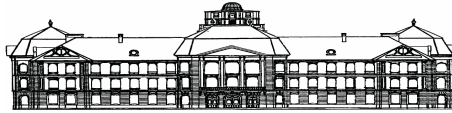


dc_933_14



Eszterházy Károly Főiskola
Matematikai és Informatikai Intézet

Új módszerek a görbék és felületek számítógéppel segített geometriai modellezésében

MTA doktori értekezés tézisei

Hoffmann Miklós

Eger, 2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Új eredmények	6
2.1. B-spline és NURBS görbék és felületek csomóértékei . .	6
2.2. Újabb típusú spline görbék vizsgálata	11
2.3. Nem kontoll pont alapú módszerek	17
Irodalomjegyzék	24

1. Bevezetés

A számítógéppel segített geometriai modellezés (Computer Aided Geometric Design, CAGD) alapvető feladata a görbék és felületek tervezésénél felmerülő matematikai, legtöbbször geometriai problémák megoldása, illetve az ehhez a tervezéshez megfelelő tulajdonságokkal rendelkező görbe- és felülettípusok keresése, vizsgálata. Miközben a kérdéskör természetszerűen kötődik az iparban felmerülő tervezési problémákhoz, az utóbbi 50 év alatt az alkalmazásokon túl önmagában is érdekes matematikai kutatási területté nőtte ki magát. A disszertációban és az alábbiakban olyan problémaköröket vizsgálunk, melyek valamilyen módon az előbb említett területhez köthetők.

A geometriai modellezésben elég korán, a hatvanas évek elejétől kialakult az a döntően máig érvényes paradigma, hogy a tervezésben használt görbetípusokat a tervező által szabadon megválasztott $\mathbf{p}_i$ alapponatok (úgynevezett kontroll pontok) és megfelelően választott $N_i(u)$ alapfüggvények lineáris (affin) kombinációjaként előálló

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^n N_i(u) \mathbf{p}_i \quad u \in [0, 1]$$

paraméteres görbeként állítjuk elő (a téma részletes, részben történeti áttekintéséhez lásd [50]). Bár más elvet követő görbe- és felületleírások is jelen vannak a területen, a szoftverek döntő többsége ilyen görbéket alkalmaz. A görbe típusa (pl. Bézier görbe, B-spline görbe stb.) a választott alapfüggvényektől függ - ezek a kutatások kezdetén, a hatvanas években, részben a számítógépek limitált képességei miatt alacsony fokszámú polinomok voltak.

Az első, széles körben elterjedt módszer a P. Bézier és P. de Casteljau által egymástól függetlenül definiált görbe volt [8], amely a ponto-

kat az úgynevezett Bernstein polinomokkal kombinálta. Mivel az $N_i(u)$ polinomoknak bázist kell alkotniuk az adott fokszámú polinomok terében, így a kontroll pontok számának növekedésével a fokszám is nő. Ezt a problémát küszöböli ki a B-spline görbe [57], ahol a teljes görbét folytonosan kapcsolódó ívekből rakjuk össze, így sok kontroll pontra is alacsony fokszámú polinomokkal dolgozhatunk. A B-spline (és ennek racionális általánosítása, a NURBS) görbe alapfüggvényei rekurzívan definiált függvények, a teljes $[0,1]$ értelmezési tartományt pedig az ívenkénti definiálás miatt osztáspontokkal (úgynevezett csomóértékekkel) részekre kell osztanunk. Ezt megtehetjük ekvidisztáns módon, de másképp is - ekkor azonban kérdésként merül föl, hogy a csomóértékek megválasztása hogyan hat a görbe alakjára.

A 70-es évek végétől sokan foglalkoztak a csomóértékek kérdésével, C. de Boor [7], W. Böhm [5, 6], G. Farin [14], T. Lyche [44] és mások, de a csomóértékek megváltoztatásának geometriai hatásáról még 1995-ben is így ír a szakterület egyik legalapvetőbb monográfiája [50]: "...habár a csomóértékek szintén hatással vannak a görbe alakjára, ennek a hatásnak a leírása nem ismert, sem geometriailag intuitív, sem matematikailag egyszerű formában." Kutatásaink során ezt a problémát megoldottuk. A csomóérték változtatásának a B-spline és NURBS görbe alakjára tett hatását, illetve ennek felületekre történő általánosítását dolgoztuk ki a [19], [23], [24], [35], [36], [37] cikkekben, amit a disszertáció 1. fejezetében ismertetünk, illetve jelen téziszfüzet 2.1. fejezetében foglalunk össze. Ezen eredmények egy része elméleti jellegű, míg mások lehetővé tették praktikus alakváltoztató algoritmusok kidolgozását.

A jelenleg használatos tervező szoftverekben, rajzoló programokban a B-spline és NURBS görbék a meghatározó típusok, a szoftverek döntő többsége a 90-es évektől NURBS formában tárolja a geometriai objektumokat. Matematikai szempontból ugyanakkor nem elképzelhetet-

len olyan görbetípus, mely ugyanolyan jó tulajdonságokkal rendelkezik, mint az eddig említett polinomiális alapfüggvényű görbék, ugyanakkor további előnyei lehetnek, pl. alakparaméterek beiktatásával nagyobb rugalmasságot biztosít, vagy egzakt módon tud reprezentálni az előbbieket által csak közelítő módon megadható görbéket. Az ilyen görbetípusok keresése, vizsgálata a 90-es évek második felétől, illetve a 2000-es évektől lendült föl, többek között Zhang [67, 68], Chen [9], Mainar és Pena [46, 47] és Pottmann [52] cikkei nyomán. Ezek a kutatások egyelőre elméleti jelentőségűek, mégis fontos lépést jelenthetnek egy újabb, a jövő szoftvereiben megjelenő görbereprezentáció kidolgozása szempontjából.

Ezeknek a görbéknek jellemzője, hogy az eddig használt alapfüggvényekbe a görbe alakját befolyásoló paramétereket illesztünk, vagy a polinomiális függvények mellett, helyett más (bővebb) függvényterekből vesszük az alapfüggvényeket. A leggyakrabban használt köbös görbék alapfüggvényei helyett, melyek az $\langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ tér valamely bázisát alkotják, tekinthetjük például az $\langle 1, t, \sin t, \cos t \rangle$ teret, illetve annak egy megfelelő bázisát. Így kapjuk az egyik legismertebb trigonometrikus spline görbét, a C-Bézier görbét.

Alapvető fontosságú, hogy ezeknek az új görbéknek a geometriai tulajdonságait megismerjük. Az alakparaméter hatását több görbénél vizsgáltuk geometriai szempontból a [25], [26], [29], [43] és [62] cikkekben. Mi magunk definiáltunk új görbe- és felülettípust [55]-ben és [30]-ban. Alakparaméterrel rendelkező spline görbék egy-egy nagyobb osztályára vizsgáltunk interpolációs problémát [27]-ben és [28]-ban. Ezeket az eredményeinket tartalmazza a disszertáció 2. fejezete, illetve foglalja össze jelen tézisfüzet 2.2 fejezete.

