dc_1055_15

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

Instacionárius áramlások: régi problémák, új megközelítések

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Dr. Paál György

Budapest, 2015

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Olyan sok embernek tartozom hálával ennek a disszertációnak az elkészültéért, hogy mindnyájuk név szerinti felsorolása lehetetlen. Mindenekelőtt szüleimnek, akik a világ iránti érdeklődésem magjait elvetették, azokat mindvégig gondozták és támogató szeretetüket egész pályafutásom alatt magam mögött érezhettem. Tanáraimnak, akik szemléletemet kialakították, formálták. Matematikatanáraim közül szeretném megemlíteni Sugár Györgyöt, gimnáziumi tanáromat, Farkas Miklós és Bajcsay Pál professzorokat. Egyetemi oktatóim közül nagyon nagy hatással volt rám Stépán Gábor és Kiss László professzorok hatalmas tudása, egyetemes szemlélete. Az áramlástant elsősorban Lajos Tamás és Vajna Zoltán, majd Kullmann László és Halász Gábor professzorok, későbbi kollégáim szerettették meg velem. Sokat köszönhetek Szentmártony Tibor professzornak, mind szakmailag, mind emberileg, angliai pályám indításának egyengetésében.

Köszönetet mondok James Hunter Whitelaw professzornak, aki 1987-ben akkor szokatlan módon magyarként fölvett engem az Imperial College Áramlástan Tanszékére, valamint ottani kollégáimnak, akiktől sokat tanultam, és többükkel ma is jó barátságban vagyok. Ugyanúgy hálás vagyok Walter Garen professzornak, aki 1993-ban felvett az emdeni Fachhochschule Ostfriesland-ra és ott 7,5 évig megértő főnököm volt. Sokat köszönhetek Angster Juditnak és Miklós Andrásnak, akik bevezettek az orgonasípok varázslatos világába, és ebből a kutatásból nőtt ki később az öngerjesztett áramlási lengések kutatása.

Nagyon fontos volt együttműködésem Bojtár Imre professzorral, aki az aneurizmák hemodinamikájával kapcsolatos munkámat elindította és ugyanebben a témában felbecsülhetetlen értékű Dr. Szikora István hozzájárulása, aki orvosi oldalról 10 éve támogatja ezirányú kutatásaimat.

Meg kell említenem Czigány Tibor professzor, a BME Gépészmérnöki Kar dékánjának folyamatos támogatását, érdeklődését, bátorítását a dolgozat megírásával kapcsolatban.

Óriási erőt adott a BME Hidrodinamikai Rendszerek Tanszékének minden munkatársának önzetlen támogatása, barátsága. Köszönetem a név szerint meg nem említett kollégáknak is szól. Halász Gábornak és Kullmann Lászlónak köszönhetem hazatérésemet és hazatérésem után is rendkívül sok támogatást kaptam tőlük, valamint Vajna Zoltán professzortól is. Hihetetlenül sokat köszönhetek Dr. Hős Csabának, aki tanszékvezető-helyettesként óriási terheket vesz magára a tanszéki munka minden szegmenséből: oktatásból, kutatásból, KK-munkákból, adminisztrációból és emellett valódi barátra leltem benne. Nagy hálával tartozom volt doktoranduszaimnak is: Dr. Vaik Istvánnak, Dr. Ugron Ádámnak, Dr. Závodszky Gábornak és Farkas Bencének, akikkel minden tudományos munkát szoros együttműködésben végeztünk. Köszönöm tragikusan fiatalon elhunyt volt kollégámnak, Dr. Pandula Zoltánnak a rengeteg munkát, amit a Tanszék érdekében végzett. Köszönöm Schlosserné Kiss Éva főtanácsosnak fáradhatatlan munkáját, amivel sok terhet levesz a vállamról. Végül köszönöm feleségemnek a sok türelmet, megértést és szeretetet, amit a disszertáció írása alatt irányomban tanúsított.

Tartalomjegyzék

BEVEZETÉS

A tudomány történetében sokszor előfordult, hogy egy új eszköz megjelenése a tudósok szemléletét a világ általuk vizsgált szeletével kapcsolatban radikálisan megváltoztatta. Gallison (1997) munkájára alapozva Freeman Dyson (korunk ismert angol-amerikai fizikusa) kidolgozta az „eszközvezérelt" (tool-driven) tudományos forradalmak elméletét, és azt állítja, hogy napjainkban a nagy tudományos áttörések többsége ilyen, ellentétben a közhiedelemmel, ami szerint az elméletvezérelt (concept-driven) tudományos forradalmak a jellemzőek (Dyson (1999)). Az egyik legismertebb példa a távcső első alkalmazása a csillagászatban. Galileo Galilei 1609-ben távcsővel vizsgálta a Hold felszínét és azt találta, hogy az kráterekkel tarkított, rücskös. Ezzel beverte az első empirikus szöget a ptolemaioszi szemlélet koporsójába, ami szerint az égi szférában minden tökéletes, állandó, míg a Földön minden tökéletlen és múlandó. Egy másik ilyen szög röviddel később a Jupiter holdjainak felfedezése volt, ami azt a biztosnak látszó dogmát döntötte meg, hogy minden égi mozgás középpontja a Föld; és ezzel megnyitotta az utat a kopernikuszi világkép korántsem problémamentes elfogadása előtt.

További példák:

- A mikroszkóp felfedezése (17. század) megnyitotta a mikroorganizmusok világát; bár a sejteket már a 17. században megtalálták, annak felismerése, hogy a betegségeket mikroorganizmusok okozhatják csak később, a 19. század második felében történt meg. A mikroszkóp később az anyagszerkezettanban is alapvető jelentőségű lett az anyagok mikrostruktúrájának vizsgálatában;
- A röntgensugár felfedezése mind az anyagvizsgálatot, mind az orvosi diagnosztikát forradalmasította;
- A kémiában felismerték, hogy bizonyos, természetben megtalálható anyagok kémiai esszenciája ipari módon is előállítható. Például már az ókorban ismert volt, hogy a fűzfakéreg pora lázcsillapító anyagot tartalmaz. Az 1800-as években sikerült azonosítani ezt az anyagot, a szalicilsavat. Ennek azonban gyomorkárosító mellékhatása van. 1897-ben a Bayer cégnél sikerült ennek acetilszármazékát előállítani. Ennek elhanyagolható káros mellékhatása volt a szalicilsavhoz képest. Azóta az „aszpirin" név világszabadalom;
- Golgi ezüstimpregnációs festése révén lehetővé vált egyes, tetszőleges idegsejtek láthatóvá tétele, és ez forradalmasította az agykutatást Cajal munkásságán keresztül;
- Az internetnek ugyan eredetileg csak a tudósok közötti kommunikáció megkönnyítése volt a célja, de azóta minden tudományág működési módját alapvetően átalakította.

Bár nem ilyen elsöprő jelentőséggel, de kicsit hasonló a helyzet az áramlástanban. Az 1980-as évekig az áramlástani kutatások nagy részben a stacionárius áramlásokkal foglalkoztak, a szemlélet az volt, hogy alapvetően azok az érdekes, a releváns áramlások, az instacionárius áramlások a különlegességek kategóriájába estek, holott valahol mélyen minden kutató tudta, hogy a valóságban az instacionárius áramlások a tipikusak és a stacionárius áramlások a kivételek. Mivel azonban az eszközök ezen áramlások tanulmányozására nem álltak rendelkezésre, ez a gondolat nem tört a felszínre. A 80-as évektől kezdve a mai napig tartó lassú harmincéves folyamat ment végbe, aminek eredményeképpen az instacionárius áramlások a mainstream áramlástan fő kutatási témájává váltak. Ennek oka mind a kísérleti, mind a szimulációs eszközök kifejlesztése. Kísérleti oldalon a PIV (Particle Image Velocimetry) kifejlesztése jelentette a fő hajtóerőt, ami instacionárius áramlások több időpillanatában egy teljes síkon egyidejűleg lehetővé tette a sebességmező kvantitatív meghatározását. Ezen kívül a digitális gyors kamerák technológiájának hihetetlen fejlődése és elérhető áron való megvásárolhatósága forradalmasította az áramlás-vizualizációt is. A piezoelektromos nyomásszenzorok a megfelelő gyors adatgyűjtő kártyával, szintén nagy pontosságú és időbeli felbontású nyomásméréseket tettek lehetővé. Mindehhez hozzájárult a digitális adattárolás árának radikális csökkenése, ami a fenti módszerekkel gyűjtött óriási mennyiségű adat tárolását lehetővé tette, valamint innovatív vizualizációs szoftverek megjelenése, amik az adatok színes, könnyen érthető formában való prezentálását segítették. A szoftver oldal fejlődéséhez szintén rendkívüli mértékben hozzájárult a hardver fejlődése és olcsóbbá válása, ami olyan memóriakapacitást és CPU sebességet tesz az átlagos kutató számára könnyen elérhetővé, amiről akár 10 éve még álmodni sem mert. A „brutális erő" mellett az algoritmusok is rendkívül sokat fejlődtek, optimalizálódtak, rengeteg tapasztalat gyűlt össze velük kapcsolatban az utóbbi 40 évben. Megjelentek olyan futásgyorsító technikák, mint a multigrid technika, a párhuzamosítás, és az ezt lehetővé tevő, tömegek számára is elérhető hardver, a GPU (Graphics Processor Unit). Sok hasznos felhasználóbarát eszköz keletkezett, elsősorban a hálógenerálás területén, ami a futás-előkészítés legkritikusabb pontja. A vizualizációs szoftverek (post-processing) illetve az adattárolás fontossága hasonló, mint a kísérleti eredmények kezelésénél.

Pulzáló instacionárius áramlások kétféleképpen jöhetnek létre.

1. Minden peremfeltétel stacionárius, de az áramlás geometriájából következően mégis instacionáriussá válik az áramlás. Ezek többnyire ú. n. öngerjesztett áramlások. Az öngerjesztett áramlások általában valami visszacsatolási mechanizmuson alapulnak és valamiféle periodikus, kváziperiodikus, vagy ahhoz hasonló lengést végeznek. Az öngerjesztett áramlásokkal való foglalkozás hasznos, mert a gyakorlatban ezek az áramlások gyakran okozzák szilárd testek rezgését, ami zajkeltéshez vagy akár töréshez is vezethet. Néha viszont a lengés kívánt, pl. fúvós hangszerek esetében. Ezen áramlások két jellegzetes képviselőjével, illetve ezek néhány következményével foglalkozom a disszertáció első részében.

2. Az instacionárius áramlás külső gerjesztés hatására jön létre. Jellegzetes példa egy dugattyús szivattyú által létrehozott pulzáló áramlás csővezetékben. De végső soron bármilyen instacionáriusan működő gép, ami áramlást hoz létre, ebbe a kategóriába esik. Disszertációm második felében a külsőleg gerjesztett áramlások különleges, de életbevágóan fontos kategóriájával foglalkozom, az artériás véráramlások néhány problémájával. Itt az instacionárius áramlást generáló „szivattyú" szerepét a szív tölti be, ami mechanikai funkcióját tekintve valóban volumetrikus szivattyú.

Mivel a dolgozat témája heterogén, az irodalmi összefoglalót minden fejezet elején tárgyalom, hogy a mindenkori témával szervesebb egységet képezzen.

I. Öngerjesztett áramlási lengések

I.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben Blake & Powell (1986) illetve Rockwell & Naudascher (1979) alapján az öngerjesztett áramlási lengések legfontosabb tulajdonságait foglalom össze. Részletesebb irodalmi összefoglalót a konkrét áramlásokról szóló fejezetekben fogok közölni.

Az öngerjesztett áramlási lengések (self-sustained flow oscillations) kifejezés azt jelenti, hogy egy olyan áramlási konfigurációban, ahol minden peremfeltétel stacionárius, mégis instacionárius áramlás alakul ki, legtöbbször, de nem mindig periodikus, közel periodikus vagy kváziperiodikus áramlások. Ilyen áramlások a gyakorlatban többnyire nemkívánatos jelenségekhez vezetnek, zajhoz, rezgésekhez, rendkívüli esetben akár töréshez is, de néha a lengést kifejezetten akarjuk, pl. fúvós hangszerek vagy egyes mérőműszerek (áramlásmérő) esetén.

Bár az ilyen áramlások száma óriási, mégis az egyszerű osztályozhatóság és tanulmányozhatóság kedvéért megkülönböztetünk néhány alaptípust, amit alább felsorolunk. Mivel a legtöbb típusnak nem volt „hivatalos" magyar neve, saját fordításaimat közlöm.

Ilyenek (a teljesség igénye nélkül) az élhang (edge tone), az üreghang (cavity tone), a lyukhang (hole tone), gyűrűhang (ring tone), a nyíróréteghang (shear layer tone), a felütköző szabadsugár (impinging jet), a síphang. Számos további konfigurációt láthatunk a fönt megadott referenciákban. Ezeket az I.1.1. ábrán vázolom.

A síp kivételével mindegyik fönt említett konfigurációban a lengés kialakulásának mechanizmusa ugyanaz, ezt pedig az élhang példáján, Powell (1961) gondolatmenetét követve demonstrálom. Bár Powell koncepciójának vannak még kérdéses pontjai, ezekre rá is fogok mutatni, mégis az alapgondolat teljesen hiteles, széles körben elfogadott és megjelenése óta alapvetően nem kérdőjelezte meg senki. A síphang annyiban különbözik az összes többitől, hogy egy rezonátorral való kölcsönhatást is figyelembe kell venni.

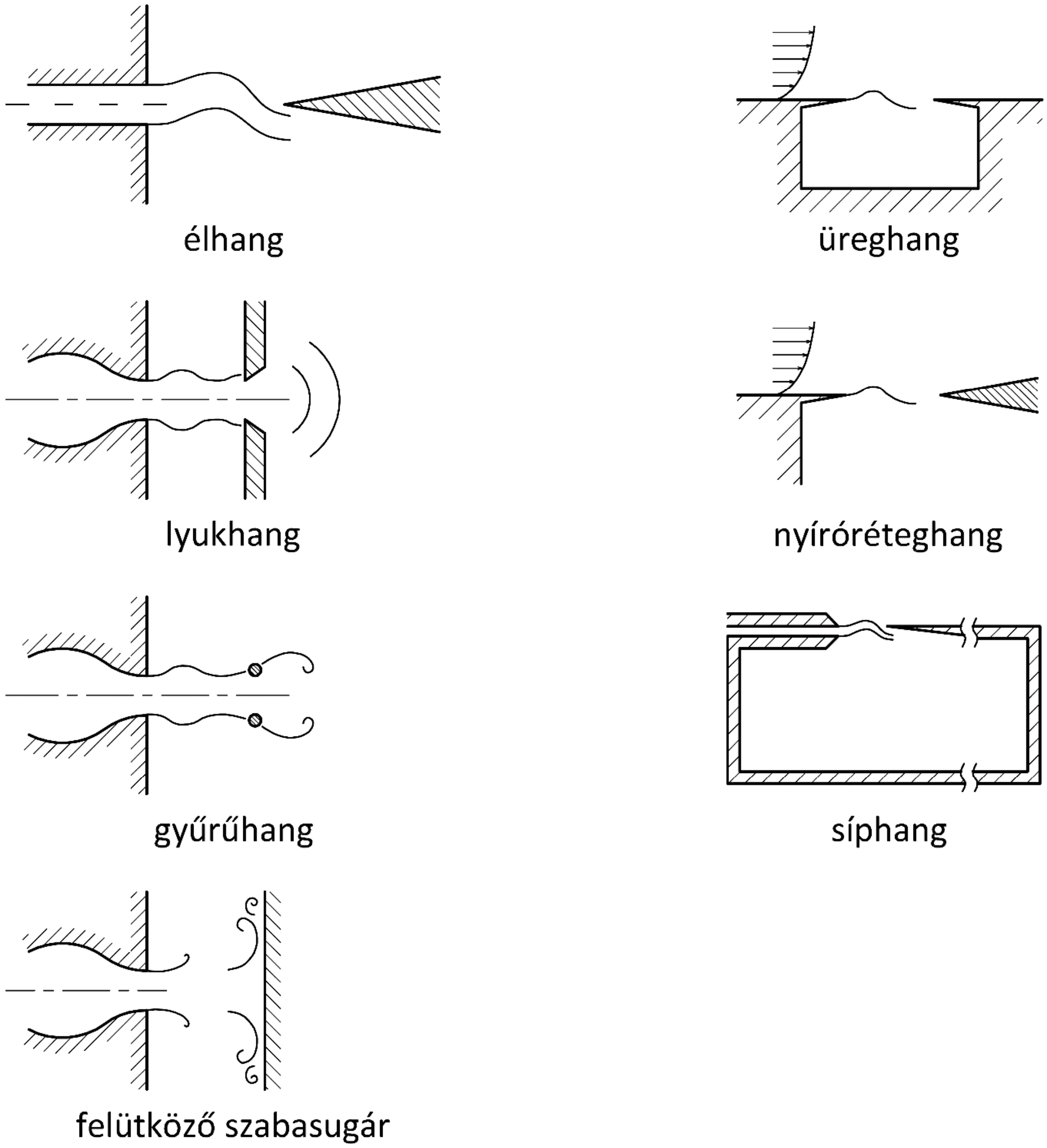
Mivel az élhangról külön fejezet fog szólni, itt csak a legszükségesebb információkra szorítkozom. Az élhang egy sík szabadsugárból és egy vele szemben elhelyezett ék alakú tárgyból áll. A szabadsugár az éknek nekiütközve egy többé-kevésbé határozott frekvenciával spontán lengésbe kezd. A lengés frekvenciáját alapvetően a fúvóka-ék távolság és a szabadsugár sebessége határozza meg. A lengés létrejöttéhez nem szükséges az ék rezgése, az éket merevnek tekintjük.

Powell magyarázata röviden összefoglalva a következő. A lengés egy visszacsatolási kör eredménye. (i) közismert, hogy szabadsugarakon, de egyszerű nyírórétegeken is spontán instabilitások alakulnak ki. Ezeknek az instabilitási hullámoknak az amplitúdója a fúvókától való távolsággal, a lineáris tartományban exponenciálisan nő. Az instabilitási hullám kialakulásához mindössze a szabadsugár kezdetén egy infinitezimális zavarás szükséges.

(ii) amikor az instabilitási hullám eléri az éket, annak felületén egy periodikusan időfüggő erőt hoz létre.

(iii) ez az erő egy dipólus hangforrást hoz létre, ami a teljes áramlási térben kifejti hatását.

(iv) ez a hangforrás újra kölcsönhat a szabadsugár közvetlenül fúvóka melletti részével és elindítja a következő instabilitási hullámot. Ezzel a kör bezárult.



I.1.1. ábra. Az öngerjesztett áramlási lengések néhány alapesete

Powell (1961) a visszacsatolási kör előbb felsorolt fázisaihoz mind egy-egy hatásfokot, illetve egy helyen erősítési tényezőt definiált.

(i) Ha lineáris erősítést feltételezünk, akkor az élnél kialakuló transzverzális sebesség v_e így közelíthető:

$$v_e = v_0 exp\left[-\int_0^h \alpha_i \, dx\right] exp\left[i\left(\int_0^h \alpha_r \, dx - \omega t + \varphi\right)\right], \qquad \text{(I.1.1)}$$

ahol v_0 a fúvóka kimeneténél jelentkező transzverzális sebesség és $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, a komplex hullámszám, ami a szabadsugarak térbeli stabilitáselemzésénél szokásos mennyiség (lásd I.4. fejezet), x az áramlás irányú koordináta, h a fúvóka-ék távolság.

Ezt röviden összefoglalva a szabadsugár fúvóka és ék közötti távolságán az instabilitási hullám teljes erősítése:

$$\frac{v_e}{v_0} = q = |q| e^{i\Phi_N}, \tag{I.1.2}$$

ahol $|q| \geq 1$ és Φ_N a fázisszög.

