

dc_823_13

Fourier analízis additív problémákban

Doktori értekezés tézisei

Matolcsi Máté

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Budapest

2014

1. Bevezetés

A Fourier analízis az egyik legelterjedtebb eszköz additív jellegű problémák tárgyalásában. Az additív kombinatorikában és additív számelméletben a problémák tipikusan azzal foglalkoznak, hogy mekkora lehet a számossága (vagy mértéke), illetve milyen lehet a struktúrája egy lokálisan kompakt Abel csoportban egy A halmaznak, ha A -nak valamilyen additív tulajdonságát rögzítjük. A legismertebb, és talán leghíresebb példa a következő: maximum hány eleme lehet egy $A \subset [1, N]$ halmaznak, ha tudjuk, hogy A nem tartalmaz 3-tagú számtani sorozatot? Az egyre erősebb felső becslések bizonyításában a Fourier analízis meghatározó szerepet játszik Roth, Heath-Brown, Szemerédi, Bourgain és végül Sanders munkáiban (a legutóbbi fejleményeket lásd [32]-ben). Egy hasonló jellegű híres kérdés, amellyel behatóan foglalkozni is fogunk a disszertációban, a következő: maximum mekkora lehet egy A halmaz számossága a $\mathbb{Z}_p$ ciklikus csoportban, ha $A - A$ nem tartalmaz kvadratikus maradékot?

Ez a disszertáció az additív jellegű problémákkal kapcsolatos kutatásaimat foglalja össze, amelyeknek többségében a bizonyítások Fourier analízist használnak. Az utóbbi 10 évben ezek alkották a kutatásaim meghatározó részét. Ennek megfelelően sokféle additív problémát vizsgálok, a fentiekhez hasonlóakat is, és teljesen eltérőeket is. A disszertáció a következő publikációkon alapul: [1, 7, 9, 10, 13, 15, 22, 23, 24, 25, 26, 27]. Ezeknek az eredményeit tárgyalom, és helyezem történeti kontextusba az irodalomban megjelent kapcsolódó eredmények által.

A disszertáció témakörök szerinti bontásban három fő fejezetre tagolódik (a rövid Bevezetés után). A második fejezet parkettázásokkal kapcsolatos eredményeket tartalmaz, a harmadikban a nagyon általános (és rendkívül hasznos) Delsarte-féle módszer Fourier analitikus változatát és annak alkalmazásait mutatom be, míg végül a negyedikben összeghalmazok számosságára vonatkozó néhány érdekes becslést adok meg. A főbb eredményeket az alábbiakban foglalom össze.

A definíciók és tételek számozása ebben a téziszfűzetben egyszerűen 1-től növekvő, ezért eltér a disszertációban alkalmazott szekciók szerinti számozástól. Ennek oka, hogy esetenként egyes tételek tartalmát a rövideg kedvéért itt összevontam. Ennek ellenére a könnyebb beazonosíthatóság kedvéért a szövegben mindig utalni fogok arra, hogy a disszertáció melyik sorszámú tételéről van szó. Ezen felül megtartom a disszertációnak azt a konvencióját, hogy a saját cikkeimre való hivatkozásokat egy kis csillaggal jelölöm, pl. [13]*.

2. Parkettázások

Ez a fejezet Abel csoportok parkettázásaival kapcsolatos válogatott eredményeket tartalmaz. A parkettázások irodalma hatalmas, így az itt szereplő eredmények annak csak egy kis szeletét tudják felölelni. Jórészt azokra az eredményekre szorítkoztam, amelyek leginkább kapcsolódnak a saját munkámhoz.

A parkettázás foglalma minden lokálisan kompakt Abel csoportban értelmezhető, de mi az egyszerűség kedvéért csak a következő standard példákra szorítkozunk: véges csoportok, $\mathbb{Z}^d$ és $\mathbb{R}^d$. Szintén egyszerűsítésképpen felteesszük, hogy a parkettáink korlátosak és nyíltak.

1 Definíció. Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, vagy $\mathbb{Z}^d$, vagy $\mathbb{R}^d$. Legyen $T \subset \mathcal{G}$ egy korlátos nyílt halmaz, és $\Lambda \subset \mathcal{G}$ egy diszkrét halmaz. Azt mondjuk, hogy T parkettázza a $\mathcal{G}$ csoportot a Λ eltoláshalmazzal, ha $\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_T(x - \lambda) = 1$ majdnem minden $x \in \mathcal{G}$ esetén (χ_T a T halmaz indikátorfüggvénye). Jelölésben ezt egyszerűen így fejezzük ki: $T + \Lambda = \mathcal{G}$.

2.1. Előzetes eredmények parkettázásokról

Ez a fejezet néhány jól ismert tételt, illetve híresen nehéz problémát foglal össze parkettázásokkal kapcsolatban. Itt ezek közül kettőt emelek ki, elsőként a Coven-Meyerowitz sejtést (2.1.8):

2 Sejtés. [4, 16].) Legyen A nemnegatív egészek véges halmaza, $0 \in A$, és $A(X) = \sum_{a \in A} X^a$. Jelölje S_A azon p^α prímhatalványok halmazát, amelyekre $\Phi_{p^\alpha}(X) \mid A(X)$. A akkor és csak akkor parkettázza $\mathbb{Z}$ -t, ha az alábbi (T_1) és (T_2) feltételek teljesülnek:

$$(T_1) \quad A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1),$$

$$(T_2) \quad \text{Ha } s_1, \dots, s_m \in S_A \text{ különböző prímek hatványai, akkor} \\ \Phi_{s_1 \dots s_m}(X) \mid A(X).$$

A geometriai eredmények közül pedig Minkowski (2.1.16) valamint Venkov és McMullen (2.1.17) tételeinek a következő következményét említem:

3 Tétel. ([29, 36, 28]) Ha egy P konvex test parkettázza $\mathbb{R}^d$ -t, akkor P szükségképpen egy középpontosan szimmetrikus politop, és a Λ eltoláshalmaz választható rácsnak.

