

Vélemény Matolcsi Máté *Fourier Analysis in Additive Problems*
című doktori értekezéséről

A disszertáció alapjául a szerző 12 dolgozata szolgál. E dolgozatok közül kettő egyszerzős, ezek a *Proc. Amer. Math. Soc.* és *Studia Sci. Math. Hungar.* folyóiratokban jelentek meg. A többszerzős cikkek nagyobb részében Kolountzakis vagy Ruzsa Imre voltak társszerzők, mások mellett. A többszerzős cikkek is rangos folyóiratokban jelentek meg (*Integers*, *J. Fourier Anal. Appl.*, *Additive Number Theory* (Nathanson-Festschrift)), egyikük pedig az egzotikus *J. of Math. and Music*-ban. Az utóbbi cikknek valóban vannak zenei vonatkozásai, amennyiben $\mathbb{Z}^d$ bizonyos parkettázásai felhasználhatóak zenei kánonok kompozíciójához. Előrebocsátom, hogy a disszertációnak ezen dolgozatokra alapuló eredményeit *új tudományos eredményként fogadom el.*

A disszertáció egy bevezetésből és három fő részből áll (2., 3. és 4. fejezet), melyeket egy 145 tételből álló irodalomjegyzék követ.

A 2. fejezet a diszkrét Abel-csoportok parkettázásaival foglalkozik, ezen belül a Fuglede-sejtéssel és a sejtéssel kapcsolatos kutatásokban is nagy szerepet játszó komplex Hadamard-mátrixokkal. A témakör alapproblémája a következő. Legyen G egy Abel-csoport. Adott (véges) $A \subset G$ halmazról döntsük el, hogy parkettázza-e G -t, azaz hogy G kirakható-e az A halmaz diszjunkt eltolt példányaival. A $G = \mathbb{Z}$ esetben ismeretes, hogy minden véges halmazzal való kirakás periodikus, és ennek alapján megadható olyan algoritmus, amely bármely véges $A \subset \mathbb{Z}$ halmazról eldönti, hogy parkettázza-e $\mathbb{Z}$ -t. De az már nem ismert, hogy vannak-e közvetlenül ellenőrizhető számelméleti feltételek, amelyek eldöntik, hogy egy adott véges halmaz parkettázza $\mathbb{Z}$ -t. Ilyen elégséges feltételek ismertek, de megoldatlan, hogy ezek szükségesek-e.

A parkettázásra vonatkozó eldöntéskérdés már a $G = \mathbb{Z}^2$ esetben is megoldatlan. Az első nehézséget az jelenti, hogy a $\mathbb{Z}^2$ rács parkettázásai nem feltétlenül periodikusak. Grünbaum és Shepard sejtették a 80-as években, hogy ha egy véges halmaz parkettázza $\mathbb{Z}^2$ -et (vagy általában $\mathbb{Z}^d$ -t), akkor olyan parkettázás is van az adott halmazzal, ami periodikus. Ez a sejtés a mai napig megoldatlan.

A fentiek mutatják, hogy egészen alapvető kérdéseket tartalmazó és minden jel szerint nagyon nehéz témáról van szó. Fontos leszögezni, hogy Matolcsi Máté ebben a témában ért el új és nem egyszer áttörő jelentőségű eredményeket.

B. Fuglede több, mint 40 éve fogalmazta meg azt a sejtést, amely az eldöntés-problémának rendkívül frappáns megoldását adta volna. A sejtés szerint egy (korlátos, nyílt) Ω halmaz akkor és csak akkor parkettázza az $\mathbb{R}^d$ teret, ha a halmaz spektrális, azaz, ha karakterek egy alkalmas halmaza bázist alkot $L^2(\Omega)$ -ban. Ez azért oldotta volna meg az eldöntésproblémát, mert Kolountzakis és Matolcsi Máté egy tétele szerint (Proposition 2.2.9. a diszszertációban) egy véges $A \subset \mathbb{Z}^d$ halmaz akkor és csak akkor parkettázza $\mathbb{Z}^d$ -t, (illetve akkor és csak akkor spektrális), ha az $\Omega = A + (0, 1)^d$ nyílt halmaz parkettázza $\mathbb{Z}^d$ -t (illetve spektrális $\mathbb{R}^d$ -ben). Tehát, ha a Fuglede-sejtés igaz $\mathbb{R}^d$ -ben, akkor $\mathbb{Z}^d$ -ben is igaz. Azt pedig könnyű ellenőrizni, hogy egy véges halmaz spektrális-e $\mathbb{Z}^d$ -ben.

