

dc_832_14

HŐMÉRSÉKLETI EGYENSÚLYTÓL TÁVOLI STATISZTIKUS FIZIKAI RENDSZEREK NUMERIKUS MODELLEZÉSE

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Somfai Ellák



**MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont
Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet
Komplex Folyadékok Osztály**

**Budapest
2014. december**

1. BEVEZETÉS, A KUTATÁSOK ELŐZMÉNYE

A természetben számos lényeges rendszer – gondoljunk például az életfolyamatokra – nincs hőmérsékleti egyensúlyban, közöttük egy jelentős csoportot alkotnak a hőmérsékleti egyensúlytól távoli folyamatok. Jelentőségük ellenére ezekről sokkal kevesebbet tudunk, mint az egyensúlyi rendszerekről, többek között a részletes egyensúly hiánya miatt. Az 1960-as és 70-es években az egyensúlyi statisztikus mechanikában elért mélyreható fejlődés után a 80-as évektől a statisztikus fizikában az erőfeszítések számottevő része a nemegyensúlyi folyamatok felé irányult. Meghatározó felismerés volt, hogy a természetben sok jelenség – köztes méretskála hiányának következtében – skálainvarianciát mutat; az ilyen objektumok a „fraktál” elnevezést kapták. A következő évtizedben a hangsúly áttevődött a skálainvariáns jelenségek fizikai hátterének megértésére, és az egyensúlytól távoli növekedési folyamatokról (például felületnövekedésről) szerzett ismereteink is rendszerezettebbek lettek. A 90-es évek második felétől egészen napjainkig előtérbe kerültek az interdiszciplináris jellegű kutatások, például a statisztikus fizika és a biológia (mikrobiológia, populációdinamika, rendszerbiológia), a matematika (gráfelmélet, játékelmélet), és újabban a társadalomtudományok közötti határterületeken. Erre az időszakra tehető a szemcsés anyagok fizikájának jelentős fejlődése is; korábban a mérnöki tudományok körében leginkább csak empirikus modellekkel dolgoztak.

A fizika témakörében – így a nemegyensúlyi statisztikus fizikában is – számos olyan problémát találunk, amelyek megválaszolására az analitikus, illetve a kísérleti megközelítések önmagukban nem bizonyulnak elegendőnek. Ilyen esetekben a numerikus módszerek alapvető fontosságú információval járulnak hozzá a megoldáshoz.

A numerikus megközelítés lényeges előnye az elméleti, analitikus módszerekhez képest a flexibilitás: általa kezelhetővé válik az adott probléma megkerülhetetlen komplexitása. Például a diffúzió-limitált aggregáció leírására három évtized alatt sem született egy koherens elméletet, míg eközben rengeteg numerikus ismeret felhalmozódott. A szimulációknak fontos szerep jut az elméleti megközelítés kifejlesztésében is. Segítséget nyújthatnak például annak eldöntésében, hogy melyik feltételezések valamint közelítések megalapozottak, és melyek nem; ezáltal utat mutathatnak a helyes elmélet kidolgozásának folyamatában.

A numerikus módszereknek számos előnye van a kísérletekkel szemben is. Egyrészt míg a kísérletekben tipikusan csak kiválasztott mennyiségek kerülnek megmérésre, addig a modell állapotáról minden információ rendelkezésre áll, az is ami praktikusan nem mérhető vagy túl költséges lenne (például megfelelő térbeli és időbeli felbontás, vagy mérési pon-

tosság miatt). Másrészt a különböző effektusok be- és kikapcsolásában sokkal nagyobb a szabadság, ami többek között alapvető lehet egy olyan minimális modell megalkotásában, amely már produkálja a vizsgált jelenségeket. Éppen ezért a kísérletek és a szimulációk hatékonyan kiegészíthetik egymást.

