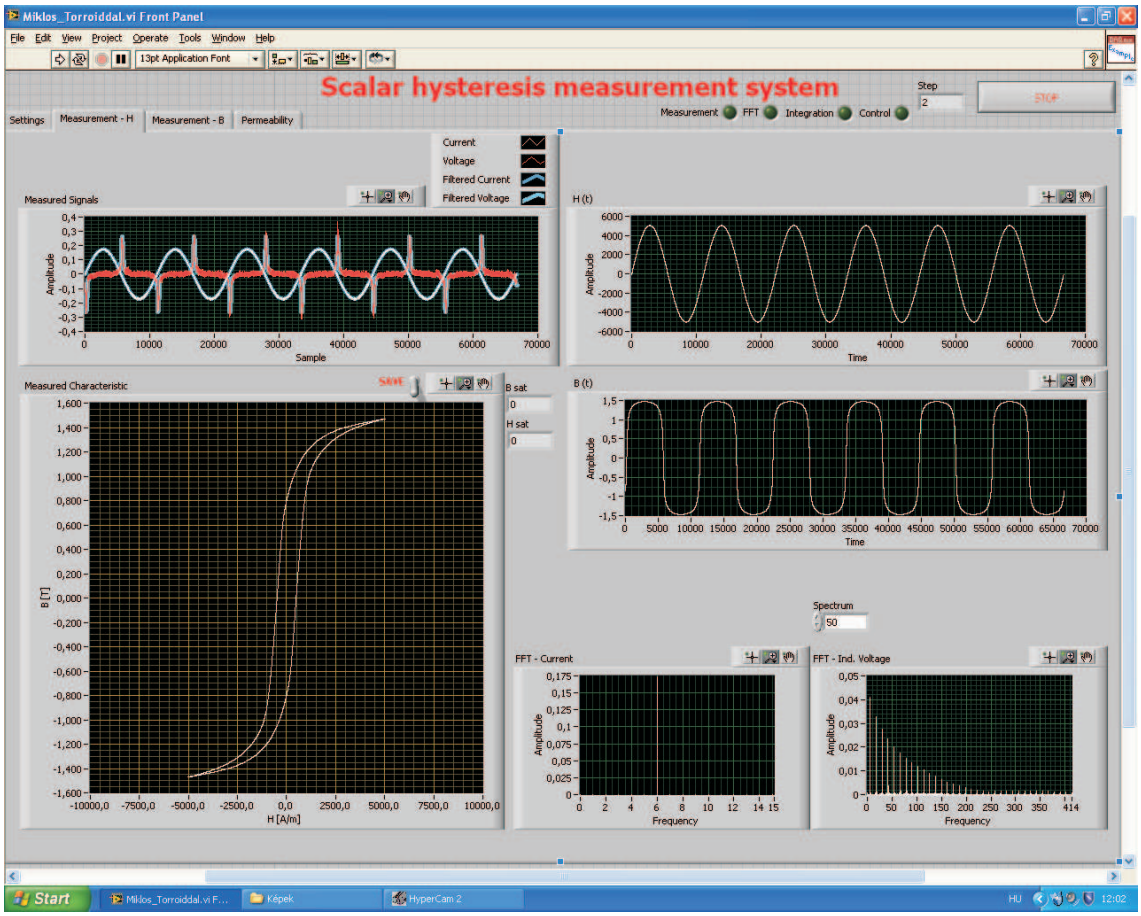
Az áramgenerátorok irányába vitt jeleket és a mért jeleket koaxiális mérőkábeleken továbbítottam. A mérőkártya és a rendszer közötti kapcsolatot az A.4 ábrán látható `CB-68LP` csatlakozópanel és a hozzá csatlakozó árnyékolt mérőkábel biztosította. A csatlakozópanel ezen kivitele nem árnyékolt.



A.4. ábra. A `CB-68LP` csatlakozópanel és az árnyékolt kábel fényképe

A.2. A LabVIEW

Munkám során a `LabVIEW 8 Full Development System` rendszert használtam a mérések számítógéppel történő elvégzésére. A `LabVIEW` (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) egy olyan programcsomag, mellyel virtuális műszereket (virtual instruments, `vi`) lehet létrehozni, s velük a legkülönfélébb méréstechnikai műveleteket végrehajtani. A fenti mérőkártya a `LabVIEW` függvényeivel vezérelhető, a mérőkártya által mért jelek szintén `LabVIEW`-ban implementált eljárásokkal feldolgozhatók. A mérésekhez grafikus, felhasználóbarát kezelői felület fejleszthető, amellyel a mérések elvégzése kényelmes. Ilyen felületet mutat az A.5 és az A.6 ábra, ahol a skalár és a vektoriális hiszterézis mérésére kifejlesztett programok láthatók.



A.5. ábra. A skalár hiszterézis karakterisztika mérésére kifejlesztett grafikus felület

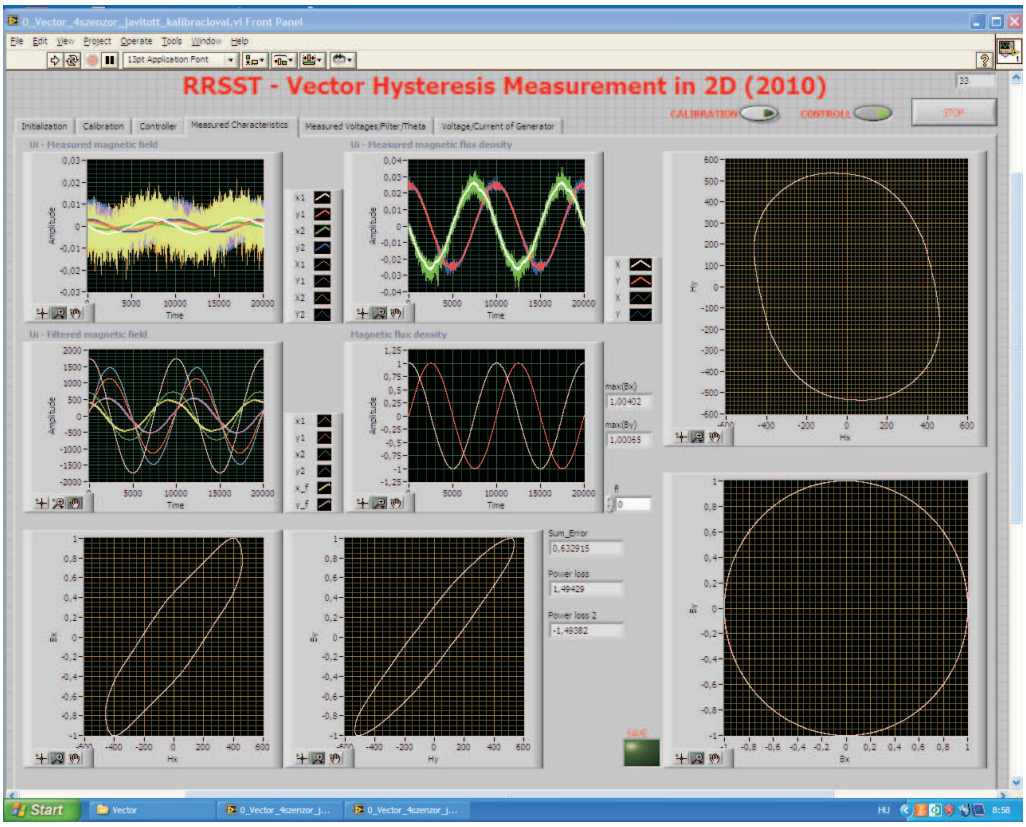
A.3. A mérést vezérlő program

A gerjesztő áram amplitúdója, kezdőfázisa, frekvenciája, s jelalakja a kifejlesztett szoftverek grafikus felületén beállítható. A gerjesztő áram jele azonban más szoftverrel is (pl. `MATLAB`) előállítható és `LabVIEW` függvények segítségével beolvasható. Ezt célszerűen bonyolult jelek esetén érdemes használni. A mérőkártya kimenetére ezen áramjel kapcsolható, amely aztán ennek megfelelően vezérli az áramgenerátort. Skaláris hiszterézis mérése esetén egyetlen generátor szükséges a mérések elvégzéséhez, vektoriális hiszterézis felvétele esetén természetesen két áramjelet kell szimultán generálni, s két független áramgenerátort vezérelni, azonban az említett mérési adatgyűjtő kártya két analóg kimenettel rendelkezik. A mérés nyolc független bemeneti csatornán lehetséges szimultán. A mért jeleket `LabVIEW` függvények segítségével kényelmesen fel lehet dolgozni, rajtuk a legkülönfélébb műveleteket el lehet végezni (alapműveletek mellett integrálás, deriválás, Fourier-transzformáció, szűrés stb.), s az eredményeket megjeleníteni, vagy az adatokat kimenteni a további felhasználás céljából.

Az analóg bemeneti csatornák által szimultán mért jeleket a mérőkártya mintavételezi és kvantálja. A mintavételezési frekvencia szoftveresen állítható, s így a

$$\texttt{Rate} = \frac{\texttt{Sample}}{\texttt{Period}} f \tag{A.1}$$

érték adja meg az egy másodperc alatt mért minták számát. A $\frac{\texttt{Sample}}{\texttt{Period}}$ érték az egy



A.6. ábra. A vektor hiszterézis karakterisztika mérésére kifejlesztett grafikus felület

perióduson belül mérni kívánt minták száma, és f a mért periódikus jel frekvenciája. A mérés és a jelgenerálás során ugyanazon `Rate` értéket használtam. A kvantálás minden esetben 16 biten történik, de a mérendő intervallum maximuma és minimuma beállítható, miáltal a felbontott tartomány szabályozható, finomítható.

Az A.5 ábra bal felső sarkában a mért áramjel és az indukált feszültség látható. Utóbbi kis mértékben zajjal terhelt, amely azonban a dolgozatban bemutatott eljárással szűrhető, s végül csak a hasznos jel az, amiből a mért karakterisztika felépül. A jobb oldali két diagram a mágneses térerősség és a mágneses indukció időbeli lefutását ábrázolja, s bal oldalon a kialakuló hiszterézis karakterisztika látható. A jobb alsó sarokban felrajzoltam az áram és az indukált feszültség jelének amplitúdóspektrumát is.