A fenti görbék és felületek mindegyike definiáló geometriai adatként kontroll pontok rendezett halmazát, azaz görbe esetén pontsorozatot, felület esetén négyzetes pontrácsot kíván meg. Ilyen adatok rendelkezés-

re állnak akkor, ha mi magunk hozzuk létre a geometriai objektumot. Ha azonban a görbének, illetve felületnek már meglévő, más jellegű geometriai adatokat kell modelleznie, akkor az első lépés az kell, hogy legyen, hogy ezekből az input adatokból valamilyen előfeldolgozás során a kívánt kontroll pontokat előállítjuk, hogy aztán a standard módon leírassuk a spline görbét, illetve felületet.

Az egyik legfontosabb probléma ebben a témakörben az az eset, amikor rendezetlen adatokra, azaz nagy számú, egymáshoz képest ismeretlen elhelyezkedésű pontból álló pontthalmazra kell felületet felfeszíteni. Ez a téma különösen aktuálissá vált a térbeli szkennerek megjelenésével, melyek éppen ilyen típusú adatokat szolgáltatnak a szkennelt felületről. A szerteágazó problémakör egy megoldási lehetőségét adtuk a pontthalmaz mesterséges intelligencia eszközökkel való "megtanításával", azaz egy előre definiált pontrácsnak az input pontokra neurális hálóval történő felfeszítésével, mely végül rendezett ponthálót eredményez. A módszer nagy előnye, hogy a pontthalmaz méretétől független a pontrács mérete, nem kell minden input pontot felhasználnunk a feldolgozás során. Az eljárást Kohonen neurális hálózat, illetve ennek dinamikus változata segítségével írtuk le a [17], [18], [20], [22], [63] cikkekben.

Egy alternatívája a kontroll pont alapú görbe- és felületmodellezésnek az animációs szoftverekben az utóbbi időben megjelent módszer, melyben adott körök, illetve gömbök segítségével, azok burkolójaként definiáljuk a görbét, illetve a felületet. A módszer azon alapszik, hogy pontok helyett egy körsorozat (gömbsorozat) adott, a cél pedig ezek burkolása valamilyen standard görbét (felületet) előállító módszerrel. A problémának az animációk tervezésén túl egyéb alkalmazásai is vannak, mint pl. orvosi képdiagnosztika, lefedési problémák stb. Erre a problémára az [1] és [41] cikkekben olyan megoldást mutattunk, amely a létező, iteratív módszerekkel ellentétben valós idejű, stabil számolással

szélsőséges input adatokra is megfelelő burkoló görbét, illetve felületet szolgáltat (2.1 ábra). Ezeket az eredményeket ismertetjük a disszertáció 3. fejezetében és a tézislevelek 2.3. fejezetében.

2. Új eredmények

2.1. B-spline és NURBS görbék és felületek csomóértékei

A disszertáció első fejezetében a jelenleg legelterjedtebb (ipari szabványként is megjelenő) görbetípussal, a B-spline görbével és annak racionális általánosításával, a NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) görbével kapcsolatos eredményeinket tárgyaljuk. A B-spline alapfüggvények definíciója a következő [50]:

2.1. definíció. Az $N_j^k(u) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ rekurzív függvényt, melynek előállítása:

$$N_j^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u \in [u_j, u_{j+1}), \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$N_j^k(u) = \frac{u - u_j}{u_{j+k-1} - u_j} N_j^{k-1}(u) + \frac{u_{j+k} - u}{u_{j+k} - u_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(u),$$

$k - 1$ -edfokú (k -adrendű) normalizált B-spline alapfüggvénynek nevezzük. Az $u_j \leq u_{j+1} \in \mathbb{R}$ számokat, melyek az értelmezési tartomány osztópontjai, csomóértékeknek nevezzük.

2.2. definíció. Az $s(u)$, k -adrendű B-spline görbe

$$s(u) = \sum_{i=0}^n N_i^k(u) \mathbf{p}_i, \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

ahol $N_i^k(u)$ az i -edik normalizált B-spline alapfüggvény, a $\mathbf{p}_i$ pontok pedig a kontroll pontok. A görbe j -edik ívét $\mathbf{s}_j(u)$ -val jelöljük.

Evidens, hogy a görbe bármely definiáló adatának megváltoztatása hatással van a görbe alakjára is. A B-spline görbe esetén ezek a definiáló adatok: a fokszám, a kontroll pontok és a csomóértékek. NURBS görbe esetén ehhez járulnak még a kontroll pontokhoz rendelt súlyok. Míg a kontroll pontoknak, a súlyoknak és a fokszámnak a megváltoztatása jól dokumentált a szakirodalomban, a csomóértékek megváltoztatásának hatásáról, ahogy azt a bevezetőben említettük, nem voltak ismereteink.

Kutatásaink során ezt a hiányosságot pótoltuk. Egy csomóértéknek a B-spline görbe alakjára tett hatását, illetve a görbepontok elmozdulásának pályagörbéjét írtuk le matematikai szempontból az [35], [36] és [21] cikkekben. A fentieknek felületekre történő általánosítását, annak geometriai aspektusait [19]-ben és [24]-ban tárgyaltuk. Kizárólag csomóértékek megváltoztatásával elért kényszeres (előírt geometriai feltételeknek eleget tévő) alakváltoztatást írtunk le görbék esetén [37]-ben, felületek esetén [23]-ban.

Ha az u_i csomóértéket változtatjuk, az alapfüggvények nem csak az u , hanem u_i függvényei is lesznek. Ezt hangsúlyozandó az alapfüggvényeket ekkor $N_i^k(u, u_i)$ -vel, a görbét $\mathbf{s}_i(u, u_i)$ -vel jelöljük. Ha a második változót rögzítjük, akkor a jól ismert alapfüggvényt és görbét kapjuk, ha azonban az első paraméter rögzítjük (azaz $u = \tilde{u}$), akkor az $N_i^k(\tilde{u}, u_i)$ függvény u_i -nek valamilyen racionális függvénye lesz, míg $\mathbf{s}_i(\tilde{u}, u_i)$ úgy interpretálható, mint az eredeti görbe valamely pontjának pályagörbéje a csomóérték változásának függvényében. Precízen megfogalmazva, az u_i értéket változtatva az $\tilde{u} \in [u_j, u_{j+1})$ görbepont az

$$\mathbf{s}_j(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=j-k+1}^j \mathbf{d}_l N_l^k(\tilde{u}, u_i), \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

görbeíven mozog. A függvényről illetve a pályagörbéről beláttuk a következőket:

2.3. lemma. Az $N_{i-k}^k(\tilde{u}, u_i)$ függvények, ahol $\tilde{u} \in [u_{i-m}, u_{i-m+1})$, $(m = 1, \dots, k-1)$, $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$ $k-m$ -edrendű racionális függvényei u_i -nek.

2.4. tétel. Az $\mathbf{s}_{i-m}(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=i-m-k+1}^{i-m} N_l^k(\tilde{u}, u_i) \mathbf{d}_l$, $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$ pályagörbe $\forall \tilde{u} \in [u_{i-m}, u_{i-m+1})$, $(m = 1, \dots, k-1)$ $k-m$ -edrendű racionális görbe,.