Ebben a munkában hőmérsékleti egyensúlyban nem lévő statisztikus fizikai rendszereken végzett kutatásaimat foglaltam össze, amelyek vizsgálatában a numerikus módszerek – sokszor erős csatolásban az elméleti vagy kísérleti megközelítéssel – hatékonynak bizonyultak. A diffúzió végzett munkámat egyrészt a diffúzió-dominált egyensúlytól távoli növekedési folyamatok megoldatlan problémái motiválták, másrészt meglepő kísérleti felületfizikai megfigyelésekre kerestem magyarázatot. Vizsgáltam továbbá az atermális szemcsés anyagok statikus és kvázistatikus (rezgések és akusztikus hullámterjedés) tulajdonságait, különös tekintettel skálainvariáns és kritikus viselkedésre.

Az egyik legérdekesebb vizsgált probléma a fémkristályok alacsony indexű felületein a felszíni atomok mobilitása. Hosszú ideje ismert, hogy ezekben a rendszerekben már az olvadáspontnál jóval alacsonyabb hőmérsékleten is van atomi átrendeződés, amelyen tipikusan a felső atomi réteg tetején mozgó adatomok mozgását értjük: ezek az atomi lépcsők mentén vagy között mozognak, ami a lépcsők és szigetek mobilitásához vezet. Sokkal kevésbé ismert viszont a felső réteg atomjainak mozgása: ezeket az atomokat viszonylag jó koordináltságuk miatt szobahőmérsékleten általában statikusnak tekintették. Látni fogjuk, hogy ez nincs így.

Egy másik, intenzíven kutatott témakör az egyensúlytól távoli növekedési folyamatok, különös tekintettel azokra a rendszerekre, amelyekben a növekedési rátát egy diffúziós folyamat határozza meg. Ilyen folyamatok diszkrét, részecske-alapú modellje a diffúzió-limitált aggregáció (DLA), amelyben véletlen bolyongást vagy Brown mozgást végző részecskék tapadnak egy immobilis fürthöz, amely a növekvő fázist reprezentálja. Az elmúlt három évtizedben nagyon sok numerikus munka foglalkozott a DLA-val. Ezek között számos egzotikus megállapítás is szerepelt, amelyek kétségbe vonták, hogy a DLA aszimptotikusan egyszerűen skálázódó rendszer. Például feltételezték, hogy van olyan távolság dimenziójú mennyiség, amely sem a mikroszkopikus (részecskeátmérő) sem a makroszkopikus (a fürst átmérője) távolságskála szerint skálázódik; vagy a fraktáldimenzió függ a határfeltételektől (például más nyílt síkon mint csatorna geometriában) vagy függ a fürst közepétől mért relatív (a fürst sugarával normált) távolságtól. Ezeket a pontokat lényeges tisztázni, mert egy köztes hosszúságskála létezése valószínűsíthető egy eddig fel nem ismert fizikai mechanizmust, ami ezt a hosszúságskálát meghatározza.

Továbbra is a diffúzió témakörénél maradva, a véletlen bolyongás valamint a Brown

mozgás alapvető tulajdonsága, hogy a (megfelelően definiált) átlagos elmozdulás az eltelt idő $1/2$ hatványával skálázódik. Így, habár egy illetve két dimenzióban egy véletlen bolyongó részecske előbb-utóbb mindenhova eljut, a szublineáris távolság-idő reláció miatt ezt nagyon lassan teszi. Felmerül a kérdés, hogy egy diffundáló részecske akkor is eljut-e mindenhova, ha a tér tágul, vagyis hogyan alakul a diffúzív elmozdulásnak és a tér tágulásának versengése. Lényeges pont, hogy ez a kérdés nemcsak egzotikus kontextusban, például kozmológiában bukkan fel, hanem olyan hétköznapi növekedési folyamatok, mint a radiálisan növekedő doménfalak is visszavezethetők egy alacsonyabb dimenziójú táguló térben bolyongó kölcsönható részecske-rendszerre. Azon diffúziós folyamatok, amelyekben a diffúziós együttható időfüggő, például a változó hőmérséklet következtében, szintén leképezhetőek időfüggő metrika szerinti leírásra. Biológiai kontextusban pedig releváns, hogy a fajok életterének térbeli terjeszkedése gyakran szoros kapcsolatban áll a genetikai állomány változásaival, és ennek következtében erős kihatással van a természetes populációk génkészletére.