Az A.6 ábra bal felső diagramja mutatja azon indukált feszültségek időfüggvényét, amelyekből a mágneses térerősség vektorának ortogonális komponensei előállíthatók. Látható, hogy a mért jelek rendkívül zajosak, a mért jelek gyakorlatilag elvesznek a zaj mellett. A dolgozatban bemutatott szűrési eljárás azonban a nem kívánt zajt tökéletesen szűri. A diagramon a szűrés eredményeképp kapott jelek is láthatók. A diagram alatt a négy H-szenzor jeléből számított mágneses térerősség értékek láthatók, amelyekből a térerősség két komponense aztán extrapolációval számítható. Ez a diagram ezért mutat hat jelet. A középső oszlopban a felső diagram a mágneses indukció két komponensének megfelelő indukált feszültséget mutatja, alatta pedig a belőlük számított komponensek láthatók. A zaj itt nem annyira számottevő, de szűrése jelentős mértékben javítja a mérési eredményeket. Az alsó két diagram a vektoriális hiszterézis karakterisztika két ortogonális vetületét ábrázolja, azaz a $H_x - B_x$ és a $H_y - B_y$ karakterisztikákat. Végül a jobb oldali két ábra a mágneses térerősség és a mágneses indukció vektorának trajektóriáját

mutatja. Itt példaképp egy szabályozás eredményeként kapott állapot látható, amikor a mágneses indukció maximális értéke 1 T és cirkulárisan polarizált az óramutató járásával ellentétes irányban.

A.4. A mérések során használt egyéb eszközök

A használt áramgenerátorok egyike az A.7 ábrán látható. A generátor a számítógépbe helyezett mérőkártyával vezérelhető, azaz egy feszültségvezérelt áramgenerátorról van szó. A generátor maximum 30 A csúcsértékű áramot képes létrehozni miközben a maximális kapocsfeszültsége 150 V. Az áramgenerátort speciálisan nagy induktivitású tekercsek gerjesztésére fejlesztettük ki.

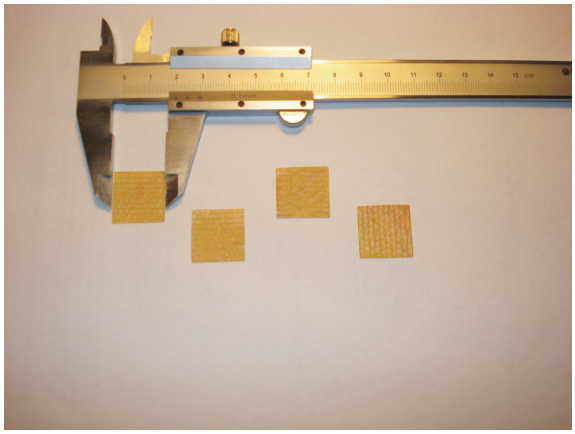
A.7. ábra. Az egyik áramgenerátor fényképe

A mágneses térerősség mérésére alkalmas négy szenzort egy-egy 0,5 mm vastagságú $20 \times 20\,\mathrm{mm}^2$ területű bakelit lapra tekercseltem fel (l. A.8(a) ábra). A mágneses térerősség x komponensének mérésére szolgáló két tekercs menetszáma $N_{H_{x,1}} = 810$ és $N_{H_{x,2}} = 820$, az y komponenset mérő két tekercs menetszáma pedig $N_{H_{y,1}} = 800$ és $N_{H_{y,2}} = 820$, ami 6-7 réteget jelent (l. A.8(b) ábra). A négy tekercsből kettő (az alsó és a felső) méri a mágneses térerősség x komponensét, a másik kettő pedig az ortogonális y komponenset. Az összeállítás az A.9 ábrán látható.

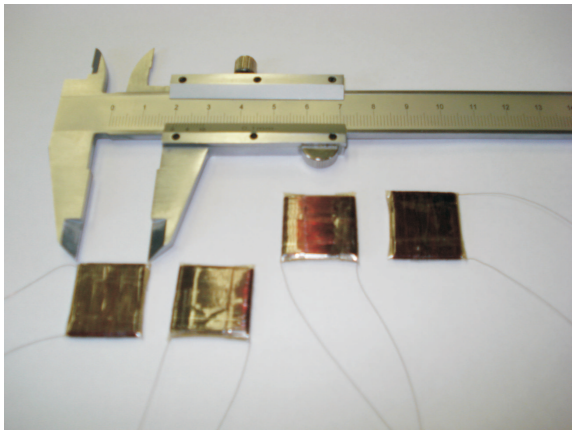
A mágneses térerősség mérésére szolgáló négy szenzor hatásos keresztmetszetét kétféleképp is identifikáltam egy `LabVIEW`-ban implementált program segítségével. A (3.8) összefüggésben szereplő hatásos keresztmetszet méréssel történő meghatározása azért szükséges, mert a bakelit lapra több rétegben tekertem fel a vezetéket, miáltal a keresztmetszet nem vehető a bakelit lap keresztmetszetével egyenlőnek. A hatásos keresztmetszet azonban szolenoid tekerccsel (A.10 ábra) és Helmholtz-tekerccsel (A.11 ábra) identifikálható.

Korábbi mérések tapasztalataiból ismeretes, hogy a használt szolenoid hossztengelyének középső részén a mágneses térerősség számítható a

$$H(t) = \frac{N_{\mathrm{sz}}\, i(t)}{l} \tag{A.2}$$

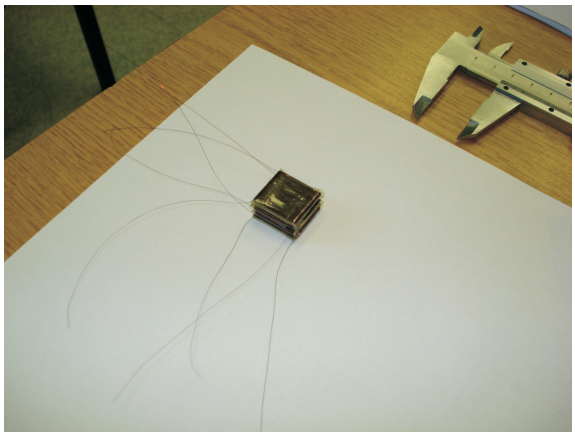


(a) A bakelit lapok



(b) A H-tekercsek

A.8. ábra. A H-szenzorok felépítése



A.9. ábra. A négy tekercset egymásra helyezve épül fel a mágneses térerősség mérésére alkalmas szenzor

összefüggéssel, ahol $N_{\text{sz}} = 305$ a szolenoid tekercs menetszáma, és $l = 340\,\text{mm}$ a hossza ($r = 50\,\text{mm}$ a szolenoid sugara). A tekercsen átfolyó $i(t)$ áram időfüggvénye ismert. A szolenoid tengelyének középső részén tehát a $H(t)$ mágneses térerősség ismert, s így (3.8) alapján, a

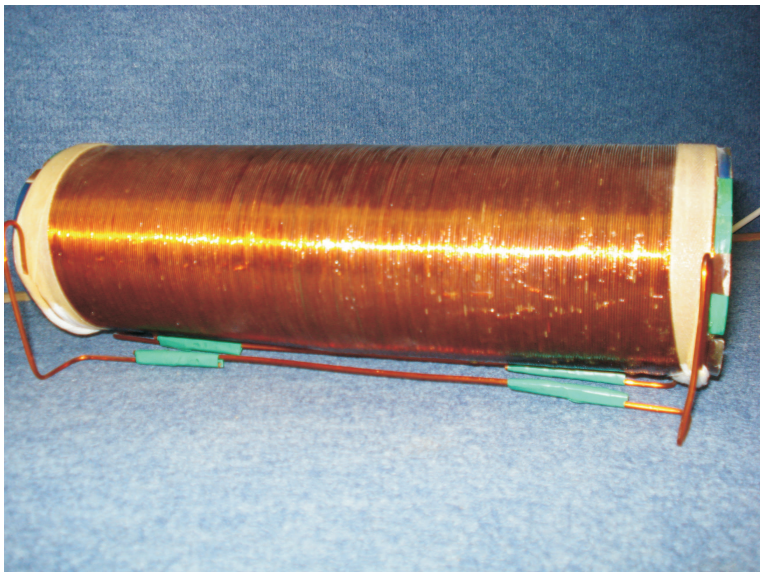
$$H(t) = H_0 + \frac{1}{S\,N\,\mu_0} \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{A.3}$$

összefüggést felhasználva a szolenoidba helyezett tekercs ismeretlen S keresztmetszete meghatározható.

Ugyanezen módszert lehet használni a Helmholtz-tekercs esetén is, ahol a Helmholtz-tekercs tekercseinek közös tengelyén a középpontban a mágneses térerősség a következőképp számítható:

$$H(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{N_{\text{H}}\,i(t)}{R}, \tag{A.4}$$

ahol $N_{\text{H}} = 150$ az egyes tekercsek menetszáma, és $R = 0{,}2\,\text{m}$.



A.10. ábra. A szolenoid tekercs

A.11. ábra. A Helmholtz-tekercs

B. Függelék

Az izotróp vektormodell identifikációja

Ebben a függelékben a vektor hiszterézismodell identifikációjának általam kidolgozott algoritmusát közlöm.

Az identifikáció a következő integrálegyenleten alapul:

$$F(\alpha,\beta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, E(\alpha \cos^{1/w}\varphi, \beta \cos^{1/w}\varphi) \, \mathrm{d}\varphi, \tag{B.1}$$

ahol $F(\alpha,\beta)$ a mérési eredmények alapján előállított Everett-függvény, és az ismeretlen $E(\alpha,\beta)$ Everett-függvény az integranduszban szerepel. A φ szög az x tengellyel bezárt szöget jelöli, w pedig egy paraméter, amelyet a forgó mágneses térrel történő gerjesztésből származó mérési eredmények alapján lehet identifikálni. A (B.1) egyenlettel megfogalmazott identifikációs probléma tetszőleges w paraméter mellett megvalósítható. Megjegyzem ugyanakkor, hogy ezen paraméter értéke pozitív és nagyságrendileg 1,00 körüli. A rövidség kedvéért nem jelölöm külön, ha w irányfüggő.

Az identifikációs algoritmus célja tehát az $E(\alpha,\beta)$ Everett-függvény meghatározása.

B.1. Az Everett-függvény diszkretizálása

A (B.1) egyenlet numerikus megoldása során annak egy diszkretizált változatát lehet használni:

$$F(\alpha_k,\beta_l) \cong \sum_{i=1}^{n} \cos\varphi_i \, E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_i, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_i) \, \Delta\varphi. \tag{B.2}$$

Az Everett-függvényt $(N+1)\times(N+1)$ diszkrét pontra felosztva az

$$\alpha_k = \frac{2}{N}\left(k - \frac{N+1}{2}\right) - \frac{1}{N}, \quad \beta_l = \frac{2}{N}\left(\frac{N+1}{2} - l\right) + \frac{1}{N} \tag{B.3}$$

pontokban történik az identifikáció. Itt tehát $k,l = 1,\cdots,N+1$ és N páros egész szám. A $\varphi \in [-\pi/2,\cdots,\pi/2]$ integrálási tartományt a következő módon lehet egyszerűen felbontani n számú részintervallumra:

$$\varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \frac{i-1}{n}\pi, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{B.4}$$

A továbbiakban a $\Delta\varphi = \pi/n$ konstanst elhagyom.