(ii) Az éknél jelentkező transzverzális sebesség F(t) erőt hoz létre az éken. Erre egy fölső becslés Powell (1961)

$$F(t) = a_1 \varrho_0 U b \delta v_e, \tag{I.1.3}$$

ahol a_1 konstans, ρ_0 a közeg nyugalmi sűrűsége, U a szabadsugár átlagsebessége a fúvókánál, b a megfigyelés síkjára merőleges fúvókahossz és δ a fúvóka szélessége. Ezt újra leegyszerűsítve:

$$F(t) = \eta_s v_e \tag{I.1.4}$$

(iii) Az $F(t)$ erő Lighthill elmélete alapján dipólus hangforrást hoz létre, ami elemi sebességet generál a fúvóka kijáratánál Powell (1961):

$$v_{e0} = \frac{F}{4\pi i \omega \varrho_0 h^2 \sqrt{(h^2 + {b^2}/{4})}} \tag{I.1.5}$$

(I.1.5) magában foglalja a két határesetet, egyrészt, ha $h/b \gg 1$, az ék körüli áramlás által keltett erő pontszerű dipólusként viselkedik, ez esetben a nevezőben a gyökös kifejezés h-vá egyszerűsödik. Másrészt, ha $h/b \ll 1$, ék körüli áramlás által keltett erő vonalszerű dipólusként viselkedik, ez esetben a nevezőben a gyökös kifejezés $b/2$-vé egyszerűsödik. Az egyenletet egyszerűsített alakban kifejezve:

$$\frac{v_{e0}}{F} = \eta_t = |\eta_t| e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i|\eta_t| \tag{I.1.6}$$

(iv) Végül, mivel a fúvóka kijáratánál a kényszer miatt a szabadsugár transzverzális sebessége 0, ezért

$$\eta_d = \frac{v_e}{v_{e0}} = -1 = e^{-i\pi}. \tag{I.1.7}$$

Ahhoz, hogy stabil, önfenntartó lengés alakulhasson ki, mind amplitúdó-, mind fázisfeltételeket ki kell elégítenünk. Ezt pedig az alábbi egyenletbe foglalhatjuk össze:

$$q\eta_s\eta_t\eta_d = 1. \tag{I.1.8}$$

A fázisfeltételt leválasztva:

$$e^{-2\pi i(\Phi_N+3/4)} = 1, \tag{I.1.9}$$

amiből:

$$\Phi_N = n + 1/4, \tag{I.1.10}$$

ahol *n* a módus sorszáma, ami durván a fúvóka és ék között fellépő félhullámok számát jelenti. Az ¼-es fázisszög többféleképpen értelmezhető: úgy is, mint időbeli késleltetés (siettetés) a lengő szabadsugár és az éken megjelenő erő között, de a fúvóka-ék távolság virtuális meghosszabbításaként (megrövidítéseként) is, úgy, mintha a dipólus nem az ék csúcsán, hanem az előtt ébredne. Mindenesetre a durva becslések miatt a valóságban a fáziskésés természetesen nem mindig ¼ lesz, bár Brown értékeihez elég jól illeszkedik, hanem konfigurációról konfigurációra, sőt időnként módusról módusra változik. Powell modellje rendkívül jó koncepcionális keretrendszert ad nemcsak az élhang, hanem valamennyi azzal rokon öngerjesztett áramlási lengés magyarázatára, sőt képes a módusugrásokat is magyarázni, ahogy azt a következő fejezetben látjuk.

A modell azonban felvet egy-két kérdést, amelyeket az alábbiakban felsorolok.

1. A modell a szabadsugár instabilitási hullámának lineáris növekedését feltételezi a teljes fúvóka-ék hosszon. A valóságban ez a távolság kisebb részére igaz csak, a nagyobb részén nemlineáris a növekedés. Bár ennek már Powell is tudatában volt 1961-ben, mégsem tudunk mit kezdeni ezzel a problémával, mert nincs használható nemlineáris elmélet.
2. Az ékről a fúvókára való visszahatást Powell dipólus hangforrással modellezi. Azonban Powell is tisztában volt vele, hogy valójában összenyomhatatlan folyadékban is működik a visszacsatolás, ahol hang nem jöhet létre. Mi akkor a mechanizmusa a visszahatásnak? Erre nekem az a hipotézisem, hogy a visszahatás a Biot-Savart mechanizmuson keresztül, az örvényesség által jön létre, ami összenyomhatatlan folyadékban, a teljes térben 0 idő alatt hat. Ezt további kutatást igényel, de Lewis (1991) könyvében örvényelem módszerrel hasonló problémákat feszeget.
3. Ezzel kapcsolatos a következő kérdés: akár hang, akár örvényesség a visszahatás mechanizmusa, a szabadsugarat közvetlenül a fúvóka kijáratánál kell gerjeszteni, hiszen nem csak Powell, hanem utána számtalan szerző néha explicite, többnyire azonban implicite feltételezte, hogy a zavarás pontosan ott hat, mert az a szabadsugár „legérzékenyebb része". Ez teljesen logikus, hiszen elvileg akár az örvényesség, akár a hang a szabadsugár bármelyik részét gerjeszthetné, mivel erősségük a távolsággal csökken, mégis mindenki azt feltételezi, és a kísérleti eredmények is azt támasztják alá, hogy az instabilitási hullám a fúvóka kijárata után közvetlenül indul. Azt, hogy miért ez a szabadsugár legérzékenyebb része, az I.4. fejezetben, legalább részben megpróbálom megválaszolni.
4. Felmerül még a kérdés, hogy akár dipólus hangforrást, akár örvényesség-forrást feltételezünk az ék csúcsánál, vajon ennek hatása időben és térben pontszerű-e? Több jel arra mutat, hogy nem; a hatás mind időben, mind térben „szét van kenve". Ezt egy finomított elméletben figyelembe kell venni.

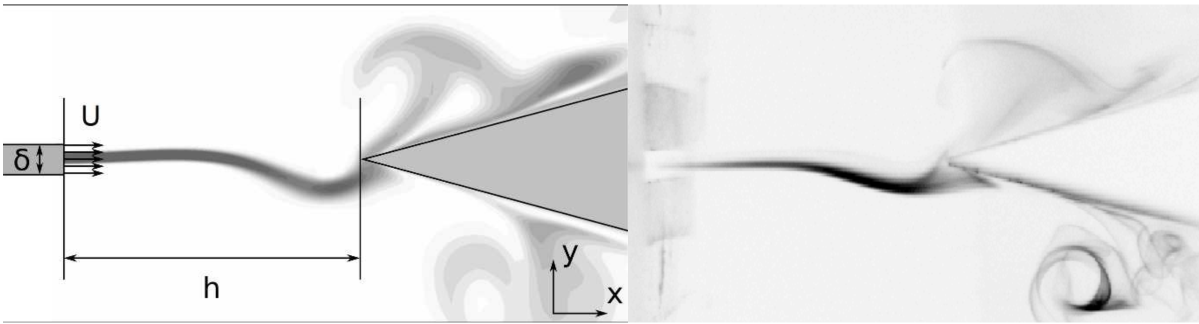
5. Az elmélet olyan finom jelenségekre, mint a móduskapcsolgatás (mode switching) vagy a viselkedésnek a szabadsugár sebességprofiljától való függése, nem ad magyarázatot. Ezeknek a jelenségeknek a kezelésére alacsony dimenziós modellre van szükség, ami a lényeges elemeket mégis tartalmazza.

A következő négy fejezetben rendre az élhangról (I.2), az üreghangról (I.3), illetve a szabadsugár kezdetének fokozott érzékenységéről fogok írni (I.4).

I.2 Élhang („edge tone")

I.2.1 Bevezetés

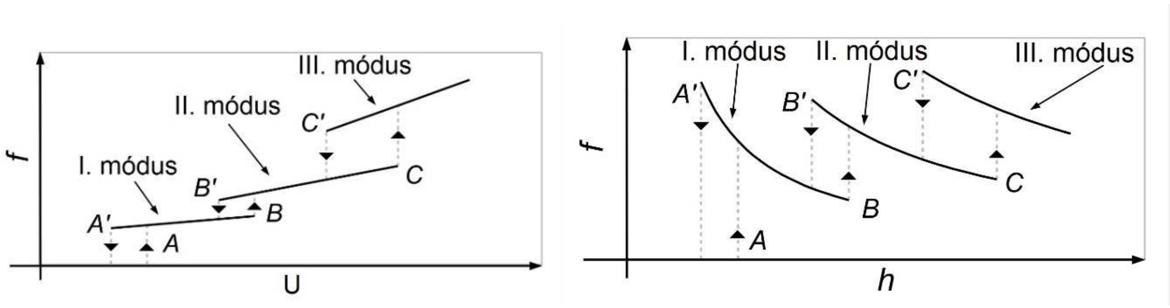
Az élhang – nevével ellentétben – áramlási konfiguráció, amely sok esetben hangot is kibocsájt. Az ismert aeroakusztikai konfigurációk közül az egyik legegyszerűbb, mégis meglepően komplex viselkedésre képes. Egy sík szabadsugár nekiütközik egy ék alakú tárgynak, amit hagyományosan „él"-nek nevezünk. A konfiguráció elsődleges paraméterei a szabadsugár kilépő átlagsebessége (*U*) és szélessége (δ) és a fúvóka-ék távolság (*h*) (I.2.1. ábra). Másodlagos paraméterek is befolyásolják az áramlást, ilyen például a kilépő sebességprofil (a leggyakoribbak az egyenletes és a parabolikus profil), az ék eltolódása a középvonaltól, a fúvóka alakja vagy az ék szöge. Bizonyos feltételek mellett öngerjesztett áramlási lengések alakulnak ki, amik hangot bocsájthatnak ki.



I.2.1. ábra. Első módusú élhangok felvételei. Bal oldal: szimulációból, virtuális füsttel; jobb oldal: kísérletből, valódi füsttel

A lengések kialakulásának mechanizmusát az előző fejezetben ismertettük. Ebben a fejezetben a tapasztalt jelenségek leírására koncentrálunk.
A lengő szabadsugár különböző alakokat vehet fel: ezeket hidrodinamikai módusoknak hívják. Sorszámuk durván megfelel a fúvóka és az ék között megjelenő félhullámok számának. Az első ábrán két pillanatfelvételt láthatunk egy első módusú élhang-áramlásról. Az I.2.1a ábra áramlás-szimulációból van, ahol virtuális füsttel tettük láthatóvá az áramlást, míg az I.2.1b ábrán kísérleti áramlás-vizualizáció látható, valódi füsttel.

A I.2.2a ábrán – sematikusan – azt ábrázoltuk, hogy mi történik a frekvenciával, ha egy rögzített geometriai konfigurációban (állandó δ és *h* értékek mellett) változtatjuk a szabadsugár sebességét. Nagyon alacsony sebességeknél szimmetrikus, stacionárius áramlás alakul ki, az ék „félbevágja" az áramlást. Egy geometriafüggő sebesség-küszöbérték fölött megjelenik az első módus (A pont az ábrán). Növekvő sebességgel létrejön a második módus, ami együtt jár a frekvencia hirtelen magasabb értékre ugrásával (B pont).



a.) b.)

I.2.2. ábra. A frekvencia változása sematikusan: a) a sebesség; b) a fúvóka-ék távolság függvényében

Másodlagos paraméterektől függően egyidejűleg létezhet az első és második módus, illetve a második módus tisztán is jelen lehet egy bizonyos sebesség fölött, azaz a magasabb módus megjelenésével az alacsonyabb módus továbbélhet, de el is tűnhet.

A sebességet tovább növelve az élhang harmadik módusa is kialakul (C pont), megint vagy tisztán, vagy az alacsonyabb módusokkal együtt, megint egy frekvenciaugrás kíséretében. Még nagyobb sebességnél esetenként negyedik módus is kialakulhat, ennél magasabb módust az irodalomban nem figyeltek meg. Hasonló viselkedés figyelhető meg a sebesség csökkentése esetén, de a hirtelen frekvenciaesés és a magasabb módus eltűnése más pontokban is jelentkezhet: a C’, B’ és az A’ pontban, azaz hiszterézis léphet fel.

Más részről, ha a sebességet állandóan tartjuk és a fúvóka-ék távolságot változtatjuk, a következő megfigyeléseket tehetjük (I.2.2b ábra). Kis távolságoknál nincs lengés. A távolságot növelve, egy bizonyos küszöbtávolság fölött megjelenik az első módus (A). A távolságot tovább növelve a frekvencia csökken. A B pontban, a második módus megjelenésénél a frekvencia hirtelen nagyobb értékre ugrik. Újabb frekvenciacsökkenés után a harmadik módus jelenik meg hasonló ugrással (C). A távolság csökkentésével az átmenetek más pontokban történhetnek (C’, B’, A’), úgyhogy itt is hiszterézis léphet föl.

A következő dimenziótlan számokat fogjuk használni a fejezetben: a **Reynolds-szám**ot, ami a szabadsugár **átlagos** kiömlési sebességére és a fúvóka szélességére van alapozva: $Re = U\delta/\nu$, a **Strouhal-szám**ot, ami dimenziótlan lengési frekvencia: $St = f\delta/U$, és a dimenziótlan fúvóka-ék távolságot, h/δ-t. Az előbbi kettő a Navier-Stokes egyenlet dimenziótlan alakjából, az utóbbi a geometriai hasonóságból következik. A modellezési törvények miatt különböző geometriai méretű, de hasonló h/δ-val és Reynolds-számmal rendelkező élhang konfigurációknak hasonló Strouhal-számú lengést kell eredményezni.

Vaik et al. (2014a)-ban rendkívül részletes irodalmi összefoglalót írtunk az élhang frekvenciájának elméleti és kísérleti leírásáról, ezt itt nem ismételjük meg. Számos elmélet létezik, de ezek egyike sem meggyőzőbb, mint Powell-nek az előző fejezetben ismertetett elmélete. Ugyancsak igen sok kísérleti munka is született, amiknek eredményeit általában empirikus vagy félempirikus képletekben fejezték ki. Ezekre viszont utalok a következő fejezetben.

I.2.2 Az élhang frekvencia- és fázistulajdonságai

Az irodalom következetes abban, hogy a lengési frekvencia közelítőleg egyenesen arányos a szabadsugár kilépő átlagsebességével és fordítottan arányos a fúvóka-ék távolság k-adik hatványával:

$$f \sim \frac{U}{h^k}. \tag{I.2.1}$$

Néhány szerző additív konstansokat is használ vagy az egyik, vagy mindkét képletben:

$$f \sim \frac{U + c_U}{h^k + c_h} \tag{I.2.2}$$

Hosszú vita folyt k értékéről. A kutatás korai fázisában *k* = 1-et részesítették előnyben (pl. Brown (1937) és az őt megelőző kutatók), míg később általánosan elfogadottá vált *k* = 3/2 (pl. Curle (1953) Savic (1941) eredményeit felhasználva, Holger et al. (1977), Crighton (1992)). Jones (1942) a kitevők teljes palettáját találta, mindet 1 és 3/2 között, a hidrodinamikai módus sorszámától függően. Újabb kutatások (Bamberger et al. (2004) és a mi kísérleti és szimulációs eredményeink is) azt mutatják, hogy *k* = 1 pontosabb.
Az összehasonlíthatóság érdekében az említett frekvenciaképleteket áttranszformáltuk Strouhal-számra és eközben kiderült, hogy mindegyikük felírható a következő formában:

$$St\left(Re, \frac{h}{\delta}\right) \approx \left(c_1 - \frac{c_2}{Re}\right)\left(\frac{1}{h/\delta} - c_3\right) \tag{I.2.3}$$

Az I.2.1. táblázat mutatja a tényezőket az első három módus esetére. Brown (1937) és Jones (1942)

I.2.1. táblázat. A *St* (*Re*, *h/δ*) kapcsolat (I.2.3) egyenlet paraméterei különböző szerzőknél

Módus	Szerző	c_1	c_2	c_3	k
I. módus	Brown [5]	0,4659	12,06	0,007	1
	Jones [12]	0,39	0	0	1
	Curle [9]	0,625	0	0,0267	1
	Curle-Savic [9]	1,43	0	0	3/2
	Brackenridge [3]	0,6298	38,4	0,0235	1
	Holger [10]	1,532	0	0	3/2
	Crighton [8]	2,477	0	0	3/2
	Kwon [15] (*Ma* ≈ 0)	0,45	0	0	1
	Bamberger et al. [2] (Mér.)	0,513	0	0	1
	Bamberger et al. [2] (CFD)	0,443	0	0	1
II. módus	Brown	1,072	27,74	0,007	1
	Jones	1,217	0	0	1,14
	Curle	1,125	0	0,0148	1
	Curle-Savic	3,46	0	0	3/2
	Brackenridge	1,512	92,2	0,0235	1
	Holger	3,332	0	0	3/2
	Crighton	10,385	0	0	3/2
	Kwon (Ma ≈ 0)	1,05	0	0	1

	Brown	1,77	45,83	0,007	1
	Jones	2,52	0	0	1,22
	Curle	1,625	0	0,0103	1
III. módus	Curle-Savic	6	0	0	3/2
	Holger	6,057	0	0	3/2
	Crighton	21,32	0	0	3/2
	Brackenridge	2,645	161,3	0,0235	1
	Kwon (Ma ≈ 0)	1,65	0	0	1

kísérleti eredményei elfogadható egyezést mutatnak *h/δ* = 10 és *Re* ≈ 150 fölött. Brackenridge (1960) eredményei már jobban eltérnek, de még mindig elfogadhatók a *Re* ≥ 200 tartományban. Az elméleti megfontolások alapján levezetett képletek általában túlbecsülik a mérési eredményeket. Megmutatható, hogy alacsony Reynolds-számok és/vagy kis fúvóka-ék távolságok esetén a görbék elválnak egymástól és a köztük lévő relatív eltérés könnyen 100% fölé juthat. Nagyobb fúvóka-ék távolságokra vagy Reynolds-számokra a különböző képletek közötti különbségek kisebbek, de a 25%-ot ott is elérhetik.
Az I.1 fejezetben leírt Powell-féle modellből következően:

$$h = \lambda(n + \varepsilon), \qquad \text{(I.2.4)}$$

ahol *λ* a zavarás hullámhossza, *n* a módus sorszáma, és *ε* kis szám, ami az azt jelzi, hogy az élhang-rendszer effektív rezonanciahossza különbözik *h*-tól.

Az irodalom nem egységes *ε* értékét illetőleg, az függhet a konfiguráció részleteitől és a módus-sorszámtól is. A leggyakrabban előforduló érték 0,25 (Curle (1953), Powell (1961)). Holger 0,35 és 0,5 közötti értékeket talált, a módus-sorszámtól függően, de más szerzők negatív értékeket javasoltak: -0,2-t (Nonomura et al. (2006), Nonomura et al. (2010)); -0,25-öt (Kwon (1996), Kwon (1998)) vagy -3/8-ot (Crighton (1992)).

A frekvencia *h*-tól való függése részben *ε* bizonytalansága miatt bizonytalan. A hipotetikus dipólus forrás pontos helye (az ék csúcsán, vagy attól egy kicsit alvízi irányban) nincs még feltárva, és ez nagyban befolyásolja a frekvencia értékét. Egy másik probléma az, hogy Powell elmélete is és az itt nem ismertetett más elméletek is azt feltételezik, hogy a hullámhossz és a zavarás terjedési sebessége nem változik a fúvóka és az ék között, ami azt jelenti, hogy a zavarás fázisa lineárisan nő a távolság függvényében. Ez azonban nem igaz, ahogyan ezt Stegen & Karamcheti (1970) illetve e sorok írója is társszerzőivel együtt megmutatta (Vaik et al. (2014b), illetve az I.2.6 alfejezetben). Ezeket az „apró” problémákat elhanyagolva, feltételezve, hogy a zavarás a fúvóka-ék távolságot kell, hogy megtegye (1. módus, *ε* = 0, így *λ = h*) az átlagos zavarásterjedési sebességgel, ami mérésekből adódóan a szabadsugár kiömlési sebességének durván 40%-a, egy visszacsatolási kör periódusideje kb. *T ≈ h/(0,4U).* Eszerint az első módus frekvenciája *f ≈ 0,4U/h*, ami nagyon közel van Jones (1942) első módusra vonatkozó képletéhez (0,39*U/h*). Magasabb módusokra ez a heurisztikus modell nem működik.