2.2. A Fuglede-sejtés

Fuglede a [8] cikkben a ∂_j parciális differenciáloperátorok felcserélhetőségét vizsgálva jutott a következő halmazosztály bevezetésére (2.2.1):

4 Definíció. Legyen $\mathcal{G}$ a következő lokálisan kompakt Abel csoportok valamelyike: véges csoport, $\mathbb{Z}^d$ vagy $\mathbb{R}^d$. Egy korlátos, nyílt $\Omega \subset \mathcal{G}$ halmazt spektrálisnak nevezünk, ha létezik olyan $S \subset \hat{\mathcal{G}}$ halmaz, amelyre $(S|_\Omega)_{s \in S}$ ortogonális bázis $L^2(\Omega)$ -ban. Ekkor S -et Ω egy spektrumának hívjuk, (Ω, S) -et pedig spektrális párnak.

Fuglede a következő sejtést fogalmazta meg (2.2.2):

5 Sejtés. (Fuglede sejtés [8].) Egy $\Omega \in \mathbb{R}^d$ korlátos nyílt halmaz pontosan akkor spektrális ha parkettázza $\mathbb{R}^d$ -t.

Fuglede bebizonyította azt a speciális esetet, amikor az eltoláshalmaz vagy a spektrum egy rács. Ebből Venkov és McMullen fenti tételének segítségével konvex testekre következik a sejtés egyik iránya (2.2.3 és 2.2.4):

6 Tétel. ([8]) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy 1 mértékű korlátos nyílt halmaz, és $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ egy 1 sűrűségű rács. $\Omega + \Lambda = \mathbb{R}^d$ pontosan akkor teljesül, ha a Λ^* duális rács spektruma Ω -nak. Speciálisan, ha Ω konvex és parkettáz, akkor spektrális.

Iosevich, Katz és Tao bebizonyították, hogy 2 dimenzióban ennek a megfordítása is igaz (2.2.5):

7 Tétel. ([11]) Fuglede sjetése igaz $\mathbb{R}^2$ -beli konvex testekre, azaz a konvex parketták és a konvex spektrális halmazok egyaránt a parallelogrammák és a centrálisan szimmetrikus hatszögek.

Magasabb dimenziókban a 'spektrális $\rightarrow$ parkettáz' irány továbbra is nyitott (konvex testekre).

A fejezet további részében

$$\Omega = A + (0, 1)^d, \quad A \subset \mathbb{Z}^d, \quad (2.1)$$

alakú halmazokkal foglalkozunk. Ezzel lényegében $\mathbb{Z}^d$ -be toljuk át Fuglede sejtését a következő állítás szerint (2.2.9):

8 Állítás. ([13]*) Egy (2.1) alakú Ω halmaz pontosan akkor spektrális (ill. parketta) $\mathbb{R}^d$ -ben, ha A spektrális (ill. parketta) $\mathbb{Z}^d$ -ben.

Különösen érdekes a helyzet 1 dimenzióban. Egyrészt Lagarias és Wang [18] egy eredménye szerint minden parketta $\mathbb{R}$ -ben lényegében (2.1) alakú, másrészt Laba [17] észrevette, hogy a fenti Coven-Meyerowitz sejtésből $\mathbb{Z}$ -ben következik a Fuglede sejtés 'parkettáz $\rightarrow$ spektrális' iránya. Ez azt jelenti, hogy a Coven-Meyerowitz sejtés maga után vonná a Fuglede sejtés egyik irányát $\mathbb{R}$ -ben.

Ezután egy kinagyítási tulajdonságot bizonyítunk spektrális és parkettázó halmazokra (2.2.12):

9 Állítás. ([22, 13]^{*}) Legyen $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, $A \subset \mathbb{Z}^d$, és jelölje $\tilde{A} \subset \mathcal{G} = \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_d}$ az A halmaz redukáltját mod $\mathbf{n}$ (feltesszük, hogy A elemei különbözőek mod $\mathbf{n}$). Legyen

$$T = T(\mathbf{n}, k) = \{0, n_1, 2n_1, \dots, (k-1)n_1\} \times \dots \times \{0, n_d, 2n_d, \dots, (k-1)n_d\}, \quad (2.2)$$

és $A_k = A + T$. Ekkor elég nagy k esetén az $A_k \subset \mathbb{Z}^d$ halmaz pontosan akkor spektrális (ill. parketta) $\mathbb{Z}^d$ -ben, ha $\tilde{A}$ spektrális (ill. parketta) $\mathcal{G}$ -ben.