B.2. Az identifikáció első lépése

A β paramétert nullának választva a (B.1) egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$F(\alpha, 0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, E(\alpha \cos^{1/w} \varphi, 0) \, \mathrm{d}\varphi, \tag{B.5}$$

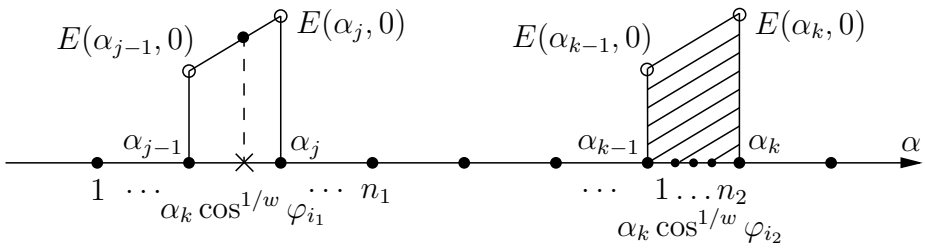
azaz az ismeretlen Everett-függvénynek van olyan része, amely csak az egyik változótól függ. Ez az $\alpha \geq 0$ és $\beta = 0$ összefüggések szerinti szakasz. A fenti egyenlet diszkretizált alakja a következő:

$$F(\alpha_k, 0) \cong \sum_{i=1}^{n} \cos\varphi_i \, E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_i, 0). \tag{B.6}$$

Itt $k = N/2 + 1, \cdots, N + 1$, valamint $l = N/2 + 1$.

Ez az összefüggés két részre bontható a B.1 ábrának megfelelően. Az $i_1 = 1, \cdots, n_1$ pontokhoz tartozó $E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1}, 0)$ értékek az ismert $E(\alpha_{j-1}, 0)$ és $E(\alpha_j, 0)$ értékek alapján interpolációval meghatározhatók. Az $i_2 = 1, \cdots, n_2$ pontok viszont az ismeretlen $E(\alpha_k, 0)$ értéktől függenek. Azaz

$$F(\alpha_k, 0) \cong \sum_{i_1=1}^{n_1} \cos\varphi_{i_1} \, E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1}, 0) + \sum_{i_2=1}^{n_2} \cos\varphi_{i_2} \, E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_2}, 0). \tag{B.7}$$



B.1. ábra. Az első lépés illusztrálásához, amikor $\alpha \geq 0$ és $\beta = 0$

A B.1 ábráról leolvasható, hogy amennyiben az

$$\alpha_{j-1} < \alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1} \leq \alpha_j, \quad \text{és} \quad \alpha_{j-1} < \alpha_j \leq \alpha_{k-1} \tag{B.8}$$

feltételek teljesülnek, akkor az $(\alpha_{j-1}, E(\alpha_{j-1}, 0))$ és $(\alpha_j, E(\alpha_j, 0))$ értékek közötti lineáris interpolációval $E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1}, 0)$ egyszerűen kifejezhető, hiszen

$$\frac{E(\alpha_j, 0) - E(\alpha_{j-1}, 0)}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} = \frac{E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1}, 0) - E(\alpha_{j-1}, 0)}{\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1} - \alpha_{j-1}}. \tag{B.9}$$

Utóbbi egyenlőségből a keresett érték a következő formula alapján kapható meg:

$$E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1}, 0) = E(\alpha_{j-1}, 0) + \frac{\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1} - \alpha_{j-1}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \left[E(\alpha_j, 0) - E(\alpha_{j-1}, 0) \right]. \tag{B.10}$$

Hasonló összefüggés vezethető le amennyiben az

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_2} \leq \alpha_k \tag{B.11}$$

feltétel teljesül (l. B.1 ábra). Alkalmazva az

$$\frac{E(\alpha_k,0)-E(\alpha_{k-1},0)}{\alpha_k-\alpha_{k-1}}=\frac{E(\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_2},0)-E(\alpha_{k-1},0)}{\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_2}-\alpha_{k-1}} \tag{B.12}$$

aránypárt az

$$E(\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_2},0)=E(\alpha_{k-1},0)+\frac{\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_2}-\alpha_{k-1}}{\alpha_k-\alpha_{k-1}}\left[E(\alpha_k,0)-E(\alpha_{k-1},0)\right] \tag{B.13}$$

kifejezés kapható. Az $E(\alpha_k,0)$ az egyetlen ismeretlen érték, amely ebben az összefüggésben található.

A (B.10) és a (B.13) összefüggések (B.7)-be történő visszahelyettesítésével az alábbi kifejezés nyerhető:

$$\begin{aligned}F(\alpha_k,0)=&\sum_{i_1=1}^{n_1}\cos\varphi_{i1}\left(E(\alpha_{j-1},0)+\frac{\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_1}-\alpha_{j-1}}{\alpha_j-\alpha_{j-1}}\big[E(\alpha_j,0)-E(\alpha_{j-1},0)\big]\right)\\&+E(\alpha_{k-1},0)\big[(1+b_k)\,c_1-a_k\,c_2\big]+E(\alpha_k,0)\big(a_k\,c_2-b_k\,c_1\big),\end{aligned} \tag{B.14}$$

ahol

$$a_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_k-\alpha_{k-1}},\quad b_k=\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k-\alpha_{k-1}}, \tag{B.15}$$

és

$$c_1=\sum_{i_2=1}^{n_2}\cos\varphi_{i_2},\quad c_2=\sum_{i_2=1}^{n_2}\cos\varphi_{i_2}\,\cos^{1/w}\varphi_{i_2}. \tag{B.16}$$

Innen $E(\alpha_k,0)$ kifejezhető.

Hasonló összefüggések vezethetők le az $\alpha=-\beta$ egyenes mentén. Ekkor a k és l indexek a $k=l=N/2+1,\cdots,N+1$ értékeket veszik fel. Ha

$$\alpha_{j-1}=\beta_{j-1}<\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_1}=\beta_l\cos^{1/w}\varphi_{i_1}\le\alpha_j=\beta_j, \tag{B.17}$$

és

$$\alpha_{j-1}=\beta_{j-1}<\alpha_j=\beta_j\le\alpha_{k-1}=\beta_{k-1}, \tag{B.18}$$

akkor

$$\begin{aligned}E(\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_1},\beta_l\cos^{1/w}\varphi_{i_1})=&E(\alpha_{j-1},\beta_{j-1})\\&+\frac{\sqrt{\alpha_k^2\cos^{2/w}\varphi_{i_1}+\beta_l^2\cos^{2/w}\varphi_{i_1}}-\sqrt{\alpha_{j-1}^2+\beta_{j-1}^2}}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}-\sqrt{\alpha_{j-1}^2+\beta_{j-1}^2}}\\&\times\big[E(\alpha_j,\beta_j)-E(\alpha_{j-1},\beta_{j-1})\big].\end{aligned} \tag{B.19}$$

Ha

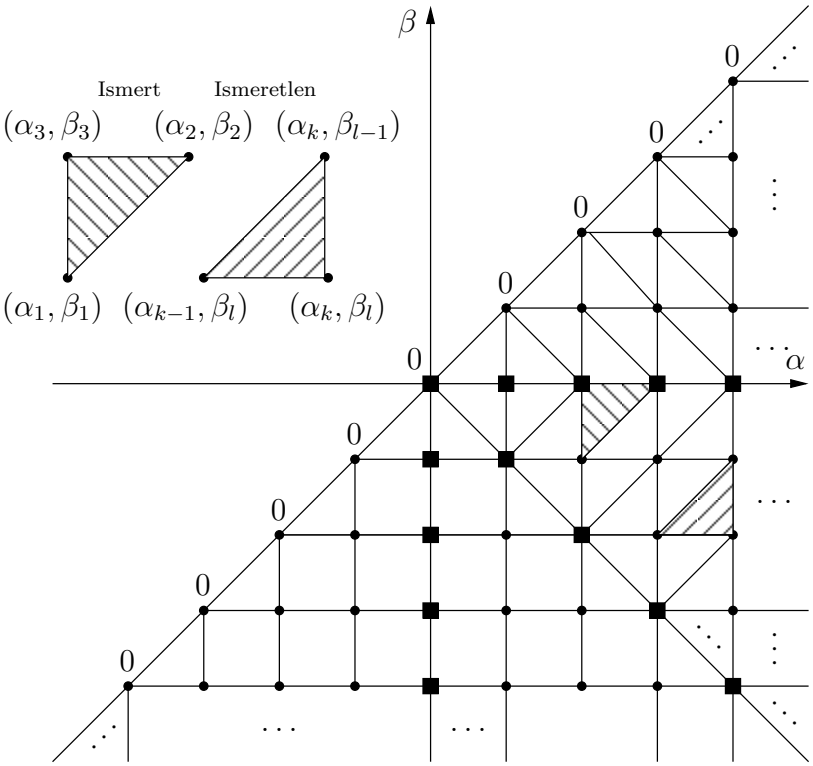
$$\alpha_{k-1}=\beta_{k-1}<\alpha_k\cos^{1/w}\varphi_{i_2}=\beta_l\cos^{1/w}\varphi_{i_2}\le\alpha_k=\beta_k, \tag{B.20}$$

akkor

$$
\begin{aligned}
E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_2}, \beta_l \cos^{1/w} \varphi_{i_2}) &= E(\alpha_{k-1}, \beta_{l-1}) \\
&+ \frac{\sqrt{\alpha_k^2 \cos^{2/w} \varphi_{i_2} + \beta_l^2 \cos^{2/w} \varphi_{i_2}} - \sqrt{\alpha_{k-1}^2 + \beta_{l-1}^2}}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_l^2} - \sqrt{\alpha_{k-1}^2 + \beta_{l-1}^2}} \\
&\times \big[E(\alpha_k, \beta_l) - E(\alpha_{k-1}, \beta_{l-1})\big].
\end{aligned}
\tag{B.21}
$$

Itt $E(\alpha_k, \beta_l)$ az egyetlen ismeretlen, amely kifejezhető a (B.19) és a (B.21) összefüggések (B.2) egyenletbe történő visszahelyettesítése után.