A következőkben mind kísérleti, mind szimulációs eredményekről beszámolok, először kvalitatív, majd kvantitatív módon.

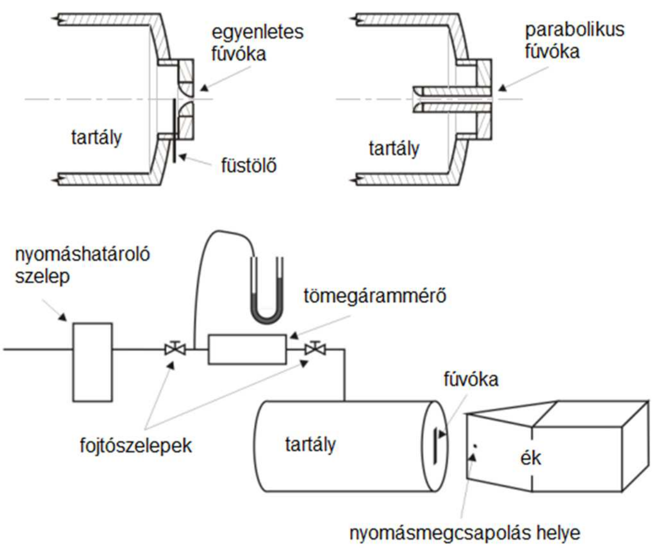
I.2.3 Szimulációs és kísérleti beállítások

Az ANSYS CFX (CFX 5.7.1-től ANSYS CFX 14.0-ig, ANSYS Inc. Southpointe 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317, USA) áramlásszimulációs szoftvert használtuk. A megoldó a véges térfogat módszert használja. Az iterációs célok esetünkben a tömeg és az impulzus voltak. Az áramlást kétdimenziósnak (2D) feltételeztük. Bár a szoftver csak háromdimenziós szimulációkra képes, ha egy sík geometriát és az ahhoz tartozó hálót egy cellaréteg vastagságúra extrudálunk, és ennek két határoló lapján szimmetria peremfeltételt adunk meg, akkor mégiscsak lehetséges a síkáramlások szimulációja.

A közeg 25°C-os levegő volt (ρ = 1,185 kg/m^3, μ = 1,831·10^{-5} kg/ms). Az alacsony Reynolds-szám és Mach szám miatt (*Re* = 60..2000; *M* = 0,003..0,09) az áramlást laminárisnak és összenyomhatatlannak tételeztük fel. Ennek megfelelően nem használtunk turbulenciamodellt. Mind időben, mind térben másodrendű diszkretizálási sémát alkalmaztunk. Tesztelés után megállapítottuk, hogy a kezdeti feltétel nem befolyásolja a végül kialakuló áramlást. Nem kellett semmilyen külön intézkedést tennünk, hogy a lengést beindítsuk; az egy rövid tranziens időszak után spontán módon kialakult.

A numerikusan vizsgált élhangkonfigurációban a fúvókaszélesség δ = 1 mm volt, változó fúvóka-ék távolságokkal és változó szabadsugársebességekkel. Részletes háló- és időlépéstanulmányokat hajtottunk végre egy rögzített konfigurációban (*Re* = 200, h/δ = 10). Megállapítottuk azt is, hogy a relatív hiba állandó értéken tartásához a frekvenciától függetlenül egy periódust ugyanannyi időlépésre kell osztani. Mindezeket a részleteket Paál & Vaik (2007)-ben tárgyaljuk.

Az áramlás kétdimenziósságának ellenőrzésére *Re* = 225 esetén háromdimenziós (3D) szimulációt is végrehajtottunk. Azért ezt a Reynolds-számot választottuk, mert ez volt a legmagasabb szimulált érték, ahol még tiszta első módus alakult ki. Ennek a szimulációnak a részletei Vaik et al. (2013)-ban találhatók. Az összehasonlítás alapján azt állapíthatjuk meg, hogy a 3D szimuláció középsíkjában ugyanolyan áramlás alakul ki, mint a 2D áramlás, és a lengési frekvencia mindkét esetben ugyanannyi.



I.2.3. ábra. Lent: a kísérleti berendezés; fönt: a fúvókák vázlata

A kísérleti rendszert Vaik & Paál (2011)-ben írtuk le részletesen, itt csak rövid összefoglalót adok (I.2.3. ábra). 0,5 bar-ra csökkentett nyomású sűrített levegőt vezettünk ¾”-os rugalmas szálerősített műanyag csövön egy 57 l-es hengeralakú nyomástartályba. A szabadsugár átlagsebességének meghatározására a vezetékbe, a nyomáscsökkentő szelep és a tartály közé hőelemes elven működő tömegáramszenzort építettünk, aminek kimenő jele feszültség (Sensortechnics, Honeywell AWM700). A szenzor előtt hosszú egyenes rézcső volt, hogy zavartalan rááramlást biztosítsunk. Két különböző fúvókát alkalmaztunk, hogy egyenletes, illetve parabolikus sebességprofilt alakítsunk ki. Őket „egyenletes fúvóka” illetve „parabolikus fúvóka” néven fogjuk emlegetni. Az egyenletes fúvókát két negyedhenger alkotta, biztosítva a gyors kontrakciót. A parabolikus fúvókában két párhuzamos 150 mm hosszú lemez, 15 mm sugarú lekerekítéssel biztosította a parabolikus sebességprofil kialakulását. Mindkét fúvóka keresztmetszete téglalap alakú volt 20 fölötti oldalaránnyal, ami a központi régióban jó párhuzamosságot biztosított. Az egyenletes fúvókába a konvergens rész elé füstölőrudat lehetett helyezni, amivel az áramlást vizualizálni tudtuk. A füstcsíkot fényszóróval világítottuk meg és a képet nagysebességű digitális kamerával rögzítettük (LaVision ImagerCompact), amely maximum 90 Hz-es képfrekvenciával és 320x240 pixeles felbontással működött. A parabolikus esetben nem vizualizáltuk az áramlást. A 30°-os ék polírozott acélból készült. Magassága (*z* irány) 150 mm volt, ez kétszer akkora, mint a fúvóka résének magassága, a véghatások elkerülése céljából. A fúvóka-ék távolság az 5..53 mm tartományban volt változtatható. Nyomástávadót (Sensortechnics, 113LP01D-PCB) építettünk az ékbe a csúcstól 26,2 mm távolságra. Az erősített analóg nyomásjelből FFT segítségével határoztuk meg a lengési frekvenciát.

I.2.4. Eredmények

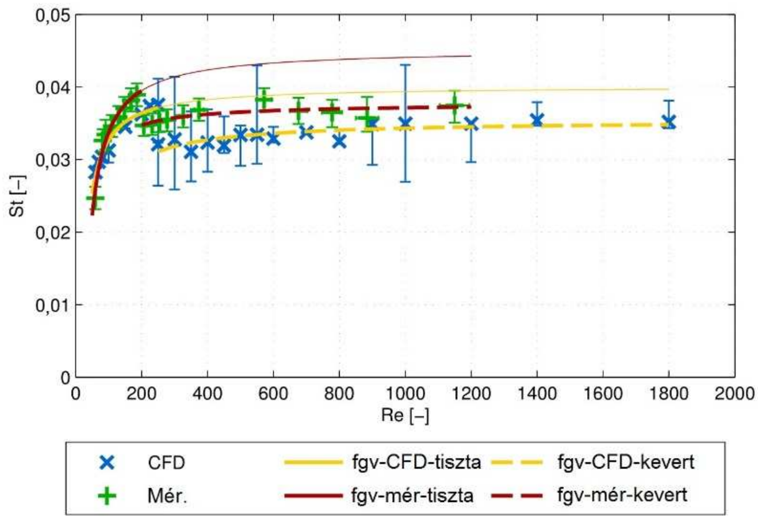
I.2.4.1 Rögzített geometriai konfiguráció, változó Reynolds-szám

A dimenziótlan fúvóka-ék távolság $h/\delta \approx 10$ volt, a szimulációkban pontosan, a kísérletekben közelítőleg, míg a Reynolds-számot a tömegáram szabályozásával változtattuk. Az I.2.2. táblázat mutatja a h/δ értékeket és a vizsgált Reynolds-szám tartományokat mind az egyenletes, mind a parabolikus profil esetére, mind a kísérletekben, mind a szimulációkban.

I.2.2. táblázat. *h/δ* értékei és Reynolds-szám tartományok a Reynolds-szám függést vizsgáló tanulmányban

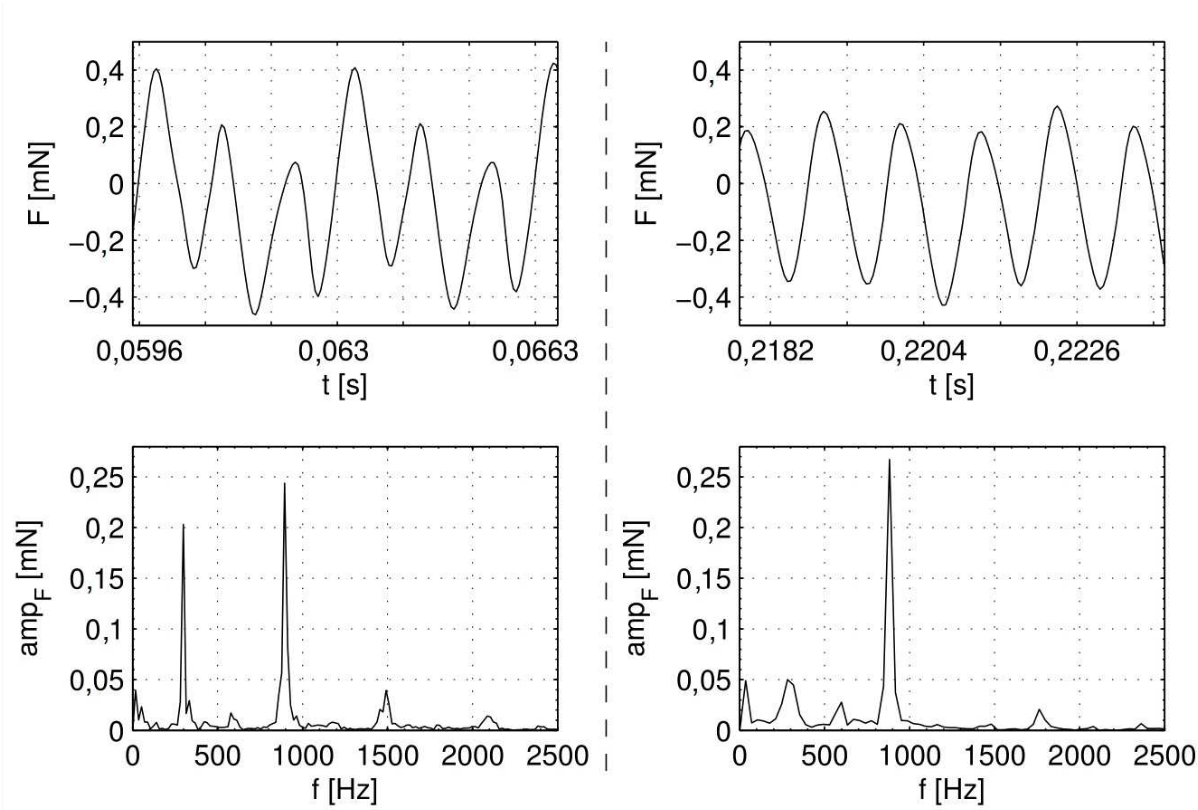
	Egyenletes		Parabolikus	
	CFD	Mér.	CFD	Mér.
h/δ	10	10,26 ± 0,23	10	9,72 ± 0,44
Re	0 – 1800	0 – 1200	0 – 2000	0 – 1400

Először tekintsük az <u>egyenletes sebességprofil</u> esetét. $Re \approx 60$ alatt nem tapasztaltunk élhangot, az áramlás stacionárius maradt. $Re \approx 60$ körül mind a kísérletekben, mind a szimulációkban szakaszos első módusú élhanglengés jelenik meg. Ez a szimulációk esetén azt jelenti, hogy a szimuláció önmagában stacionárius mezőt produkál, de ha az átlagsebesség felével transzverzális irányban megzavarjuk, akkor a lengés megindul és a zavarás megszüntetése után is marad. A kísérletek esetén pedig azt jelenti, hogy az élhangjelenség ki-be-kapcsol. Re = 100 fölött stabil első módusú élhanglengés jött létre külső gerjesztés nélkül, mind a kísérletekben, mind a szimulációkban. A szimulációkban Re = 250-nél, a kísérletekben Re = 200-nál megjelent a második módus, az első módus fennmaradása mellett. A második módus megjelenésével az első módus frekvenciája, és ezáltal



I.2.4. ábra. A Strouhal-szám Reynolds-számtól való függése az 1. módusban, egyenletes fúvóka, *h/δ* ≈ 10; a négy vonal az I.1.6 egyenlet és a 4. táblázat által leírt függvényeket jelenti, a szimulált és a mért eredményekre, illetve a tiszta és kevert első módusra vonatkoztatva

Strouhal-száma a szimulációkban 14,5±2%-al, míg a kísérletekben 14±2%-al esett vissza az extrapolált tiszta első módusú értékhez képest. Az extrapoláció alapja a fejezetben később bevezetendő képlet, amely Brown képletéhez hasonlít. Hasonló esést tapasztalt Jones (1942) illetve Stegen & Karamcheti (1970) is. Az I.2.4. ábrán az első módus Strouhal-számának Reynolds-szám függése látható, mind a tiszta, mind a kevert formában. Az ábrában folytonos illetve szaggatott vonallal jelöltük a később bevezetendő képlettel illesztett Strouhal-szám görbéket rendre a tiszta első módus illetve a kevert első módus esetén. A vastag folytonos vonal a második módus megjelenésekor vékonnyá válik – ez jelzi az extrapolált értékeket. Ettől a ponttól jobbra lehet megfigyelni az esést – a vékony folytonos vonal és az ugyanolyan színű szaggatott vonal különbségeként. A hibasávok a szimuláció esetén a spektrális csúcs szélességét, a mérések esetén a mérési bizonytalanságot jelölik. A kísérleti (barna) és a CFD (sárga) görbék között a különbség általában 7,5-8,5% között van, csak az első módus megjelenése környékén nő 10% fölé, ahol a görbék meredekek, így kis hiba a Reynolds-számban nagy hibát eredményez a Strouhal-számban, illetve a második módus megjelenésekor, ahol a görbében

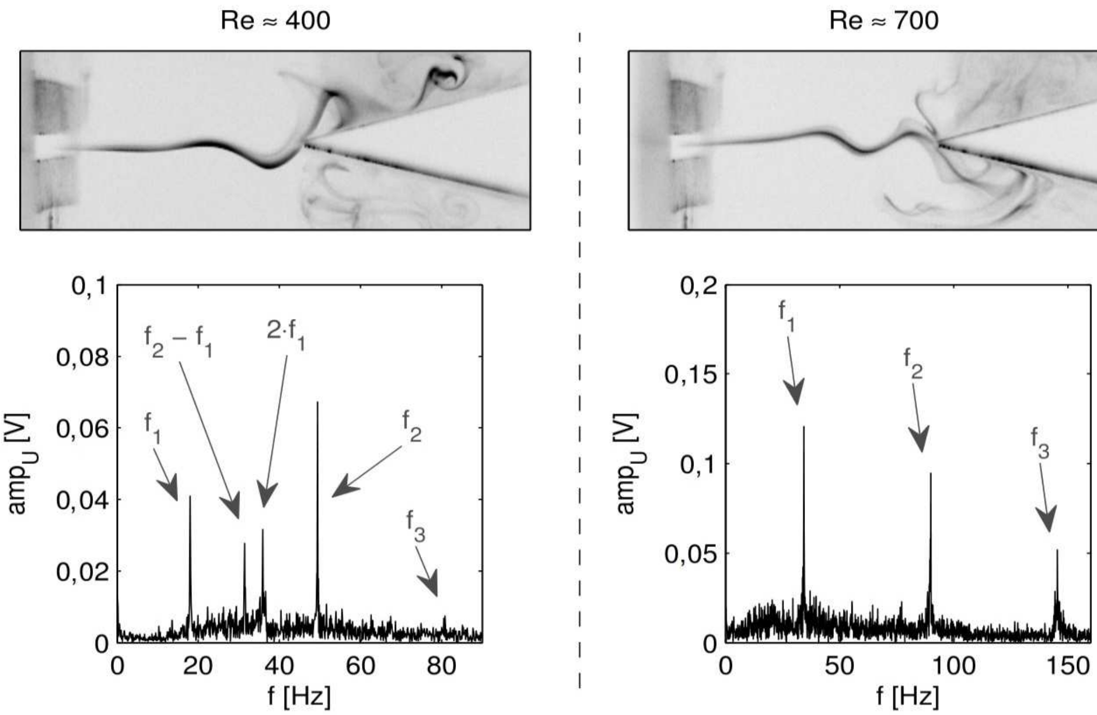


I.2.5. ábra. 1. és 2. módusú élhanglengés együtt létezése szimulációkban, *Re* = 600-nál, *h/δ* = 10-nél, egyenletes profillal. A két oldal az ugyanannak az ékre ható erőjelnek két különböző részét képviseli. Bal oldal: az első és a második módus összehasonlítható; jobb oldal: a második módus dominál

ugrás van. A különbség mindenhol a Strouhal-szám meghatározásának hibahatárán belül van.

A második módussal egyidőben mindig jelen volt az első módus is, a kérdés csak az volt, hogy a második módus volt-e domináns, vagy erősségük összehasonlítható volt-e. Például az I.2.5. ábrán ugyanannak a CFD szimulációnak két részét láthatjuk (*Re* = 600, *h/δ* = 10, egyenletes sebességprofil). Fönt az ékre ható erő időfüggvénye látható, lent pedig egy valamivel hosszabb időjelből készített spektrum. Először a két módus hasonló erősségű volt (baloldal), később a második módus vált dominánssá (jobb oldal). Brown (1937) kísérleteiben a második módus *Re* = 220 körül jelentkezett és őnála is voltak párhuzamosan létező módusok. Stroboszkóp korongon áteresztett fénnyel világította meg az áramlást és fotókat készített. Így különleges esetektől eltekintve, Brown csak a domináns módus frekvenciáját tudta mérni, ha több módus volt egyszerre jelen. A különleges esetekből Brown azt látta, hogy az első módus frekvenciája kb. 7%-kal alacsonyabb, amikor más módusok is jelen vannak, mint ami a tiszta első módusra levezetett képletéből következne. Mivel azonban Brown úgy találta, hogy képlete bizonyos esetekben 6% hibát is tartalmazhat, ezért azt a következtetést vonta le, hogy a frekvencia gyakorlatilag változatlan marad, pedig mindez azt is jelenthetné, hogy az ugrás 7%-nál is nagyobb, ami Jones (1942) és a mi kísérleti és szimulációs eredményeinkkel is egyezne.