Az előző két állítás ugyan azt mondja, hogy a spektrális és a parkettázó halmazoknak analóg tulajdonságai vannak, mégis a legfontosabb következmény az, hogy tetszőleges véges csoportbeli ellenpélda automatikusan átvihető $\mathbb{Z}^d$ -re és $\mathbb{R}^d$ -re (2.2.13):

10 Következmény. ([13]^{*}) Legyen $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_d}$, és tegyük fel, hogy $\tilde{A} \subset \mathcal{G}$ spektrális de nem parkettáz (ill. parkettáz, de nem spektrális). Tekintsünk egy $A \subset \mathbb{Z}^d$ halmazt, amelynek redukáltja modulo $(n_1, \dots, n_d)$ éppen $\tilde{A}$. Ekkor elég nagy k esetén az $A_k = A + T(\mathbf{n}, k)$ halmaz spektrális (ill. parketta) $\mathbb{Z}^d$ -ben, de nem parkettáz (ill. nem spektrális) $\mathbb{Z}^d$ -ben. Továbbá, az $A_k + (0, 1)^d \subset \mathbb{R}^d$ halmaz spektrális (ill. parketta) $\mathbb{R}^d$ -ben, de nem parkettáz (ill. nem spektrális).

Fontos lesz, hogy a fenti kinagyítási tulajdonság a következő általánosabb formában is igaz marad (2.2.16):

11 Állítás. ([13]^{*}) Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, és $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ egy részcsoporth. Legyenek $T_1, T_2, \dots, T_k \subset \mathcal{H}$ olyan parketták $\mathcal{H}$ -ban, amelyek rendelkeznek egy közös eltoláshalmazzal, azaz létezik $T' \subset \mathcal{H}$, amelyre $T_j + T' = \mathcal{H}$, minden $1 \leq j \leq k$ esetén. Legyen $S + S' = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ a $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ faktorcsoporth parkettázása, $\#S = k$, és válasszunk tetszőleges $s_1, s_2, \dots, s_k$ reprezentánsokat $\mathcal{H}$ -nak az S -hez tartozó mellékosztályaiából. Ekkor $\Gamma := \cup_{j=1}^k (s_j + T_j)$ parkettázza $\mathcal{G}$ -t.

Valamint az analóg állítás spektrális halmazokra (2.2.17):

12 Állítás. ([13, 24]^{*}) Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ egy részcsoporth. Legyenek $T_1, T_2, \dots, T_k \subset \mathcal{H}$ olyan spektrális halmazok $\mathcal{H}$ -ban, amelyeknek van közös spektruma $\hat{\mathcal{H}}$ -ban, azaz létezik olyan $L \subset \hat{\mathcal{H}}$ amely spektruma T_m -nek minden $1 \leq m \leq k$ esetén. Legyen (Q, S) spektrális pár a $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ faktorcsoporthban, $|Q| = k$, és válasszunk tetszőleges $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k$ reprezentánsokat $\mathcal{H}$ -nak a Q -hoz tartozó mellékosztáyaiból. Ekkor $\Gamma := \cup_{m=1}^k (\mathbf{q}_m + T_m)$ spektrális $\mathcal{G}$ -ben.

Utolsó pozitív eredményeként belátjuk, hogy kis elemszámú halmazokra igaz a 'spektrális $\rightarrow$ parkettáz' irány véges csoportokban és $\mathbb{Z}^d$ -ben (2.2.18 és 2.2.20):

13 Állítás. ([14]^{*}) Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, vagy $\mathbb{Z}^d$. Ha $A \subset \mathcal{G}$ spektrális $\mathcal{G}$ -ben, és $|A| \leq 5$, akkor A parkettázza $\mathcal{G}$ -t.

Az eddigiek alapján a Fuglede sejtés 'spektrális $\rightarrow$ parkettáz' irányára már nem nehéz ellenpéldát konstruálni. Az első ellenpéldát T. Tao [35] találta 5 dimenzióban. Később egy egyszerű észrevétellel a dimenziót 4-re sikerült redukálnom [22], majd M. N. Kolountzakis-szal közösen 3-ra [14]. Az utóbbit adom meg az alábbi tételben (2.2.21):

14 Tétel. ([14]^{*}) Létezik olyan $A \subset \mathbb{Z}_8^3$ halmaz, amely spektrális, de nem parkettáz. Következésképpen, léteznek $\mathbb{Z}^3$ -ban és $\mathbb{R}^3$ -ban is olyan halmazok, amelyek spektrálisak, de nem parkettáznak.

A bizonyítás két dolgon múlik: egyrészt a fenti tételek szerint a $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_8^3$ véges csoportról az áttérés $\mathbb{Z}^3$ -ra és $\mathbb{R}^3$ -ra automatikus. Másrészt egy specifikus, nyolcadik egységgyökökből álló 6×6 -os komplex Hadamard létezése miatt könnyű a $\mathcal{G}$ csoportban megfelelő 6 elemű A halmazt megadni.

A 'parkettáz $\rightarrow$ spektrális' irányra már jóval nehezebb ellenpéldát adni. Ennek oka, hogy nincs semmi 'egyszerű' szükséges feltétel arra nézve, hogy egy véges csoportban egy halmaz spektrális legyen (a parkettázásra az oszt-

hatóság nyújt ilyen feltételt). Az ellenpélda megkonstruálásához először Lagarias és Wang univerzális spektrum sejtését kell megvizsgálnunk (2.2.22):

15 Sejtés. (Univerzális Spektrum Sejtés [19]) *Ha $T \subset \mathcal{G}$ parkettázza a $\mathcal{G}$ véges csoportot, akkor létezik egy olyan $S \subset \hat{\mathcal{G}}$ halmaz (amit T univerzális spektrumának nevezünk), amely közös spektruma T minden $T_1, \dots, T_n$ eltoláshalmazának (azaz olyan T_j -nek, amelyre $T + T_j = \mathcal{G}$).*

Sikerült belátnunk [7]-ben, hogy ez a sejtés lényegében ekvivalens a Fuglede sejtés 'parkettáz $\rightarrow$ spektrális' irányával (2.2.23):

16 Tétel. ([7]*) *Bármilyen d esetén az Univerzális Spektrum Sejtés pontosan akkor igaz minden $\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_d}$ alakú véges csoportra, ha a Fuglede sejtés 'parkettáz $\rightarrow$ spektrális' iránya igaz minden ilyen csoportra.*

Ennek a tételnek a bizonyítása azon az észrevételen alapszik, hogy a 11 és 12 Állítások, *nem teljesen* analógok, ezért a bennük szereplő konstrukciók alkalmasak nem-spektrális parketták előállítására, amennyiben a $T_1, \dots, T_k$ kezdőhalmazoknak nincs univerzális spektruma.