Az első lépés a B.2 ábrán négyzettel jelzett pontokban generál értékeket. Az identifikáció második lépése ezen értékekre épít.



B.2. ábra. Illusztráció az identifikáció második lépéséhez (a négyzettel jelölt pontok az első lépés eredményeképp ismertek)

B.3. Az identifikáció második lépése

Az $\alpha - \beta$ síkot a B.2 ábrán látható módon háromszögek segítségével felosztva, és a háromszögeken lineáris interpolációt alkalmazva tetszőleges $(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi, \beta_l \cos^{1/w} \varphi)$ koordinátához tartozó érték kifejezhető.

Az $\alpha - \beta$ síkon kétfajta háromszög lelhető fel. Az $i_1 = 1, \cdots, n_1$ pontokhoz tartozó $E(\alpha_k \cos^{1/w} \varphi_{i_1}, \beta_l \cos^{1/w} \varphi_{i_1})$ értékek olyan háromszögre esnek, melynek három pontjában már meghatározott értékek vannak (*ismert háromszög*), míg az $i_2 = 1, \cdots, n_2$ pontok

az ismeretlen $E(\alpha_k, \beta_l)$ értéktől függenek (*ismeretlen háromszög*). Azaz (B.2) két részre bontható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} F(\alpha_k, \beta_l) \cong & \sum_{i_1=1}^{n_1} \cos\varphi_{i_1} E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_1}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_1}) \\ & + \sum_{i_2=1}^{n_2} \cos\varphi_{i_2} E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_2}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_2}). \end{aligned} \tag{B.22}$$

Ha

$$\begin{aligned} & \alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \text{és} \quad \beta > -\alpha \quad \text{azaz} \quad k = l+1, \cdots, N+1, \\ & \text{és} \quad l = N/2+2, \cdots, N+1, \end{aligned} \tag{B.23}$$

továbbá az $(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_1}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_1})$ koordinátájú pont olyan háromszögre esik, amelynek mindhárom pontjában ismert az Everett-függvény értéke, akkor a háromszög felett értelmezett lineáris interpoláció a következő determináns segítségével írható fel:

$$\begin{vmatrix} \alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_1} - \alpha_1 & \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_1} - \beta_1 & E - E_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 & \beta_2 - \beta_1 & E_2 - E_1 \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 & E_3 - E_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{B.24}$$

ahol (α_1, β_1, E_1), (α_2, β_2, E_2) és (α_3, β_3, E_3) a három pont koordinátája és a koordinátákhoz tartozó Everett-függvény értékek, azaz $E = E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_1}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_1})$, továbbá $E_1 = E(\alpha_1, \beta_1)$, $E_2 = E(\alpha_2, \beta_2)$ valamint $E_3 = E(\alpha_3, \beta_3)$. A háromszögek elhelyezkedése miatt itt $\alpha_3 = \alpha_1$ és $\beta_3 = \beta_2$. A determinánst kifejtve az $E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_1}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_1})$ kifejezése a következőképp írható:

$$\begin{aligned} E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_1}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_1}) = E_1 + & \frac{(\beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_1} - \beta_l)(E_3 - E_1)}{\beta_2 - \beta_1} \\ & - \frac{(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_1} - \alpha_{k-1})(E_3 - E_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned} \tag{B.25}$$

A másik lehetőség, hogy az $(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_2}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_2})$ koordinátának megfelelő pont olyan háromszögre esik, amelynek egyik pontja az (α_k, β_l) koordinátának felel meg. A három pont, amelyre a lineáris interpolációt definiáló determináns felépíthető tehát a következő: $(\alpha_{k-1}, \beta_l, E_1)$, (α_k, β_l, E_2) és $(\alpha_k, \beta_{l-1}, E_3)$, azaz

$$\begin{vmatrix} \alpha_k \cos\varphi_{i_2} - \alpha_{k-1} & \beta_l \cos\varphi_{i_2} - \beta_l & E - E_1 \\ \alpha_k - \alpha_{k-1} & 0 & E_2 - E_1 \\ \alpha_k - \alpha_{k-1} & \beta_{l-1} - \beta_l & E_3 - E_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{B.26}$$

Itt $E = E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_2}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_2})$, $E_1 = E(\alpha_{k-1}, \beta_l)$, $E_2 = E(\alpha_k, \beta_l)$, valamint $E_3 = E(\alpha_k, \beta_{l-1})$. A determináns kifejtése után a keresett $E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_2}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_2})$ kifejezhető:

$$\begin{aligned} E(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_2}, \beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_2}) = E_1 + & \frac{(\alpha_k \cos^{1/w}\varphi_{i_2} - \alpha_{k-1})(E_2 - E_1)}{(\alpha_k - \alpha_{k-1})} \\ & - \frac{(\beta_l \cos^{1/w}\varphi_{i_2} - \beta_l)(E_2 - E_3)}{(\beta_{l-1} - \beta_l)}. \end{aligned} \tag{B.27}$$

Ebben a kifejezésben E_2 az ismeretlen. A (B.25) és a (B.27) kifejezések (B.22)-be történő helyettesítése után E_2 bármely k és l értékek mellett meghatározható.

Ha $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ ($k = N + 3 - l, \cdots, N + 1$, $l = N/2, \cdots, 1$), hasonló eljárás alkalmazható, de a háromszögek a vízszintes tengelyre tükrözve értelmezendők, és így az indexelés is megváltozik.

Az Everett-függvény az $\alpha = -\beta$ egyenletnek megfelelő egyenesre szimmetrikus, azaz az identifikáció során elegendő az Everett-függvény felét meghatározni.

Irodalomjegyzék

[1] Iványi A. *Hysteresis Models in Electromagnetic Computation.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997.

[2] Della Torre E. *Magnetic Hysteresis.* IEEE Press, New York, 1999.

[3] Mayergoyz I. D. *Mathematical Models of Hysteresis.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] Bertotti G. and Mayergoyz I. D. *The Science of Hysteresis.* Academic Press, New York, 2006.

[5] Prohászka J. *Anyagtudomány.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

[6] Feynman R. P., Leighton R. B., and Sands M. *Mai fizika.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[7] Kronmüller H. and Parkin S. *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials I.* John Wiley and Sons, New York, 2007.

[8] Kronmüller H. and Parkin S. *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials II.* John Wiley and Sons, New York, 2007.

[9] Kronmüller H. and Parkin S. *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials III.* John Wiley and Sons, New York, 2007.

[10] Kronmüller H. and Parkin S. *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials IV.* John Wiley and Sons, New York, 2007.

[11] Kronmüller H. and Parkin S. *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials V.* John Wiley and Sons, New York, 2007.

[12] Chikazumi S. *Physics of Magnetism.* John Wiley and Sons, New York, 1964.

[13] Bertotti G. *Hysteresis in Magnetism.* Academic Press, New York, 1998.

[14] Kuczmann M. and Iványi A. *The Finite Element Method in Magnetics.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.

[15] Schnell L. (szerk.). *Jelek és rendszerek méréstechnikája.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[16] Fodor Gy. *Jelek, rendszerek és hálózatok.* Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998.

[17] Kuczmann M. *Jelek és rendszerek.* Universitas-Győr, Győr, 2005.

[18] Mayergoyz I. D. Mathematical model of hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 22:603–608, 1986.

[19] Krasnoselskii M. A. and Pokrovskii A. V. *Systems with Hysteresis.* Nauka, Moszkva, 1983.

[20] Iványi A. (szerk.). *Preisach Memorial Book.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 2005.

[21] Bozorth R. M. *Ferromagnetism.* D. Van Nostrand Co. Princeton, New Jersey, 1951.

[22] Jiles D. C. *Introduction to Magnetism and Magnetic Material.* Chapman and Hall, London, 1991.

[23] Preisach F. Z. Über die magnetische Nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*, 94:277–302, 1935.

[24] Iványi A. *Magnetic Field Computation with R-functions.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1998.

[25] Papusoi C. and Stancu A. Anhysteretic remanent susceptibility and the moving Preisach model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29:77–81, 1993.

[26] Kádár Gy. and Della Torre E. Hysteresis modeling: I. noncongruency. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-23:2820–2822, 1987.

[27] Kádár Gy. and Della Torre E. Determination of the bilinear product Preisach function. *Journal of Applied Physics*, 63:3001–3003, 1988.

[28] Della Torre E. and Kádár Gy. Hysteresis modeling: II. accommodation. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-23:2823–2825, 1987.

[29] Füzi J. Computationally efficient rate dependent hysteresis model. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 18:445–457, 1999.

[30] Füzi J., Iványi A., and Szabó Zs. Preisach model with continuous output in electrical circuit analysis. *Journal of Electrical Engineering, Bratislava, Slovakia*, 48:18–21, 1997.

[31] Füzi J., Székely Gy., and Szabó Zs. Experimental construction of classical Preisach model. *Proceedings of the 8th IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 1998. szeptember 21-24*, pp:452–457.

[32] Füzi J. Parameter identification in Preisach model to fit major loop data. *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, IOS Press*, 11:77–82, 1997.

[33] Füzi J. *Mathematical Models of Magnetic Hysteresis and Their Implementation in Computer Codes Modelling Electromagnetic Systems.* PhD thesis, Transilvania University, Brassó, Románia, 1997.

[34] Mayergoyz I. D. and Friedman G. Generalized Preisach model of hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24:212–217, 1988.

[35] Woodward J. G. and Della Torre E. Particle interaction in magnetic recording tapes. *Journal of Applied Physics*, 31:56–62, 1960.

[36] Rado G. T. and Folen V. J. Determination of molecular field coefficients in ferromagnets. *Journal of Applied Physics*, 31:62–68, 1960.

[37] Della Torre E. Effect of interaction on the magnetization of single-domain particles. *IEEE Transactions on Audio and Electroacustics*, 14:86–93, 1966.

[38] Everett D. H. and Whitton W. I. A general approach to hysteresis, part I. *Transactions on Faraday Society*, 48:749–757, 1952.

[39] Everett D. H. and Smith F. W. A general approach to hysteresis, part II. *Transactions on Faraday Society*, 50:187–197, 1954.

[40] Everett D. H. A general approach to hysteresis, Part III. *Transactions on Faraday Society*, 50:1077–1096, 1954.

[41] Everett D. H. A general approach to hysteresis, Part IV. *Transactions on Faraday Society*, 51:1551–1557, 1955.

[42] Atherton D. L., Szpunar B., and Szpunar J. A. A new approach to Preisach diagrams. *IEEE Transactions on Magnetics*, 23:1856–1865, 1987.