2.5. következmény. $m = k-1$ esetén a pályagörbék egyenesek; ha u_i az u_{i-1} és u_{i+1} között fut, akkor a $\mathbf{s}_{i-k+1}(\tilde{u}, u_i)$ görbeív pontjai a kontroll poligon $\mathbf{d}_{i-k}, \mathbf{d}_{i-k+1}$ oldalával párhuzamosan mozognak.

Analóg állítások igazak az u_i utáni görbepontok pályagörbéire.

Az u_i csomóérték változtatásával létrejön az

$$\mathbf{s}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

egyparaméteres B-spline görbesereg. $k = 3$ esetén ismert, hogy ezek parabolaívek, melyeknek a csomóértéknél vett érintőjük egybeesik a kontroll poligon oldalával, másképpen fogalmazva a kontroll poligon oldala burkolója a görbeseregnek. A következő tételben ezt az eredményt általánosítottuk tetszőleges k -ra.

2.6. tétel. A k -adrendű B-spline görbékéből álló

$$\mathbf{s}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

görbeseregnek $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1})$, $k > 2$ esetén létezik burkolója. A burkoló szintén B-spline görbe, melynek rendje $(k-1)$ és a következő formában

írható:

$$\mathbf{b}(v) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-1}(v), \quad v \in [v_{i-1}, v_i],$$

ahol $v_j = \begin{cases} u_j & \text{ha } j < i \\ u_{j+1} & \text{ha } j \geq i \end{cases}$, azaz az i -edik csomóértéket eltávolítjuk az eredeti görbe (u_j) csomóértékei közül.

Végül beláttuk, hogy ez a burkoló az egyes görbepontok pályagörbéiből álló görbeseregnek is burkolója.

2.7. tétel. *A fenti $\mathbf{b}(v)$ burkoló a $\mathbf{s}_i(\tilde{u}, u_i)$ pályagörbéknek is burkolója, $u = u_i$ érintési ponttal.*

A pályagörbék a csomóérték változásának kis intervalluma miatt geometriailag nehezen vizsgálhatók, ezért kiterjesztettük az értelmezési tartományukat úgy, hogy a változó u_i csomóérték az eddigi $[u_{i-1}, u_{i+1}]$ határokon túl is mehet. Ekkor beláttuk a következő tételt.

2.8. tétel. *Az u_i m -szeres csomóértéket változtatva a szomszédos csomóértékek között, az $\mathbf{s}_{i-1}(u), \dots, \mathbf{s}_{i+m-1}(u)$ görbeív kiterjesztett pályagörbéi határértékben eléri a megfelelő kontroll pontokat, azaz*

$$\lim_{u_i \rightarrow -\infty} \mathbf{s}_{i+j}(u, u_i) = \mathbf{d}_{i+m-1}, \quad \lim_{u_i \rightarrow \infty} \mathbf{s}_{i+j}(u, u_i) = \mathbf{d}_{i-k},$$

$$(j = -1, 0, \dots, m-1), \quad \forall u \in [u_{i+j}, u_{i+j+1}].$$

Beláttunk továbbá egy összefüggést a burkolónak és a B-spline görbesereg tagjainak magasabb rendű derváltjaival kapcsolatban:

2.9. tétel. *Tekintsük a k -adrendű B-spline görbesereget:*

$$\mathbf{s}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}], \quad k > 2$$

és a burkoló görbét:

$$\mathbf{b}(v) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-1}(v), \quad v \in [v_{i-1}, v_i]$$

mely tehát $k-1$ -edrendű B-spline görbe. Ekkor az $u = v = u_i$ pontban

$$\left. \frac{d^r}{dv^r} \mathbf{b}(v) \right|_{v=u_i} = \frac{k-1-r}{k-1} \left. \frac{d^r}{du^r} \mathbf{s}(u, u_i) \right|_{u=u_i}, \quad r \geq 0.$$

Végül állításaink következményeként a következő összefüggést bizonyítottuk.

2.10. következmény. $k > 3$ esetén a $\mathbf{b}(v)$ burkoló és a $\mathbf{s}(u, u_i)$ görbesereg tagjainak az $u = v = u_i$ pontban közös a simulósíkjuk, míg görbületükre az érintési pontban

$$\kappa_b = \frac{(k-1)(k-m-2)}{(k-2)(k-m-1)} \kappa_s \quad (2.1)$$

igaz, ahol m a csomóérték multiplicitása.

[37]-ben az előbbi elméleti eredmények felhasználásával olyan módszereket adtunk meg, melyek lehetővé teszik a görbe alakjának előre definiált változtatását (pl. menjen át egy adott ponton) csupán az osztáspontok változtatásának segítségével - ez eddig nem volt lehetséges, a B-spline görbe alakját korábban kizárólag a kontroll pontok módosításával, illetve NURBS görbe esetén a súlyok megváltoztatásával lehetett elérni [50]. Az eredményeket főként a görbék "finomhangolásánál", azaz az alakjuk végső finomításánál használják azóta, hiszen míg a kontroll pontok kismértékű megváltoztatása is nemkívánatos módon befolyásolhatja a görbe konvexitását, addig a csomóértékek változtatásával (a kontroll pontok változatlanul hagyása mellett) az eredeti konvexitási

viszonyok csak nagyon szélsőséges helyzetben változhatnak meg. A csomóértékekkel történő alakváltoztatás akkor is hasznos, ha a görbét egy rögzített területen belül akarjuk tartani, ugyanis a csomóértékek változtatásakor a görbe a kontroll pontok konvex burkán belül marad.

A leggyakrabban használt, harmadfokú polinomokkal definiált B-spline és NURBS görbékre például a következő problémákat vizsgáltuk:

- A B-spline görbe csomóértékeinek módosítása úgy, hogy a görbe menjen át egy előre adott ponton
- A NURBS görbe csomóértékeinek módosítása úgy, hogy a görbe menjen át egy előre adott ponton
- A NURBS görbe két súlyának és egy csomóértékének módosítása, ennek hatása

Olyan eseteket mutattunk be, ahol a csomóértékekkel való változtatás a görbe görbületi viszonyainak szempontjából előnyösebb a kontroll pontok által történő változtatásnál, pl. adott pontra való illesztésnél a kontroll ponttal történő változtatás az eredetileg konvex görbén két inflexiós pontot eredményez, míg a csomóértékkel való változtatás ezt elkerüli (disszertáció 1.7. ábra).

A fenti eredményeinket B-spline és NURBS felületekre is általánosítottuk [19], [24].

2.2. Újabb típusú spline görbék vizsgálata

Ahogy azt a bevezetőben említettük, a jelenleg használatos tervező szoftverekben a B-spline és NURBS görbék a standard görbeleíró módszerek. Az újabb görbéket leíró tudományos munkáknak fontos jellemzője, hogy vagy alakparamétereket illesztenek az alapfüggvényekbe, vagy az eddig használt polinomiális függvények helyett más függvényterekből

veszik az alapfüggvényeket. A disszertáció 2. fejezetében ilyen görbékkel kapcsolatos eredményeket ismertetünk.