Természetesen ezek után hátravan az a nem-triviális feladat, hogy megfelelő véges csoportban találjunk olyan T parkettát, amelynek nincs univerzális spektruma. Ennek konstrukciója egy dualitási ötlettel történik, amit hely hiányában itt nem részletezek, csak a végeredményt (2.2.26, 2.2.27):

17 Tétel. ([7]*) *A $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_{24}^3$ csoportban létezik olyan 6 elemű T parketta, amelynek nincs univerzális spektruma. Következésképpen, léteznek olyan $\mathbb{Z}^3$ -beli, illetve $\mathbb{R}^3$ -beli parketták, amelyek nem spektrálisak.*

A Fuglede-sejtés mindkét iránya továbbra is nyitott 1 és 2 dimenzióban.

2.3. Komlex Hadamard mátrixok konstrukciója parkettázással

Ha végigkövetjük a 12 Állítás bizonyítását, akkor azt látjuk, hogy a felmerülő spektrális párhoz a következő típusú komplex Hadamard mátrix tartozik:

$$K := \begin{bmatrix} m_{11}N_1 & \cdot & \cdot & m_{1k}N_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{k1}N_1 & \cdot & \cdot & m_{kk}N_k \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ebben a képletben m_{ij} egy M $k \times k$ -as komplex Hadamard mátrix elemei, N_j pedig $n \times n$ -es komplex Hadamard mátrix minden j -re (esetleg egymástól különbözők). Ekkor könnyű látni, hogy K egy $kn \times kn$ -es komplex Hadamard mátrix. Ezek a mátrixokat (és a velük ekvivalenseket) Dita-típusúnak nevezzük [6] nyomán.

A [34] katalógusban előforduló komplex Hadamard családok többsége Dita-típusú mátrixokból állt. Láttuk, hogy ezek a mátrixok előállnak a 12 Állításban szereplő konstrukcióval, ami pedig nem más, mint egy természetes parkettázási konstrukció analógja. Felmerül tehát a kérdés, hogy más parkettázási konstrukciók nem vezetnek-e új komplex Hadamard családokhoz? Ennek a fejezetnek a fő eredménye, hogy a válasz igenlő (2.3.2 és 2.3.5):

18 Állítás. ([24]*) *Szabó [33] egy parkettázási konstrukciója új komplex Hadamard mátrixokhoz vezet. Speciálisan, a disszertáció 2.3.2 Példájában megadott S_8 mátrix nem Dita-típusú, és komplex Hadamard mátrixok egy $R_8^{(4)}(a, b, c, d)$ 4-paraméteres családja származtatható belőle.*

3. A Delsarte módszer Fourier analitikus formája

Delsarte ún. lineáris programozási becslése eredetileg a következő probléma kapcsán jelent meg [5]-ben: maximum hány n hosszú bináris szó adható meg úgy, hogy bármely kettő legalább d helyen eltérjen egymástól? Delsarte módszerét (és természetes általánosításait) azóta olyan nevezetes problémákban használták sikerrel, mint például a gömbpakolások sűrűségének becslése [3], vagy az egység távolságot elkerülő halmazok problémája [30].

A disszertációban a Delsarte módszer Fourier analitikus megfogalmazását tárgyalom. Ez elég általános ahhoz, hogy a legtöbb alkalmazást magába foglalja, ugyanakkor az elemi Fourier analízis eszközei elegendőek a tárgyaláshoz.

3.1. A módszer általános tulajdonságai

Az egyszerűség kedvéért véges $\mathcal{G}$ Abel csoportokban vizsgáljuk a módszer általános tulajdonságait. A lényeges tulajdonságok érvényben maradnak kompakt és lokálisan kompakt csoportokra is (utóbbi esetben számosság helyett mindig sűrűséget kell érteni).

Legyen tehát $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, $|\mathcal{G}| = q$, és legyen adva egy $A = -A \subset \mathcal{G}$ szimmetrikus halmaz, amelyre $0 \in A$. Az ilyen halmazokat 'standard' halmaznak fogjuk hívni. Mekkora a maximális elemszáma egy $B = \{b_1, \dots, b_m\} \subset \mathcal{G}$ halmaznak, ha kikötjük, hogy $b_j - b_k \in A^c \cup \{0\}$ (azaz minden különbség elkerüli az A halmazt)? A Delsarte módszer tárgyalásához be kell vezetnünk a következő jelöléseket:

$$\Delta(A) = \max\{|B| : B \subset \mathcal{G}, (B - B) \cap A = \{0\}\}, \quad \delta(A) = \Delta(A)/q$$

$$\overline{\Delta}(A) = \max\{|B| : B \subset \mathcal{G}, B - B \subset A\}, \quad \overline{\delta}(A) = 1/\overline{\Delta}(A).$$

$$\mathcal{S}(A) = \{f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G} \setminus A} = 0\},$$