[43] Mayergoyz I. D. and Friedman G. On the integral equation of the vector Preisach hysteresis model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 23:2638–2640, 1987.

[44] Cardelli E., Della Torre E., and Pinzaglia E. Identifying the Preisach function for soft magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39:1341–1344, 2003.

[45] Henze O. and Rucker W. M. Application of Preisach model on a real existent material. *Proceedings of the 9th IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 2000. szeptember 11-13*, pp:380–384.

[46] Henze O. and Rucker W. M. Identification procedures of Preisach model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38:833–836, 2002.

[47] Füzi J. Analytical approximation of Preisach distribution functions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39:1357–1360, 2003.

[48] Dupré L. R., Bottuasco O., Chiampi M., Fiorillo F., Lo Bue M., Melkebeek J., Repetto M., and Rauch M. Dynamic Preisach modelling of ferromagnetic laminations under distorted flux excitation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34:1231–1233, 1998.

[49] Della Torre E., Oti J., and Kádár Gy. Preisach modeling and reversible magnetization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:3052–3058, 1990.

[50] Wiesen K. and Charap S. H. A better scalar Preisach algorithm. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24:2491–2493, 1988.

[51] Bertotti G. Dynamic generalization of the scalar Preisach model of hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28:2599–2601, 1992.

[52] Della Torre E., Yanik L., Yarimbiyik A. E., and Donahue M. J. Differential equation model for accommodation magnetization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40:1499–1505, 2004.

[53] Füzi J. Features of two rate-dependent hysteresis models. *Physica B*, 306:137–142, 2001.

[54] Philips D. A. and Delincé F. Practical use of the Preisach model from measurement to finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29:2383–2385, 1993.

[55] Cardelli E., Della Torre E., and Ban G. Experimental determination of Preisach distribution functions in magnetic cores. *Physica B*, 275:262–269, 2000.

[56] Vajda F. and Della Torre E. Modeling Δm curves using the complete-moving-hysteresis model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31:1809–1812, 1995.

[57] Szabó Zs. Preisach functions leading to closed form permeability. *Physica B*, 372:61–67, 2006.

[58] Szabó Zs., Tugyi I., Kádár Gy., and Füzi J. Identification procedures for scalar Preisach model. *Physica B*, 343:142–147, 2004.

[59] Schiffer A. and Iványi A. Preisach distribution function approximation with wavelet interpolation technique. *Physica B*, 372:101–105, 2006.

[60] Sjöström M. Preisach modelling: Symmetry implementation and frequency analysis (online: http://infoscience.epfl.ch/record/52269, utolsó látogatás: 2014. május 29.). *Technical Report*, 1998.

[61] Kozek M. and Gross B. Identification and inversion of magnetic hysteresis for sinusoidal magnetization (online: http://www.i-joe.org, utolsó látogatás: 2014. május 29.). *iJOE International Journal on Online Engineering*, 1(1):1–10, 2005.

[62] Szabó Zs. *Hysteresis Models of Elementary Operators and Integral Equations*. PhD thesis, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2002.

[63] Kuczmann M. *Neural Network Based Vector Hysteresis Model and the Nondestructive Testing Method*. PhD thesis, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2005.

[64] Kuczmann M. and Kovács G. Improvement and application of the viscous-type frequency-dependent Preisach model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(2), 2014.

[65] Dupré L. R., Bottauscio O., Chiampi M., Fiorillo F., Lo Bue M., Melkebeek J., Repetto M., and Von Rauch M. Dynamic Preisach modelling of ferromagnetic laminations under distorted flux excitation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4):1231–1234, 1998.

[66] Philips D. and Dupré L. Macroscopic fields in ferromagnetic laminations taking into account hysteresis and eddy current effects. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 160:5–10, 1996.

[67] Bertotti G. General properties of power losses in soft ferromagnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24:621–630, 1988.

[68] Fiorillo F. and Novikov A. An improved approach to power losses in magnetic laminations under nonsinusoidal induction waveform. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):2904–2910, 1990.

[69] Dlala E. A simplified iron loss model for laminated magnetic cores. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(1):3169–3172, 2008.

[70] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., and Moses A. J. Comparison of engineering methods of loss prediction in thin ferromagnetic laminations. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 320:2504–2508, 2008.

[71] Bastos J. P. A. and Sadowski N. *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. Marcel Dekker, New York, 2003.

[72] Dupre L.R., Bottuascio O., Chiampi M., Repetto M., and Melkebeek J. Modeling of electromagnetic phenomena in soft magnetic materials under unidirectional time periodic flux excitation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35:4171–4184, 1999.

[73] Hamimid M., Mimoune S. M., and Feliachi M. Hybrid magnetic field formulation based on the losses separation method for modified dynamic inverse Jiles-Atherton model. *Physica B*, 406:2755–2757, 2011.

[74] Amar M. and R. Kaczmarek. A general formula for prediction of iron losses under nonsinusoidal voltage waveform. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(5):2504–2509, 1995.

[75] Binesti D. and Ducreux J. P. Core losses and efficiency of electrical motors using new magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(5):4887–4889, 1996.

[76] Ionel D. M., Popescu M., Dellinger S. J., Miller T. J. E., Heideman R. J., and McGilp M. I. On the variation with flux and frequency of the core loss coefficients in electrical machines. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 42(3):658–667, 2006.

[77] Dlala E. Comparison of models for estimating magnetic core losses in electrical machines using the finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(2):716–725, 2009.

[78] Takács J. Analytical solutions to eddy current and excess losses. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 24(4):1402–1414, 2005.

[79] Ban G. and Bertotti G. Dependence on peak induction and grain size of power losses in nonoriented SiFe steels. *Journal of Applied Physics*, 64(10):5361–5363, 1988.

[80] Pry R. H. and Bean C. P. Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain model. *Journal of Applied Physics*, 29:532–533, 1958.

[81] Bottauscio O., Canova A., Chiampi M., and Repetto M. Iron losses in electrical machines: influence of different material models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):805–808, 2002.

[82] Dupré L. R., Bottauscio O., Chiampi M., Melkebeek J., and Repetto M. Modeling electromagnetic phenomena in soft magnetic materials under unidirectional time periodic flux excitation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35:4171–4184, 1999.

[83] Barbisio E., Fiorillo F., and Ragusa C. Predicting loss in magnetic steels under arbitrary induction waveform and with minor hysteresis loops. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(4):1810–1819, 2004.

[84] Bottauscio O., Chiampi M., and Chiarabaglio D. Advanced model of laminated magnetic cores for two-dimensional field analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36:561–573, 2000.

[85] Belahcen A., Dlala E., and Pippuri J. Modelling eddy-current in laminated nonlinear magnetic circuits. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 30(3):1082–1091, 2011.

[86] Belahcen A., Dlala E., Fonteyn K., and Belkasim M. A posteriori iron loss computation with vector hysteresis model. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 29(6):1493–1503, 2010.

[87] Fratila M., Benabou A., and Tounzi A. Improved iron loss calculation for non-centered minor loops. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 32(4):1358–1365, 2013.

[88] Dlala E., Belahcen A., and Arkkio A. Magnetodynamic vector hysteresis model of ferromagnetic steel laminations. *Physica B*, 403:428–432, 2008.

[89] Schneider C. S. and Winchell S. D. Hysteresis in conducting ferromagnets. *Physica B*, 372:269–272, 2006.

[90] Füzi J. and Kádár Gy. Frequency dependence in the product Preisach model. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254-255:278–280, 2003.

[91] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., and Moses A. J. Congruency-based hysteresis models for transient simulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2):390–399, 2004.

[92] Zirka S. E., Moroz Y. I., Moses A. J., and Arturi C. M. Static and dynamic hysteresis models for studying transformer transients. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 26(4):2352–2362, 2011.

[93] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., and Moses A. J. Viscous-type dynamic hysteresis model as a tool for loss separation in conducting ferromagnetic laminations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(3):1109–1111, 2005.

[94] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., and Moses A. J. Viscosity-based magnetodynamic model of soft magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(9):2121–2132, 2006.

[95] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., and Moses A. J. Properties of dynamic Preisach models. *Physica B*, 343:85–89, 2004.

[96] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., Moses A. J., and Jiles D. C. Measurement and modeling of B-H loops and losses of high silicon nonoriented steels. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(10):3177–3179, 2006.

[97] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., Moses A. J., Jiles D. C., and Matsuo T. Generalization of the classical method for calculating dynamic hysteresis loops in grain-oriented electrical steels. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(9):2113–2126, 2008.

[98] Chwastek K. and Szczyglowski J. Modelling dynamic hysteresis loops in steel sheets. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 28(3):603–612, 2009.

[99] Raulet M. A., Ducharne B., Masson J. P., and Bayada G. The magnetic field diffusion equation including dynamic hysteresis: a linear formulation of the problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2):872–875, 2004.

[100] Zirka S. E., Moroz Y. I., Marketos P., and Moses A. J. Dynamic hysteresis modelling. *Physica B*, 343:90–95, 2004.

[101] Nitzan D. Computation of flux switching in magnetic circuits. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-1(3):222–234, 1965.

[102] Yoon H., Jang S.-M., and Seop Koh C. Iron loss analysis of a permanent magnet rotating machine taking account of the vector hysteresis properties of electrical steel sheet. *Journal of International Conference on Electrical Machines and Systems*, 2(2):165–170, 2013.

[103] Zhu J. G. and Ramsden V. S. Improved formulations for rotational core losses in rotating electrical machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4):2234–2242, 1998.

[104] Cogent Power Ltd. Electrical steel, non oriented, fully processed (katalógus, http://www.cogent-power.com, utolsó látogatás: 2014. május 29.).

[105] Jacobs S. Enhanced fully processed electrical steels for automotive traction applications (ArcelorMittal), 2008.

[106] Ma L., Sanada M., Morimoto S., and Takeda Y. Prediction of iron loss in rotating machines with rotational loss included. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(4):2036–2041, 2003.

[107] Bertotti G. An improved estimation of iron losses in rotating electrical machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(6):5007–5009, 1991.

[108] Saitz J. Computation of the core loss in an induction motor using the vector Preisach hysteresis model incorporated in finite element analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):769–773, 2000.

[109] Ferreira da Luz M. V., Leite J. V., Benabou A., and Sadowski N. Three-phase transformer modeling using a vector hysteresis model and including the eddy current and the anomalous losses. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):3201–3204, 2010.

[110] Dlala E., Belahcen A., and Arkkio A. Efficient magnetodynamic lamination model for two-dimensional field simulation of rotating electrical machines. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 320:1006–1010, 2008.