A Fuglede-sejtés hamis: T. Tao megmutatta 2004-ben, hogy $d \geq 5$ -re van olyan halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amely spektrális, de nem parkettáz. Mindazonáltal a Fuglede-sejtés azok közé a sejtések közé tartozik, amelyek inspirálóak és megtermékenyítőek maradnak azután is, hogy megcáfolják őket. A Fuglede-sejtés esetében ennek az az oka, hogy egyrészt sok speciális esetben (az Ω halmazra tett bizonyos megszorítások mellett) igaznak bizonyult, másrészt az, hogy a parkettázó halmazok és a spektrális halmazok osztályai sok hasonlóságot mutatnak. Miután tudjuk, hogy a sejtés hamis, ezek a jelenségek még rejtélyesebbnek tűnnek.

A parkettázó halmazok és a spektrális halmazok hasonlóságai közül sokat Matolcsi Máté tárt fel. Ezek közül kiemelem a Proposition 2.2.12-t, amely $\mathbb{Z}^d$ egy véges részhalmazának parkettázó, illetve spektrális tulajdonságát visszavezeti egy $(\text{mod } n)$ redukcióval kapott, elég nagy elemszámú alkalmas véges Abel-csoport részhalmazának hasonló tulajdonságára. Ez egyrészt új párhuzamot mutat a parkettázó halmazok és a spektrális halmazok között, másrészt lehetővé teszi, hogy az ellenpéldákat véges csoportokban keressük. Ugyancsak fontosak azok a szintén Matolcsi Mátétól származó tételek, amelyek szerint minden véges Abel-csoportban, továbbá $\mathbb{Z}^d$ -ben bármely legfeljebb ötelemű spektrális halmaz parkettáz (Proposition 2.2.18 és Proposition 2.2.20). Ez egyrészt azért érdekes, mert hatelemű halmazokra az állítás nem igaz, másrészt mert a témakörben több összefüggésben is – a szóolásnak megfelelően – az ötről hatra jutás a nehéz.

A negatív eredmények között a legélesebb eredmények (a ‘rekordok’) közül több is Matolcsi Mátétól és Kolountzakis-tól származik. Így az a tétel is (Theorem 2.2.21), hogy már $\mathbb{Z}^3$ -ban és $\mathbb{R}^3$ -ben is vannak olyan spektrális halmazok, amelyek nem parkettáznak. (Egy- és kétdimenzióban ez még megoldatlan. Még az sem ismert, hogy négy intervallum uniójára van-e ellenpélda $\mathbb{R}$ -ben.)

A témában a legfontosabb negatív eredmény ugyancsak Matolcsi Máté és Kolountzakis tétele (Theorem 2.2.27 a disszertációban), amely szerint $\mathbb{R}^3$ -ban van olyan halmaz, amely parkettáz, de nem spektrális. Ezek szerint a Fuglede-sejtés egyik irányban sem igaz.

A disszertáció egyik vezérmotívuma a komplex Hadamard-mátrixok keresése. A Fuglede-sejtéssel való kapcsolatot az adja, hogy egy $\Omega = \{t_1, \dots, t_k\} \subset G$ halmaz akkor és csak akkor spektrális, ha vannak olyan $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ karakterek, amelyekre teljesül, hogy a $\gamma_i t_j$ ($i, j = 1, \dots, k$) elemek egy komplex Hadamard-mátrixot alkotnak, azaz minden elem abszolút értéke 1, és a sorok (és így az oszlopok is) $\mathbb{C}^k$ egy ortogonális bázisát alkotják.

A Theorem 2.2.21 bizonyítása “mindössze” annyi, hogy a szerzők találnak egy egészekebből álló 3×6 méretű és egy másik, 6×3 méretű mátrixot, melyek szorzata egy olyan 6×6 -os (a_{jk}) mátrix, amelyre $(e^{2\pi i a_{jk}/8})$ komplex Hadamard-mátrix. Ekkor az első mátrix oszlopai, mint $\mathbb{Z}_8^3$ elemei egy 6 elemű spektrális halmazt alkotnak, ami nem parkettázza $\mathbb{Z}_8^3$ -t, mert az elemszáma nem osztója $\mathbb{Z}_8^3$ elemszámának, egy 2-hatványnak.