$$\mathcal{S}^-(A) = \{f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G} \setminus A} \leq 0\},$$

$$\mathcal{S}^+(A) = \{f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G} \setminus A} = 0, f|_A \geq 0\},$$

$$\mathcal{S}^\pm(A) = \{f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, f \not\equiv 0, f|_{\mathcal{G} \setminus A} \leq 0, f|_A \geq 0\}.$$

$$\lambda(A) = \min \left\{ \frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}(A), \hat{f}(\gamma) \geq 0 \text{ for all } \gamma \right\},$$

$$\lambda^-(A) = \min \left\{ \frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}^-(A), \hat{f}(\gamma) \geq 0 \text{ for all } \gamma \right\},$$

$$\lambda^+(A) = \min \left\{ \frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}^+(A), \hat{f}(\gamma) \geq 0 \text{ for all } \gamma \right\},$$

$$\lambda^\pm(A) = \min \left\{ \frac{f(0)}{\hat{f}(\chi)} : f \in \mathcal{S}^\pm(A), \hat{f}(\gamma) \geq 0 \text{ for all } \gamma \right\}.$$

A $\lambda(A)$ mennyiséget *Turán konstansnak*, a $\lambda^-(A)$ mennyiséget pedig *Delsarte konstansnak* szokás nevezni [31]). A fenti mennyiségeket köti össze a Delsarte-féle becslés (3.1.4):

19 Tétel. ([26]*) *Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, $|\mathcal{G}| = q$, és legyen $A \subset \mathcal{G}$ egy standard halmaz. Ekkor*

$$1/q \leq \delta(A) \leq \lambda^-(A) \leq \left\{ \begin{array}{c} \lambda(A) \\ \lambda^\pm(A) \end{array} \right\} \leq \lambda^+(A) \leq \bar{\delta}(A) \leq 1. \quad (3.1)$$

A fenti tételben a $\delta(A) \leq \lambda^-(A)$ egyenlőtlenség a Delsarte-féle lineáris programozási becslés Fourier analitikus alakja. Nem ismert, hogy a Delsarte-becslés megfordítása igaz-e a következő gyenge értelemben:

20 Probléma ([26]*) *Létezik olyan $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény, amelyre $f(x) \rightarrow 0$ ahogy $x \rightarrow 0$ és $\lambda^-(A) \leq f(\delta(A))$ teljesül?*

Alább látni fogjuk a 24 Tételben, hogy λ^+ és $\bar{\delta}$ valamint λ és $\lambda^\pm$ kapcsolatában *nincs* ilyen függvény.

A fejezet további részében megvizsgáljuk, hogy a δ és λ mennyiségek hogyan viselkednek halmazelméleti műveletekkel kapcsolatban. A legfontosabb talán a következő dualitási tétel (3.1.13):

21 Tétel. ([26]*) *Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, $|\mathcal{G}| = q$, legyen $A \subset \mathcal{G}$ standard halmaz, és $A' = (\mathcal{G} \setminus A) \cup \{0\}$ a standard komplementuma. Ekkor*

$$\delta(A)\bar{\delta}(A') = \lambda(A)\lambda(A') = \lambda^-(A)\lambda^+(A') = \lambda^\pm(A)\lambda^\pm(A') = 1/q. \quad (3.2)$$

Ez a dualitás heurisztikusan azt mutatja, hogy ha a Delsarte becslés 'gyenge' felső becslést ad $|B|$ -re, annak az oka, hogy létezik egy $f \in \mathcal{S}^+(A')$ pseudo-megoldás, ami úgy viselkedik, mintha $f = \chi_B * \chi_{-B}$ lenne nagy $|B|$ -vel. És pontosan ez a helyzet áll elő random halmazok esetén, ami azt mutatja, hogy a Delsarte módszer sajnos nem mindig ad éles becslést $|B|$ -re. Egy random halmaz λ mennyiségeire vonatkozó tétel a következő (3.1.28):

22 Tétel. ([26]*) *Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, $|\mathcal{G}| = q$, és legyen $1 < c < \frac{q}{32 \log q}$ (és ezáltal $q \geq 164$), valamint*

$$16c \frac{\log q}{q} < \rho < 1 - 16c \frac{\log q}{q}.$$

Legyen R a ρ valószínűséghez tartozó random halmaz. Ekkor legalább $1 - 2q^{1-c}$ valószínűséggel R -re teljesülnek a következők:

$$||R| - \rho q| < 3\sqrt{c\rho(1-\rho)q \log q},$$

$$\frac{1}{3\sqrt{c \log q}} \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho q}} < \lambda^-(R) \leq \lambda^+(R) < 3\sqrt{c \log q} \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho q}}.$$

Egy random halmaz δ mennyiségei viszont csak logaritmikus nagyságrendűek (3.1.29):

23 Tétel. ([26]*) *Legyen*

$$q^{-1/2} < \rho < 1 - q^{-1/3} \log q,$$

és legyen R a ρ valószínűséghez tartozó random halmaz. Ekkor legalább $1 - \exp\left(-c_1 \log^2 q / \log \frac{1}{\rho}\right)$ valószínűséggel R -re teljesülnek a következők:

$$\overline{\Delta}(R) < c_2 \left(\frac{\log q}{\log \frac{1}{\rho}} \right)^2, \quad \overline{\delta}(R) > \frac{1}{c_2} \left(\frac{\log \frac{1}{\rho}}{\log q} \right)^2. \quad (3.3)$$