[111] Mayergoyz I. D. and Friedman G. Isotropic vector Preisach model of hysteresis. *Journal of Applied Physics*, 61:4022–4024, 1987.

[112] Mayergoyz I. D. Vector Preisach hysteresis models. *Journal of Applied Physics*, 63:2995–3000, 1988.

[113] Mayergoyz I. D. and Friedman G. Identification problem for 3-D anisotropic Preisach model of vector hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24:2928–2930, 1988.

[114] Della Torre E. and Kádár Gy. Vector Preisach and the moving model. *Journal of Applied Physics*, 63:3004–3006, 1988.

[115] Fallah E. and Moghani J. S. A new identification and implementation procedure for the isotropic vector Preisach model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(1):37–40, 2008.

[116] Matsuo T. Rotational saturation properties of isotropic vector hysteresis models using vectorized stop and play hysterons. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(11):3185–3188, 2008.

[117] Cardelli E., Della Torre E., and Pinzaglia E. Using the reduced Preisach vector model to predict the cut angle influence in Si–Fe steels. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5):1560–1563, 2005.

[118] Cardelli E., Della Torre E., and Pinzaglia E. Modeling of laminas of magnetic iron with a reduced vector Preisach model. *Physica B*, 343:171–176, 2004.

[119] Mayergoyz I. D. and Adly A. A. A new isotropic vector Preisach–type model of hysteresis and its identification. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(6):2377–2379, 1993.

[120] Mayergoyz I. D. and Adly A. A. A new vector Preisach–type model of hysteresis. *Journal of Applied Physics*, 73(10):5824–5826, 1993.

[121] Adly A. A. Numerical implementation and testing of new vector isotropic Preisach–type models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(6):4383–4385, 1994.

[122] Bottauscio O., Chiarabaglio D., Ragusa C., Chiampi M., and Repetto M. Analysis of isotropic materials with vector hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4):1258–1260, 1998.

[123] Dlala E., Belahcen A., Fonteyn K., and Belkasim M. Improving loss properties of the Mayergoyz vector hysteresis model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(3):918–924, 2010.

[124] Ragusa C. and Repetto M. Accurate analysis of magnetic devices with anisotropic vector hysteresis. *Physica B*, 275(4):92–98, 2000.

[125] Della Torre E., Cardelli E., and Bennett L. H. Hysteresis loss in vector Preisach models. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 29(6):1474–1481, 2010.

[126] Cardelli E., Della Torre E., and Faba A. Numerical implementation of the DPC model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1186–1189, 2009.

[127] Burrascano P., Cardelli E., Della Torre E., Drisaldi G., Faba A., Ricci M., and Pirani A. Numerical identification of procedure for a phenomenological vector hysteresis model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1166–1169, 2009.

[128] Caltun O., Andrei P., and Stancu A. Initial permeability, hysteresis and total losses measurements. *Analele Stiintifice Ale Universita Al. I. Cuza Din Iasi*, XLV-XLVI:56–60, 1999-2000.

[129] Zurek S., Marketos P., Meydan T., and Moses A. J. Use of novel adaptive digital feedback for magnetic measurements under controlled magnetizing conditions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(11):4242–4249, 2005.

[130] Antonelli E., Cardelli E., and Faba A. Epstein frame: How and when it can be really representative about the magnetic behavior of laminated magnetic steels. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5):1516–1519, 2005.

[131] Mthombeni L. T., Pillay P., and Strnat R. A new Epstein frame for lamination core loss measurements at high frequencies and high flux densities. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 22(3):614–620, 2007.

[132] Sievert J. Determination of AC magnetic power loss of electrical steel sheet: Present status and trends. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-20(5):1702–1707, 1984.

[133] Patsios C., Tsampouris E., Beniakar M., Rovolis P., and Kladas A. G. Dynamic finite element hysteresis model for iron loss calculation in non-oriented grain iron laminations under PWM excitation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5):1130–1133, 2011.

[134] Leonard P. J., Marketos P., Moses A. J., and Lu M. Iron losses under PWM excitation using a dynamic hysteresis model and finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4):907–910, 2006.

[135] Nakata T., Takahashi N., Kawase Y., Nakano M., Miura M., and Sievert J. D. Numerical analysis and experimental study of the error of magnetic field strength measurments with single sheet testers. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-22(5):400–402, 1986.

[136] Nakata T., Kawase Y., and Nakano M. Improvement of measuring accuracy of magnetic field strength in single sheet testers by using two H coils. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-23(5):2596–2598, 1987.

[137] Sievert J. Recent advances in the one- and two-dimensional magnetic measurement technique for electrical sheet steel. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):2553–2558, 1990.

[138] Guo Y. G., Zhu J. G., Zhong J. J., Lu H., and Jin J. X. Measurement and modeling of rotational core losses of soft magnetic materials used in electrical machines: a review. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(2):279–291, 2008.

[139] Enokizono M. (szerk.). *Two-Dimensional Magnetic Measurement and its Properties*. Japan Society of Applied Electromagnetics, 1992.

[140] Shimoji H., Enokizono M., and Todaka T. Iron loss and magnetic fields analysis of permanent magnet motors by improved finite element method with E&S model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5):3526–3529, 2001.

[141] http://www.iti.iwatsu.co.jp/en/products/sy/bh_ana_e.html (utolsó látogatás: 2014. május 29.).

[142] Gorican V., Hamler A., Jesenik M., Stumberger B., and Trlep M. Unreliable determination of vector B in 2-D SST. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254-255:130–132, 2003.

[143] Guo Y. G., Zhu J. G., and Zhong J. J. Measurement and modelling of magnetic properties of soft magnetic composite material under 2D vector magnetization. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 302:14–19, 2006.

[144] Enokizono M., Suzuki T., and Sievert J. D. Measurement of dynamic magnetostriction under rotating magnetic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):2067–2069, 1990.

[145] Enokizono M., Suzuki T., Sievert J. D., and Xu J. Rotational power loss of silicon steel sheet. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):2562–2564, 1990.

[146] Makaveev D., Rauch M., Wulf M., and Melkebeek J. Accurate field strength measurement in rotational single sheet tester. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 215-216:673–676, 2000.

[147] Makaveev D., Wulf M., Gyselinck J., Maes J., Dupré L., and Melkebeek J. Measurement system for 2D magnetic properties of electrical steel sheets: Design and performance. *6th International Workshop on 1&2-Dimensional Magnetic Measurement and Testing, Bad Gastein, Ausztria, 2000. szeptember 20-21*, pp:48–55.

[148] Zhu J. G. and Ramsden V. S. Two dimensional measurement of magnetic field and core loss using a square specimen tester. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(6):2995–2997, 1993.

[149] Zhong J. J., Zhu J. G., Guo Y. G., and Lin Z. W. Improved measurement with 2-D rotating fluxes considering the effect of internal field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(10):3709–3711, 2005.

[150] Brix W., Hempel K. A., and Schulte F. J. Improved method for the investigation of the rotational magnetization process in electrical steel sheet. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-20(5):1708–1710, 1984.

[151] Enokizono M. and Tanabe I. Studies on a new simplified rotational loss tester. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(5):4020–4022, 1997.

[152] Zhong J. J. *Measurement and Modeling of Magnetic Properties of Materials with Rotating Fluxes*. PhD thesis, Sydney Műszaki Egyetem, Ausztrália, 2002.

[153] Salz W. A two-dimensional measuring equipment for electric steel. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(3):1253–1257, 1994.

[154] Hasenzagl A., Wieser B., and Pfützner H. Novel 3-phase excited single sheet tester for rotational magnetization. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 160:180–182, 1996.

[155] Cardelli E. and Faba A. Vector hysteresis measurements via a single disk tester. *Physica B*, 372:143–146, 2006.

[156] Gorican V., Hamler A., Hribernik B., Jesenik M., and Trlep M. 2-D measurements of magnetic properties using a round RSST. *6th International Workshop on 1&2-Dimensional Magnetic Measurement and Testing, Bad Gastein, Ausztria, 2000. szeptember 20-21*, pp:66–75.

[157] Ragusa C. and Fiorillo F. A three-phase single sheet tester with digital control of flux loci based on the contraction mapping principle. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 304:568–570, 2006.

[158] Lancarotte M. S. and Penteado A. de A. Improving the magnetizing device design of the single sheet tester of two-dimensional properties. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 269:346–351, 2004.

[159] Jesenik M., Gorican V., Trlep M., Hamler A., and Stumberger B. Field homogeneity in a two-phase round rotational single sheet tester with one and both side shields. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254-255:247–249, 2003.

[160] Cardelli E. and Faba A. Vector hysteresis measurements via a single disk tester. *Physica B*, 372:143–146, 2006.

[161] Makaveev D., Maes J., and Melkebeek J. Controlled circular magnetization of electrical steel in rotational single sheet testers. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(4):2740–2742, 2001.

[162] Makaveev D., Maes J., and Melkebeek J. Waveform control algorithm for rotational single sheet testers using system identification techniques. *Journal of Applied Physics*, 87(9):5983–5985, 2000.

[163] Zurek S., Marketos P., and Meydan T. Control of arbitrary waveforms by means of adaptive digital feedback algorithm. *Przeglad Elektrotechniczny*, 80(2):122–125, 2004.

[164] Makaveev D., Wulf M., and Melkebeek J. Field homogeneity in a two-phase rotational single sheet tester with square samples. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 196-197:937–939, 1999.

[165] Zhong J. J., Zhu J. G., Lin Z. W., Guo Y. G., and Sievert J. D. Improved measurement of magnetic properties with 3D magnetic fluxes. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 290-291:1567–1570, 2005.

[166] Maeda Y., Todaka T., Shimoji H., Enokizono M., and Sievert J. An evaluation method of cross-type H-coil angle for accurate two-dimensional vector magnetic measurement. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 304:564–567, 2006.

[167] Enokizono M. Vector magnetic property and magnetic characteristic analysis by vector magneto-hysteretic E&S model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1148–1151, 2009.

[168] Maxwell J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Macmillen and Co, London, 1873.

[169] Iványi A. *Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003.

[170] Bossavit A. *Computational Electromagnetism.* Academic Press, Boston, 1998.

[171] Stratton J. A. *Electromagnetic Theory.* McGraw Hill, London, 1941.

[172] Jackson J. D. *Classical Electrodynamics.* J. Wiley, New York, 1962.

[173] Smythe W. R. *Static and Dynamic Electricity.* McGraw Hill, London, 1968.

[174] Binns K. J., Lawrenson P. J., and Trowbridge C. W. *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields.* J. Wiley, New York, 1992.