A harmadik módus megjelenése után az első kettő megmarad, tehát három módus létezik szuperponálódva, egyidejűleg. A szimulációkban a harmadik módus először *Re* = 900-nál jelenik meg, de szakaszosan, nem stabilan, az egész szimuláció alatt csak viszonylag rövid időre. A harmadik módus Re = 1400-tól volt csak teljesen stabil, a szimuláció teljes időtartama alatt jelen. A kísérletekben meglepően korán jelentkezik a harmadik módus, már *Re* ≈ 250-nél. Először rendkívül gyenge, a domináns második módus mellett alig észrevehetően, nagyobb Reynolds-számoknál



I.2.6. ábra. 3. módusú élhanglengés kísérletekben. Bal oldal: *Re* ≈ 400; jobb oldal: *Re* ≈ 700; fölső sor: áramlást vizualizáló fénykép; alsó sor: a nyomástávadó kimeneti jelének spektruma, f_n az *n*-edik módus frekvenciája, *n* = 1, 2, 3

erősebben. A lengő áramlásokról és hozzájuk tartozó spektrumokról rendre *Re* ≈ 400-nál és 700-nál az I.2.6. ábrán láthatunk fényképeket. A *Re* ≈ 700 esetben három, a *Re* ≈ 400 esetben csak két félhullámot figyelhetünk meg a fúvóka és az ék között, de a harmadik módus mindkét esetben jelen van a spektrumban. Az I.2.6. ábra ezen kívül még egy tipikus nemlineáris hatást is mutat: gyakran, amikor két vagy több módus egyszerre létezik, és ha ezek kölcsönhatásba lépnek, akkor a frekvenciák összegének és/vagy különbségének megfelelő csúcs is megjelenik a spektrumban. Re ≈ 400-nál az első és második módus frekvenciáinak különbsége f_2-f_1 megfigyelhető a spektrumban. Ugyanezt figyelte meg kísérletileg Brackenridge & Nyborg (1957) és Lucas & Rockwell (1984) is.
Most a parabolikus sebességprofillal kapott eredményeket ismertetem. Ezek meglepően különböznek az egyenletes profilútól. Alacsony Reynolds-számoknál hasonló viselkedést figyelhetünk meg: amikor elérjük az alsó küszöbértéket *(Re* = 50 a szimulációkban, *Re* ≈ 85 a kísérletekben), kialakul az első módus. Növekvő Reynolds-számmal megjelenik a második módus is (*Re* = 150 a szimulációkban, *Re* ≈ 180 a kísérletekben), ami együtt létezik az első módussal. Hasonlóan az

egyenletes profil esetéhez, az első módus frekvenciája leesik, de itt ennek mértéke csak 9,7±2,2%, ami valamivel kevesebb, mint a másik esetben. Ez azonban csak a kísérletekben figyelhető meg, a szimulációkban ugyanis az első módus a második módus kezdete után rövidesen eltűnik, így nem volt elég adat, hogy a frekvenciaesés mértékét meghatározzuk. A Reynolds-számot tovább növelve a szimulációkban *Re* = 300-nál, a kísérletekben *Re* ≈ 360-420-nál az első módus megszűnik és tiszta második módust figyelhetünk meg. Ez kvalitatíve más viselkedés, mint az egyenletes profil esete. A szimulációk esetén ez a legmagasabb módus, amit találtunk. A kísérleteket tekintve, tovább növelve a Reynolds-számot (*Re* ≈ 650-nél) megjelenik a harmadik módus és eltűnik a második, viszont újra megjelenik az első, szuperponálódva a harmadikra. Még magasabb Reynolds-számnál (kb. 900-tól) tiszta harmadik módus van jelen. Hasonló viselkedés figyelhető meg, ha a Reynolds-számot csökkentjük, de itt a módusugrások más Reynolds-számoknál következnek be, és nem tapasztalunk tiszta második módust. Növekvő *Re* esetén a 350-600 tartományban tiszta második módus van, míg csökkenő *Re* esetén ez egyáltalán nincs, hanem helyette az együtt létező első és harmadik módus tartománya kiterjed. A hiszterézisről és a módusugrásokról többet írunk Vaik & Paál (2011)-ben.

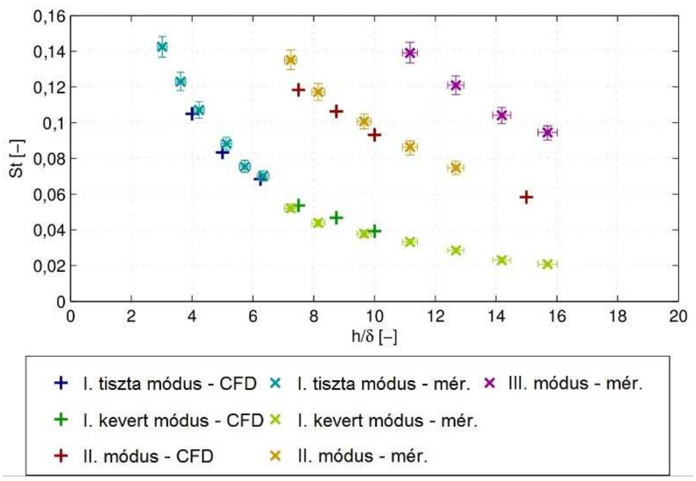
A kétféle sebességprofil viselkedését összehasonlítva a következő különbségeket találjuk:

- A parabolikus profil esetén az első és a második módus körülbelül ugyanannál a Reynolds-számnál jelenik meg, mint az egyenletes profil esetén. Harmadik módust szimulációval egyáltalán nem találtunk; kísérletekkel parabolikus profilnál sokkal nagyobb Reynolds-számnál jelent meg először (*Re* ≈ 650), mint az egyenletes profilnál (*Re* ≈ 250).
- Az egyenletes profil esetén, amikor a Reynolds-szám növelésével megjelenik az új módus, a régi, alacsonyabb módul tovább él és a legtöbb esetben két-három módus egymásra szuperponálódva létezik. Mivel a módusfrekvenciák egymással nem állnak harmonikus kapcsolatban, a kialakuló mozgás <u>nem periodikus</u>. Semmi jel nem utal arra, hogy magasabb Reynolds-számoknál az alacsonyabb módusok megszűnnének. Ezzel szemben a parabolikus esetben a magasabb módus megjelenésével az alacsonyabb módus eltűnik és tiszta második, illetve harmadik módusú lengések is kialakulnak.
- A parabolikus esetben – mind a kísérletekben, mind a szimulációkban – majdnem mindenhol az alapfrekvencia egyharmadánál, és annak többszöröseinél erős frekvenciakomponenst észleltünk a spektrumban. Ez az eredmény feltűnően egyezik Lucas & Rockwell (1984) illetve Kaykayoglu & Rockwell (1986) kísérleti eredményeivel, akik pontosan ugyanerről számoltak be.
- Parabolikus profil esetén a lengés frekvenciája (s így a Strouhal-szám) 15-20%-kal nagyobb, mint az egyenletes profilé. Ségoufin et al. (2004) azt találták, hogy az <u>egyenletes profil</u> kb. 50%-al nagyobb frekvenciákat eredményez, mint a parabolikus, ugyanarra a <u>maximum sebességre</u>. Ha az ő egyenletes illetve parabolikus profilra vonatkozó eredményeiket ekvivalens (az átlagsebességre alapozott) Reynolds-számokra összehasonlítjuk, az derül ki, hogy alacsony Reynolds-számnál (a lengés határának közelében) a lengési frekvenciák közel egyenlők, de gyorsabban nőnek a parabolikus esetben, ami magasabb *Re* esetén 10-20%-al magasabb frekvenciát eredményez. Ez konzisztens a mi eredményeinkkel.
- A parabolikus esetben a nyomásfluktuációk rms értéke 35%-al nőtt az egyenletes esethez képest.
- A szimulációt konstans nyomás és nulla sebesség kezdeti feltétellel indítva a kezdeti tranziens fele olyan hosszú volt a parabolikus, mint az egyenletes esetben. Ezt kísérletileg nem vizsgáltuk.
- E felismerések egy része (de nem mind) előzetesen magyarázható azzal a ténnyel, hogy kb. 20%-al több impulzust és kb. 54%-al több energiát fecskendezünk a rendszerbe a parabolikus esetben, mint az ugyanolyan Reynolds-számú egyenletes profilú esetben.

I.2.4.2 Rögzített Reynolds-szám, változó fúvóka-ék távolság

A Reynolds-számot konstans értéken tartottuk, míg a fúvóka-ék távolságot változtattuk. Pontos értékek és a paraméter-intervallumok a I.2.3. táblázatban találhatók. Minden esetben kvalitatíve ugyanaz a viselkedés figyelhető meg. A módusok határai kicsit változnak a Reynolds-számmal és a parabolikus esetben magasabb módusok önállóan is jelen lehetnek, hasonlóan az előző fejezetben találtakhoz. Az <u>egyenletes</u> esetben a következő viselkedés figyelhető meg (I.2.7. ábra):

- Az első módus *h/δ* = 3-4-nél jelentkezik (kisebb értékek a nagyobb Reynolds-számoknál);
- *h/δ* = 7-11-nél megjelenik a második módus, együtt az elsővel és eközben egy enyhe változás következik be az első módus Strouhal-számának trendjében.
- A kísérletekben nagyobb Reynolds-számoknál, ha a távolságot *h/δ* = 11-13 fölé növeljük, megjelenik a harmadik módus, párhuzamosan az elsővel és a másodikkal.
- *h/δ*-t tovább növelve a második módus megszűnik, és az első és a harmadik módus él tovább együtt.



I.2.7. ábra A Strouhal-szám függése a dimenzótlan fúvóka-ék távolságtól; egyenletes profil, *Re* = 350 and *Re* ≈ 375, rendre a szimuláció, illetve a kísérlet esetében

I.2.3. táblázat. A Reynolds-szám értékei és *h/δ* tartományok a *h/δ* függést vizsgáló tanulmányban

	Egyenletes		Parabolikus
	CFD	**Mér.**	**Mér.**
Re	350	≈189, 326 és 380	≈192, 348, 586 és 911
h/δ	0 - 15	0 - 16	0 - 17

Az I.2.7. ábra mutatja a kísérletből kapott Strouhal-számokat *Re* ≈ 375-re és a szimulációkból kapottakat *Re* = 350-re. Az egyezés kitűnő, különösen annak figyelembevételével, hogy a *Re* = 350-380 tartományban rögzített *h/δ* esetén a Strouhal-szám egy kicsit nő. A másik két Reynolds-számra végzett kísérletek nagyon hasonló képet mutatnak.

A <u>parabolikus</u> esetben, ahol kísérleti vizsgálatokat végeztünk, különböző móduskonstellációkat tapasztalhatunk:

- Az első módus kb. ugyanannál a *h/δ* értéknél jelenik meg, mint az egyenletes esetben (*h/δ* ≈ 4-5, kisebb értékek nagyobb Reynolds-számnál).
- *h/δ* ≈ 6 - 10-nél elkezdődik a második módus, párhuzamosan az elsővel és ugyanakkor az első módus Strouhal-számának trendjében egy kis törés jelentkezik.
- A távolságot növelve néha, de nem mindig tiszta második módus figyelhető meg.
- A harmadik módus kialakulásakor (*h/δ* ≈ 9 - 17) először együtt létezik az első és a második módussal, később a második módus megszűnik, az első és a harmadik marad.
- Tovább növelve a távolságot tiszta harmadik módus figyelhető meg.
- A legnagyobb távolságok és a legnagyobb Reynolds-számok kombinációjánál (*h/δ* ≈ 15 – 17 és *Re* ≈ 570 és 890) a negyedik módus szintén előfordult, vagy tisztán, vagy a harmadik módusra szuperponálva.

A hiszterézis jelenétét ugyancsak megvizsgáltuk a parabolikus esetben, $Re \approx 380$-nál. Nem találtunk hiszterézist; a távolság növelésével vagy csökkenésével ugyanannál az ékpozíciónál találtuk a módusugrásokat.

I.2.5. A Strouhal-szám függése a Reynolds-számtól és h/δ-tól

I.2.5.1 A Strouhal-szám Reynolds-számtól való függése

Először a Strouhal-szám Reynolds-számtól való függését tekintjük át $h/\delta \approx 10$-nél.

Minden móduson belül a lengési frekvencia az átlagsebesség lineáris függvényének bizonyult, mind a parabolikus, mind az egyenletes profilú esetben:

$$f = a_1 + a_2 U.^{1} \qquad \text{(I.2.5)}$$

Így minden módus Strouhal-száma felírható

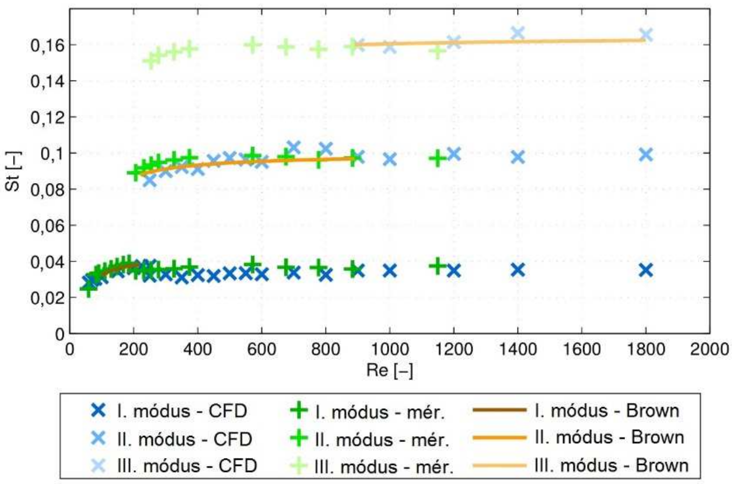
$$St(Re) = a_1 \frac{\delta}{U} + a_2 \delta = a_1 \frac{\delta^2/\nu}{U\delta/\nu} + a_2 \delta = \frac{c}{Re} + St_\infty \qquad \text{(I.2.6)}$$

alakban. c és St_∞ értékeit a különböző módusokra a legkisebb négyzetek módszerével határoztuk meg a kísérleti, illetve a CFD szimulációs eredményekből. Az adatokat az I.2.4. táblázatban gyűjtöttük

I.2.4. táblázat. Az (I.2.6) egyenlet együtthatói egyenletes sebességprofilra

	I. módus				II. módus		III. módus	
	c		St∞					
	tiszta	kevert	tiszta	kevert	c	St∞	c	St∞
CFD, egy.	-0,7387	-1,079	0,04010	0,03541	-4,072	0,1034	-13,76	0,1740
Mér., egy.	-1,150	-0,6008	0,04522	0,03775	-1,800	0,1001	-1,841	0,1608
CFD, parab.	-0,7894		0,04740		-3,094	0,1194	-	-
Mér., parab.	-1,169	-0,6269	0,05070	0,04435	-3,012	0,1320	13,52	0,1854

[1] Az egyenesnek nem kell az origóba tartania, mert egy bizonyos küszöbsebesség alatt nincs lengés.



I.2.8. ábra. Strouhal-szám a Reynolds-szám függvényében; egyenletes profil, h/δ ≈ 10

össze úgy, hogy különválasztottuk a tiszta első módusú lengést és a kevert módusú lengésből az első módust. Az I.2.8. ábra foglalja össze az egyenletes sebességprofilú eset szimulációs és kísérleti vizsgálatainak eredményeit. Mindhárom módus Strouhal-száma van ábrázolva a Reynolds-szám függvényében egyenletes sebességprofil esetén, Brown félempirikus képletével együtt. Hibasávokat itt nem tüntettünk fel, hogy ne zsúfoljuk túl az ábrát. Mivel *c* értéke negatív, a Strouhal-szám első tagja (*c/Re*) is negatív és hiperbolikusan tart nullához, ahogy Re nő. Így, ahogyan ez az I.2.8. ábrán is látható, a Strouhal-számok a kis Reynolds-számok tartományában növekednek, majd majdnem konstanssá válnak[2]. Bár néhány esetben a CFD-ből illetve a kísérletekből kapott *c* érték jelentősen különbözik, a Strouhal-szám mégis mérési hibán belül egyezik, ahogyan ezt az I.2.8. ábra is mutatja. Ez azzal magyarázható, hogy az első tag nevezője (Re) legalább egy nagyságrenddel nagyobb, mint a *c* értékek közötti különbség. A tiszta első módusban a St_∞ értékek közötti különbség is jelentős, ott viszont *Re* kisebb, a 60-250 tartományban van, és így az első tag nem elhanyagolható részét alkotja a Strouhal-számnak.

A parabolikus eset *St-Re* összefüggését nem mutatjuk be itt grafikusan, de pl. Vaik & Paál (2011)-ben megtalálható. A parabolikus esetben, ellentétben az egyenletes profillal, *c* értéke nem mindig negatív. Bár a kísérletekben azt találtuk, hogy a harmadik módusban *c* negatív, ekkor az első tag (c/Re) legalább két nagyságrenddel kisebb, mint a második tag, tehát a Strouhal-szám gyakorlatilag konstansnak tekinthető. A CFD szimulációk során az első módus nem volt kettéválasztva tiszta és kevert esetekre, mert az első módus hamar megszűnt és az első-második kevert módus csak ritkán volt tapasztalható. Ekkor a kísérleti görbék a tiszta és a kevert első módus között húzódnak.

I.2.5.2 A Strouhal-szám fúvóka-ék távolságtól való függése

Minden, különböző Reynolds-számon végzett kísérleti és numerikus vizsgálat azt támasztja alá, hogy a frekvencia fordítottan arányos a fúvóka-ék távolsággal, mind az egyenletes, mind a parabolikus esetben.

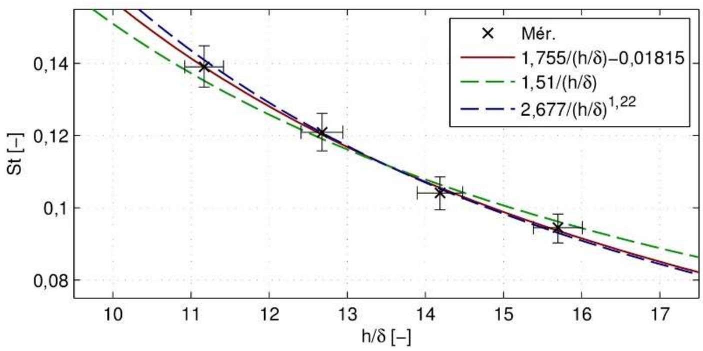
$$f = \frac{b_1}{h} + b_2{}^3 \qquad \text{(I.2.7)}$$

Eszerint a Strouhal-szám egy rögzített Reynolds-számnál:

$$St\left(\frac{h}{\delta}\right) = \frac{b_1\delta}{hU} + \frac{b_2\delta}{U} = d\frac{1}{h/_\delta} + St^*, \qquad \text{(I.2.8)}$$

[2] A nagyobb Reynolds-szám tartományban állandó Strouhal-szám ismerős a Kármán féle örvénysor tulajdonságaiból, amit az örvényalapú áramlásmérők is kihasználnak.
[3] A *h* = 0 esettel nem kell foglalkoznunk, hiszen *h* küszöbértéke alatt nincs lengés.

ahol *d* és St^* konstansok, amiket a legkisebb négyzetek módszerével határozunk meg, és az I.2.5. táblázatban közlünk *Re* ≈ 350-re az egyenletes profilra. Más Reynolds-számokra, illetve parabolikus profilra nagyon hasonló eredményeket kaptunk, tehát azokat itt nem mutatjuk be. Ennek az alfejezetnek a célja az, hogy meggyőzően demonstrálja a frekvencia 1/*h* függését illetve a kísérletek és szimulációk egyezését. Később azonban, együtt egy univerzális *St* (*Re*, *h/δ*) függvénnyel, amely minden profilra és minden Reynolds-számra érvényes, azokat az eredményeket is bemutatjuk. *St** értéke nem elhanyagolható, hiszen *h/δ* = 10-nél az első tag 5-10%-kát teszi ki. Ez részben magyarázza a k kitevő bizonytalanságát ((1.2.1) egyenlet és az azt követő diszkusszió). Egy tiszta *d/(h/δ)* függvény nem elegendő *St* megfelelő illeszkedésének eléréséhez. Az I.2.9. ábrán az élhang harmadik módusát ábrázoljuk *Re* ≈ 380-ra, a kísérleti eredményekre illesztett különböző görbékkel. Bár mindhárom görbe a mérési pontosságon belül van, világosan látszik, hogy a vörös görbe, amit az (1.2.8) egyenlet ír le, illeszkedik a legjobban. Míg a zöld görbe, ami $d/(h/\delta)^k$ alakú, *k* = 1-el, az adatsort annak két végén kb. 3%-al túl/alábecsüli, a kék görbe, ami Jones *k* = 1,22 kitevőjét használja, némileg korrigál ezen.