Itt c_1, c_2 abszolút konstansok. Duálisan,

$$q^{-1/3} \log q < \rho < 1 - q^{-1/2}$$

esetén legalább $1 - \exp\left(-c_1 \log^2 q / \log \frac{1}{1-\rho}\right)$ valószínűséggel R -re teljesülnek a következők:

$$\Delta(R) < c_2 \left(\frac{\log q}{\log \frac{1}{1-\rho}} \right)^2, \quad \delta(R) < \frac{c_2}{q} \left(\frac{\log q}{\log \frac{1}{1-\rho}} \right)^2. \quad (3.4)$$

További random halmazokra vonatkozó eredmények ($\rho = q^{-2/3}/2$ esetén), valamint a diadikus $\mathbb{Z}_2^n$ csoportban vett gömbökre és komplementereikre vonatkozó nem-triviális becslések következménye, hogy a $\overline{\delta}$ valamint λ^- és $\lambda^\pm$ mennyiségek között a fordított irányú egyenlőtlenség semmilyen gyenge formában nem állhat fent (3.1.6):

24 Tétel. ([26]*) (a) Legyen $\mathcal{G}$ véges Abel csoport, $|\mathcal{G}| = q$, $3 \nmid q$. Létezik olyan $A \subset \mathcal{G}$ standard halmaz, amelyre $\overline{\delta}(A) = 1/2$ és

$$\lambda^+(A) \leq cq^{-1/6}(\log q)^{1/2},$$

valamely abszolút konstans c -vel.

(b) Legyen $\varepsilon > 0$. Minden elég nagy n esetén létezik olyan $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ standard halmaz, amelyre

$$\lambda^-(A) \leq \lambda(A) < \varepsilon, \quad \lambda^\pm(A) > 1/2 - \varepsilon.$$

Ez a tétel azért jelentős, mert azt mutatja, hogy az alkalmazásokban $\delta(A)$ felső becslésénél esetenként lényegesen jobb eredményt kaphatunk $\lambda^-(A)$ kiszámolásával, mint mondjuk $\lambda^\pm(A)$ -val. Ennek konkrét jelentősége lehet a jövőben következő kérdés vizsgálatánál: maximum mekkora lehet egy $A \subset \{1, \dots, N\}$ halmaz ha tudjuk, hogy $A - A$ nem tartalmaz négyzetszámot (vagy k -dik hatványt valamely rögzített k -ra)?

3.2. Alkalmazás: Paley gráfok függetlenségi száma

Legyen $p = 4k + 1$ alakú prím, és $\mathbb{Z}_p$ -ben kössük össze x -et és y -t éllel, ha $x - y$ (nem-nulla) kvadratikusan maradék. Az így nyert $\mathcal{P}_p$ Paley-gráfnak mennyi az s függetlenségi száma? Az $s \leq \sqrt{p}$ felső becslés szinte triviális, azonban évtizedek óta ez volt a legjobb ismert felső becslés. Az alsó becslés $s \geq (\frac{1}{2} + o(1)) \log_2 p$ (lásd [2]), és ez valószínűleg közelebb van az igazsághoz, hiszen $\mathcal{P}_p$ heurisztikusan egy random gráf. A Delsarte módszer egy [30] által bevezetett élesítését alkalmazva sikerült minimálisan megjavítanunk a $s \leq \sqrt{p}$ felső becslést (3.2.2):

25 Tétel. ([1]*) *Legyen $p = 4k + 1$ prím, jelölje NQ a $\mathbb{Z}_p$ -beli kvadratikusan nem-maradékok halmazát, és legyen $B \subset \mathbb{Z}_p$, $|B| = s$, olyan halmaz, amelyre $B - B \subset NQ \cup \{0\}$. Ekkor*

- (i) *ha $n = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ páros, akkor $s^2 + s - 1 \leq p$*
- (ii) *ha $n = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ páratlan akkor $s^2 + 2s - 2 \leq p$.*

Ez a becslés a $4k + 1$ alakú prímek háromnegyedére $s \leq \sqrt{p} - 1$ -re javítja a felső becslést. Noha a javulás numerikusan minimális, ugyanez eddig csak $p = 4m^2 + 1$ alakú prímekre volt ismert [21]. Továbbá van arra esély, hogy a jövőben a módszer a $s \leq \sqrt{p} - cp^{1/4}$ becslést is kiadja.

3.3. Alkalmazás: kölcsönösen torzítatlan bázisok

Két ortonormált bázist $\mathbb{C}^d$ -ben, X -et és Y -t, kölcsönösen torzítatlannak, vagy röviden MUB-nak, nevezünk ha $|\langle x, y \rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}$ minden $x \in X, y \in Y$ esetén. Ismert, hogy $\mathbb{C}^d$ -ben legfeljebb $d + 1$ olyan ortonormált bázis adható meg, amelyek páronként kölcsönösen torzítatlanok. Az is jól ismert, hogy ennyi valóban meg is adható, ha d prímszám.