[175] Fodor Gy. *Elméleti elektrotechnika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[176] Fodor Gy. *Elektromágneses terek.* Műegyetemi Kiadó, 1996.

[177] Simonyi K. and Zombory L. *Elméleti villamosságtan.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.

[178] Jin J. *The Finite Element Method in Electromagnetics.* John Wiley and Sons, New York, 2002.

[179] Bíró O. and Richter K. R. CAD in electromagnetism. *In Series Advances in Electronics and Electron Physics, Academic Press, New York*, 82, 1991.

[180] Standeisky I. *Elektrodinamika.* Universitas-Győr, Győr, 2006.

[181] Luomi J. *Finite Element Methods for Electrical Machines.* Chalmers University of Technology, Göteborg, 1993.

[182] Koltai M. and Zombory L. *Elektromágneses terek gépi analízise.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[183] Bíró O. *Potenciálfüggvények örvényáramterek végeselem-analízisében.* DSc disszertáció, Magyar Tudományos Akadémia, 2003.

[184] Iványi A. *R-Functions in Electromagnetism (Technical Report No. TUB-TR-93-EE08).* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 1993.

[185] Lonngren K. E. and Savov S. V. *Fundamentals of Electromagnetics with Matlab.* SciTech Publishing Inc., 2005.

[186] Silvester P. P. and Ferrari R. L. *Finite Elements for Electrical Engineers.* Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[187] Pepper D. W. and Heinrich J. C. *The Finite Element Method.* Taylor and Francis Group, New York, 2006.

[188] Zimmerman W. B. J. *Multiphysics Modelling with Finite Element Method.* World Scientific Publishing Co., 2006.

[189] Zienkiewicz O. C. and Taylor R. *The Finite Element Method.* McGraw-Hill, Maidenhead, 1991.

[190] Bojtár I. and Gáspár Zs. *Végeselem-módszer építőmérnököknek.* TERC, Budapest, 2003.

[191] Schwarz H. R. *Methode der Finiten Elemente.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[192] Bronstein I. N., Szemengyajev K. A., Musiol G., and Mühlig H. *Matematikai kézikönyv.* TypoTEX Kiadó, Budapest, 2000.

[193] Popper Gy. *A végeselem-módszer matematikai alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[194] Égert J. *A végeselem-módszer mechanikai alapjai.* Universitas-Győr, Győr, 2007.

[195] Páczelt I. *A végeselem-módszer alapjai.* Miskolci Egyetem, Miskolc, 1993.

[196] Szabó B. A. *Finite Element Analysis.* Wiley, New York, 1991.

[197] Kovács M. and Scharle P. *A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[198] Bíró O. Edge element formulations of eddy current problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169(3):391–405, 1999.

[199] Liu Y., Bondeson A., Bergström R., Larson M.G., and Samuelsson K. Methods for computing eddy currents in laminated materials using edge elements. *Proceedings of the 10th IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 2002. szeptember 16-18*, pp:351–356.

[200] Hano M., Miyamura T., and Hotta M. Finite element eddy current analysis by novel mixed-order vector elements. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 14:19–22, 2001/2002.

[201] Yioultsis T. V. and Tsiboukis T. D. Multiparametric vector finite elements: a systematic approach to the construction of three-dimensional, higher order, tangential vector shape functions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32:1389–1392, 1996.

[202] Yioultsis T. V. and Tsiboukis T. D. Development and implementation of second and third order vector finite elements in various 3-D electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33:1812–1815, 1997.

[203] Yioultsis T. V., Kantartzis N. V., Antonopoulos C. S., and Tsiboukis T. D. A fully explicit Whitney element - time domain scheme with higher order vector finite elements for three-dimensional high frequency problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34:3288–3291, 1998.

[204] Tsuboi H., Tanaka M., and Seshima N. Finite element method for eddy current analysis taking account of arbitrary line source currents. *Proceedings of the 11th IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 2004. szeptember 12-15*, pp:47–51.

[205] Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., and Okada Y. Improvements of the $\boldsymbol{T}-\Omega$ method for 3-D eddy current analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24:94–97, 1988.

[206] Nakata T. (szerk.). 3-D electromagnetic field analysis. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 9:263–274, 1990.

[207] Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., and Imai T. Effects of permeability of magnetic materials on errors of the $\boldsymbol{T}-\Omega$ method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:698–701, 1990.

[208] Bíró O., Preis K., Vrisk G., and Richter K. R. Computation of 3-D magnetostatic fields using a reduced scalar potential. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29:1329–1332, 1993.

[209] Simkin J. and Trowbridge C. W. Three-dimensional nonlinear electromagnetic field computation, using scalar potentials. *IEE Proc.*, 127:368–374, 1980.

[210] Simkin J. and Trowbridge C. W. On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field prolems in electromagnetics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:423–440, 1979.

[211] Preis K., Bardi I., Bíró O., Magele C., Renhart W., Richter K. R., and Vrisk G. Numerical analysis of 3D magnetostatic fields. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27:3798–3803, 1991.

[212] Webb J. P. and Forghani B. A single scalar potential method for 3D magnetostatics using edge element. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25:4126–4128, 1989.

[213] Preis K., Bárdi I., Bíró O., Magele C., Vrisk G., and Richter K. R. Different finite element formulations of 3D magnetostatic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28:1056–1059, 1992.

[214] Bíró O. and Preis K. On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25:3145–3159, 1989.

[215] Bíró O., Preis K., and Richter K. R. On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32:651–654, 1996.

[216] Bíró O. and Preis K. Finite element analysis of 3-D eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:418–423, 1990.

[217] Preis K., Bárdi I., Bíró O., Magele C., Renhart W., Richter K. R., and Vrisk G. Numerical analysis of 3D magnetostatic fields. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27:3798–3803, 1991.

[218] Bíró O., Preis K., Vrisk G., Richter K. R., and Ticar I. Computation of 3-D magnetostatic fields using a reduced scalar potential. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29:1329–1332, 1993.

[219] Ren Z. and Ida N. Derivation of various dual formulations in magnetostatics via error based energy approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35:1167–1170, 1999.

[220] Demerdash N. A., Nehl T. W., and Fouad F. A. Finite element formulation and analysis of three dimensional magnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 16:1092–1094, 1980.

[221] Coulomb J. L. Finite element three dimensional magnetic field computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 17:3241–3246, 1981.

[222] Kamerai A. K. Calculation of transient 3D eddy current using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:466–469, 1990.

[223] Ziarani A. K. and Konrad A. Galerkin's method and the variational procedure. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38:190–199, 2002.

[224] Costabel M. and Dauge M. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. *IRMAR Technical Report, Rennes, France*, pp:1–26, 2001.

[225] Kameari A. K. Three dimensional eddy current calculation using edge elements for magnetic vector potential. *Journal of Applied Electromagnetic in Material*, pp:225–236, 1989.

[226] Rodger D. and Eastham J. F. Multiply connected regions in the $\boldsymbol{A} - \Phi$ three-dimensional eddy current formulation. *IEE Proc. A 134/1*, pp:58–66, 1987.

[227] Mohammed O. A., Xiaodi Z., and Uler F. G. An iterative technique for 3D eddy current computations by finite elements and scalar potential. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 9:17–20, 1990.

[228] Drago G., Molfino P., Nervi M., Orlando R. A., and Sabbi G. L. A symmetric undifferentiated fully gauged $\boldsymbol{T}, \Psi - \boldsymbol{A} - \Psi$ formulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31:1352–1355, 1995.

[229] Kameari A. K. Calculation of transient 3D eddy currents using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:466–469, 1990.

[230] Kaltenbacher M. and Reitzinger S. Appropriate finite-element formulations for 3-D electromagnetic-field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38:513–516, 2002.

[231] Tran T. S., Meunier G., Labie P., and Aime J. Comparison of FEM-PEEC coupled method and finite-element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(4):996–999, 2010.

[232] Brebbia C. A. *The Boundary Element Method for Engineers.* Pentech Press, London, 1980.

[233] Forsythe G. E. and Wason W. *Finite Difference Method for Partial Differential Equations.* J. Wiley, New York, 1960.

[234] Taflove A. *Computational Electromagnetics, The Finite-Difference Time-Domain Method.* Artech House, 1995.

[235] Gibson W. C. *The Method of Moments in Electromagnetics.* Chapman Hall/CRC, New York, 2008.

[236] Harrington R. F. *Field Computation by Moment Methods.* IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1993.

[237] Garg R. *Analytical and Computational Methods in Electromagnetics.* Artech House, 2008.

[238] Kis P. *Jiles-Atherton Model Implementation to Edge Finite Element Method.* PhD thesis, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2007.

[239] Gyimóthy Sz. *Adaptív automatikus hálógenerálás a végeselem módszerhez.* PhD thesis, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2003.

[240] http://www.comsol.com.

[241] COMSOL. *COMSOL Multiphysics User's Guide.* COMSOL AB, 2007.

[242] Stoyan G. (szerk.). *Matlab - frissített kiadás.* TypoTex Kiadó, 2005.

[243] Budai T. *Acceleration of the Finite Element Method by Using Parallel Computation Techniques.* Széchenyi István Egyetem, 2014.

[244] http://geuz.org/gmsh/.

[245] http://www.mcs.anl.gov/petsc/.

[246] Kuczmann M., Budai T., Kovács G., Marcsa D., Friedl G., Prukner P., Unger T., and Tomozi Gy. Application of PETSc and other useful packages in finite element simulation. *Pollack Periodica*, 8(2):141–148, 2013.

[247] Katzenelson J. and Seitelman L. H. An iterative method for solution of networks of nonlinear monotone resistors. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 13(3):397–407, 1966.

[248] Hantila I. F. A method of solving stationary magnetic field in non-linear media. *Revue Roumaine Des Sciences Techniques, Électrotechnique et Énergétique, Bukarest*, 20:397–407, 1975.

[249] Hantila I. F. A method based on the components of polarization for solving stationary fields problems. *Revue Roumaine Des Sciences Techniques, Électrotechnique et Énergétique, Bukarest*, 28:121–126, 1983.

[250] Hantila I. F. Mathematical model of the relation between B and H for non-linear media. *Revue Roumaine Des Sciences Techniques, Électrotechnique et Énergétique, Bukarest*, 19:429–448, 1974.

[251] Hantila I. F. and Grama G. An overrelaxation method for the computation of the fixed point of a contractive mapping. *Revue Roumaine Des Sciences Techniques, Électrotechnique et Énergétique, Bukarest*, 27:395–398, 1974.