A nehézség persze abban áll, hogyan keressünk ilyen mátrixokat. Ezekhez a példákhoz minél több komplex Hadamard-mátrixot kellene ismernünk. Azonban – és ez a laikus számára elképesztő – a $k \times k$ méretű komplex Hadamard-mátrixok teljes leírása csak $k \leq 5$ -re ismeretes. (Erre utaltam az ötről hatra jutás nehézségeinek említésekor.) Mivel pedig komplex Hadamard-mátrixokra az elméleti fizikában nagy szükség van (ahogy Matolcsi Máté írja, a kvantum-tomográfiában és a kvantum-információelméletben használják őket, bármit jelentsenek is ezek a kifejezések), így a fizikusok folytonosan keresik a komplex Hadamard-mátrixok új családait. Ezért van az, hogy a disszertáció számos referenciája a *J. Physics* cikkeire hivatkozik, és hogy Matolcsi Máté is publikált ebben a folyóiratban. A disszertáció második fejezete egy olyan konstrukcióval végződik, amely a Fuglede-sejtéssel kapcsolatos elméleti háttér felhasználásával új, a fizikusok által még nem felfedezett 8×8 méretű komplex Hadamard-mátrixokat ad meg.

A disszertáció 3. fejezetének első része Delsarte-nak egy 40 évvel ezelőtt bevezetett módszerét alkalmazza. Itt valójában a véges Fourier-transzformáltak alkalmazásáról van szó. Azonban nem teljesen világos előttem, hogy ezt a módszert Delsarte már alkalmazta-e vagy pedig a módszer a Delsarte-egyenlőtlenség egy későbbi, Fourier-transzformáltakat alkalmazó formájából fejlődött ki. A utóbbi esetben jó lenne látni a módszer közvetlenebb forrásait. Az ún. Turán-problémával való kapcsolatáról Révész Szilárd írt egy összefoglaló cikket 2011-ben.

A fejezetnek ez a része egy Ruzsa Imrével közös dolgozaton alapszik. Ebben kiindulnak egy G véges Abel-csoportból, és egy $A \subset G$ halmazból, amely 0-ra szimmetrikus, és amelyre $0 \in A$. A cél minél jobb becsléseket találni a

$$\Delta(A) = \max\{|B|: B \subset G, (B - B) \cap A = \{0\}\} \quad \text{és}$$

$$\overline{\Delta}(A) = \max\{|B|: B \subset G, (B - B) \subset A\}$$

mennyiségekre. Ennek érdekében négy mennyiséget vezetnek be, amelyek variánsai a $\lambda(A)$ konstansnak (az ún. Turán-kostans): ez $f(0)$ minimuma, ahol f végigfut azon függvényeken, melyek tartója A , a Fourier-transzformáltja mindenütt nemnegatív, és az A -n vett integrálja 1. A szerzők megállapítják a szereplő mennyiségek közötti alapvető összefüggéseket; ezek közül a komplementer halmazra vonatkozó dualitás (Theorem 3.1.12) különösen érdekes és hasznos.

Itt a fő eredmények a véletlen A halmazhoz tartozó $\lambda, \lambda^+, \lambda^-, \lambda^\pm$ konstansok becslése a paraméterek megfelelő választása esetén (Theorem 3.1.28 és 3.1.6), illetve az ebből nyerhető becslések $\Delta(A)$ -ra és $\overline{\Delta}(A)$ -ra ugyancsak véletlen A halmazokra.

A fejezet második részében a szerző azt vizsgálja, hogy ha p egy $4k + 1$ alakú prím, akkor hány olyan maradékosztály adható meg (mod p), hogy bármely kettő különbsége kvadratikusan nem-maradék legyen (Paley-gráf). Régóta ismeretes volt, hogy ezek maximális $s(p)$ számára fennáll az $s(p) \leq \sqrt{p}$ becslés, amit évtizedekig nem sikerült javítani. A Theorem 3.2.2 tételben a szerző megmutatja (egy Bachoc-kal és Ruzsa Imrével közös cikk alapján, a véges Fourier-transzformáltak módszerét használva), hogy a $4k + 1$ alakú prímelek aszimptotikusan háromnegyedére a szemernyivel jobb $s(p) \leq \sqrt{p} - 1$ becslés is igaz. Ez nem látszik jelentős javításnak, de tudjuk, hogy új módszerekkel talált élesítések később jelentős áttörésekhez vezethetnek (l. az ikerprím-sejtéssel kapcsolatos fejlemények történetét).