I.2.9. ábra. Az egyenetes profilú élhang 3. módusának Strouhal-számai *Re* ≈ 380-nál *h/δ* ≈ 11 - 16 között. $d/(h/\delta)^k$ alakú görbék *k* = 1 és 1,22-vel illetve *d*/(*h/δ*) + *St alakú görbe illesztésének összehasonlítása**

I.2.5. táblázat. Az (I.2.8) egyenlet együtthatói egyenletes profilra, *Re* = 350-re a CFD, *Re* ≈ 380-ra a mérések esetén

	I. módus				II. módus		III. módus	
	tiszta		kevert					
	d	St*	d	St*	d	St*	d	St*
CFD	0,4079	0,002681	0,4288	-0,003141	0,9174	-0,000980	-	-
Mér.	0,4259	0,003732	0,4080	-0,004638	0,9975	-0,003446	1,755	-0,01815

I.2.5.3 *St* (*Re*, *h/δ*)

Az eddig talált összefüggések azt sugallják, hogy a frekvencia *U*-nak és 1/*h*-nak bilineáris függvénye. Úgy találtuk, hogy a legáltalánosabb négyparaméteres bilineáris függvény helyett:

$$f(U,h) = q_1 + q_2 U + q_3 \frac{1}{h} + q_4 \frac{U}{h} \tag{I.2.9}$$

a következő, speciálisabb, csak három paramétert használó képlet is tökéletes illeszkedést biztosít:

$$f(U,h) = p_1 (U + p_2)\left(\frac{1}{h} + p_3\right). \tag{I.2.10}$$

Kiszámítva a Strouhal-számot:

$$\begin{aligned} St(U,h) &= \frac{f\delta}{U} = p_1\left(1+\frac{p_2}{U}\right)\left(\frac{1}{h/\delta} + p_3\delta\right) \\ &= \left(p_1 + \frac{p_1 p_2\, \delta/\nu}{U\,\delta/\nu}\right)\left(\frac{1}{h/\delta} + p_3\delta\right). \end{aligned} \tag{I.2.11}$$

Ez a képlet ekvivalens a Brown (1937) és Brackenridge (1960) által tanácsolttal. Mivel dimenziótlan változónk h/δ, így a rés szélességének, δ-nak nincs hatása a Strouhal-számra, az konstansnak tekinthető. Így az (I.2.11) képlet felírható tisztán dimenziótlan változók segítségével is:

$$St\left(Re, \frac{h}{\delta}\right) = \left(c_1 - \frac{c_2}{Re}\right)\left(\frac{1}{h/\delta} - c_3\right), \qquad \text{(I.2.12)}$$

ami azonos az (I.2.3) egyenlettel.

A hasonlósági szabályok ellenőrzésére különböző Reynolds-számoknál és két különböző résszélességnél, de ugyanolyan dimenziótlan fúvóka-ék távolságnál végeztünk szimulációkat, aminek eredményeit az I.2.6. táblázatban foglaltuk össze. A Strouhal-számok nagyon jó egyezést mutatnak, valamint a második módus is gyakorlatilag ugyanannál a Reynolds-számnál jelenik meg. Így az (I.2.12) egyenlet jogosságát igazoltuk.

A kísérleti és a szimulációs vizsgálatok eredményei hibahatárukon belül különböznek csak, ezért a görbeillesztést az egyesített adathalmazon végeztük. Az I.2.7. táblázatban közöljük a görbeillesztés paramétereit az R^2 (determinációs együttható) értékekkel együtt. R^2 értéke – a kevert módus első módusának kivételével – mindig nagyobb, mint 0,95, így az illeszkedés kiváló.

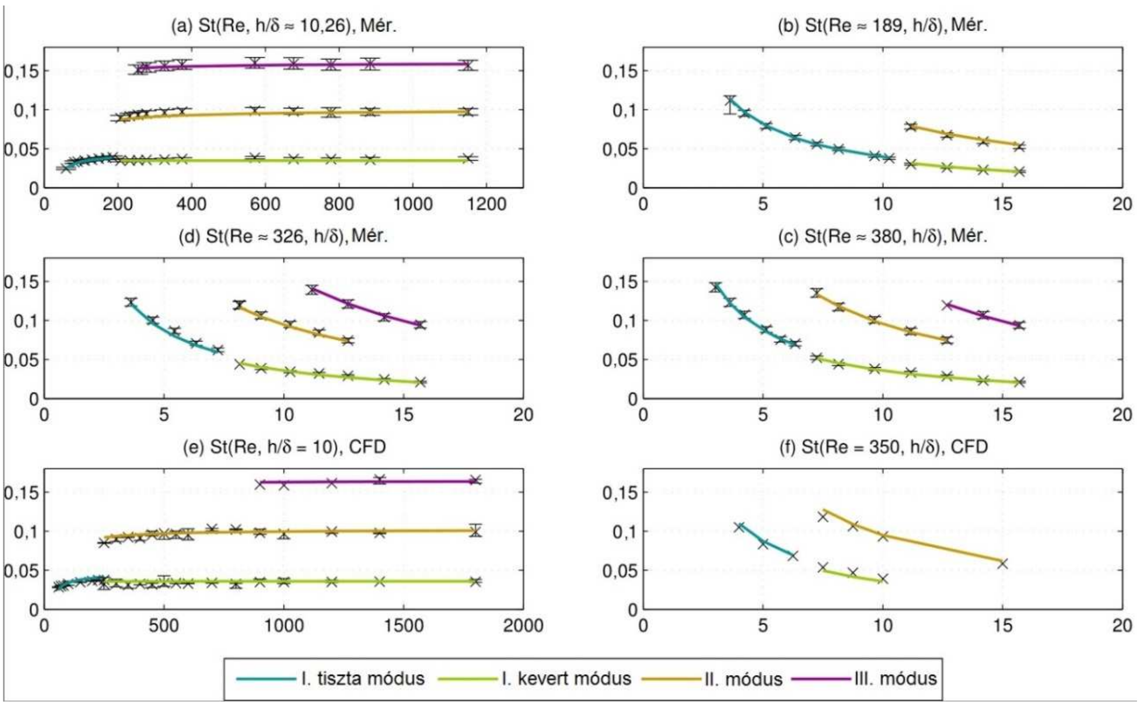
I.2.6. táblázat. Strouhal-számok két különböző résszélességnél, de ugyanolyan dimenziótlan paraméterek mellett elvégzett szimulációkban

Re [-]	**St [-]**			
	δ = 1 mm		**δ = 3,2 mm**	
	I. módus	**II. módus**	**I. módus**	**II. módus**
150	0,0345	-	0,0345	-
200	0,0362	-	0,0352	-
250	0,0375	0,0849	0,0369	0,0856
300	0,0328	0,0900	0,0361	0,0901

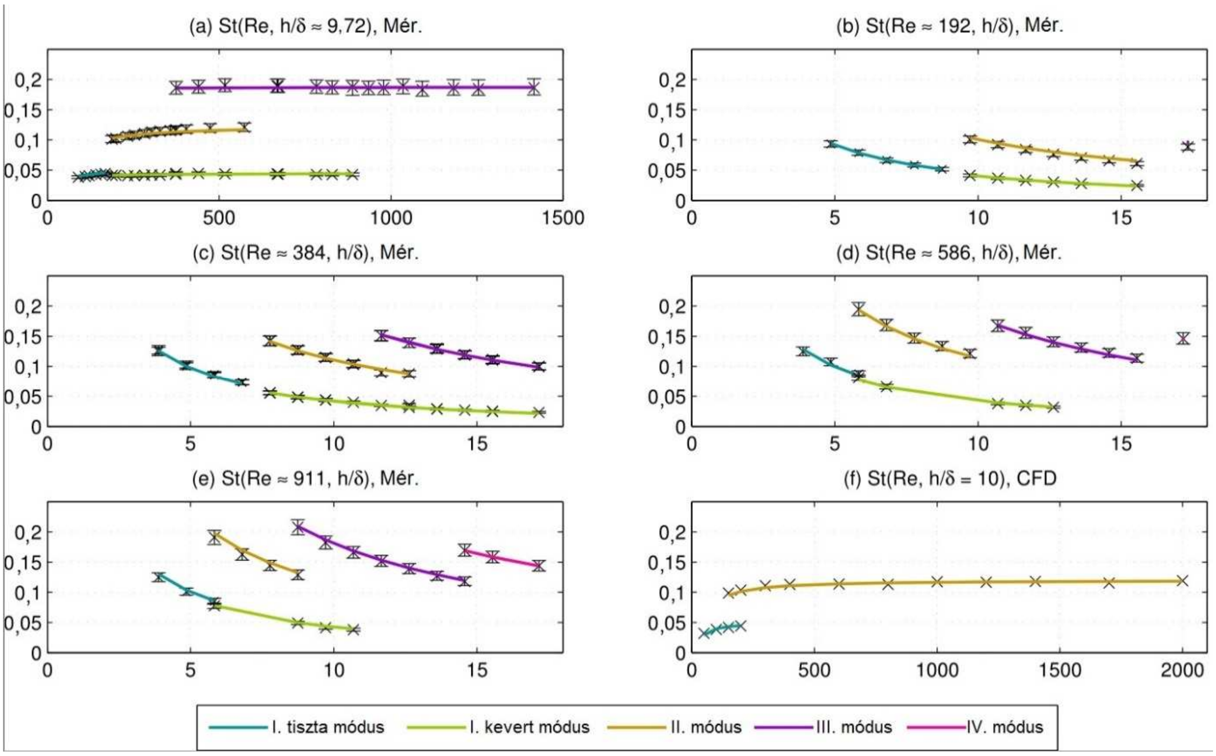
I.2.7. táblázat. A St(Re, h/δ) összefüggés ((I.2.12) egyenlet) együtthatói

		c_1 [-]	c_2 [-]	c_3 [-]	R^2
Egyenletes	I. tiszta módus	0,4837	12,31	0,005461	0,9941
	I. kevert módus	0,4167	0,2292	0,01426	0,9015
	II. módus	1,066	27,11	0,004157	0,9614
	III. módus	1,884	19,96	0,01261	0,9934
Brown [hivatkozás]	I. módus	0,4659	12,06	0,007	
	II. módus	1,072	27,74	0,007	
	III. módus	1,77	45,83	0,007	
Parabolikus	I. tiszta módus	0,5230	11,08	0,004836	0,9953
	I. kevert módus	0,5029	6,6451	0,01417	0,9832
	II. módus	1,177	37,15	-0,002273	0,9786
	III. módus	1,972	6,954	0,007792	0,9916
	IV. módus	2,365	-55,21	-0,0009999	0,9982

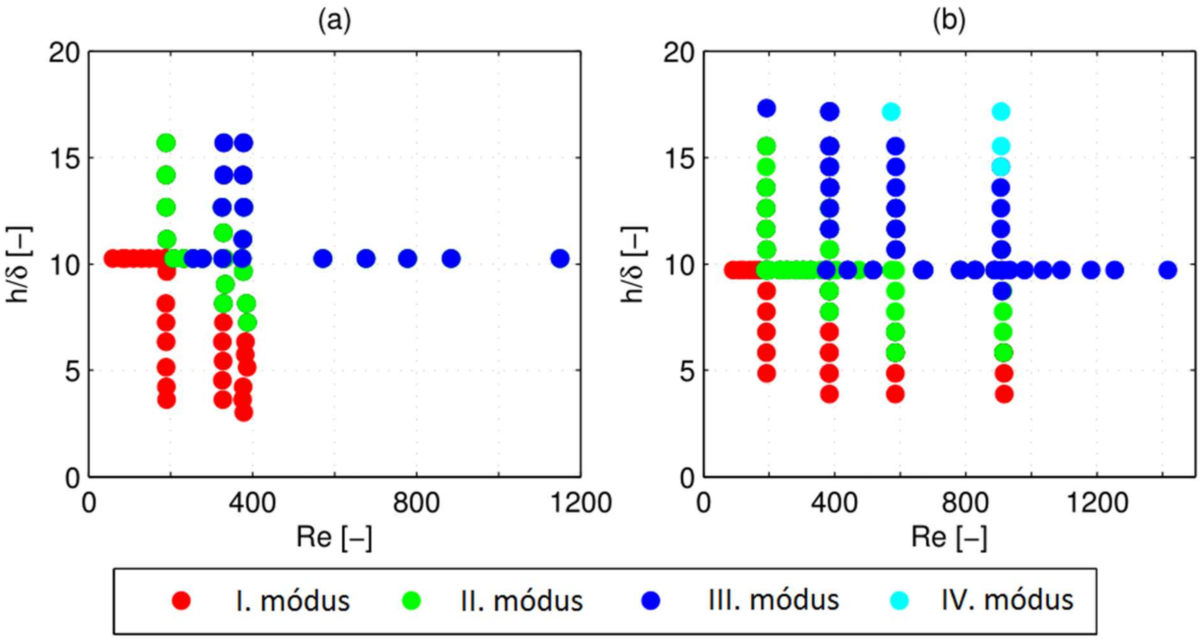
Az egy kivételes esetben – ami az alacsony Reynolds-számoknál tapasztalt, kísérlet és szimuláció közti eltéréssel magyarázható – is 0,9 fölött van, ami még mindig elfogadható.
Brown (1937) mindhárom módusra ugyanazt a c_3 = 0,007 paramétert használta, míg ez a mi esetünkben módusról módusra változik. Megjegyezzük, hogy Brown korában, 1937-ben sokkal kevésbé pontos műszerek álltak rendelkezésre, mint a mi esetünkben, ezért is tiszteletet parancsoló Brown képletének meglepő pontossága. A tiszta első és a második módus paraméterei jó egyezést mutatnak Brownéval. Brown kevert módusbeli első módusra nem publikált eredményeket. A harmadik módusnál az értékek jobban különböznek, de Brown csak 900-as Reynolds-szám fölött tapasztalt harmadik módust, ekkor viszont a c_2/Re tag elhanyagolható c_1 mellett és a c_3-ban jelentkező különbség kompenzálja c_1 különbségét. h/δ = 10-nél mindkét képlet 0,1646-ot ad, ha a c_2/Re tagot elhanyagoljuk. A parabolikus élhang negyedik módusa esetén a három paramétert mindössze négy megfigyelés alapján határoztuk meg, így, bár a görbe illeszkedik az adatokra, az eredményeket óvatosan kell kezelni, például azt is, hogy kizárólag ebben az esetben vesz fel c_2 negatív értéket. Az I.2.10. és az I.2.11. ábra mutatja a Strouhal-számokat a CFD és a kísérleti tanulmányokból az illesztett görbékkel együtt, rendre az egyenletes és a parabolikus esetre.



I.2.10. ábra. A parabolikus profilú élhang Strouhal-számai. A hibasávokkal ellátott x-ek szimulációs (CFD) illetve kísérleti (Mér.) eredményeket jelentenek. A folytonos vonalak az (I.2.12) egyenlet által leírt illesztett görbék az I.2.7. táblázatbeli együtthatókkal



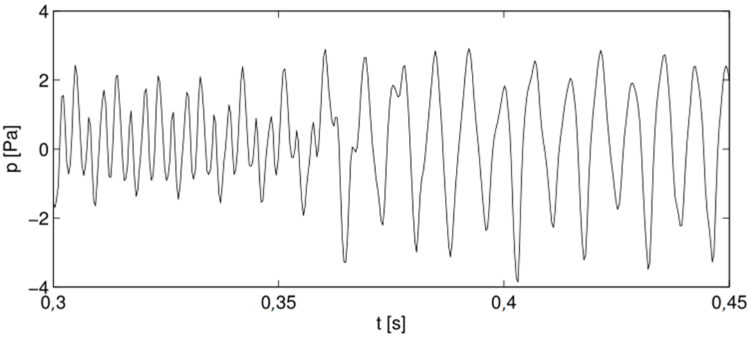
I.2.11. ábra. Az egyenletes profilú élhang Strouhal-számai. A hibasávokkal ellátott X-ek szimulációs (CFD) illetve kísérleti (Mér.) eredményeket jelentenek. A folytonos vonalak az (I.2.12) egyenlet által leírt illesztett görbék az I.2.7. táblázatbeli együtthatókkal



I.2.12. ábra. Mérési pontok a *Re - h/δ* síkon az egyenletes (a) és a parabolikus profilú élhangban. Minden pont színe az ott megfigyelt legmagasabb módusnak felel meg

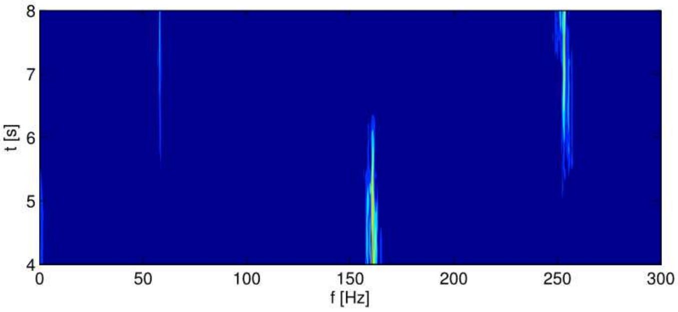
I.2.6. Módusugrás, móduskapcsolgatás

Az előzőkben leírtak szerint ha a Reynolds-számot vagy *h/δ*-t váltotatjuk, az élhang az egyik módusból a másikba ugrik. Egy módus érvényességi határainak közelében a módusugrás spontán, külső gerjesztés vagy paraméterváltoztatás nélkül is megtörténhet. Az ugrás lehet maradandó (azaz az áramlás stabilan az új módusban marad), vagy ideiglenes (azaz az áramlás véletlenszerűen ide-oda kapcsolgat a módusok között). Ez utóbbit nevezzük móduskapcsolgatásnak. Az I.2.12 ábra az adott *Re* - *h/δ* paraméterpárnál észlelt legmagasabb módust jeleníti meg. A módusok határai gyakran elmosódottak és sokszor figyelhető meg hiszterézis is.



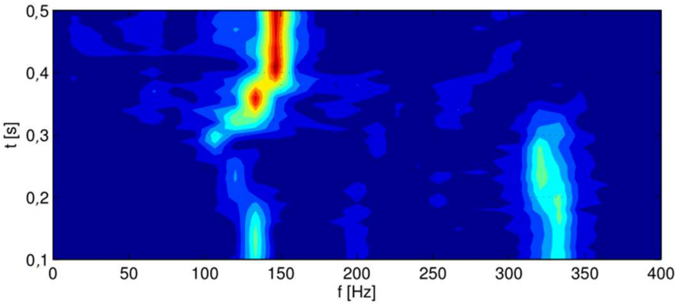
I.2.13. ábra. Módusugrás kevert I. és II. módusból tiszta I. módusba. CFD szimuláció, egyenletes profil, *Re* = 250, *h/δ* = 10

Egyszerű csúszóablakos Fourier transzformációval vizsgálhatjuk, hogy a lengés kvalitatíve változik-e az időben (van-e módusugrás, móduskapcsolgatás). A felhasznált jel CFD esetén az ékre ható erő időbeli lefutása, vagy az ék egy pontjában a nyomáslefutás, mérés esetén a nyomástávadó erősített jele. A Fourier transzformációhoz csak egy *ΔT* ablakszélességnyi jelet használtunk fel, amelynek kezdőpontját kisebb lépésekben folyamatosan csúsztattuk az időben. Az ábrák bármelyik vízszintes metszetében a szín a jelzett idő plusz *ΔT*-nyi szakaszon a megfelelő frekvenciakomponens amplitúdóját jelzik. Az I.2.13. ábrán az ék egy pontjában szimulált nyomást láthatjuk *Re* = 250, *h/δ* = 10, egyenletes profil esetén, míg az I.2.14. ábrán az ugyanehhez az esethez tartozó csúszóablakos Fourier transzformációt. A spektrum és egyben az időjel kvalitatív változása megfigyelhető 0,3 s körül. 0,3 s előtt a szabadsugár kevert I. és II. módusban leng, és ezután tiszta I. módusba ugrik, ahol az I. módus frekvenciája kicsit meg is nő. Az I.2.15. ábra egy mérésből vett példát mutat a módusugrásra: az élhang a tiszta II. módusból a kevert I. és III. módusba ugrik *t* ≈ 6 s körül.



