

Válasz Laczkovich Miklós professzor úr opponensi kérdéseire

1. A Theorem 2.2.21 szerint van olyan véges halmaz $\mathbb{Z}^3$ -ben, ami spektrális, de nem parkettáz. Mint mondhatunk a legkisebb ilyen halmaz elemszámáról? (A bizonyítás a Proposition 2.2.12-n alapszik, amely nagy k -t ad és k^d nagyságrendű halmazt.)

Válasz: valóban, mind a Theorem 2.2.21, mind a Theorem 2.2.27 ineffektív formában van kimondva, azaz az állítások csak azt tartalmazzák, hogy *léteznek* spektrális, de nem parkettázó, illetve parkettázó, de nem spektrális halmazok. A konstrukció mindkét esetben a Proposition 2.2.12-n alapszik, amely egy "sokszorozító" eljárás, és az állítás itt is inefektív formában van megfogalmazva, nevezetesen, hogy elég nagy k -ra működik. A bizonyítást végigkövetve azonban látszik, hogy mindkét irány effektívvé tehető, tehát a legkisebb jó k értékre felső becslés adható. Amikor az eredményeket publikáltuk, társszerzőimmel fel is merült, hogy ilyen konkrét k értékeket kiszámoljunk, de végül ezt elvetettük, mert a kijövő értékek nem lennének elég kicsik ahhoz, hogy érdekesek legyenek. Konkrétan, mindkét esetben a $\mathbb{Z}^3$ -beli ellenpélda elemszáma k^3 -bel arányos, és valahol az ezres és a milliós nagyságrend között lenne (attól függően, hogy mekkora erőfeszítést fordítunk a *lehető legkisebb* k érték megtalálására). Más módszer – tudomásom szerint – azóta sincs arra, hogy egyéb ellenpéldákat konstruáljunk, így ennél kisebb elemszámú ellenpélda jelenleg nem ismert. Más kérdés, hogy nagy összegben mernék fogadni arra, hogy létezik 100-nál kisebb elemszámú ellenpélda is, mindkét irányban, de ennek bizonyítására nincsenek eszközeim.

2. A Theorem 2.2.21 módszerével látszólag $\mathbb{Z}^2$ -beli (vagy akár $\mathbb{Z}$ -beli?) ilyen halmazt is találhatunk. Ehhez "csak" olyan, egészekből álló $2 \times n$ -es és $n \times 2$ -es mátrixokat kellene találni, amelyek szorzata $n \times n$ -es log-Hadamard

$(\text{mod } k)$, és n nem osztja k -t. Van ennek elvi akadály? Vagy az akadály itt is abban áll, hogy nem ismerünk elég Hadamard-mátrixot?

Válasz: az észrevétel tökéletes, ilyen mátrixok létezése esetén máris adódna 2 illetve 1 dimenziós ellenpéldák. A probléma valóban az, hogy semmilyen módszer nem áll rendelkezésünkre ilyen mátrixok konstrukciójára, és a komplex Hadamard mátrixokról nem tudunk eleget ahhoz, hogy ilyen mátrixokat csakúgy az irodalomból előhúzzunk. Már a 3 dimenziós ellenpélda is többé-kevésbé a vakszerencsének köszönhető, és egy konkrét 6-dimenziós paraméteres komplex Hadamard családban a paraméterek megfelelő megválasztásával adódik. Elvi akadályt azonban 2 dimenzióban semmiképp nem látok, és meggyőződésemm, hogy létezik ilyen típusú ellenpélda. Azonban $\mathbb{Z}$ -ben már kevésbé vagyok biztos ebben: 1 dimenzióban több dolog mutat arra, hogy a Fuglede sejtés akár igaz is lehet. A disszertációmban említtem, hogy a Coven-Meyerowitz sejtésből adódna, hogy minden $\mathbb{Z}$ -beli parkettázó halmaz spektrális. Viszont, az eddigi magasabb dimenziós ellenpéldákból az a heurisztika is látszik, hogy ha az egyik irányra sikerülne $\mathbb{Z}$ -ben ellenpéldát adni, akkor egyes duális megfontolások alapján valószínűleg a másik irányra is adódna ellenpélda (noha precízen kimondott ilyen tétel nincs). Tehát, ha hiszünk a Coven-Meyerowitz sejtésben, és a fenti heurisztikában, akkor a Fuglede sejtésben is hinnünk kell $\mathbb{Z}$ -ben. A különbséget az 1 dimenzió és a magasabb dimenziók között az adhatja, hogy $\mathbb{Z}$ -ben a parkettázások struktúrája sokkal merevebb, mint magasabb dimenzióban. Például $\mathbb{Z}$ -ben minden parkettázás automatikusan periodikus.

3. A Theorem 3.1.29 bizonyításában (56. oldal 12-13. sorok) az áll, hogy a (3.43) formulánál jobb becslést ad a következő képlet, amely 1-hez közeli ρ -k esetén érvényes. De valójában ez a képlet rosszabb becslést ad, hiszen (3.43)-ban a $\overline{\Delta}(R)$ -re kapott felső becslés $\log^2 q$ nagyságrendű, míg a következő formulában a felső becslés még $\sqrt{q}$ -nál is nagyobb. Mi az, amit itt elnézek?

Válasz: az eredmények prezentációja itt valóban lehetne valamivel világosabb, nevezetesen, hogy a sok paraméter közül melyik mekkora, és melyik függ a többitől, és melyik nem. Azt nézi el a Professzor úr, hogy az ember hajlamos a ρ valószínűségre úgy gondolni, mint egy 0-tól és 1-től kényelmes távolságban lévő számra, de ezekben a becslésekben ρ már annyira közel van 1-hez, hogy (3.43)-ban a főtag már nem a $\log^2 q$, hanem a $\frac{1}{\log^2 1/\rho}$. Ezért a (3.43) becslés nagyságrendje $\rho = 1 - q^{-1/3} \log q$ esetén $q^{2/3}$, és ugyanezt a nagyságrendet kapjuk a következő képletben is (aminek jó lett volna a referencia kedvéért egy számot adni), azzal a megjegyzéssel, hogy ott c függetlenül választható ρ -tól és q -tól (bizonyos határok között). Összefoglalva, a két képletből levonható tanulság annyi, hogy ha ρ már *nagyon* közel van az 1-hez, akkor a 3.1.28-as tétel becslése már eleve jobbat ad, mint a 3.1.29-es tétel bizonyításában szereplő érvelés.

Budapest, 2015. május 7.

Matolcsi Máté