A fejezet harmadik részében a szerző visszatér kedvenc Hadamard-mátrixaihoz. A fejezetnek ez a része egy saját, és egy többszerzős dolgozaton alapszik. Amint itt megtudjuk, a fizikusoknak nem is annyira a komplex Hadamard-mátrixok kellenek, hanem az ezek rendszereivel leírható ún. kölcsönösen torzítatlan bázisok (MUB-k). Ezek olyan ortonormált bázisok $\mathbb{C}^d$ -ben, amelyekre teljesül, hogy bármely két, különböző bázishoz tartozó vektor skaláris szorzatának abszolút értéke ugyanaz. Ismeretes, hogy legfeljebb $d + 1$ ilyen bázist lehet megadni, és hogy ennyi meg is adható, ha d prímhatvány. A nem-prímhatvány d -k esete megoldatlan; már $d = 6$ esetén sem ismert a maximális MUB-k száma.

Csak néhány éves eredmény, hogy a $d = 2, 3, 4, 5$ dimenziókban a komplex Hadamard-mátrixok segítségével leírt MUB-k elemei szükségképpen egységgyökök, még hozzá $d = 3, 4, 5$ esetén d -edik egységgyökök. Ezért különösen érdekes az a tétel (Proposition 3.3.7) amely szerint, ha $d = 6$ -ra van 7-elemű, komplex Hadamard-mátrixok segítségével leírt MUB, akkor ezek elemei nem lehetnek mind 6-ik egységgyökök (sőt 12-edik egységgyökök sem). A fejezetnek ez a része számos további eredményt tartalmaz, amelyek mind abba az irányba mutatnak, hogy $d = 6$ esetén a $d + 1$ -es felső korlát minden valószínűség szerint nem a legjobb. (Egy sejtés szerint az érték 3.)

A disszertáció 4. fejezete Gyarmati Katalinnal és Ruzsa Imrével közös eredményeket ismertet. A fejezet eredményei egészek, illetve vektorok összeghalmazainak méretére ad becsléseket. A számos eredmény közül kiemelem a rendkívül figyelemreméltó 4.2.5. Tételt, amely Freiman egy tételének messze-menő általánosítása. Freiman tétele azt állítja, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^d$ olyan véges halmaz, amely nem fedhető le $d - 1$ -dimenziós hipersíkkal, akkor

$$|A + A| \geq |A| \cdot (d + 1) - \frac{d(d + 1)}{2}.$$

A 4.2.5. Tétel szerint, ha $A, B \subset \mathbb{R}^d$ véges halmazok, B nem fedhető le $d - 1$ -dimenziós hipersíkkal, és A része B konvex burkának, akkor

$$|A + kB| \geq |A| \binom{d + k}{k} - k \binom{d + k}{k + 1}.$$

Ha $k = 1$ és $B = A$, akkor megkapjuk Freiman tételét.

A disszertációról elmondható, hogy 90 oldalnyi gyönyörű matematika, tökéletes prezentációban. Az anyag szépsége részben a vizsgált problémák természetességéből fakad, részben azokból az összefüggésekből, amelyeket a szerző a

matematika különböző területei között feltár és felhasznál. Fourier-analízis, geometria, kombinatorika és számelmélet keveredik csaknem mindegyik gondolatmenetben. Ide sorolom a fizikával való szoros kapcsolatot is, és mindezekon kívül még a zenei vonatkozás is megemlíthető.

A hibátlan angolsággal és rendkívüli gondossággal megírt disszertáció élvezetes olvasmány. A szerző nagy gondot fordított arra, hogy az olvasó pontos képet kapjon a problémák és módszerek történetéről és összefüggéseiről (bár a Delsarte-módszer esetében kicsit bőbeszédűbb lehetett volna). Különösen érdekesek az esetleges későbbi vizsgálatokra vonatkozó fejtegetések; kiemelem a 76-78. oldalakon található ‘Future prospects’ című részt, amely a k -adik hatványokat elkerülő különbségek kérdését, az egység hosszúságú távolságot nem tartalmazó halmazok problémáját és a Littlewood-sejtést ismerteti, és a felhasznált módszereknek ezek megoldásában való lehetséges alkalmazásait tárgyalja.