I.2.14. ábra. Módusugrás a tiszta II. módusból a kevert I. és II. módusba. *Re* = 790; *h/δ* = 9,72; parabolikus profil. Nyomástávadó jeléből készült csúszóablakos Fourier transzformáció

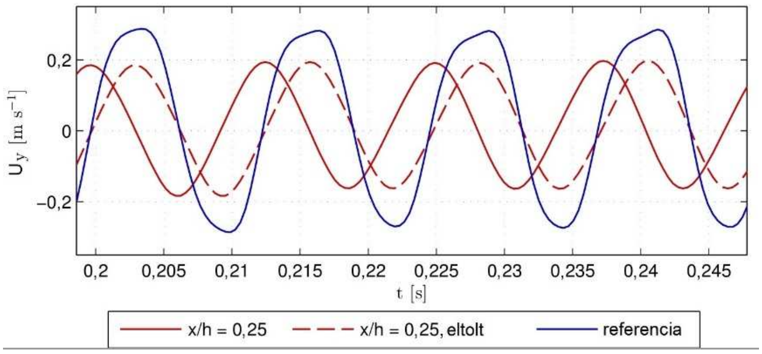
Mindezek mellett még nagyon sok példát találtunk a módusugrásokra, -kapcsolgatásokra, lásd Vaik & Paál (2011).



I.2.15 ábra. Az I.2.13. ábrához tartozó csúszóablakos Fourier transzformáció

I.2.7. A zavarás terjedési sebessége

Az előző alfejezetek megmutatták, hogy a kísérleti és a szimulációs eredmények jól egyeznek, azaz a CFD eredmények validáltnak tekinthetők. Ennek megfelelően szimulációk segítségével további vizsgálatok hajthatók végre: például a nyomáseloszlás az ék falán vagy a terjedő zavarás fázisa gazdaságosan és egyszerűen vizsgálható szimuláció segítségével.

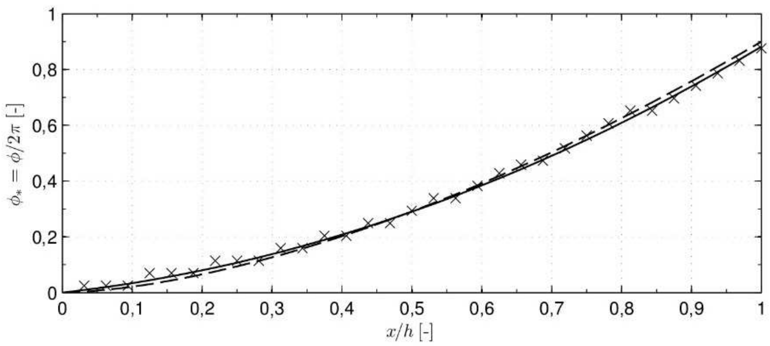


I.2.16. ábra. A keresztkorrelációhoz használt transzverzális sebességjelek egyenletes sebességprofilú élhangáramlás, *Re* = 150 és *h/δ* = 10 esetén

Ha az élhanglengésről pontosabb információt szeretnénk kapni, fontos, hogy a zavarás terjedési sebességét pontosan meghatározzuk. Az elméleti érték a kilépési átlagsebesség fele (Mattingly & Criminale (1971)), azonban ezt az eredményt párhuzamos, súrlódásmentes szabadsugár feltételezésével érték el, és megfelel a leginstabilabb frekvenciájú harmonikus zavarás fázissebességének. Ezek a feltételezések nem teljesülnek a valódi esetben: az áramlás nem súrlódásmentes, a szabadsugár nem párhuzamos, és a zavarás nem tisztán harmonikus. Kísérleti értékek a kilépési átlagsebesség 0,5-szöröse körül szórnak (pl. Curle (1953) 0,3 és 0,6 közötti értékeket talált, Brown (1937) 0,4 körüli értékekről számolt be, Kwon (1998) eredményei 0,5 – 0,6 között vannak). A „fázissebesség” kifejezés használata csak tisztán harmonikus zavarás esetén használható, vagy akkor, ha a rendszer nem diszperzív. Ha több frekvencia egyszerre van jelen a rendszerben, mindegyik módus más sebességgel terjed, illetve a különböző módusok ismeretlen módon kölcsönhathatnak egymással. Kevert módusú működésben a zavarás terjedési sebességét inkább csoportsebességként, mint fázissebességként azonosíthatjuk; vagy minden módusra külön-külön meghatározható egy-egy fázissebesség.

Itt csak egy tiszta első módusú lengést tekintünk. A zavarás konvekciójának sebességét keresztkorrelációs technikával határoztuk meg. A pillanatnyi sebesség transzverzális komponensét a fúvóka és az ék között felvett sok pontban hasonlítottuk össze egy referenciapontként definiált pontban felvett értékkel (általában 0,6h körül). A referenciapontban rögzített jelet i időlépéssel eltoltuk, és kiszámítottuk az eltolt jel és a referenciajel közötti R korrelációs együtthatót. A referenciaponthoz viszonyított fáziskésést az alábbi képlettel határoztuk meg:

$$\phi = i_{max} \Delta t \frac{2\pi}{T}, \tag{I.2.13}$$



I.2.17. ábra. Első módusú élhanglengés hullámának fáziskésése. Szimulációs eredmények egyenletes profil, *Re* = 200 és *h/δ* = 10 esetén (X); illesztett parabola ((I.1.14) egyenlet, folytonos vonal); Stegen és Karamcheti által javasolt hatványfüggvény (szaggatott vonal)

ahol i_{max} az eltolás mértéke, amire R a maximumát veszi fel, Δt az időlépés és T a periódusidő. Az I.2.16. ábrán a sebesség transzverzális komponensét láthatjuk a referenciapontban (kék vonal) és 0,25h távolságban a fúvókától (piros vonal).

A szaggatott piros vonal az utóbbi jel megfelelő (fönt leírt módszerrel meghatározott) időkésleltetéssel való eltoltja.

A I.2.17. ábra a fáziskésést mutatja 2π-vel osztva ($\phi^* = \phi/2\pi$). A függőleges tengelyen látható abszolút számok nem fontosak, így a görbe kezdőpontját 0-hoz igazítottuk. Vizsgálataink során nyilvánvalóvá vált, hogy ez a görbe univerzális, olyan értelemben, hogy minden tiszta első módusú Reynolds-számra érvényes (bár csak a h = 10 mm-el készített szimulációkat vontuk be a vizsgálatba). A fáziskésés parabolikus, az illesztett függvények elhanyagolható mértékben különböznek csak különböző Reynolds-számokra. Az összes pontra együttesen illesztett parabola:

$$\phi^*\left(\frac{x}{h}\right) = \phi\left(\frac{x}{h}\right)/2\pi \approx 0{,}6036\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 0{,}2781\left(\frac{x}{h}\right). \qquad \text{(I.2.14)}$$

Ez majdnem pontosan egyezik az adott tartományban a Stegen & Karamcheti (1970) által javasolt hatványfüggvénnyel:

$$\phi^*\left(\frac{x}{h}\right) = 0{,}9\left(\frac{x}{h}\right)^{1{,}63}, \qquad \text{(I.2.15)}$$

amelyet $Re \approx 950$ és $h/\delta \approx 5{,}58$ esetére, méréssel meghatározott fázisokra alapoztak. Az I.2.17. ábra ábrázolja a két görbét együtt a CFD szimuláció eredményeivel Re = 200 és h/δ =10 és egyenletes profil esetére. A fúvóka-ék távolság megtétele alatt a fázis majdnem egy teljes periódusnyit változik. Mivel a dipólus hangforrás által generált akusztikai hullám időkésleltetés nélkül érkezik a fúvókához, a tény, hogy a fáziscsökkenés nem ér el egy teljes periódust a fúvóka-ék távolságon, azt jelzi, hogy a forrás effektív helye valamivel az ék csúcsa mögött van.

A ϕ^* inverz függvényének deriváltja h/T-vel szorozva eredményezi a fázissebességet, ami jelen esetben a zavarás konvekciós sebessége:

$$U_{con} = \frac{h}{T}\frac{1}{\phi^{*\prime}}. \qquad \text{(I.2.16)}$$

Ennek dimenziótlan értéke pedig:

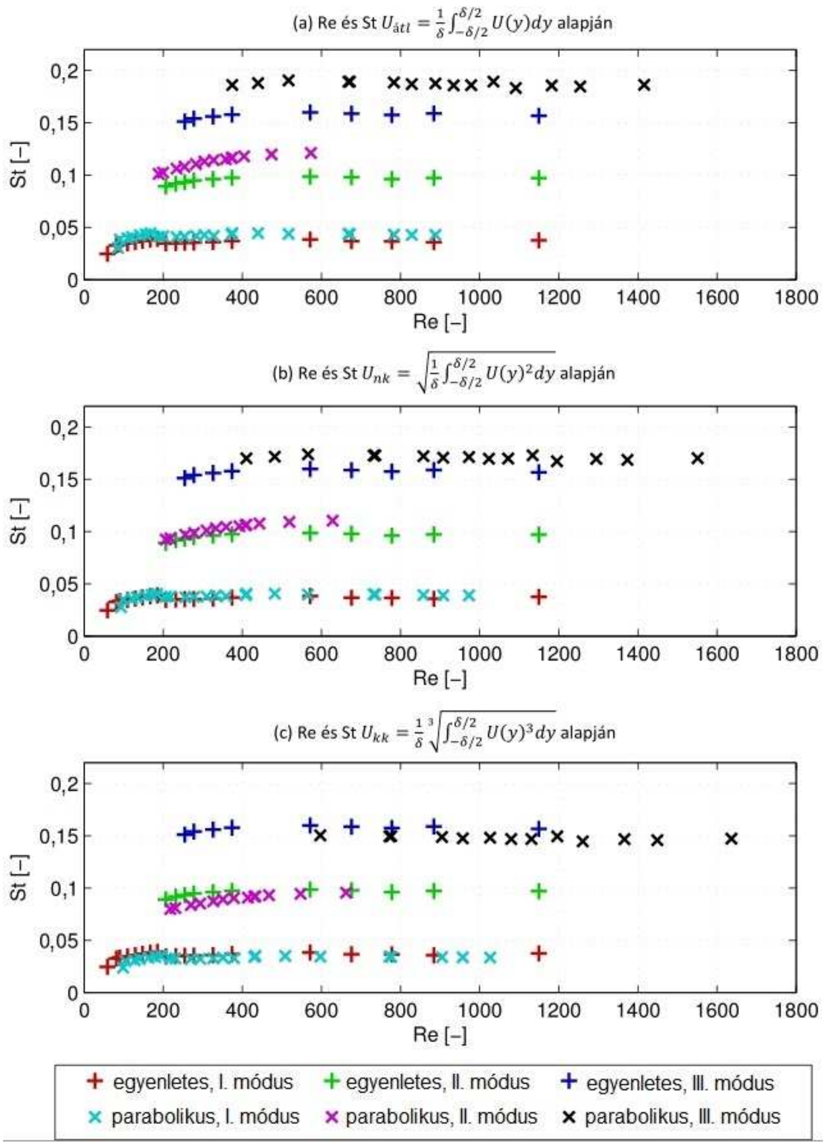
$$\frac{U_{con}}{U} = \frac{h}{TU\phi^{*\prime}} = St\frac{h}{\delta}\frac{1}{\phi^{*\prime}}. \qquad \text{(I.2.17)}$$

Csak első módusú élhanglengéseket vizsgáltunk, h/δ = 10-re, mind egyenletes, mind parabolikus profillal. Az előbbi 0,028 és 0,044 közötti Strouhal-számokat eredményez, míg az utóbbi 0,032 és 0,044 közöttieket. Ezért a konvekciós sebesség relatív értékei nagyon nagyok (1-1,58) a fúvókánál és folyamatosan és gyorsan csökkennek az ék felé egészen 0,19-0,3 közötti értékekre. A magas, 1 fölötti értékek meglepőek, és úgy magyarázhatóak, hogy ott a zavarások még nem fejlődtek ki – ehelyett a szabadsugár „merev botként” mozog. Bechert & Pfizenmaier (1975) szintén beszámoltak olyan zavarásokról, amelyek egy szabadsugár sebességénél gyorsabban terjedtek. Mivel a fázissebesség a távolság mentén folyamatosan változik, nincs értelme „hullámhosszról” beszélni, hiszen egy hullámhosszon belül a „hullámhossz” változik. Az átlagos relatív fázissebességek 0,32 – 0,41, illetve 0,43 – 0,5 tartományban vannak rendre az egyenletes és a parabolikus esetben. Ezek jól egyeznek Brown értékeivel, de nincsenek messze Mattingly & Criminale (1971) elméleti értékétől sem.

I.2.8. A parabolikus és az egyenletes profilú élhangok közötti különbségek egy lehetséges magyarázata

Ahogyan azt az I.2.4 fejezetben láttuk, ugyanannál a Reynolds-számnál a parabolikus eset 15-20%-al nagyobb Strouhal-számot produkál, mint az egyenletes eset. Ugyanaz a Reynolds-szám azt jelenti, hogy ugyanaz az átlagsebesség, azaz ugyanaz a tömegáram. A rendszerbe bejuttatott impulzusáram és energiaáram rendre arányos a következő kifejezésekkel:

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} u^2(y)dy, \quad \int_{-\delta/2}^{\delta/2} u^3(y)dy. \tag{I.2.18}$$



I.2.18. ábra. A sebességátlagolás hatása a *St- Re* kapcsolatra

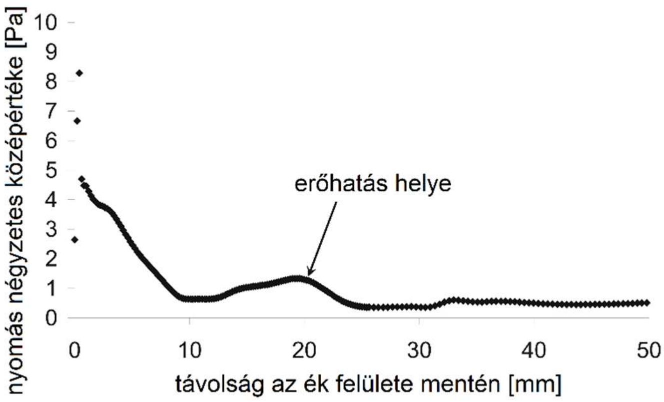
Ha tehát Reynolds-számot a sebesség négyzetes középértékére (nk): $U_{nk} = \sqrt{\frac{1}{\delta}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} u^2(y)dy}$ vagy köbös középértékére (kk): $U_{kk} = \sqrt[3]{\frac{1}{\delta}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} u^3(y)dy}$ alapozzuk, az átlagos sebesség $U_{átl} = \overline{U} = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} u(y)dy$ helyett, akkor ugyanannál a Reynolds-számnál, függetlenül a sebességprofiltól ugyanakkora impulzusáramot vagy energiaáramot juttatnánk a rendszerbe (ugyanakkora tömegáram helyett). Parabolikus profil esetén kiszámítható, hogy $U_{nk} = 1{,}095\overline{U}$, így a négyzetes középértékre alapozva a Reynolds-szám egy 1,095-ös tényezővel nőne, míg a Strouhal-szám egy 1,095-ös tényezővel csökkenne. Hasonlóképpen $U_{kk} = 1{,}156\overline{U}$ így a köbös középértékre alapozott Reynolds-szám és Strouhal-szám rendre 1,156-os tényezővel nő, illetve csökken. Az I.2.18. ábra mutatja a Strouhal-számok Reynolds-szám függését, ha Reynolds és Strouhal-számok az átlagos, az nk illetve kk sebességre voltak alapozva. Bár a pontos okok feltárására további vizsgálatokra van szükség, látszik, hogy általában a négyzetes középérték adja a legjobb egyezést a parabolikus és egyenletes profilú élhangok Strouhal-számai között, míg nagyobb Reynolds-számoknál a köbös középérték. Ez azt jelzi, hogy az áramlás dinamikája szempontjából az impulzusáram- (esetleg energiaáram-) ekvivalencia nagyobb jelentőségű, mint a tömegáram-ekvivalencia.

I.2.9. Nyomáseloszlás az ék falán és az erő támadáspontja

Az I.2.19. ábrán az rms nyomáseloszlás látható az ék falán. A nyomás nagyságától eltekintve minden Reynolds-számon ugyanolyan eloszlás tapasztalható. Az ék csúcsának közvetlen közelében jelentkező éles maximumot fokozatos csökkenés, majd egy második, laposabb csúcs követi, végül egy hosszan elnyúló, lassan csökkenő tartomány következik. Ez az eloszlás alapvetően hasonlít Kaykayoglu & Rockwell (1986) által kísérletileg találthoz. Kaykayoglu és Rockwell eredményei szerint a nyomás az ék csúcsához közel éles maximumot mutat, utána pedig durván $x^{-1/2}$ szerint csökken. Csak néhány pontban mérték a nyomást, a mi felbontásunk lényegesen jobb, így az I.2.19 ábrán több részlet látható. Itt az eloszlás inkább szakaszosan lineáris, mint hatványfüggvénnyel közelíthető.

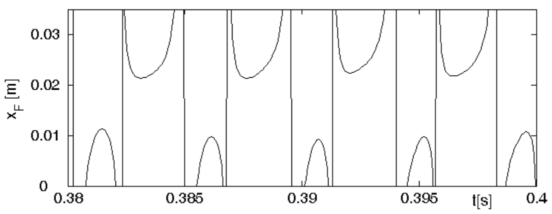
Egy másik különbség az, hogy míg ott az ék teljes áramlás irányú hossza 0,8*h* volt, addig itt sokkal nagyobb: 7,5*h*. Mivel a nyomás az ék teljes hossza mentén nem elhanyagolható nagyságú, az erő támadáspontjának x koordinátája, x_F esetünkben sokkal hátrébb (az ék csúcsától távolabb) van, mint náluk. Ennek a pontnak azért van jelentősége, mert ez jelzi az akusztikus dipólus effektív helyét. Az időátlagolt x_F-et a következőképpen számítjuk:

$$\bar{x}_F = \frac{M_{zrms}}{F_{yrms}}, \qquad \text{(I.2.19)}$$



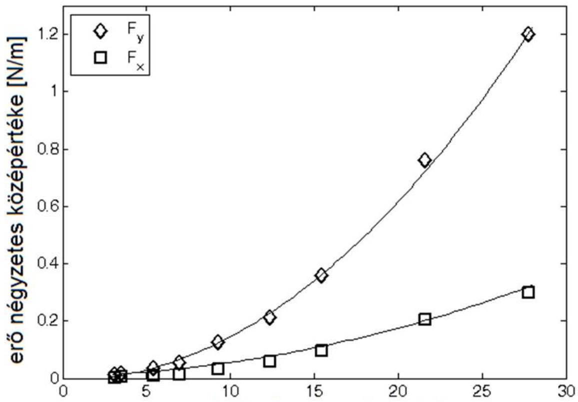
I.2.19. ábra. Nyomáseloszlás az ék felületén

ahol M_z a forgatónyomaték *z* komponense és F_y az erő y komponense. Mind az erőnek, mind a nyomatéknak egységnyi hosszra számított rms értékét vesszük. x_F pillanatnyi értékét a nyomaték és az erő pillanatnyi értékéből számíthatjuk. Összehasonlítva: Kaykayoglu és Rockwell kb. $\bar{x}_F/h$ = 1/4-t mért, míg mi 1,6-2-t találtunk az ék csúcsától számítva. x_F időbeli lefutását az I.2.20. ábrán láthatjuk és megállapíthatjuk, hogy a ciklus nagy részében a támadáspont szűk tartományban mozog. Félciklusonként szingularitásokat látunk, amelyek fizikailag nem reálisak; azt jelzik, hogy ciklusonként kétszer F_y zéró értéket vesz föl.