Végül a szemcsés anyagok vizsgálatára térünk át: közkeletű hasonlaltal gondolhatunk rájuk úgy, mintha az atomokat makroszkopikus részecskékké helyettesítenénk. Mivel a részecskék makroszkopikusak, egyrészt nincs számottevő termális mozgásuk, másrészt a részecskék kölcsönhatása erősen disszipatív és tipikusan nem tartalmaz vonzást. Az így kapott rendszer tulajdonságai emiatt jelentősen eltérnek a szokásos anyagokétól. A magára hagyott szemcsés anyagban egy idő után minden mozgási energia disszipálódik, és a részecskék – amelyek mechanikai egyensúlyban vannak – egy statikus struktúrába rendeződnek; a közöttük ható erők egy hálózatot alakítanak ki. Az egyik legalapvetőbb kérdés ennek az erőhálózatnak a leírása. Sokan vizsgálták a legegyszerűbb, egy pont-statisztikai mennyiségeket, így a kontaktusokon átmenő erő normális illetve tangenciális komponensének eloszlását, amely önmagában is mutat váratlan tulajdonságokat. A legérdekesebb kérdés mégis az erőhálózat globális térbeli struktúrájának jellemzése, amiről eddig nagyon keveset tudtunk.

A szemcsés anyagot alkotó részecskék makroszkopikusak, így a kölcsönhatásuk általában szigorúan véges hatótávolságú: amíg nem érnek össze, addig nem hatnak kölcsön. Ez a részecske-részecske kölcsönhatásban megjelenő éles határ rendszerszinten is megjelenik: ha egy rögzített térfogatú dobozba egyre több szemcsés részecskét teszünk (vagy ekvivalensen: rögzített számú részecskét egyre kisebb térfogatra szorítunk össze), akkor a kezdetben disszipatív gázt alkotó, dominánsan kétrészecske-ütközéssel kölcsönható részecskék egy adott térkitöltés elérése után hirtelen összeállnak, és rendezetlen szilárd testet kezdenek alkotni. Ezt az átmenetet torlódási átmenetnek hívjuk, és a szemcsés anyagokon túl megjelenik teljesen más jellegű rendszerekben, mint például közlekedési modellekben, sőt potenciálisan kap-

csolatba hozható az üvegesedési átmenettel is. Jelenős figyelmet kapott az a felismerés, hogy sűrűlódásmentes szemcsés anyagokban a torlódási átmenet közelében számos mennyiség skálázódást mutat, és a vibrációs sajátállapotok spektruma is anomális. A torlódási átmenet így sok hasonlóságot mutat a folytonos fázisátalakulások kritikus jelenségeivel, de jelentős különbségek is vannak, például a skálázási exponensek közül több is függ a részecskék közötti erőtvörvény alakjától. A sűrűlódó, tehát realisztikus szemcsés anyagok torlódási átmenetének kritikusságáról viszont nem voltak részletes ismereteink.