Az egyik legelső ilyen görbetípus az $\langle 1, t, \sin t, \cos t \rangle$ teret, illetve annak egy megfelelő bázisát használó C-Bézier és C-B-spline görbe [67],[68].

2.11. definíció. [67] Tekintsük a következő függvényeket:

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha = \pi, \\ \frac{\sin(\alpha)}{\alpha - 2 \frac{\alpha - \sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)}} & \text{egyébként} \end{cases} \\
 Z_0(t, \alpha) &= \frac{(\alpha - t) - \sin(\alpha - t)}{\alpha - \sin(\alpha)} \\
 Z_1(t, \alpha) &= M \left(\frac{1 - \cos(\alpha - t)}{1 - \cos(\alpha)} - \frac{(\alpha - t) - \sin(\alpha - t)}{\alpha - \sin(\alpha)} \right) \\
 Z_2(t, \alpha) &= M \left(\frac{1 - \cos(t)}{1 - \cos(\alpha)} - \frac{t - \sin(t)}{\alpha - \sin(\alpha)} \right) \\
 Z_3(t, \alpha) &= \frac{t - \sin(t)}{\alpha - \sin(\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ekkor a

$$\mathbf{b}(t, \alpha) = \sum_{i=0}^3 Z_i(t, \alpha) \mathbf{p}_i, \quad t \in [0, \alpha], \alpha \in (0, \pi]$$

görbét C-Bézier görbének nevezzük.

A fenti görbének α az alakparamétere, de azt, hogy ennek az alakparaméternek a megváltoztatása milyen hatással van a görbére, a definiáló cikkek nem vizsgálják. Az alakparaméter hatását [25]-ben leírtuk, kényszeres (előre megadott geometriai feltételt teljesítő) alakmódosító algoritmusokkal egyetemben. Az eredményhez vezető ötletünk az volt, hogy mivel az α alakparaméter egyben az értelmezési tartomány felső hatá-

ra, így a rögzített paraméterértékű pont vizsgálata itt értelmét veszti, helyett az α/c értékhez tartozó pontot vizsgáltuk, ahol $c \in [1, \infty)$.

Hasonló vizsgálatokat végeztünk számos más, újabb görbetípus esetén is, ahol tehát a fő kérdés az volt, hogy az alapfüggvényekben szereplő paraméter(ek) megváltoztatása milyen hatással lesz a görbe alakjára, illetve hogyan használható ez a hatás kontrollált alakmódosításra. Ilyen szempontból vizsgáltunk GB-spline görbéket [43]-ben, FB-spline görbéket [26]-ban, illetve további, Xuli Han által definiált görbetípusokat [29]-ben és [62]-ben. Ezen eredmények lehetővé teszik, hogy az új görbetípusokkal a B-spline görbénél megszokott alakmódosítások mellett újabb, előre meghatározott geometriai feltételeknek megfelelő változtatásokat végezzünk az alakparaméterek segítségével.

Több cikkünkben mi definiáltunk új görbeosztályt, ebből itt részletesen egyet mutatunk be, melyet [30]-ban, egy korábbi speciális Han-féle görbe alapján [16] definiáltunk, ami a Bézier görbe egyfajta általánosítása. Az eredeti, Han-féle görbe definíciója:

2.12. definíció. Ha adottak a $\mathbf{p}_i$ kontroll pontok, akkor az $\alpha, \beta \in [2, \infty)$ alakparaméterekkel megadott

$$\mathbf{c}(t, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^4 T_i(t, \alpha, \beta) \mathbf{p}_i \quad \text{for } t \in [0, \pi/2],$$

görbét, ahol

$$T_0(t, \alpha, \beta) = (1 - \sin t)^\alpha$$

$$T_1(t, \alpha, \beta) = \alpha \sin t (1 - \sin t)^{\alpha-1}$$

$$T_3(t, \alpha, \beta) = \beta \cos t (1 - \cos t)^{\beta-1}$$

$$T_4(t, \alpha, \beta) = (1 - \cos t)^\beta$$

$$T_2(t, \alpha, \beta) = 1 - \sum_{i \neq 2} T_i(t, \alpha, \beta).$$

trigonometrikus Bézier görbének nevezzük.

Mivel a görbe csak 4 kontroll pontra értelmezett, egyik célunk az volt, hogy ezt tetszőleges számú kontroll pontra általánosítsuk. Másrészt az eredeti függvényekben szereplő $\sin t, \cos t$ függvenypárra igaz, hogy $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, amit a $\varphi(t), \psi(t)$ függvényekkel helyettesítünk, amikre $\varphi^{n_1}(t) + \psi^{n_2}(t) = 1$ igaz, ahol n_1, n_2 természetes számok.

Legyen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ két bijektív függvény, az egyik növekvő, a másik csökkenő, úgy, hogy

$$\varphi^{n_1}(t) + \psi^{n_2}(t) = 1$$

minden $t \in [a, b]$ -ra igaz legyen. valamint

$$\varphi(a) = \psi(b) = 0, \quad \varphi(b) = \psi(a) = 1,$$

teljesüljön és mindkét függvény folytonos legyen. Ekkor Newton általános binomiális tételéből, feltéve, hogy $\varphi(t) < 1/2$, következik, hogy

$$1 = (\varphi(t) + (1 - \varphi(t)))^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^k(t) (1 - \varphi(t))^{\alpha-k} \quad (2.3)$$

minden valós α esetén, ahol

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} (\alpha - m) = \frac{(\alpha - k + 1)_k}{k!},$$

(a Pochhammer szimbólumot használva, azaz $(x)_k = x(x+1)\dots(x+k-1)$). Rögzítsük $\alpha \in [n_1, \infty)$ és $\beta \in [n_2, \infty)$ értékét és a fentiek alapján definiáljuk az

$$L_i(t, \alpha) = \binom{\alpha}{i} \varphi^i(t) (1 - \varphi(t))^{\alpha-i}$$

és

$$R_{n_1+n_2-j}(t, \beta) = \binom{\beta}{j} \psi^j(t) (1 - \psi(t))^{\beta-j}$$

függvényeket, $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$ és $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$.

2.13. definíció. Legyen adott a fenti függvények segítségével definiált $n_1 + n_2 + 1$ függvényből álló rendszer

$$T_j(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} L_j(t, \alpha) & \text{for } 0 \leq j \leq n_1 - 1, \\ R_j(t, \beta) & \text{for } n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2, \\ 1 - \sum_{i \neq n_1} T_i(t, \alpha, \beta) & \text{for } j = n_1 \end{cases}$$

és a $\mathbf{p}_i$ kontroll pontok. Ekkor az általánosított görbe

$$\mathbf{c}(t, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{n_1+n_2} T_i(t, \alpha, \beta) \mathbf{p}_i \quad t \in [a, b]$$

ahol $\alpha \in [n_1, \infty)$ és $\beta \in [n_2, \infty)$ globális alakparaméterek.