I.2.20. ábra. Az erő támadáspontjának időbeli változása; *h/δ* = 10; *Re* = 350

$\bar{x}_F$ helye figyelemreméltóan stabil mind a Reynolds-szám, mind h függvényében (mindig 16 és 20 mm között van az ék csúcsától). Ez azt jelenti, hogy a hangforrás effektív helye nagyrészt független az áramlás részleteitől, ha az ék geometriája változatlan, valamint azt is, hogy $\bar{x}_F$ dimenziótlan formája nem állandó. Ha megtekintjük az ék menti nyomáseloszlás időbeli változását (itt nem mutatjuk), szabályos hullámmintázatot láthatunk, amely ciklikusan végigfut az ék felületén de az éles maximum minden időpillanatban jelen van az ék csúcsának



I.2.21. ábra. Egységnyi hosszra eső erő a fölső ékfelületen a belépő sebesség függvényében; *h/δ* = 10

közelében. Az I.2.21. ábrán az erő két komponensét ábrázoltuk a kiömlési sebesség függvényében. Az erőt a statikus nyomásnak az ék felszínén való integrálásával nyertük. Mindkét komponens esetén a függés tökéletesen parabolikus. Ez a következőképpen magyarázható. Az erő arányos a felület közelében ható dinamikus nyomással; ez pedig arányos az ék felületére merőleges sebességkomponens négyzetével. Ez a sebességkomponens pedig arányos a kiömlési sebességgel.

TÉZIS:

1. Fizikai kísérletekkel alátámasztott numerikus kísérletekkel az élhang által felmutatott számos, az irodalomból kísérletileg ismert jelenséget sikerült reprodukálni és eddig ismeretlen jelenségeket, tényeket felfedezni.
   - Szimulációk és kísérletek alapján Brown képletéhez hasonló, de annál pontosabb képlettel sikerült az élhang frekvenciájának sebességtől és fúvóka-ék távolságtól való függését leírnom.
   - Megmutattam a parabolikus profilú élhang egyenletes profilú élhangtól való különbözőségét. A hasonló Reynolds-számnál tapasztalt frekvenciakülönbségre lehetséges magyarázatot adtam.
   - A módushatárok környékén mind kísérletileg, mind szimulációval sikerült módusugrást és móduskapcsolgatást (mode switching) előállítanom.
   - Keresztkorrelációs módszer segítségével meghatároztam a zavarás terjedési sebességét. Megmutattam, hogy az első módus fázisa a fúvókától mért távolság függvényében a Reynolds-számtól független, univerzális négyzetes függvénnyel írható le (I.2.14), amiből az következik, hogy a fázissebesség a fúvókától távolodva hiperbolikusan csökken. Ez a fúvóka közelében a kiömlési sebességnél nagyobb látszólagos hullámsebességet eredményez, ami azonban fizikailag megmagyarázható. A fúvóka és ék közötti átlagos relatív fázissebesség egyenletes profil esetén 0,32 és 0,41, míg parabolikus profil esetén 0,43 és 0,5 között voltak.
   - Megmutattam, hogy az ék felületén a nyomáseloszlás és az erő időátlagolt támadáspontja a Reynolds-számtól és a fúvóka-ék távolságtól független.

I.3 Üreghang („cavity tone")

I.3.1. Bevezetés

Az üreghang az öngerjesztett áramlások másik jellegzetes képviselője. Az áramlás egy sík felületbe vágott téglatest (két dimenzióban téglalap) alakú mélyedés fölött jön létre és az instabilitási hullám az üreg fölött kialakuló nyírórétegen vonul végig. A lengő nyíróréteg beleütközik az alvízi sarokba és az ott kialakuló hangforrás (vagy alternatív szemléletmódban örvényforrás) hozza létre azt az infinitézimális zavarást, ami az újabb instabilitási hullámot gerjeszti (I.3.1 (a) ábra). Az áramlási lengés zajkibocsájtáshoz, a felület rezgéséhez, illetve extrém esetben töréséhez is vezethet. Az üreghangnak lényegesen nagyobb irodalma van, mint az élhangnak; ez részben a jelenségek nagyobb komplexitásának, másrészt a lehetséges konfigurációk nagyobb számának, harmadrészt nagyobb közvetlen gyakorlati jelentőségének tulajdonítható.

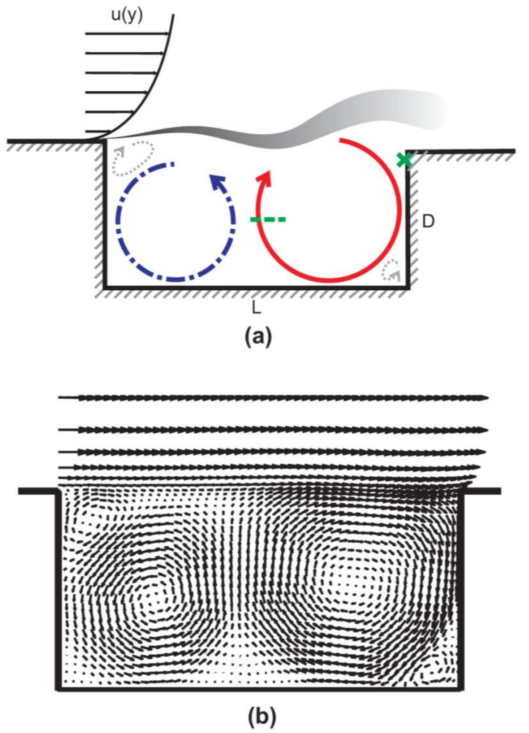
Speciális alkalmazások bizonyos fúvós hangszerek, különösen az orgonasípok, amik az élhang sajátosságait is magukon viselik, de ahol az előző alkalmazásoktól eltérően a cél az, hogy megfelelően kontrollált lengést és zenei hangot hozzunk létre.

A témáról alapos review-kat írt Rockwell & Naudascher (1978), Rockwell & Naudascher (1979) és Rockwell (1983). A kutatás korai fázisában a szerzők szuperszonikus, illetve magas szubszonikus sebességeket tanulmányoztak, mivel a fő motiváció a repülőgépiparból jött. Az első cikket üreg fölötti áramlásról Krishnamurthy (1956) írta, aki magas Mach számú szubszonikus eseteket tanulmányozott. Kiterjedt nyomásméréseket végzett és az áramlást Mach-Zehnder interferometer segítségével vizualizálta. Eredményeit Rowley et al. (2002) majdnem ötven évvel később kétdimenziós szimulációk validálására használta fel. Valószínűleg a területen a legtöbbet idézett mű Rossiter (1964), akinek félempirikus képlete a legtöbb mai munka kiindulópontja. Rossiter képlete:

$$f_m = \frac{U}{L}\frac{m-\gamma}{\frac{1}{\kappa}+M} \qquad \text{(I.3.1)}$$

ahol *U* a szabad áramlás sebessége, *L* az üreg hossza, *m* a módus rendszáma (pozitív egész szám), *γ* a *2π*-vel normált fáziskésés, ami az instabilitási hullámból eredő örvénynek az alvízi sarokra való felütközéséből adódik, *κ* a zavarás terjedési sebességének és a szabad áramlás sebességének aránya és *M* a Mach szám. Nagyobb Mach számokra korrekciót javasoltak, ami az üregen belüli és üregen kívüli Mach szám különbözőségét veszi számításba. Ennek a képletnek az a hátránya, hogy két empirikus konstanst tartalmaz, amelyeket nem lehet alapelvekből levezetni. A konstansokat görbeillesztésből lehet megkapni, és konfigurációról konfigurációra, kísérletről kísérletre változhatnak.

Rossiter képlete jónak bizonyult magas szubszonikus, transzszonikus és szuperszonikus Mach számú kísérletek leírására, de kevésbé jónak alacsony Mach számok esetén (Tam & Block (1978)). Ez utóbbi esetben az áramlás gyakorlatilag összenyomhatatlan, és a visszacsatolás inkább „hidrodinamikai" (áramlástani) természetű, mint akusztikai. Ilyen nem-akusztikai visszacsatolás teljesen összenyomhatatlan esetekben is lehetséges, pl. a Biot-Savart mechanizmuson keresztül.



I.3.1. ábra (a) Az áramlási konfiguráció. Lengő nyíróréteg és két nagy, az üreget megtöltő örvény. Folytonos vonal: alvízi örvény, pontvonal: felvízi örvény. A szaggatott vonal egy kontrollfelületet jelez, amin keresztül az impulzusáramot meghatároztuk és elemeztük. Az X pontban értékeltük ki a nyomásjelet. (b) Időátlagolt szimulált sebességmező Re_L = 24640 esetén

Ezen a ponton a terminológiának némi tisztázása szükséges. Néhány szerző, pl. Morris (2011) a Rossiter mechanizmust, a Rossiter módust, a Rossiter frekvenciát szűken, Rossiter eredeti cikkének megfelelően értelmezik, azaz csak összenyomható áramlásra. Más szerzők, pl. Tam & Block (1978) Chatellier et al. (2004), Murray et al. (2009), Sarohia (1976) szélesebb értelemben használják a fönti kifejezéseket, azaz minden olyan lengés frekvenciájának leírására, ami a fönt leírt – akár nem-akusztikai – visszacsatolási mechanizmuson alapul, a paraméterek megfelelő beállításával. Én a második, szélesebb értelemben fogom használni a kifejezéseket.

Rockwell & Naudascher (1978) az üreghangok következő osztályozását használják: a) áramlásdinamikai lengések; b) áramlási-rezonáns lengések; c) áramlási-elasztikus lengések. Az áramlásdinamikai lengések akkor jönnek létre, ha az üreg méretei sokkal kisebbek, mint az akusztikai hullámhossz, azaz az üreg kompakt. Ebben az esetben az üreg mélysége nem játszik szerepet a lengés kialakulásában. Az áramlási-rezonáns (b) lengések esetén az üreg saját modusai összekapcsolódnak a nyíróréteg instabilitási módusaival, szelektíve erősítve és enyhén elhangolva őket. East (1966) eredményei megerősítették ennek az esetnek a létezését, mivel mély üregeket vizsgálva, alacsony Mach szám mellett demonstrálta a nyíróréteg és az üregrezonancia kölcsönhatását. Hasonlóképpen Yang et al. (2009) mély üregek akusztikus és a hidrodinamikai modusainak kölcsönhatását vizsgálta és összekapcsolódásukra kritériumokat definiált. A harmadik eset (c) nagyon bonyolult: olyan helyzetekben fordul elő, ahol az üreg szerkezete rugalmas és így az előző két mechanizmus kölcsönhatásba lép a szilárdtest-rezgésekkel. Ebben a dolgozatban csak az a) esettel fogok foglalkozni.

Gharib & Roshko (1987) egy másik osztályozási rendszert vezetett be. Definiálták az ún. nyíróréteg módust és a nyom (wake) módust. A nyíróréteg módus megfelel a fönt leírt visszacsatolási mechanizmus által létrehozott lengésnek. Ezzel szemben, ha L-t egy bizonyos határ fölé növeljük, a visszacsatolás többé nem működik, legalábbis nem a megszokott módon. A nyom módusban az áramlás elveszti addigi szabályos szerkezetét, nincsenek többé leváló és fölcsavarodó örvények, az áramlás szabálytalanná, megjósolhatatlanná válik. Az áramlásnak több mérhető tulajdonsága megváltozik, amiből csak egyet, a legjellemzőbbet említek: az ellenállástényező drámai mértékben megnő. A nyom módus létezését és a megszokottól eltérő tulajdonságait megerősítették Rowley et al. (2002) számításai. A jelenséget a nyíróréteg „abszolút instabilitásáról” szóló hipotézissel magyarázták, ami azt jelenti, hogy a zavarások nemcsak az áramlás irányában, hanem azzal ellentétes irányban is terjedhetnek, így a nyíróréteg „öngerjesztetté” vált.

Megint egy másik, több szerző által használt osztályozási rendszer a mélységi és longitudinális módusok közötti megkülönböztetés, aszerint, hogy az üreg „mély” (azaz L/D kicsi), vagy „sekély” (azaz *L/D* nagy) (az I.3.1. ábra jelölései szerint). A sekély üregek tovább oszthatók nyitott (a nyíróréteg nem tapad vissza az üreg fenekére) és zárt (a nyíróréteg visszatapad az üreg fenekére, mielőtt újra elválik) típusokra. Nincs egyetértés az irodalomban a nyitott és zárt üregek közötti elválasztó *L/D* érték tekintetében: az értékek 8 és 13 között szórnak. Végül az irodalom megkülönböztet rezonáns és nemrezonáns módusokat, pl. Grace et al. (2004). Ha a sebesség, a határrétegvastagság és az üreg hosszúsága kielégít bizonyos kritériumokat, jól definiált lengési frekvenciáknak kell megjelenniük az áramlásban (rezonáns módus). Ezen a paramétertartományon kívül nincsen jól definiált lengési frekvencia. Bár Grace et al. (2004) a megfelelő paramétertartományban végezték méréseiket, valami rejtélyes ok miatt váratlanul nemrezonáns viselkedést találtak mind lamináris, mind turbulens belépő határréteg esetén. Haigermoser et al. (2008) szintén nemrezonáns viselkedést találtak vastag belépő határréteg esetén. Részletes, időben felbontott PIV (Particle Image Velocimetry) méréseket végeztek, és a nyomásmezőt a sebességmezőből vezették le. Az így levezetett nyomásmező jól egyezett a nyomástávadóval mért nyomásokkal. Az üreg által létrehozott, feltételesen átlagolt ellenállási erőket számították és a nagy ellenállást az üregbe való beáramlás pillanataival, a kis ellenállást az üregből való kiáramlás pillanataival tudták összefüggésbe hozni. Murray et al. (2009) különböző Mach számokra részletes nyomás- és PIV méréseket hajtott végre. Azt találták, hogy az első Rossiter módus csak 0,38-as Mach szám fölött jelenik meg. POD (Proper Orthogonal Decomposition) segítségével elemezték PIV adataikat. A POD módusok a Mach számtól függetlenül hasonlóak voltak, hasonló áramlási mintázatot jelezve. Bilanin & Covert (1973) az örvénysík stabilitáselemzésén alapuló elméleti modellt alkotott, amit Tam & Block (1978) továbbfejlesztett. Utóbbiak számításba vették a nyíróréteg véges vastagságát, és az üreg falairól való akusztikus visszaverődéseket, és jobb egyezést kaptak a kísérleti eredményekkel. Howe (1997a, 1997b) tovább gazdagította az elméleti megközelítések tárházát azzal, hogy bevezette a komplex Rayleigh konduktivitást, amelyet ebben az esetben az ellenállástényezővel azonosított, míg a rezonanciafrekvenciákat a pólusok valós részével, ha azok pozitívak. Chatellier et al. (2004) tovább fejlesztették Howe modelljét és sikerült PIV mérésekkel jól egyező módusalakokat létrehozniuk. Kook et al. (2002) az örvényhang koncepcióját kombinálta a visszacsatolásos szabályozási körök stabilitáselemzésével és Howe-éhoz némileg hasonló matematikai problémát kaptak. Helmholtz rezonátorokra alkalmazták az elméletet és jó egyezést találtak a kísérleti eredményekkel. Kriesels et al. (1995) és Dequand et al. (2003) gázvezetékek zárt oldalágaiban jelentkező rezonanciát vizsgáltak. Az „örvényfolt” (vortex blob) módszerrel kapott eredményeiket hasonlították össze vizualizációval és nyomásmérésekkel és elfogadható egyezést kaptak. Az örvényhang elméletet használták az akusztikai tér számítására. Nemlineáris hullámjelenségeket is találtak, amire magyarázattal is szolgáltak.

Knisely & Rockwell (1982) vízcsatornában végeztek vizualizációkat illetve nyomásméréseket és az alapfrekvenciának több szubharmonikusát találták meg. A szubharmonikusok nemlineáris kölcsönhatásba lépnek és összeg- illetve különbségfrekvenciákat generálnak. Kegerise et al. (2004) szintén nemlineáris kölcsönhatásokat találtak különböző Rossiter módusok között. Ezen kívül „móduskapcsolgatást” (mode switching) tapasztaltak egyszerre létező Rossiter módusok között, ami azt jelenti, hogy a domináns módus látszólag véletlenszerűen kapcsolgat ide-oda. Farkas & Paál (2009) ugyanezt találták szimulációval alacsony Mach számú üreghangnál, illetve Paál & Vaik (2007) bizonyos paraméterkombinációkra. Lusseyran et al. (2008) eredeti gondolattal, szimbolikus dinamika segítségével próbálta leírni a móduskapcsolgatást üreghangok esetén. Lin & Rockwell (2001) időfüggő PIV méréseket végeztek turbulens belépő határréteggel és különböző léptékű örvénystruktúrákat azonosítottak. Ezeket a nyomásjel különböző pontjaival hozták összefüggésbe. Kourta & Vitale (2008) numerikus tanulmánya szerint az örvényleválás frekvenciája megfelel a második Rossiter frekvenciának, valamint nemlineáris kölcsönhatásokat találtak különböző módusok között. Az örvények azonosítására a Truesdell-Okubo-Weiss kritériumot alkalmazták. Szintetikus szabadsugár alkalmazásával próbálták elnyomni a lengést és sikerült jelentős hangnyomásszint-csökkenést elérniük.

Ebben a fejezetben, ami a szerző három cikkére alapozódik, (Farkas et al. (2012); Farkas & Paál (2009); Farkas & Paál (2015)), a legtöbb, de nem minden szimulációt *L/D* = 2 geometriával végeztük. Először részletes paramétertanulmányt végeztünk, kezdve a hálótanulmánnyal, az időlépés és a tartomány optimális mértékének meghatározásával, és folytatva a Mach szám, a belépő határréteg impulzusvastagsága és kismértékben a *L/D* hatásának tanulmányozásával. Meghatároztuk a zavarási hullám terjedési sebességét a hely függvényében, kitértünk egy bizonyos alacsony frekvenciájú spektrális csúcs értelmezésére. Ez utóbbi numerikusan közel van az első Rossiter frekvenciához, mégis erős érvek szólnak amellett, hogy nem erről, hanem egy, az örvények struktúrájából fakadó moduláló frekvenciáról van szó. Megállapítjuk, hogy bizonyos Mach szám tartományban fellép az irodalomban már tapasztalt móduskapcsolgatás (mode switching), illetve az előbb említett két módus közötti nemlineáris kölcsönhatás.

A fejezetben Reynolds-szám alapján új tartományokat definiálunk, amelyeket a domináns frekvencia alapján határozunk meg. Ez végső soron az üreg fölötti áramlásoknak egy új osztályozásához vezet.

I.3.2. A szimuláció módszertana

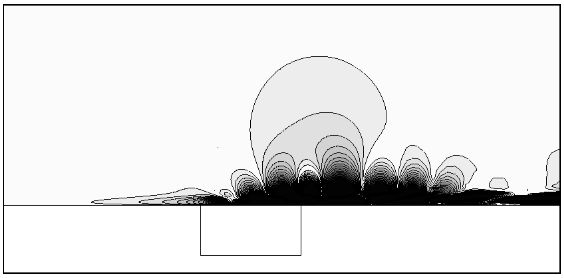
ANSYS CFX 12.1 szoftvert használtunk a szimulációk előfeldolgozására, az egyenletek megoldására és az utófeldolgozásra, illetve ANSYS ICEM szoftvert a geometria és a háló előállítására.

I.3.1. A szimulációk fő változó paraméterei. σ_{rel} θ és Re_θ relatív szórása, míg *S* Sarohia (1976) paraméterét jelöli. A különböző tartományokat az I.3.4 fejezetben tárgyaljuk. (A fő konstans paraméterek: *L* = 10 mm, *D* = 5 mm és *δ* = 1,22 mm.)