A szemcsés anyagok tulajdonságait alapvetően befolyásolják a fluktuációk, ennek egy markáns megjelenése a statikus és kvázisztatikus szemcsés konfigurációkban a részecskék közötti kontakt erők inhomogenitása. Mivel egy részecskére ható nagy erőt tipikusan a másik oldalon egy másik nagy erő egyensúlyoz, a nagy erők általában szálas struktúrákba, erőláncokba szerveződnek. Az erőláncokat oldalról gyengébb erők stabilizálják, ami így egy elágazó hálózatot alkot. Az erőláncok vizsgálata (például hogy mutatnak-e valamiféle skálainvarianciát, vagy pedig van-e karakterisztikus méretük) nem egyszerű probléma, többek között azért, mert nincs éles határ az erős és gyenge erők között. Lényeges kérdés az is, hogy a fluktuációk miatt tekinthető-e a szemcsés anyag nagy skálán jól viselkedő kontinuumnak. Érdekes módon még az olyan alapvető kérdések, mint a szemcsés anyagban a hangsebesség nyomásfüggésének skálázása, sem egyszerűen megválaszolhatóak. Ez a problémakör jól vizsgálható az akusztikus hullámok terjedésének tanulmányozásával, aminek külön előnye, hogy a kísérleti oldalon nem destruktív vizsgálati lehetőséget jelent drága háromdimenziós képalkotási berendezések (például Röntgen CT vagy MRI) használata nélkül. Eddig több kísérlet is lényeges eredményeket szolgáltatott, az elméleti megközelítés viszont sokkal kevésbé kidolgozott.

2. CÉLKITŰZÉSEK

A fémkristályok alacsony indexű felületeinek felső rétegébe beágyazott szennyező atomok (konkrétan Cu(001) felületen In atomok) mobilitásának kérdésében célul tűztem ki az igen sajátos kísérleti megfigyelések mögötti mechanizmus feltárását, és annak kvantitatív értelmezését.

A diffúzió-limitált aggregáció viselkedésével kapcsolatban célom volt megerősíteni vagy megcáfolni azokat a feltételezéseket, amelyek kétségbe vonják a modell aszimptotikus skálainvarianciáját.

A dielektromos letörési modell kapcsán munkám célja egy, az eddig ismerteknél hatékonyabb algoritmus kidolgozása volt, amely segítségével vizsgálható többek között a fraktáldimenzió és más skálázási exponensek függése a modell nemlinearitási paraméterétől.

A diffúzió-limitált aggregáció viselkedésével kapcsolatban célom volt megerősíteni vagy megcáfolni azokat a feltételezéseket, amelyek szerint a fraktáldimenzió függ a határfeltélektől (más szabad síkban mint csatorna geometriában). El kívántam dönteni továbbá, hogy a zajos diffúzió-limitált aggregáció fürtök sokaságátlaga megegyezik-e a megfelelő determinisztikus egyenletek (Laplace-i növekedés) megoldásával.

A táguló térben végbemenő skálainvariáns folyamatok viselkedésének leírására célom volt egy olyan leképezés kidolgozása, amely kapcsolatot teremt a táguló térben, illetve rögzített térben végbemenő folyamatok között; lehetőséget adva többek között a táguló térbeli aszimptotikus viselkedés megértésére.

A statikus szemcsés erőhálózatok vizsgálatával kapcsolatban célul tűztem ki azok térbeli struktúrájának felderítését, és annak eldöntését, hogy a statikus szemcsés erőhálózatok mutatnak-e skálainvarianciát.

A súrlódó szemcsés anyagok torlódási átmenetével kapcsolatban el kívántam dönteni, hogy azok (a súrlódásmentes esethez hasonlóan) mutatják-e a kritikusság jeleit.

A szemcsés anyagokban terjedő akusztikus hullámok viselkedésével kapcsolatban célom volt a hullámfront robusztusságának vizsgálata (függ-e a konfigurációk részecske-szintű részleteitől, például erőláncoktól), a hangsebesség nyomásfüggésének valamint a hullámok diszperzitásának vizsgálata.

3. ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK (TÉZISEK)

T1a. Részecske alapú numerikus modellezéssel megmutattam, hogy Cu(001) felületen a beültetett nyomjelző In atomok jellegzetes mozgását felületi vakanciák okozzák [S1, S2, S3, S4]. Megfelelő időfelbontású pásztázó alagútmikroszkóppal látható, hogy az In atomok hosszabb ideig egy helyben állnak, majd hirtelen több, akár 4-6 rácsállandó hosszúságú ugrást tesznek. Az egymáshoz közeli In atomok mozgása időben szinkronizált.