A fenti, általánosított görbéről [30]-ban beláttuk, hogy rendelkezik mindazokkal a tulajdonságokkal, amikkel az eredeti görbe, valamint különböző paraméterezéseket is vizsgáltunk.

Szintén mi magunk definiáltunk egy új görbe- és felületosztályt [55]-ben, ahol az $\langle 1, \cos t, \sin t, \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$ térből vett bázist használtuk, és beláttuk, hogy a görbe rendelkezik a B-spline görbénél megszokott tulajdonságokkal.

[29]-ben több hasonló, alakparaméterrel rendelkező görbetípust tudunk egységes keretben leírni: beláttuk, hogy számos új görbetípus, amelyek alapfüggvényei valamilyen λ alakparamétert tartalmaznak, felírható az eredeti $\mathbf{s}(u)$ B-spline görbe és valamely más,

$$\mathbf{l}(u) = \sum_{j=0}^m G_j(u) \mathbf{g}_j$$

polinomiális görbe konvex kombinációjaként:

$$\mathbf{c}(\lambda, u) = q(\lambda)\mathbf{l}(u) + (1 - q(\lambda)) \mathbf{s}(u).$$

Az $\mathbf{l}(u)$ görbe megfelelő választásával számos ismert görbe, a Han-féle kvadratikus görbe, az α B-spline, a GB-spline görbe, az SPB-spline görbe leírható. Az egységes szemléletmód segítségével a cikkben leírtuk ezen görbék viselkedését az alakparaméter változásának függvényében, azaz megadtuk, hogy ha az alakparaméter változik, akkor a görbe egy rögzített pontja milyen pályagörbét ír le. Ennek felhasználásával olyan algoritmust dolgoztunk ki, amelynek segítségével a görbe előre meghatározott alakmódosítása kizárólag az alakparaméter segítségével - a kontroll pont mozgatása nélkül - történik. A B-spline görbénél leírtakhoz hasonlóan ilyen módszer eddig nem létezett, a módosítást korábban mindig a kontroll pont elmozgatásával érték el, illetve az alakparaméter geometriai hatása nem volt dokumentált. Az adott görbetípusokra érvényes fenti eredményeink mellett az ebben az alfejezetben említett vizsgálati módszereinket később több más görbetípusnál alkalmazták sikerrel, az utóbbi évek egyik legfontosabb monográfiája [56] is hivatkozik rá.

Végül alakparaméterrel rendelkező spline görbék egy nagy osztályára oldottunk meg interpolációs problémát [27]-ben, míg az interpoláló

görbék paraméterezésének geometriai aspektusait vizsgáltuk szintén egy nagyobb görbeosztályra [28]-ban.

2.3. Nem kontroll pont alapú módszerek

A disszertáció harmadik fejezetében olyan eredményeket tárgyalunk, ahol a definiáló adatok nem az eddig megszokott rendezett kontroll pontok.

Az egyik legfontosabb probléma ebben a témakörben az az eset, amikor rendezetlen adatokra, azaz nagy számú, egymáshoz képest ismeretlen elhelyezkedésű pontból álló ponthalmazra kell felületet felfeszíteni. Ez a téma különösen aktuálissá vált a térbeli szkennerek megjelenésével, melyek éppen ilyen típusú adatokat szolgáltatnak a szkennelt felületről. A szerteágazó problémakör egy megoldási lehetőségét adtuk a ponthalmaz mesterséges intelligencia eszközökkel való rendezése által, azaz a pontoknak egy mesterséges neurális hálóval történő iteratív megtanításával, mely végül rendezett ponthálót eredményez. Ez a pontháló már kontroll pontok hálójaként használható spline felület előállításához, mely felület vagy approximáló felületként a végeredményt szolgáltatja, vagy alapfelületként szolgál további módszerekhez. Az eljárást Kohonen neurális hálózat, illetve ennek dinamikus változata segítségével írtuk le [17]-ban, [18]-ban és [63]-ben. A módszert, melyet itt röviden foglalunk össze, numerikus szempontból továbbfejlesztettük [22]-ban.

Ahogy azt korábban láttuk, a B-spline felületet egyértelműen meghatározza a fokszaám, a csomóértékek és a négyzethálós rácsba rendezett kontroll pontok. A felületrekonstrukciós problémánál az input rendezetlen pontok halmaza, így a fenti adatok mind ismeretlenek. Az alapvető stratégia ezek meghatározására, illetve megadására a következő [65]:

1. Rögzítsük a (k, l) fokszaámot, a kontroll pontok számát, valamint

az u_i, v_j csomóértékeket.

2. Rendeljünk hozzá (u_r, v_r) paramétereket minden $\mathbf{p}_r$ input pont-hoz
3. Oldjuk meg a $\mathbf{s}(u_r, v_r) = \mathbf{p}_r$ egyenletrendszert, vagy minimalizáljuk a $\sum_r \|\mathbf{s}(u_r, v_r) - \mathbf{p}_r\|^2$ összeget.

A legproblémásabb rész a 2. lépés, amit az adatok parametrizálásának is nevezünk. Megtehetjük, hogy a paraméterértékeket egy optimalizálási probléma paramétereinek tekintjük, de nagyszámú adat esetén ez sokismeretlenes nemlineáris rendszerhez vezet [64]. Az úgynevezett alapfelület módszernél a pontokat egy előre megadott paraméteres felületre vetítjük, ahonnan a pont a paramétereket öröklí [45], [51]. Kérdés, hogy hogyan lehet olyan alapfelületet megadni, mely jól követi a pont-halmaz struktúráját, miközben előállítása nem igényel jelentős erőforrást.

A mesterséges neurális hálók első alkalmazása ezen a területen a szerző [17], [18], [63] és Yu [66] cikkeiben található. Később ezen az elven alapuló hasonló módszereket fejlesztettek ki Barhak *et. al.* ([3], [4], [40]), Echevarría *et. al.* ([11]), Ivrisimtzis *et. al.* ([32], [33], [34]), Knopf és Sangole ([38]) és mások. A módszer lényege a Kohonen neurális háló öntanuló képességének felhasználása. A Kohonen neurális háló (vagy SOM) két szintű, nem felügyelt tanulású, folytonos értékű neurális háló [39]. Az első szint n darab neuronja összeköttetésben van a második szint m darab neuronjával mindegyikével, mely összeköttetések $w_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ súlyokkal súlyozva vannak - a tanulási folyamat során ezek a súlyok változhatnak.

A neurális hálónak a problémánkra való alkalmazásához legyen az input neuronok száma $n = 3$, azaz az input pontok koordinátáinak a

száma. Az output neuronokat rendezzük négyzethálóba, számuk egyezzen meg a leendő kontroll pontok számával. Mivel az input neuronok mindegyikéből három-három összeköttetés fut az output neuronokhoz, az ezekhez rendelt súlyokat úgy is tekinthetjük, mint egy térbeli pont, $\mathbf{q}_j(w_{1j}, w_{2j}, w_{3j})$ három koordinátáját. Ha ezek a súlyok a tanulási folyamat során változnak, ez magával vonja a térbeli pontok helyének változását, azok rácsba rendezettségét azonban nem rontja el.