Ha az egyik bázist rögzítjük, és a többi szerint koordinátázzuk, akkor egymásra torzítatlan komplex Hadamard mátrixokat (MUH) kapunk. Minden így kapott mátrix minden oszlopát tekinthetjük egy $\mathcal{G} = \mathbb{T}^d$ -beli elemnek, és az ortogonalitási és torzítatlansági feltételek felírása után világossá válik,

hogy a Delsarte módszer alkalmazható. Így kapjuk a MUB-ok számára vonatkozó $d + 1$ -es felső becslés általánosításaként a következő tételt (3.3.6):

26 Tétel. ([23]*) *Legyen $\mathcal{A}$ egy ortonormált bázis $\mathbb{C}^d$ -ben, legyen $B = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r\}$ $\mathcal{A}$ -ra torzítatlan egységvektorok rendszere. Tegyük fel, hogy minden $1 \leq j \neq k \leq r$ esetén a $\mathbf{c}_j$ és $\mathbf{c}_k$ vektorokra $\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_k \rangle = 0$ vagy $|\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_k \rangle| = 1/\sqrt{d}$. Ekkor $r \leq d^2$.*

A kutatók többsége azt sejtí, hogy ha d nem prímhatalvány, akkor nem adható meg $d + 1$ MUB $\mathbb{C}^d$ -ben. Nem tartom valószínűnek, hogy a Delsarte becslés önmagában elég lenne ennek bizonyítására (noha erre csak heurisztikus okaim vannak). Ugyanakkor, ebben a fejezetben sikerült úgy módosítanunk a Delsarte módszert, hogy az ortogonalitási és torzítatlansági relációkat külön kezeljük. Ennek egyik eredménye, hogy $d \leq 5$ dimenzióig az irodalomban a MUB-okra vonatkozó összes strukturális tételre új, elegáns bizonyítást tudtunk adni. Továbbá beláttuk a következő nem-létezési tételt $d = 6$ -ra (3.3.15):

27 Tétel. ([12, 27]*) *$\mathbb{C}^6$ -ban nem létezik komplex Hadamard mátrixoknak olyan $H_1, \dots, H_6$ teljes torzítatlan rendszere, amely tartalmazza az $F_6(a, b)$ Fourier-család valamely elemét. (Az $F_6(a, b)$ komplex Hadamard család definícióját lásd pl. [34]-ben.)*

Megmutattuk továbbá, hogy egy teljes MUH rendszerben legfeljebb egy *valós* Hadamard mátrix szerepelhet (3.3.12):

28 Tétel. ([27]*) *Legyen $H_1, \dots, H_d$ egy teljes MUH rendszer $\mathbb{C}^d$ -ben, és tegyük fel, hogy H_1 valós Hadamard mátrix. Ekkor minden további H_j minden $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ oszlopára teljesül, hogy $\sum_{k=1}^d v_k^2 = 0$. Speciálisan, egyetlen további oszlop sem lehet valós.*

3.4. További lehetséges alkalmazások

Ebben a fejezetben felsorolom a Delsarte módszer néhány további lehetséges alkalmazását: a négyzetszám (vagy köbszám) különbségeket nem tartalmazó halmazokat $\{1, \dots, N\}$ -ben, az egység távolágot elkerülő halmazokat $\mathbb{R}^d$ -ben, valamint Littlewood híres sejtését a szimultán approximációról. Megadom továbbá a Delsarte-becslés egy lehetséges élesítését a 3.4.1 Tételben.

4. Összeghalmazok számossága

Az összeghalmazok számosságával kapcsolatos eredményeink nem használnak Fourier analízist, ezért a disszertációba csak a legelegánsabb eredményeket válogattam be.

4.1. Szuperadditivitás és szubmultiplikativitás

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_k$ egész számok véges halmazai. Hogyan viszonyul az $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ k -szoros összeghalmaz számossága az $A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_k$ $(k-1)$ -szeres összegekéhez? A következő elegáns szuperadditivitási és szubmultiplikativitási tételt bizonyítottuk (4.1.1 és 4.1.2):

29 Tétel. ($[9]^*$) *Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ egész számok véges halmazai, $S = A_1 + \dots + A_k$, $S_i = A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_k$. Ekkor*

$$|S| \geq \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k |S_i| - \frac{1}{k-1}, \text{ és } |S| \leq \left(\prod_{i=1}^k |S_i| \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (4.1)$$

A szubmultiplikativitási tulajdonságot később [10]-ben egy általános Plünnecke-típusú tétel következményeként sikerült a következő formában ki-terjesztünk (4.1.6):

30 Tétel. ([20], [10]^{*}) Legyenek $A, B_1, \dots, B_k$ egész számok véges halmazai, $S \subset B_1 + \dots + B_k$. Ekkor

$$|S + A|^k \leq |S| \prod_{i=1}^k |A + B_1 + \dots + B_{i-1} + B_{i+1} + \dots + B_k|. \quad (4.2)$$

4.2. Összehalmazok és a konvex burok

Ebben a fejezetben általánosítjuk Freiman egy d -dimenziós halmazokra vonatkozó becslését a következőképpen (4.2.5):

31 Tétel. ([25]^{*}) Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^d$ véges halmazok, $|A| = m$. Tegyük fel, hogy B valódi d -dimenziós (azaz nincs benne kisebb dimenziós affin altérben), és $A \subset \text{conv } B$. Ekkor tetszőleges $k \geq 1$ esetén

$$|A + kB| \geq m \binom{d+k}{k} - k \binom{d+k}{k+1} = \left(m - \frac{kd}{k+1}\right) \binom{d+k}{k}. \quad (4.3)$$

Hivatkozások

- [1] C. Bachoc, M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Squares and difference sets in finite fields*, Integers, Vol. 13, Article A77, (2013).
- [2] S. D. Cohen: *Clique numbers of Paley graphs*, Quaest. Math. **11**, (2), 225–231, (1988).
- [3] H. Cohn, N. Elkies: *New upper bounds on sphere packings I.*, Ann. of Math. (2) **157**, no. 2, 689–714, (2003).
- [4] E. Coven, A. Meyerowitz: *Tiling the integers with translates of one finite set*, J. Algebra **212**, (1), 161–174, (1999).
- [5] P. Delsarte: *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. 10, (1973).
- [6] P. Dita: *Some results on the parametrization of complex Hadamard matrices*, J. Phys. A, **37**, no. 20, 5355–5374, (2004).