A fémkristály felső atomi rétegében diffundáló ritkán előforduló, de nagyon mobilis vakanciák milliszekundum nagyságrendű élettartamuk során két dimenziós véletlen bolyongást végeznek, áthelyezve akár többször is az útjukba eső összes atomot, köztük a nyomjelző atomokat. A következő vakancia megjelenéséig, ami szobahőmérsékleten tipikusan néhányszor 10 másodperc ideig tart, nem történik semmilyen mozgás.

A nyomjelző atomok ugrási hosszának eloszlását részecske alapú numerikus modellezés segítségével számoltam ki, mégpedig a valószínűségek közvetlen kiértékelésével, melynek kedvezőbbek a konvergencia tulajdonságai, mint a Monte-Carlo típusú módszereknek.

T1b. Felállítottam egy kontinuum modellt, amely leírja az alacsony indexű fémkristályok felső rétegébe ágyazott nyomjelző atomoknak a felületi vakanciák által okozott mozgását [S2, S3]. A modell azt jósolja, hogy a nyomjelző atomok ugrás hosszainak eloszlását nulladrendű módosított Bessel függvény írja le, amit a pásztázó alagútmikroszkóppal mért kísérleti eredmények, valamint az általam végzett részecske alapú numerikus modellezés is igazoltak.

Ezen kontinuum modell túlmutat a korábbi rács alapú nyomkövető részecske diffúzió számításokon, mivel figyelembe vesz több, az atomi rendszerben lényeges sajátosságot, különös tekintettel a vakanciák véges élettartamára.

T2. Diffúzió-limitált aggregáció (DLA) rácsmentes változatára kidolgozott zajcsökkentés módszerével, végesméret-skálázást felhasználva numerikus szimulációkban megmutattam, hogy a DLA fürtök – az irodalomban korábban megjelent eredményekkel ellentétben – nem multiskálázódnak, és az összes mért hosszúság dimenziójú mennyiség, az aktív zóna vastagságát is beleértve, aszimptotikusan azonosan skálázódik a fürt méretével [S5, S6].

A hosszúság dimenziójú mennyiségek skálázásában jelen van viszont egy erős szubdomináns tag, melynek hatványkitevője a numerikus mérés pontosságán belül az összes mért mennyiségre azonosnak adódott. Ez a skálázási korrekció okozhatta a korábbi kisebb skálájú szimulációk eredményeinek interpretációját.

- T3. A diffúzió-limitált aggregáció nemlineáris kiterjesztésére, a dielektromos letörés modellre (dielectric breakdown model, DBM) kidolgozott hatékony, mintavételezésen alapuló numerikus módszerrel megmértem az $\alpha_{\text{csúcs}}$ skálázási exponenst és a fraktál dimenziót az η nemlinearitási exponens függvényében [S7]. A kapott eredmények szerint (korábbi várakozással ellentétben) $\alpha_{\text{csúcs}}$ nem független η -tól $\eta \approx 1$ közelében, és a mérési adatok extrapolációja konzisztens az $\eta_c = 4$ állítással.

A mintavételezéses módszer alkalmas a diffúzió-dominált növekedési modellek multifraktál spektrumának (illetve annak egy részének) meghatározására is. A módszert használva meghatároztam a DLA $f(\alpha)$ multifraktál spektrumát kis α (vagyis $q \gtrsim 1$) értékekre [S7]. Az így kapott görbe nagyobb pontossággal kielégíti a Makarov tételt valamint Halsey elektrosztatikus skálázási törvényét mint a korábbi eredmények.

- T4. Nagy skálájú numerikus szimulációval megmutattam, hogy a diffúzió-limitált aggregáció fraktál dimenziója csatorna geometriában mérési hibán belül megegyezik a nyílt sík geometriában mért értékkel [S8].