Ha a neurális háló input értékei a rendezetlen pontok koordinátái, akkor a tanulási folyamat a megadott rácsot a rendezetlen pontok felé fogja mozgatni, mely a tanulási lépések sorozatán keresztül végül "fel-feszül" a rendezetlen pontfelhőre. A pontos algoritmus a következő [17], [22]:

Input: $\mathbf{p}_r$ rendezetlen pontok (a pontok száma irreleváns)

Output: negyzetrács háló, amely követi a rendezetlen adathalmaz alakját

1. Rögzítsük a hálóban szereplő pontokat, ami egyben az output neuronok száma, m , valamint ezek rácsszerű szomszédsági viszonyait. Az input neuronok száma $n = 3$. Legyen $t = 1$.
2. Inicializáljuk a w_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, m$) súlyokat, azaz a rács $\mathbf{q}_j(w_{1j}, w_{2j}, w_{3j})$ pontjainak térbeli koordinátáit: legyenek ezek véletlen értékek a pontháló centrumának közelében.
3. Válasszunk ki véletlenszerűen egy input pontot, melynek térbeli koordinátái $\mathbf{p}_i(x_1, x_2, x_3)$.
4. Számítsuk ki minden output neuronnál a következő összeget, illetve keressük meg ezek minimumát:

$$d_{\min} = \min \left\{ d_j = \sum_{i=1}^3 (x_i - w_{ij})^2, \quad j = 1, \dots, m \right\}$$

Ezzel megkerestük azt a $\mathbf{q}_{\min}$ pontot a rácsban, amely legközelebb van az input ponthoz. Az ehhez tartozó output neuront "nyerő" neuronnak nevezzük.

5. Keressük meg a "nyerő" neuron szomszédait az $N(t)$ szomszédsági függvény segítségével (időben csökkenő függvény, lásd a disszertációban) és módosítsuk az ezen neuronokhoz tartozó súlyokat:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta(t)(x_i - w_{ij}(t)) \quad (2.4)$$

ahol $\eta(t)$ a gain term-nek nevezett függvény (ez is időben csökkenő függvény, lásd a disszertációban).

6. Legyen $t = t + 1$ és csökkentsük az $\eta(t)$ és $N(t)$ értékét.
7. Vissza a (3) pontra, hacsak a háló nem tanulta meg az inputot. A hálóra akkor mondjuk, hogy megtanulta az input adatokat, ha a rács mozgása (vagy, ami ezzel összefügg, a gain term értéke) alatta marad egy előre definiált konstansnak.

Az algoritmus néhány pontja további magyarázatra szorul. A rács topológiáját mi négyzetesre választottuk a B-spline felület alkalmazása miatt, de háromszög vagy bármilyen más topológia is szóba jöhet, ahogy ez a további fejlesztésekben meg is jelent [66], [33].

Az output neuronoknak, és így a rács pontjainak, a kontroll pontoknak a száma m , előre rögzített érték. Ezt előre becsülni nem egyszerű feladat, amit a Kohonen háló dinamikus verziójának [15] alkalmazásával küszöbölhetünk ki. Az algoritmust úgy módosítottuk, hogy a rácsba újabb neuronok kerülhetnek be ott, ahol a háló nagyon aktív [63].

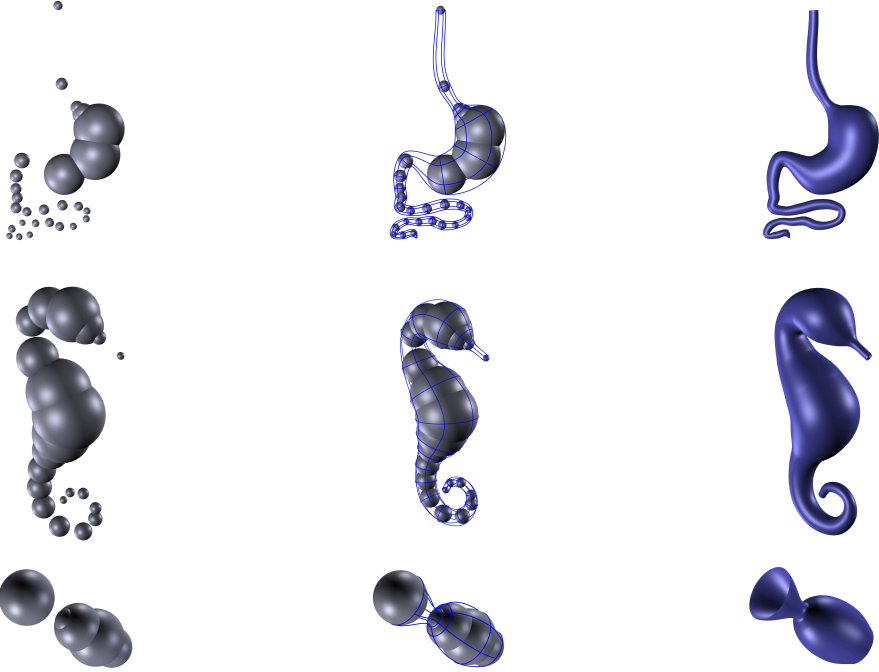
A 2. lépésben a súlyok inicializálása, azaz a rács kiindulási pozíciója nincs igazán hatással a végső alakra, vannak publikációk, ahol ezzel nem is foglalkoznak [32], vagy a miénkhez hasonló módszert alkalmaznak

[38]. Ha plusz információval rendelkezünk a leendő alakról, pl. tudjuk, hogy van határvonala, akkor azt az inicializálásnál felhasználhatjuk (pl. "SOM boundary first" módszer [3]).

A kontroll pont alapú görbe- és felületmodellezésnek egy alternatívája az animációs szoftverekben az utóbbi időben megjelent módszer, melyben adott körök, illetve gömbök segítségével, azok burkolójaként (nem teljesen azonos a hagyományos burkoló fogalommal, angolul: skin) definiáljuk a görbét, illetve a felületet. A módszer azon alapszik, hogy pontok helyett egy körsorozat (gömbsorozat) adott, a cél pedig ezek burkolása valamilyen standard görbét (felületet) előállító módszerrel. A problémának az animációk tervezésében komoly szerep jut [58], [59], [60], [53], [54], sőt külön erre fejlesztett szoftverek is léteznek már, mint a ZSpheres[®] [69] (Pixologic), vagy a Spore[™] [61] (Electronic Arts). Ezen felül a kérdés egyéb alkalmazásokban is felmerül, mint pl. orvosi képdiagnosztika, lefedési problémák, molekula modellezés [10, 12], érhálózat rekonstrukciója [53, 60].

Gömbök burkolásának problémájával Hoschek [31] publikációja óta sokan foglalkoztak, de vagy numerikusan oldották meg a problémát, vagy egyparaméteres gömbsorozatot kívántak meg inputként [13], [49, 48]. Diszkrét gömbökre Slabaugh dolgozott ki módszert [59, 60], ez azonban lassú, iteratív optimalizáláson alapszik, így valós idejű tervezésre, animációra alkalmatlan.