- [7] B. Farkas, M. Matolcsi, P. Móra: *On Fuglede's conjecture and the existence of universal spectra*, J. Fourier Anal. Appl., **12**, Number 5, 483–494, (2006).
- [8] B. Fuglede: *Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem*, J. Funct. Anal. **16**, 101–121, (1974).
- [9] K. Gyarmati, M. Matolcsi, I.Z. Ruzsa: *A superadditivity and submultiplicativity property for cardinalities of sumsets*, Combinatorica, Volume 30, Number 2, Pages 163–174, (2010).
- [10] K. Gyarmati, M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Plunnecke's inequality for different summands*, Building Bridges Conference, In: Bolyai Society Mathematical Studies, 19; M. Grötschel, G.O.H. Katona(eds.); János Bolyai Mathematical Society and Springer-Verlag, Budapest; 309–320, (2008).
- [11] A. Iosevich, N. Katz, T. Tao, *The Fuglede spectral conjecture holds for convex planar domains*, Math. Res. Lett., **10**, (5-6), 559–569, (2003).
- [12] P. Jaming, M. Matolcsi, P. Móra, F. Szöllősi, M. Weiner: *A generalized Pauli problem and an infinite family of MUB-triplets in dimension 6*, J. Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 42, Number 24, 245305, (2009).
- [13] M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi: *Tiles with no spectra*, Forum Math., **18**, 519–528, (2006).
- [14] M.N. Kolountzakis, M. Matolcsi: *Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture*, Collect. Math., Vol. Extra, 281–291, (2006).
- [15] M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi: *Algorithms for translational tiling*, Journal of Mathematics and Music, Volume 3, Issue 2, 85–97, (2009).
- [16] S. Konyagin and I. Laba: *Spectra of certain types of polynomials and tiling of integers with translates of finite sets*, J. Number Th. **103**, 2, 267–280, (2003).

- [17] I. Laba: *The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials*, J. London Math. Soc. (2), **65** (3), 661–671, (2002).
- [18] J. C. Lagarias, Y. Wang: *Tiling the line with translates of one tile*, Inventiones Math. **124**, 341–365, (1996).
- [19] J.C. Lagarias and Y. Wang: *Spectral sets and factorizations of finite abelian groups*, J. Funct. Anal. **145**, 73–98, (1997).
- [20] M. Madiman, A.W. Marcus, P. Tetali: *Entropy and set cardinality inequalities for partition-determined functions*, Random Structures and Algorithms, **40**, (4), 399–424, (2012).
- [21] E. Maistrelli, D. B. Penman: *Some colouring problems for Paley graphs*, Discrete Math. **306**, 99–106, (2006).
- [22] M. Matolcsi: *Fuglede’s conjecture fails in dimension 4*, Proc. Amer. Math. Soc. **133**, no.10, 3021–3026, (2005).
- [23] M. Matolcsi: *A Fourier analytic approach to the problem of mutually unbiased bases*, Studia Sci. Math. Hung., Vol. 49, No. 4, 482–491, (2012).
- [24] M. Matolcsi, J. Réffy, F. Szöllősi: *Constructions of Complex Hadamard matrices via tiling Abelian groups*, Open Systems & Information Dynamics, **14**, 247–263, (2007).
- [25] M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Sumsets and the convex hull*, In: Additive Number Theory: Festschrift In Honor of the Sixtieth Birthday of Melvyn B. Nathanson; David Chudnovsky, Gregory Chudnovsky (eds.), Springer-Verlag, (2010), 221–227.
- [26] M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Difference sets and positive exponential sums I. General properties*, J. Fourier Anal. Appl., to appear (DOI: 10.1007/s00041-013-9299-9 published online 19. Nov. (2013)).

- [27] M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa, M. Weiner: *Systems of mutually unbiased Hadamard matrices containing real and complex matrices*, Australasian J. Combinatorics, Volume 55, 35–47, (2013).
- [28] P. McMullen: *Convex bodies which tile space by translation*, Mathematika **27**, 113–121, (1980).
- [29] H. Minkowski: *Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder*, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen., 198–219, (1897).
- [30] F. M. de Oliveira Filho, F. Vallentin: *Fourier analysis, linear programming, and densities of distance avoiding sets in $\mathbb{R}^n$* , J. Eur. Math. Soc. **12**, 1417–1428, (2010).
- [31] Sz. Révész: *Turán’s extremal problem on locally compact abelian groups*, Anal. Math., **37**, Issue 1, 15–50, (2011).
- [32] T. Sanders: *On Roth’s theorem on progressions*, Ann. of Math. (2) **174**, no. 1, 619–636, (2011).
- [33] S. Szabó: *A type of factorization of finite abelian groups*, Discrete Math., **54**, no. 1, 121–124, (1985).
- [34] W. Tadej, K. Życzkowski: *A concise guide to complex Hadamard matrices*, Open Syst. Inf. Dyn., **13**, 133–177, (2006).
- [35] T. Tao: *Fuglede’s conjecture is false in 5 and higher dimensions*, Math. Res. Lett., **11**, (2-3), 251–258, (2004).
- [36] B. A. Venkov: *On a class of Euclidean polyhedra*, Vestnik Leningrad Univ. Ser. Math. Fiz. Him. 9 (1954), 11–31 (in Russian).