Megmutattam továbbá, hogy a DLA fűrteinek konform leképezés alapján kiátlagolt alakja bár hasonlít, de nem egyezik meg a kis felületi feszültség alapján kiválasztott Saffman-Taylor megoldások alakjával sem csatorna geometriában [S8], sem 90° -os ék geometriában [S9]. Ez azt jelenti, hogy általánosságban nem igaz, hogy a diffúzió-dominált növekedés stochasztikus, zajos megoldásainak átlaga megegyezne a zaj nélküli egyenletek determinisztikus megoldásával.

- T5. Megmutattuk, hogy a lokálisan skálainvariáns struktúráknak egy nagy osztályára a radiális (vagy általánosan növekedő geometriában történő) növekedést le lehet képezni fix szélességű tartományban történő növekedésre [S10]. A leképezés előnye, hogy a fix szélességű tartományban történő növekedés numerikusan is és analitikusan is sokkal könnyebben kezelhető. Az egyik legfontosabb eredmény, hogy a skálainvariáns struktúrák egy jelentős részére a radiális növekedés aszimptotikus (végtelen időben történő) viselkedése a fix szélességű geometriában egy jól meghatározott, véges időnek felel meg, ami nagyban leegyszerűsíti a megközelítést.

- T6. Molekuladinamika szimulációim segítségével megmutattuk, hogy a szemcsés anyagok statikus erőhálózata skálainvariáns: a relatívan erős kontaktusokkal összekötött részecskefürtök skálázási tulajdonságokat mutatnak. Számos paraméter változtatása ellenére (nyomás, erőtvény, polidiszperzitás, súrlódás) a skálázási exponensek és a skálázási függvény azonos marad, ami így egy univerzalitási osztályt definiál [S11]. A mechanikai egyensúlyt kielégítő Edwards sokaság ebben az univerzalitási osztályban van, bizonyos egyszerűsített szemcsés modellek viszont nem.
- T7. Molekuladinamika szimulációim alapján megmutattuk, hogy a súrlódó rugalmas gömbökből álló szemcsés konfigurációk a súrlódásmentes esethez hasonlóan kritikusan viselkednek, és skálázási tulajdonságokat mutatnak, ha a koordinációs szám megközelíti az izosztatikus értéket. A rendszer tulajdonságait, mint például az anomális állapot-sűrűség spektrumot valamint a nyírási és térfogati rugalmassági modulus hányadosát egy paraméterrel, a koordinációs szám izosztatikus értéktől való eltéréssel jellemezhetjük. [S12] A súrlódásmentes esettel ellentétben viszont az izosztatikus állapot nem következik be automatikusan az alacsony nyomás limeszében, hanem csak akkor, ha (tipikus preparációs protokoll esetén) a súrlódási együttható nagyon nagy.
- T8. Különböző szemcsés konfigurációkban vizsgáltam impulzusok terjedését. Két dimenziós rendezetlen rendszerben numerikus szimulációimban azt tapasztaltam, hogy az impulzusra adott válasz lineárisan terjed időben, és nem az erőláncokat követi. A válaszjelet, ugyanúgy mint hasonló kísérletekben, egy kezdeti koherens részre és az azt követő zajos részre lehetett bontani. A válaszjel koherens részét vizsgálva numerikusan megmutattam, hogy a jel amplitúdója és szélessége skálázódik a megtett távolsággal. Azon kezdeti feltétel esetén, amikor az egyik fallal érintkező golyók véges kezdősebességgel indulnak, az amplitúdó exponense közelítőleg 1.5-nek adódott a két dimenziós rendezetlen rendszerre, a jel szélességének exponense pedig közelítőleg 1. Megmértem a repülési időből számolt hangsebesség nyomásfüggését, amely a vizsgált nyomástartományban $p^{1/6}$ szerint skálázódott. [S13]
- A kapott eredményeket összevetettem kísérleti eredményekkel, valamint az egyforma golyókból álló egy dimenziós lánc, és a két dimenziós háromszögrács esetével, amelyekben az exponensek, sőt a hullám függvényalakja is analitikusan kiszámítható.