Erre a problémára [41]-ben olyan megoldást mutattunk, mely a létező módszerekkel ellentétben valós idejű, stabil, egzakt számolással szélsőséges input adatokra is megfelelő burkoló görbét, illetve felületet szolgáltat (2.1 ábra).



2.1. ábra. Az inputként megadott gömbök (balra), a felület paramétervonalai az érintőkörökkel (középen) és a kész felület (jobbra). Az algoritmus egymástól távoli gömböket és az input hirtelen változásait egyaránt kezelni tudja.

Első lépésként pontosan definiáltuk, hogy mit értünk megengedett körsorozat (illetve térben gömbsorozat) alatt [41].

2.14. definíció. Körök $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatát *megengedett konfigurációnk* nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek (d_i a c_i kör által definiált körlapot jelöli):

- $d_i \subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $d_i \cap d_j = \emptyset, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$
- if $d_{i-1} \cap d_{i+1} \neq \emptyset$, then $d_{i-1} \cap d_{i+1} \subset d_i$

Ezekből a feltételekből következik, hogy

$$\mathbf{r}_i \notin \bigcup_{j=i-1}^{i+1} d_j, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

ahol $\mathbf{r}_i$ a c_{i-1}, c_i, c_{i+1} körök hatványpontja.

Ezzel analóg módon definiáltuk a gömbök megengedett konfigurációját. Körök esetén a keresett alakzat két görbe, melyek minden egyes kört egy-egy pontban érintenek, de egyik körbe sem metszenek bele. Gömbök esetén a keresett felület minden gömböt egy-egy körben (nem feltétlenül főkörben) érint, de egyik gömbbe sem metsz bele. Ezeket a definíciókat mások is átvették, alkalmazták [2].

Körök esetén a megoldás első lépése, hogy minden körön két pontot keresünk, amelyekben a leendő burkoló érinteni fogja őket. Ezeket a pontokat minden c_i körhöz az ezt megelőző és az ezt követő c_{i-1}, c_i, c_{i+1} körhármas által definiált megfelelő Apollóniusz-féle érintőköröknek a középső körrel való érintési pontjai adják. Ez a görög probléma itt meglepően új alkalmazásra talál és minden feltételnek megfelelő burkolót eredményez. Térben a gömbökön az érintőköröket ennek a problémának a térbeli általánosítása adja (Dupin-ciklidek), illetve visszavezethető a síkbeli problémára. Az érintési pontokhoz illetve gömbök esetén a körökhöz érintővektorokat is definiálunk, amelyek nagyságát a szomszédos körök hatványvonalaiból (gömbök hatványsíkjaiból) számoljuk. Végül ezeket Hermite-ívekkel kötjük össze, így a végső görbepárt illetve

felületet paraméteres módon adjuk meg. A módszert [1]-ben továbbfejlesztettük úgy, hogy több ágból álló felületeket is kezelni tudjon.

Irodalomjegyzék

- [1] Bana, K., Kruppa, K., Kunkli, R., Hoffmann, M.: KSpheres - An Efficient Algorithm for Joining Skinning Surfaces, Computer Aided Geometric Design, 31 (2014), 499–509.
- [2] Bastl, B., Kosinka, J., Lavicka, M.: Simple and branched skins of systems of circles and convex shapes, Graphical Models, doi:10.1016/j.gmod.2014.12.001 (megjelenés alatt)
- [3] Barhak, J., Fischer, A.: Parameterization and reconstruction from 3D scattered points based on neural network and PDE techniques, IEEE-TVCG 7 (2001), 1-16.
- [4] Barhak, J., Fischer, A.: Adaptive reconstruction of freeform objects with 3D SOM neural network grids, Computers & Graphics, 26 (2002), 745–751.
- [5] Böhm, W.: Inserting new knots into B-spline curves. Computer-Aided Design, 12 (1980), 199–201.
- [6] Böhm, W.: On the efficiency of knot insertion algorithms, Computer Aided Geometric Design, 2 (1985), 141–143.
- [7] de Boor, C.: A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, 1978.
- [8] de Casteljau, P.: Courbes à pôles. Francia Ipari Szabványügyi Hivatal, 1959.
- [9] Chen, Q., Wang, G.: A class of Bézier-like curves, Computer Aided Geometric Design, 20 (2003), 29–39.

- [10] Cheng, H., Shi, X., 2005. Quality mesh generation for molecular skin surfaces using restricted union of balls, Proc. IEEE Visualization Conference (VIS2005), 2005 399–405.
- [11] Echevarría, G., Iglesias, A., Gálvez, A.: Extending neural networks for B-spline surface reconstruction, Lecture Notes in Computer Science 2330 (2002), 305–331.
- [12] Edelsbrunner, H.: Deformable smooth surface design. Discrete and Computational Geometry 21 (1999), 87–115.
- [13] Farin, G., Hoschek, J., Kim, M-S.: Handbook of computer aided geometric design, Elsevier, 2002.
- [14] Farin, G., Rein, G., Sapidis, N., Worsey, A.J.: Fairing cubic B-spline curves, Computer Aided Geometric Design, 4 (1987), 91–103.
- [15] Fritzke, B.: Growing cell structures - a self-organizing network for unsupervised and supervised learning, Neural Networks 7 (1994), 1441–1460.
- [16] Han, X., Zhu, Y.: Curve construction based on five trigonometric blending functions, BIT Numerical Mathematics, 52 (2012), 953–979.
- [17] Hoffmann, M., Várady, L.: Free-form Surfaces for Scattered Data by Neural Networks, Journal for Geometry and Graphics, 2 (1998), 1–6.
- [18] Hoffmann M.: Modified Kohonen neural network for surface reconstruction, Publicationes Mathematicae, 54 (1999), 857–864.

- [19] Hoffmann, M., Juhász, I.: Geometric aspects of knot modification of B-spline surfaces, *Journal for Geometry and Graphics*, 6 (2002), 141–149.
- [20] Hoffmann, M., Kovács, E.: Developable surface modeling by neural networks, *Mathematical and Computer Modelling*, 38 (2003), 849–853.
- [21] Hoffmann, M., Juhász, I.: On the knot modification of a B-spline curve, *Publicationes Mathematicae*, 65 (2004), 193–203.
- [22] Hoffmann, M.: Numerical control of Kohonen neural network for scattered data approximation, *Numerical Algorithms* 39 (2005), 175–186.
- [23] Hoffmann, M., Juhász, I.: Constrained shape control of bicubic B-spline surfaces by knots, in: Sarfraz, M., Banissi, E. (eds.): *Geometric Modeling and Imaging*, London, IEEE CS Press, 2006, 41–47.
- [24] Hoffmann, M., Juhász, I.: On the family of B-spline surfaces obtained by knot modification, *Mathematical Communications*, 11 (2006), 9–16.
- [25] Hoffmann, M., Y., Li, G., Wang, G.-Zh.: Paths of C-Bézier and C-B-spline curves, *Computer Aided Geometric Design*, 23 (2006), 463–475.
- [26] Hoffmann, M., Juhász, I.: Modifying the shape of FB-spline curves, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 27 (2008), 257–269.