[252] Hantila I. F., Tugulea C., Drosu O., Cranganu Cr., and Leuca T. Fixed point methods for electromagnetic field computation. *3rd International Conference on Renewable Sources and Environmental Electro-Technologies, Felix-Spa, Románia*, pp:11–17, 2000.

[253] Ifrim C. Numerical method for transient non-linear diffusion problems. *Proceedings of the 11th IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 2004. szeptember 12-15*, pp:161–165.

[254] Peterson W. Fixed-point technique in computing nonlinear eddy current problems. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 22:231–252, 2003.

[255] Chiampi M., Negro A. L., and Tartaglia M. A finite element method to compute three-dimensional magnetic field distribution in transformer cores. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-16:1413–1419, 1980.

[256] Bottuascio O., Chiampi M., and Ragusa C. Transient analysis of hysteretic field problems using fixed point technique. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39:1179–1182, 2003.

[257] Ossart F. and Ionita V. Convergence de la méthode du point fixe modifiée pour le calcul de champ magnétique avec hystérésis. *The European Physical Journal, Applied Physics*, 5:63–69, 1999.

[258] Chiampi M., Chiarabaglio D., and Repetto M. A Jiles-Atherton and fixed-point combined technique for time periodic magnetic field problems with hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(6):4306–4309, 1995.

[259] Saitz J. Newton-Raphson method and fixed-point technique in finite element computation of magnetic field problems in media with hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1398–1401, 1999.

[260] Henrotte F., Nicolet A., Delincé F., Genon A., and Legros Pr. W. Modeling of ferromagnetic materials in 2D finite element problems using Preisach's model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(5):2614–2616, 1992.

[261] Agarwall P., Mechan M., and O'Reage D. *Fixed Point Theory and Applications.* Cambridge University Press, 2001.

[262] Bahvalov N. Sz. *A gépi matematika numerikus módszerei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.

[263] Chiampi M., Ragusa C., and Repetto M. Strategies for accelerating convergence in nonlinear fixed point method solutions. *Proceedings of the 7th International IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 1996. szeptember 23-26*, pp:245–250.

[264] Dlala E., Belahcen A., and Arkkio A. Locally convergent fixed-point method for solving time-stepping nonlinear field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(11):3969–3975, 2007.

[265] Petersen B. E. The Picard iteration (http://oregonstate.edu/∼peterseb, utolsó látogatás: 2014. május 29.). 2007.

[266] Takahashi N., Shimomura K., Miyagi D., and Kaimori H. Speed-up of nonlinear magnetic field analysis using a modified fixed-point method. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 32(5):1749–1759, 2013.

[267] Ciric I. R. Convergence acceleration in the polarization method for nonlinear periodic fields. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 30(6):1688–1700, 2011.

[268] Ciric I. R., Maghiar T., Hantila F., and Ifrim C. Error bounds for the FEM numerical solution of non-linear field problems. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 23(3):835–844, 2004.

[269] Pólik Z. and Kuczmann M. Measuring and control the hysteresis loop by using analog and digital integrators. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, 10(7):1861–1865, 2008.

[270] Kuczmann M. Fourier transform and controlling of flux in scalar hysteresis measurement. *Physica B*, 403(2-3):410–413, 2008.

[271] Kuczmann M. Scalar hysteresis measurement using FFT. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, 10(7):1828–1833, 2008.

[272] Pólik Z., Ludvig T., and Kuczmann M. Measuring of the scalar hysteresis characteristic with a controlled flux density using analog and digital integrators. *Journal of Electrical Engineering*, 58(4):236–239, 2007.

[273] Kuczmann M. Arbitrary flux waveform generation in scalar hysteresis measurement. *Pollack Periodica*, 2(3):3–14, 2007.

[274] P. Kis, Kuczmann M., Füzi J., and Iványi A. Hysteresis measurement in LabVIEW. *Physica B*, 403(2-3):410–413, 2008.

[275] Kuczmann M. Dynamic Preisach hysteresis model (online: http://stoner.phys.uaic.ro/jarp/index.php/jarp, utolsó látogatás: 2014. május 29.). *Journal of Advanced Research in Physics*, 1(1), 2010.

[276] Lagarias J. C., Reeds J. A., Wright M. H., and Wright P. E. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9(1):112–147, 1998.

[277] Kuczmann M. Vector Preisach hysteresis modeling: Measurement, identification and application. *Physica B*, 406(8):1403–1409, 2011.

[278] Kuczmann M. Measurement and simulation of vector hysteresis. *Przeglad Elektrotechniczny*, 87(3):103–106, 2011.

[279] Kuczmann M. Simulation of uniaxial anisotropy by vector Preisach model. *Pollack Periodica*, 5(2):97–106, 2010.

[280] Kuczmann M. and Stoleriu L. Anisotropic vector Preisach model (online: http://stoner.phys.uaic.ro/jarp/index.php/jarp, utolsó látogatás: 2014. május 29.). *Journal of Advanced Research in Physics*, 1(1), 2010.

[281] Kuczmann M. Simulation of a vector hysteresis measurement system taking hysteresis into account by the vector Preisach model. *Physica B*, 403(2-3):433–436, 2008.

[282] Kuczmann M. Identification of the 2D vector Preisach hysteresis model. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 30(2):538–551, 2011.

[283] Kuczmann M. Measurement and simulation of vector hysteresis characteristics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(11):5188–5191, 2009.

[284] Kuczmann M. Vector hysteresis measurement and simulation. *Przeglad Elektrotechniczny*, 85(12):92–95, 2009.

[285] Kuczmann M. Design of a 2D RRSST system by FEM and the $\boldsymbol{T}, \Phi - \Phi$ potential formulation. *Pollack Periodica*, 3:67–80, 2008.

[286] Kuczmann M. Analysis of a vector hysteresis measurement system. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, 10(7):1823–1827, 2008.

[287] Kuczmann M. Numerical analysis of a 2D vector hysteresis measurement system. *Pollack Periodica*, 2:17–26, 2007.

[288] Kuczmann M. Numerical analysis of a 2D vector hysteresis measurement system under construction. *Journal of Electrical Engineering*, 57:44–47, 2006.

[289] Kuczmann M. Finite element simulation of a RRSST system under investigation. *Proceedings of the 12th International IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 2006. szeptember 17-20, P2-13.*

[290] Hou C. K. and Lee S. Effect of rolling strain on the loss separation and permeability of lamination steels. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(2):212–216, 1994.

[291] Helerea E., Oltean I. D., Sangeorzan L., Antonoaie M., and Stanulet D. Anisotropic properties of non-oriented Fe-Si sheets under sinusoidal conditions. *Optimization of Electric and Electronic Equipments, OPTIM, Brassó, Románia, 1996. május 15-17*, pp:251–260.

[292] Miano G., Serpico C., Verolino L., and Villone F. Numerical solution of the Maxwell equation in nonlinear media. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):950–953, 1996.

[293] Quarteroni A. and Valli A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[294] Kuczmann M. The polarization method combined with the Newton-Raphson technique in magnetostatic field problems. *Przeglad Elektrotechniczny*, 84(12):198–201, 2008.

[295] Kuczmann M. Nodal and edge finite element analysis of eddy current field problems. *Przeglad Elektrotechniczny*, 84(12):194–197, 2008.

[296] Kuczmann M. Nonlinearity in the finite element simulations. *Przeglad Elektrotechniczny*, 86(12):83–86, 2010.

[297] Marcsa D. and Kuczmann M. Analysis of ferromagnetic core combining Preisach hysteresis modeling and finite element techniques (online: http://stoner.phys.uaic.ro/jarp/index.php/jarp, utolsó látogatás: 2014. május 29.). *Journal of Advanced Research in Physics*, 1(1), 2010.

[298] Marcsa D. and Kuczmann M. Two-dimensional modeling of the motion in induction motor with ferromagnetic hysteresis. *Revue Roumaine des Sciences Techniques - Serie Electrotechnique et Energetique*, 55(4):351–356, 2010.

[299] Kuczmann M. Nonlinear finite element method in magnetism. *Pollack Periodica*, 4(2):13–24, 2009.

[300] Marcsa D. and Kuczmann M. Nonlinear two-dimensional motional finite element modeling of a rotational eddy current field problem. *Przeglad Elektrotechniczny*, 85(12):110–113, 2009.

[301] Marcsa D. and Kuczmann M. Direct Preisach hysteresis model for finite element analysis of magnetic fields. *Przeglad Elektrotechniczny*, 85(12):114–117, 2009.

[302] Kuczmann M. Using the NewtonRaphson method in the polarization technique to solve nonlinear static magnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(3):875–879, 2010.

[303] Rouve L.-L., Ossart F., Waeckerlé T., and Kedous-Labouc A. Magnetic flux and losses computation in electrical laminations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(5):4219–4221, 1996.

[304] Chevalier T., Meunier G., Kedous-Labouc A., and Cornut B. Numerical computation of the dynamic behavior of magnetic material considering magnetic diffusion and hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1218–1221, 2000.

[305] Gyselinck J., Vandevelde L., Melkebeek J., and Dular P. Complementary two-dimensional finite element formulations with inclusion of a vectorized Jiles-Atherton model. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 23(4):959–967, 2004.

[306] Gyselinck J., Dular P., Sadowski N., Leite J., and Bastos J. P. A. Incorporation of a Jiles-Atherton vector hysteresis model in 2D FE magnetic field computations. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 23(3):685–693, 2004.

[307] Yoon H. and Koh C. S. Vector magnetic property of electrical steel sheet and its influence on distributions of magnetic field and iron loss for electrical machines. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 33(1/2):14–27, 2014.

[308] Davey K. R. Analytic analysis of single and three-phase induction motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3721–3727, 1998.

[309] Marcsa D. and Kuczmann M. Comparison of the $\boldsymbol{A}, V-\boldsymbol{A}$ and the $\boldsymbol{T}, \phi-\phi$ formulations for the 2-d analysis of solid-rotor induction machine. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(9):3329–3333, 2009.

[310] Nakata T. and Fujiwara K. Summary of results for benchmark problem 10 (steel plates around a coil). *European TEAM Workshop and International Seminar on Electromagnetic Analysis, Oxford*, 1990.

[311] Marcsa D. and Kuczmann M. Finite element tearing and interconnecting method and its algorithms for parallel solution of magnetic field problems. *Electrical, Control and Communication Engineering*, 3(1):25–30, 2013.

[312] Marcsa D. and Kuczmann M. Comparison of domain decomposition methods for elliptic partial differential problems with unstructured meshes. *Przeglad Elektrotechniczny*, 88(12b):1–4, 2012.

[313] Kuczmann M. Parallel finite element method. *Przeglad Elektrotechniczny*, 87(12b):100–102, 2011.