4. A TÉZISPONTOKHOZ KAPCSOLÓDÓ SAJÁT TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

- [S1] van Gastel R, Somfai E, van Saarloos W, Frenken JWM:
A giant atomic slide-puzzle - Atoms crammed tightly together in metal crystal surfaces are surprisingly mobile
Nature **408**, 665-665 (2000) [37 független hivatkozás]
- [S2] van Gastel R, Somfai E, van Albada SB, van Saarloos W, Frenken JWM:
Nothing moves a surface: Vacancy mediated surface diffusion
Phys. Rev. Lett. **86**, 1562-1565 (2001) [93 független hivatkozás]
- [S3] Somfai E, van Gastel R, van Albada SB, van Saarloos W, Frenken JWM:
Vacancy diffusion in the Cu(001) surface II: Random walk theory
Surf. Sci. **521**, 26-33 (2002) [14 független hivatkozás]
- [S4] van Gastel R, Somfai E, van Albada SB, van Saarloos W, Frenken JWM:
Vacancy diffusion in the Cu(001) surface I: an STM study
Surf. Sci. **521**, 10-25 (2002) [31 független hivatkozás]
- [S5] Ball RC, Bowler NE, Sander LM, Somfai E:
Off-lattice noise reduction and the ultimate scaling of diffusion-limited aggregation in two dimensions
Phys. Rev. E **66**, 026109 (2002) [8 független hivatkozás]
- [S6] Somfai E, Ball RC, Bowler NE, Sander LM:
Correction to scaling analysis of diffusion-limited aggregation
Physica A **325**, 19-25 (2003) [7 független hivatkozás]
- [S7] Somfai E, Goold NR, Ball RC, DeVita JP, Sander LM:
Growth by random walker sampling and scaling of the dielectric breakdown model
Phys. Rev. E **70**, 051403 (2004) [0 független hivatkozás]
- [S8] Somfai E, Ball RC, DeVita JP, Sander LM:
Diffusion-limited aggregation in channel geometry
Phys. Rev. E **68**, 020401 (2003) [10 független hivatkozás]
- [S9] Sander LM, Somfai E:
Random walks, diffusion limited aggregation in a wedge, and average conformal maps
Chaos **15**, 026109 (2005) [5 független hivatkozás]
- [S10] Ali A, Grosskinsky S, Ball RC, Somfai E:
Scale-invariant growth processes in expanding space
Phys. Rev. E **87**, 020102(R) (2013) [1 független hivatkozás]

- [S11] Ostojic S, Somfai E, Nienhuis B :
Scale invariance and universality of force networks in static granular matter
Nature **439**, 828-830 (2006) [67 független hivatkozás]
- [S12] Somfai E, van Hecke M, Ellenbroek WG, Shundyak K, van Saarloos W :
Critical and noncritical jamming of frictional grains
Phys. Rev. E **75**, 020301 (2007) [65 független hivatkozás]
- [S13] Somfai E, Roux JN, Snoeijer JH, van Hecke M, van Saarloos W :
Elastic wave propagation in confined granular systems
Phys. Rev. E **72**, 021301 (2005) [39 független hivatkozás]