- [27] Hoffmann, M., Juhász, I.: On interpolation by spline curves with shape parameters, *Lecture Notes in Computer Science*, 4975 (2008), 205–215.
- [28] Hoffmann, M., Juhász, I.: On parametrization of interpolating curves, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216 (2008), 413–424.
- [29] Hoffmann, M., Juhász, I.: On the quartic curve of Han, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223 (2009), 124–132.
- [30] Hoffmann, M., Juhász, I., Károlyi, Gy.: A control point based curve with two exponential shape parameters, *BIT Numerical Mathematics*, 54 (2014), 691–710.
- [31] Hoschek, J.: Zur Ermittlung von Hüllgebilden in der Kinematik, PhD thesis, TH Darmstadt, 1964.
- [32] Ivriissimtzis, I.P., Jeong, W-K., Seidel, H-P.: Using Growing Cell Structures for Surface Reconstruction, *Proceedings of the Shape Modeling International '03*, 2003, 78–86.
- [33] Ivriissimtzis, I.P., Jeong, W-K., Seidel, H-P.: Neural Meshes: Statistical Learning Methods in Surface Reconstruction, *Tech. Report of Max-Planck Institut für Math.*, MPI-I-2003-4-007, 2003.
- [34] Jeong, W-K., Ivriissimtzis, I. P., Seidel, H-P.: Neural Meshes: Statistical Learning based on Normals, *Proc. of Pacific Graphics 03*, IEEE Computer Society Press, 2003, 404–408.
- [35] Juhász, I., Hoffmann, M.: The effect of knot modifications on the shape of B-spline curves, *Journal for Geometry and Graphics*, 5 (2001), 111–119.

- [36] Juhász, I., Hoffmann, M.: Modifying a knot of B-spline curves, *Computer Aided Geometric Design*, 20 (2003), 243–245.
- [37] Juhász, I., Hoffmann, M.: Constrained shape modification of cubic B-spline curves by means of knots, *Computer-Aided Design*, 36 (2004), 437–445.
- [38] Knopf, G. K., Sangole, A.: Interpolating scattered data using 2D self-organizing feature maps, *Graphical Models* 66 (2004), 50–69.
- [39] T. Kohonen: Self-organization and associative memory. 3rd edition, Springer-Verlag, 1996.
- [40] Krause, F. L., Fischer, A., Gross, N., Barhak, J.: Reconstruction of freeform objects with arbitrary topology using neural networks and subdivision techniques, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 52 (2003), 125–128.
- [41] Kunkli, R., Hoffmann, M.: Skinning of circles and spheres, *Computer Aided Geometric Design*, 27 (2010), 611–621.
- [42] Kunkli, R., Papp, I., Hoffmann, M.: Isoptics of Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design*, 30 (2013), 78–84.
- [43] Li, Y., Hoffmann, M., Wang, G-Zh.: On the shape parameter and constrained modification of GB-spline curves, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 34 (2007), 51–59.
- [44] Lyche, T.: Note on the Oslo algorithm, *Computer-Aided Design*, 20 (1988), 353–355.
- [45] Ma, W., He, P.: B-spline surface local updating with unorganized points, *Computer-Aided Design*, 30 (1998), 853–862.

- [46] Mainar,E., Pena, J.M., Sanchez-Reyes, J.: Shape preserving alternatives to the rational Bézier model, *Computer Aided Geometric Design*, 18 (2001), 37–60.
- [47] Mainar, E., Pena, J.M.: A basis of C-Bézier splines with optimal properties, *Computer Aided Geometric Design*, 19 (2002), 291–295.
- [48] Peternell, M., Odehnal, B., Sampoli, M.L.: On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes. *Computer Aided Geometric Design*, 25 (2008), 342–355.
- [49] Peternell, M., Pottmann, H.: A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, 15 (1998), 223–249.
- [50] Piegl, L., Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer–Verlag, 1995.
- [51] L. Piegl, W. Tiller: Parametrization for surface fitting in reverse engineering, *Computer-Aided Design*, 33 (2001), 593–603.
- [52] Pottmann, H., Wagner,M.: Helix splines as an example of affine tchebycheffian splines, *Adv. Comput. Math.*, 2 (1994), 123–142.
- [53] Rossignac, J., Whited, B., Slabaugh, G., Fang, T., Unal, G.: Pearling: 3d interactive extraction of tubular structures from volumetric images, in: *Proc. MICCAI Workshop: Interaction in Medical Image Analysis and Visualization*, 2007.
- [54] Rossignac, J., Kim, J.J.: Helsweeper: Screw-sweeps of canal surfaces, *Computer-Aided Design* 44 (2012), 113–122.
- [55] Róth, Á., Juhász, I., Schicho, J., Hoffmann, M.: A cyclic basis for closed curve and surface modeling, *Computer Aided Geometric Design*, 26 (2009), 528–546.

- [56] Sarfraz M.: Interactive curve modeling, Springer–Verlag, 2008.
- [57] Schoenberg, I. J.: Spline Functions and the Problem of Graduation, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (National Academy of Sciences), 52 (1964), 947–950.
- [58] Singh, K., Kokkevis, E.: Skinning characters using surface-oriented free-form deformations, in: Proc. Graphics Interface 2000, 2000, 35–42.
- [59] Slabaugh, G., Unal, G., Fang, T., Rossignac, J., Whited, B.: Variational skinning of an ordered set of discrete 2d balls, Lecture Notes on Computer Science, 4795 (2008) 450–461.
- [60] Slabaugh, G., Rossignac, J., Whited, B., Fang, T., Unal, G.: 3d ball skinning using pdes for generation of smooth tubular surfaces, Computer-Aided Design, 42 (2010), 18–26.
- [61] The Official Spore™ and Spore™ Creature Creator Site, www.spore.com (2014. december 16.).
- [62] Troll, E., Hoffmann, M.: Geometric properties and constrained modification of trigonometric spline curves of Han, Annales Mathematicae et Informaticae, 37 (2010), 165–175.
- [63] Várady, L., Hoffmann, M., Kovács, E.: Improved Free-form Modeling of Scattered Data by Dynamic Neural Networks, Journal for Geometry and Graphics, 3 (1999), 177–181.
- [64] Várady, T., Martin, R.R., Cox, J.: Reverse engineering of geometric models - an introduction, Computer-Aided Design, 29 (1997) 255–268.

- [65] Weiss, V., Andor, L., Renner, G., Várady, T.: Advanced surface fitting techniques, CAGD 19 (2002), 19–42.
- [66] Yu, Y.: Surface reconstruction from unorganized points using self-organizing neural networks, Proc. of IEEE Visualization 99, 1999, 61–64.
- [67] Zhang, J.: C-curves: An extension of cubic curves, Computer Aided Geometric Design, 13, 199–217.
- [68] Zhang, J.: C-Bézier curves and surfaces, Graphical Models and Image Processing, 61 (1999), 2–15.
- [69] PixologicTM ZBrush Features, www.pixologic.com (2014. december 16.).