A bizonyítások nagyobbik része megítélésem szerint nem túl nehéz, habár az olvasót félrevezetheti a tökéletes leírás, amelyben minden lépés természetesnek tűnik. Persze van néhány igazi nehéz bizonyítás is. Ilyen mindenekelőtt a Theorem 2.2.27 bizonyítása. (Ez a 2. fejezet egyik fő eredménye, amely szerint $\mathbb{Z}^3$ -ben van olyan véges halmaz, amely parkettáz, de nem spektrális.) Ennek a bizonyítása – különösen a Proposition 2.2.26-é, amelyben ügyesen vannak kijátszva a (mod 8) és (mod 24) maradékosztályok egymás ellen – rendkívül ravasz. A ‘Delsarte-módszernek’ titulált részben a λ -típusú mennyiségek közötti összefüggések bizonyítása – beleértve a hasznos komplementer-dualitását is – tulajdonképpen egyszerű és természetes. Ez korántsem kritika akar lenni, épp ellenkezőleg. Ebben a részben ugyanis a lényeges újdonság az állításokban rejlik, nem abban, hogy a bizonyításuk mennyire nehéz. Ezek a fontos és hasznos összefüggések többek között a véletlen halmazokra vonatkozó tételekben vannak felhasználva. Az ezekben használt módszer (A Bernstein-egyenlőtlenség megfelelő variánsa) természetes, és nem tűnik nehéznek. Ez azonban ismét optikai csalódás lehet, figyelembe véve azt is, hogy itt a paraméterek jó beállításán múlik sok minden, és arról, hogy a szerzők hogyan találták meg a megfelelő paraméter-intervallumokat, semmit nem tudunk meg. A Paley-gráfokra vonatkozó $\sqrt{p} - 1$ -es új felső korlát bizonyítása egyike az igazi ‘nehéz’ és ravasz bizonyításoknak, sok ötlettel. A 3.3. részben az olvasó elámul azon az arzenálon, amely a 6×6 -os MUB-okra vonatkozó (és végül nyitva maradó) probléma megoldására be van vetve. De látva az elszántságot, aligha kérdéses, hogy a probléma előbb-utóbb meg lesz

oldva. A 4. fejezet bizonyításai elemiek (vagyis kombinatorikusak, egy kis lineáris algebrával fűszerezve), de korántsem egyszerűek. A Freiman-tétel messzemenő általánosítását adó 4.2.5. Tétel bizonyítása minden csak nem egyszerű.

A fentiek alapján *a doktori művet nyilvános vitára alkalmasnak tartom.*

Néhány kérdés a szerzőhöz.

1. A Theorem 2.2.21 szerint van olyan véges halmaz $\mathbb{Z}^3$ -ben, ami spektrális, de nem parkettáz. Mint mondhatunk a legkisebb ilyen halmaz elemszámáról? (A bizonyítás a Proposition 2.2.12-n alapszik, amely nagy k -t ad és k^d nagyságrendű halmazt.)
2. A Theorem 2.2.21 módszerével látszólag $\mathbb{Z}^2$ -beli (vagy akár $\mathbb{Z}$ -beli?) ilyen halmazt is találhatunk. Ehhez “csak” olyan, egészekből álló $2 \times n$ -es és $n \times 2$ -es mátrixokat kellene találni, amelyek szorzata $n \times n$ -es log-Hadamard (mod k), és n nem osztja k -t. Van ennek elvi akadály? Vagy az akadály itt is abban áll, hogy nem ismerünk elég Hadamard-mátrixot?
3. A Theorem 3.1.29 bizonyításában (56. oldal 12-13. sorok) az áll, hogy a (3.43) formulánál jobb becslést ad a következő képlet, amely 1-hez közeli ρ -k esetén érvényes. De valójában ez a képlet rosszabb becslést ad, hiszen (3.43)-ban a $\overline{\Delta}(R)$ -re kapott felső becslés $\log^2 q$ nagyságrendű, míg a következő formulában a felső becslés még $\sqrt{q}$ -nál is nagyobb. Mi az, amit it elnézek?

Laczkovich Miklós

Budapest, 2015. április 21.