5. AZ ÉRTEKEZÉS TÉMÁJÁHOZ KAPCSOLÓDÓ EGYÉB PUBLIKÁCIÓS TEVÉKENYSÉG

A. Referált folyóiratcikkek nemzetközi folyóiratban

- [E1] Frenken JWM, van Gastel R, van Albada SB, Somfai E, van Saarloos W: *Diffusion in a surface: the atomic slide puzzle*; Appl. Phys. A-Mater. Sci. Process. **75**, 11-15 (2002)
- [E2] Ball RC, Somfai E: *Theory of diffusion controlled growth*; Phys. Rev. Lett. **89**, 135503 (2002)
- [E3] Ball RC, Somfai E: *Diffusion-controlled growth: Theory and closure approximations*; Phys. Rev. E **67**, 021401 (2003)
- [E4] Goold NR, Somfai E, Ball RC: *Anisotropic diffusion limited aggregation in three dimensions: Universality and nonuniversality*; Phys. Rev. E **72**, 031403 (2005)
- [E5] Snoeijer JH, van Hecke M, Somfai E, van Saarloos W: *Force and weight distributions in granular media: Effects of contact geometry*; Phys. Rev. E **67**, 030302 (2003)
- [E6] Snoeijer JH, van Hecke M, Somfai E, van Saarloos W: *Packing geometry and statistics of force networks in granular media*; Phys. Rev. E **70**, 011301 (2004)
- [E7] Ellenbroek WG, Somfai E, van Hecke M, van Saarloos W: *Critical scaling in linear response of frictionless granular packings near jamming*; Phys. Rev. Lett. **97**, 258001 (2006)
- [E8] Somfai E, Morozov AN, van Saarloos W: *Modeling viscoelastic flow with discrete methods*; Physica A **362**, 93-97 (2006)
- [E9] van de Meent JW, Morozov A, Somfai E, Sultan E, van Saarloos W: *Coherent structures in dissipative particle dynamics simulations of the transition to turbulence in compressible shear flows*; Phys. Rev. E **78**, 015701 (2008)
- [E10] Adams DA, Sander LM, Somfai E, Ziff RM: *The harmonic measure of diffusion-limited aggregates including rare events*; EPL **87**, 20001 (2009)
- [E11] Sultan E, van de Meent JW, Somfai E, Morozov AN, van Saarloos W: *Polymer rheology simulations at the meso- and macroscopic scale*; EPL **90**, 64002 (2010)
- [E12] Börzsönyi T, Szabó B, Törös G, Wegner S, Török J, Somfai E, Bien T, Stannarius R: *Orientational Order and Alignment of Elongated Particles Induced by Shear*; Phys. Rev. Lett. **108**, 228302 (2012)

- [E13] Börzsönyi T, Szabó B, Wegner S, Harth K, Török J, Somfai E, Bien T, Stannarius R: *Shear-induced alignment and dynamics of elongated granular particles*; Phys. Rev. E **86**, 051304 (2012)
- [E14] Ali A, Somfai E, Grosskinsky S: *Reproduction-time statistics and segregation patterns in growing populations*; Phys. Rev. E **85**, 021923 (2012)
- [E15] Ali A, Ball R, Grosskinsky S, Somfai E: *Interacting Particle Systems in Time-Dependent Geometries*; J. Stat. Mech.-Theory Exp., P09006 (2013)
- [E16] Wegner S, Stannarius R, Boese A, Rose G, Szabó B, Somfai E, Börzsönyi T: *Effects of grain shape on packing and dilatancy of sheared granular materials*; Soft Matter **10**, 5157-5167 (2014)
- [E17] Szabó B, Török J, Somfai E, Wegner S, Stannarius R, Böse A, Rose G, Angenstein F, Börzsönyi T: *Evolution of shear zones in granular materials*; Phys. Rev. E **90**, 032205 (2014)

B. Könyvfejezet idegen nyelven

- [E18] van Gastel R, Frenken JWM, Swartzentruber BS, Somfai E, van Saarloos W: *Diffusion of vacancies in metal surfaces: theory and experiment*; in: The Chemical Physics of Solid Surfaces, vol. 11, pp. 351-370 (2003)

C. Konferenciakiadványok idegen nyelven

- [E19] Somfai E, van Saarloos W, Roux JN: *Wave propagation in force chains*; in: Powders and Grains 2001, pp. 117-119 (2001)
- [E20] Ellenbroek WG, Somfai E, van Saarloos W, van Hecke M: *Force response as a probe of the jamming transition*; in: 5th International Conference on the Micromechanics of Granular Media: Powders and Grains 2005, pp. 377-380 (2005)