

Bírálóí vélemény Matolcsi Máté
”Fourier Analysis in Additive Problems”
c. doktori munkájáról

Biró András, 2015. április

Az értekezés sokféle additív problémával foglalkozik, és ezek vizsgálatához a matematika több ágának a módszereit is használja: a legfontosabb a címben is említett Fourier-analízis, de algebrai, számelméleti, kombinatorikus és valószínűságszámítási megfontolásokat is alkalmaz.

A rövid bevezetés után a jelölt a második fejezetben a parkettázások témájával foglalkozik. A legfontosabb tételek itt a nevezetes Fuglede-sejtésre vonatkozó negatív eredmények. A Fuglede-sejtés azt állítja, hogy egy $\mathbf{R}^d$ -beli halmaz pontosan akkor spektrális, ha parkettázza $\mathbf{R}^d$ -t. A disszertáció a Fuglede-sejtés mindkét irányát megcáfolja 3 dimenzióban. A spektrális→parkettáz irányra az első ellenpéldát Terence Tao (a mai matematika egyik legnagyobb alakja) adta, de ez az ellenpélda 5 dimenziós volt. A dimenziziót a jelöltnek 4-re, majd (társszerzővel együtt) 3-ra sikerült redukálnia.

A Fuglede-sejtés parkettáz→spektrális irányának a cáfolata teljes egészében a jelölt és társszerzői eredeti munkájának az eredménye. Minden bizonnyal ez a disszertáció legjelentősebb eredménye.

Érdekes módon ezeknek a negatív eredményeknek (illetve a hozzájuk vezető gondolatmenetben szerepet játszó pozitív részeredményeknek) a melléktermékeként a második fejezet végén egy pozitív eredményt is sikerült bizonyítani: új komplex Hadamrd-mátrixokat konstruálni. Ugyanis a spektrális halmazok szoros kapcsolatban állnak a komplex Hadamrd-mátrixokkal.

A harmadik fejezet azzal az általános problémával foglalkozik, hogy ha egy véges Abel-csoportban adott egy szimmetrikus, 0-t tartalmazó A halmaz, akkor mennyire nagy lehet egy olyan B halmaz, amelynek a különbségalmaza csak a 0-ban metszi A -t. A híres Delsarte-féle módszer egy változatát kidolgozva erre a problémára ad Fourier-analitikus felső becslést a jelölt, majd ennek a becslésnek az általános tulajdonságait elemzi. Az

a probléma nyitott marad, hogy maga a Delsarte-féle becslés általánosságban mennyire pontos, de néhány ezzel rokon becslésre az analóg kérdést sikerül megválaszolni: véletlen halmazokat tekintve az derül ki, hogy az egyenlőtlenségek nem élesek.

A fejezet második fele a Delsarte-módszer néhány alkalmazását adja két, a matematika igen különböző területéről származó problémakörben. A jelölt (és társszerzői) egyrészt a számelméletből ismert Paley-gráfok függetlenségi számára adnak új felső becslést, másrészt az ún. kölcsönösen torzítatlan bázisok geometriai problémájára vonatkozóan bizonyítanak néhány (főleg nemlétezési) tételt.

A negyedik fejezetben, amely a legrövidebb, additív számelméleti (összeghalmazokra vonatkozó) egyenlőtlenségek szerepelnek. Az itteni bizonyítások tisztán kombinatorikusak.

A disszertáció külön érdeme, hogy a meglevő eredmények mellett jövőbeli kutatási lehetőségeket is ismertet. Például közöl egy saját sejtést (Conjecture 3.3.11) a kölcsönösen torzítatlan bázisokról, és ennek a sejtésnek a fontosságát is demonstrálja azzal, hogy a Theorem 3.3.15-re egy olyan elegáns bizonyítást ad, ami a Conjecture 3.3.11 fennállását feltételezi (ahelyett, hogy a Theorem 3.3.15 eredeti cikkben publikált, bizonyítatlan feltevést nem használó, de sokkal kevésbé elegáns bizonyítását ismertetné).

Véleményem szerint a disszertáció jelentős eredményeket tartalmaz, minden szempontból megfelel a követelményeknek. Ez alapján a nyilvános védelem kitűzését és az MTA doktori cím odaítélését javaslom.

Biró András

Biró András, az MTA doktora