Tartomány	U [m/s]	Θ [mm]	σ_{rel} [%]	Re_Θ [–]	Re_L [–]	L/Θ [–]	S [–]
stacionárius	15,58	0,125	0	126	10080	80,06	287,5
szabályos	17,31	0,128	0,5	143	11200	78,33	303,0
szabályos	25,96	0,144	0,4	242	16800	69,55	371,1
szabályos	27,69	0,146	0,5	262	17920	68,44	383,3
szabályos	29,42	0,151	0,9	287	19040	66,40	395,1
szabályos	31,15	0,153	1,1	309	20160	65,29	406,5
átmeneti	32,88	0,156	1,4	333	21280	63,96	417,6
átmeneti	33,75	0,157	1,4	343	21840	63,60	423,1
átmeneti	34,61	0,159	1,8	356	22400	63,00	428,5
átmeneti	35,48	0,157	1,0	361	22960	63,60	433,8
átmeneti	36,34	0,164	12,5	386	23520	60,96	439,1
elnyomott	38,07	0,168	13,8	414	24640	59,45	449,4
elnyomott	41,53	0,177	10,1	475	26881	56,54	469,4

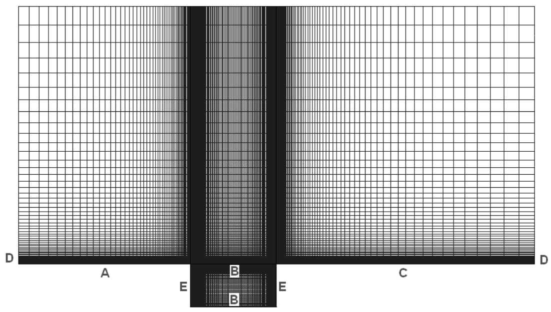
Az üreghossz és -mélység a szimulációk túlnyomó többségénél 10 illetve 5 mm volt (*L/D* = 2). A mélység végig állandó maradt, míg az üreghosszt a fejezet egy kis részében változtattuk. A közeg összenyomhatatlan, 25°C hőmérsékletű levegő volt, 1 bar környezeti nyomáson, ami 1,185 kg/m^3 sűrűséget és $1{,}545{\cdot}10^{-5}$ m^2/s kinematikus viszkozitást jelentett. A zavartalan sebességre és a fenti paraméterek alapján számolt hipotetikus hangsebességre alapozott Mach szám maximum 0,12 volt, ami utólag megerősíti az összenyomhatatlan feltételezést. A belépő peremfeltétel Blasius profilú sebességeloszlás volt. A profilt egy házi készítésű MatLab kóddal generáltuk, ami a Blasius egyenletet oldotta meg numerikusan. A Blasius profilt több pozícióban számítottuk numerikusan és összhasonlítottuk a szimulációkból kapott profilokkal. Az egyezés kiváló volt. Mivel az impulzusvastagságot a szimulációk folyamán az üreg felvízi sarkánál akarjuk előírni, az ehhez szükséges Blasius profilt a szimulációs tartomány határán visszafelé kellett számolni. Meg kell jegyeznünk, hogy a számított impulzusvastagság időben átlagolt érték, mivel az üregbeli áramlás instacionaritása visszahat a felvízi sarkon túlra, így a határréteg alakja időfüggő. Ezért használtuk fő paraméterként Re_L-t Re_Θ helyett, ahol Θ az impulzusvastagság, bár az irodalomban jó fizikai érvekkel alátámasztva sok helyütt az utóbbit ajánlják (Rowley et al., 2002)). A zavartalan áramlási sebességet 17,31 és 41,53 m/s között változtattuk, ami Re_L = 11200..26881-nek, illetve Re_Θ = 143..475-nek felel meg. Az 1. táblázat foglalja össze az L/D = 2 szimulációk fő paramétereit. Lamináris áramlást feltételeztünk. Az időbeli és a térbeli diszkretizáció egyaránt másodrendű volt.

Mivel a szoftver háromdimenziós algoritmuson alapul, a kétdimenziós szimulációt egy vékony szelet szimulációjával értük el, aminek két fedőlapján szimmetria peremfeltételt írtunk elő. A baloldal kivételével, ahol sebesség peremfeltételt írtunk elő (lásd följebb), a másik két szabad oldalon ún. "opening" peremfeltétel volt, ami állandó statikus nyomást jelent, a sebesség irányának előírása nélkül. Az összes szilárd falon (az üreg és az alsó perem), csúszásmentes peremfeltétel volt érvényben.



I.3.2. ábra. Az üreg hatása az áramlásra. Az ábrán az üreg nélküli áramlás és az üreggel történő áramlás sebességének különbsége látszik kontúrdiagram formájában. Az ábrán látható legkisebb különbség a zavartalan sebesség 0,1%-ának felel meg

Sok erőfeszítést tettünk az optimális számítási tartomány meghatározására. A cél az volt, hogy a peremek ne lépjenek kölcsönhatásba az áramlással, de hogy ne legyen a tartomány fölöslegesen nagy sem. Két szimulációt végeztünk nagyobb tartományon, ugyanazokkal a peremfeltételekkel, de az egyik geometriában nem volt üreg. Az eredményeket összehasonlítottuk, hogy meghatározzuk az üreg által befolyásolt részt (I.3.2 ábra). Kiderült, hogy az üreg alvízi hatása nagyobb, de felvízi hatása is van. Az eredmények alapján a tartomány mérete 2L lett az üreg előtt, 3L az üreg fölött és mögött (I.3.2 és I.3.3. ábra).



I.3.3. ábra. Optimalizált numerikus háló

Alapos hálótanulmányt végeztünk, mielőtt hozzáfogtunk a paramétertanulmányokhoz. A hálótanulmány nemcsak a háló nagyságát érintette, hanem a háló szerkezetét (struktúrált vagy O-grid), valamint a hálónak kritikus helyeken való lokális finomításának szükségességét is (minden ilyen élt betűvel jelöltünk a I.3.3. ábrán). Azt találtuk, hogy ha a felbontás nem eléggé finom az üreg közepén, akkor bizonyos moduláló frekvenciák (mint például a 0,4f_0 csúcs az I.3.5. ábra mod1 csúcsaként) nem jelennek meg a spektrumban. A hálótanulmány kritériuma néhány kiválasztott pontban a nyomáslefutás, illetve a spektrum volt. A spektrumot a MatLab kereskedelmi szoftvercsomag FFT (Fast Fourier Transformation) moduljával számoltuk. Függetlenül a jel időbeli felbontásától, az FFT-t periódusonként 16 pontból készítettük. Ez elegendőnek bizonyult a releváns frekvenciacsúcsok megjelenítésére. A jel hosszúságát úgy választottuk meg, hogy a frekvenciafelbontás kb. az alapfrekvencia 1%-ára adódjon. Ez kb. 100 alapperiódus idejének felelt meg. Az FFT minősége nagyban javítható, ha a domináns frekvenciájú lengés egész számú periódusából készítjük (ha a jel ehhez kellően tiszta). A felhasznált jel általában az üreg hátsó falán rögzített nyomás volt, de más helyeken vagy más fizikai mennyiségekből (pl. sebesség) készített FFT-k ugyanazokhoz a következtetésekhez vezettek. A hálótanulmányokban nagy pontossággal határoztuk meg a frekvenciacsúcsok helyét, de az amplitúdókban 10% eltérést engedélyeztünk, mivel annak bizonytalansága sokkal nagyobb.

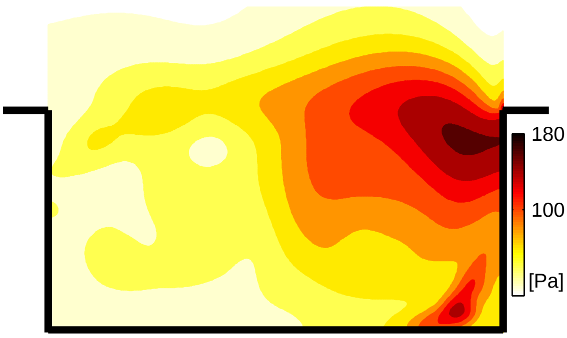
A hálótanulmány során kiderült, hogy az O-grid nem járt semmi előnnyel, így struktúrált hálót használtunk.

Sok különböző nagyságú háló kipróbálása után arra a következtetésre jutottunk, hogy kellően pontos eredményeket kapunk egy 53700 elemből álló hálóval (I.3.3. ábra). Azt tapasztaltuk, hogy egy bizonyos számú cellán túl nem a cellák száma, hanem azok minősége (oldalarány = aspect ratio) számított. Az alkalmazott háló jó minőségű cellákból állt, az üregen belül a felbontás 250x120 cella volt. Dupla pontosságú (64 bites) számábrázolást is teszteltünk, de nem tapasztaltunk javulást a szimplához képest. Az időlépés tekintetében is alapos tesztelést végeztünk és végülis azt az időlépést választottuk, ami kb. 1-es Courant számot eredményez a nyírórétegben.

Az átlagos áramlási kép két nagy és több kicsi örvénnyel az I.3.1. (b) ábrán látható. A pillanatnyi áramképek ettől némileg eltérnek, de az alapstruktúrában nem. A konvergenciakritérium 10^{-5} RMS hibára volt állítva.

I.3.3 Adatgyűjtés és -előkészítés

Az ANSYS CFX szimulációkból nyert sebesség- és nyomásmezőket egy ANSYS CCL szkripttel exportáltuk, és az adatokat MatLab segítségével dolgoztuk fel. Kezdetben a szükséges másodrendű (helyenként harmadrendű) deriváltakat másodrendű numerikus sémákkal közelítettük mind időben, mind térben.



I.3.4. ábra. Az időfüggő nyomás átlag körüli szórása az üregben Re_L = 24640 esetén. Alacsonyabb Reynolds-szám esetén a nagy szórású zóna eltűnik a jobb alsó sarokból

Mivel ezeket a deriváltakat később örvénydetektáló módszerekben használtuk föl, amik érzékenyek a pontatlanságból eredő zajra, később egy másik módszerre tértünk át. A zaj csökkentése érdekében szakaszonként köbös spline-okat illesztettünk mindkét sebességkomponens pontjaira. A MatLab beépített spline algoritmusának van egy paramétere, ami a simaság és a szimulált adatokra való jó illeszkedés ellentmondó követelményeinek relatív súlyozását határozza meg. Vizsgálataink azt sugallták, hogy a legjobb eredményt a default érték adta, úgyhogy a továbbiakban ezt használtuk. Bár sokszor nagyon hasonló eredményeket kaptunk, mint a numerikus deriválás esetén, ennek a módszernek mégis nagy előnye az, hogy a deriváltakat a szakaszosan illesztett görbékből analitikusan tudjuk kiszámolni. A hanggenerálás szempontjából kritikus jelentőségű a hátsó fal fölső sarkánál ébredő nyomásváltozás. Ezért, amikor az elemzés egy skalár időjelen alapul, praktikus a nyomásjelet választani ezen a területen. A jel kiválasztásának legkedvezőbb helyét a legnagyobb nyomásingadozás helyeként definiáltuk és ehhez előzetesen feltérképeztük a nyomásingadozást. Mind a teljes amplitúdót, mind a szórást kiértékeltük és az eredmények nagyon hasonlóak voltak. A I.3.4. ábra mutatja, hogy a legnagyobb ingadozás a hátsó falon a sarok alatt 0,07D távolságban volt, tehát ezt a pontot választottuk. Hasonló következtetésre jutott Murray et al. (2009) is. További érv e pont mellett az a tény, hogy a kontinuitási egyenlet reziduuma harmadrésze csak a sarokponténak. A sarokpont ezen kívül a mérésekkel való összehasonlíthatóság szempontjából sem előnyös, hiszen pontosan a sarokba nem lehet nyomástávadót vagy mikrofont helyezni. Mindazonáltal a két pontot összehasonlítva a fő tendenciák hasonlóak a választott monitorpontban és a sarokpontban.

A fejezetben bemutatott összes szimuláció elemzésében a kezdeti tranzienseket elhagytuk. Az I.3.4. (b) ábra az időátlagolt áramlási mezőt ábrázolja, tisztán mutatva a két nagy örvényt, amit az (a) részben sematikusan jeleztünk. Ez az átlagolt sebességmező minden vizsgált esetre jellemző, megegyezően Rowley et al. (2002), Kourta & Vitale (2008), Faure et al. (2007); Faure et al. (2007), Pereira & Sousa (1995), Lee et al. (2010) eredményeivel. Kisebb örvények szintén előfordulnak az üregben, de csak a leválási pont alatti örvény állandósul.

I.3.4. Spektrálanalízis

A különböző frekvenciájú lengések pontos ismerete azért fontos, mert ha a nemkívánatos, zajhoz, rezgésekhez vezető lengések mechanizmusa pontosan ismert, könnyebben tudunk azokat megszüntető áramlásszabályozó stratégiákat alkotni. Az I.3.5. ábra mutatja a különböző instacionárius szimulációk dimenziótlan spektrumát. Ami az alvízi sarok nyomásspektrumát illeti ((a) rész), a Reynolds-szám függvényében három különböző tartomány azonosítható. Az ábrán a frekvenciát dimenziótlan formában a Strouhal-szám segítségével definiáltuk: $St = fU/L$.

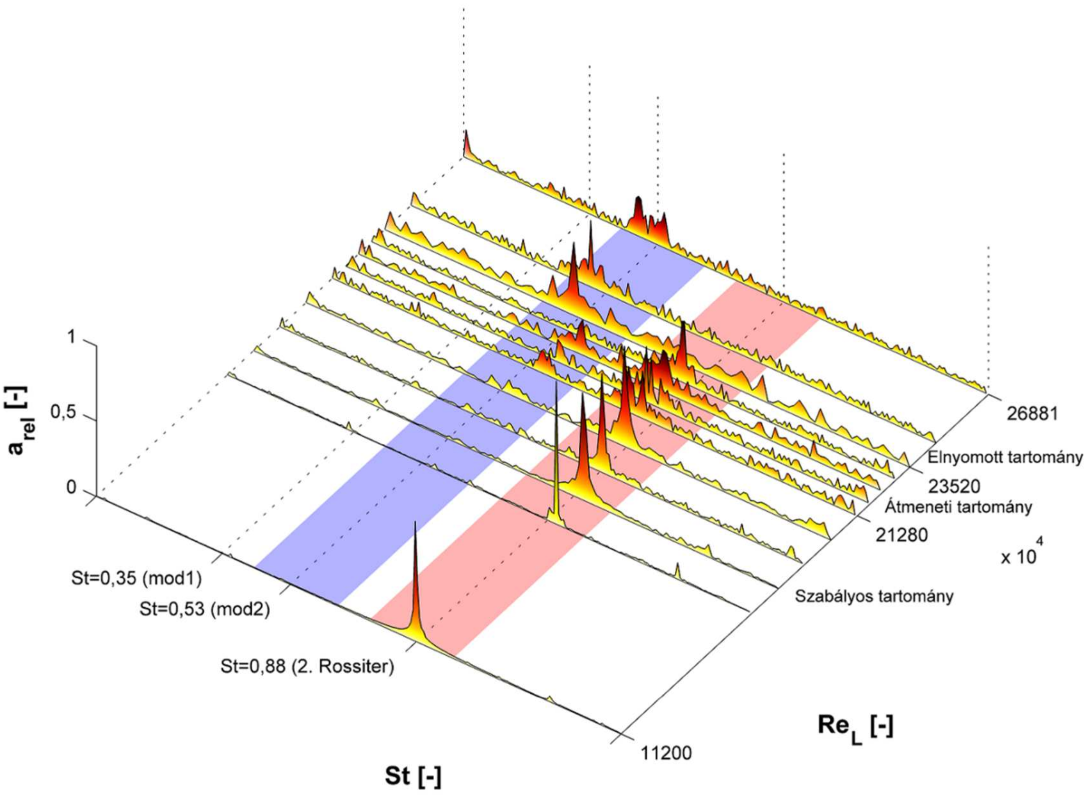
1. A szabályos, második Rossiter módus által dominált tartomány, röviden: *szabályos* tartomány (Re_L < 21280);

2. Az *átmeneti* tartomány (21280 ≤ Re_L ≤ 23520);

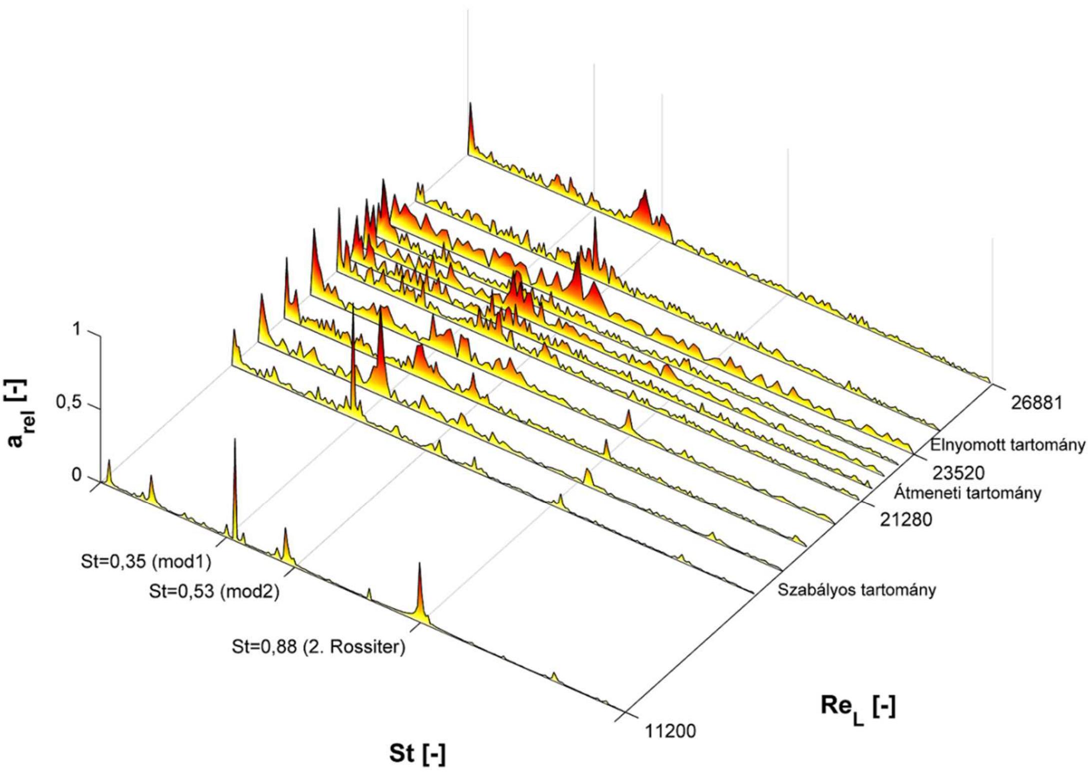
3. A Rossiter-lengést egy másik mechanizmus elnyomja, röviden: *elnyomott* tartomány (23520 < Re_L).

A szabályos tartományban végzett szimulációk esetében egy egyedüli domináns spektrális csúcs található St = 0,88-nál. Ez a Strouhal-szám azt sugallja, hogy a csúcs megfelel a második Rossiter módusnak. Ha bármelyik időpillanatban megszámoljuk a nyírórétegen található instabilitási félhullámokat, megerősíthetjük, hogy ez a csúcs valóban a második Rossiter módust jelzi, összhangban Kourta & Vitale (2008) eredményével (lásd az I.3.6 fejezetet is). Az átmeneti tartományban minden spektrumban két csúcs van, változó dominanciával. A magasabb Strouhal-számú csúcs továbbra is a második Rossiter módusnak felel meg, de az újonnan jelentkező alacsonyabb frekvenciát nem annyira könnyű értelmezni. A második Rossiter frekvenciával nemharmonikus kapcsolatban van, hasonlóan Lusseyran et al. (2008) eredményeihez. Rövid idejű csúszóablakos Fourier transzformáció megmutatta (I.3.6. ábra), hogy a két csúcs felváltva, véletlenszerűen kapcsolgatva dominál, tehát, az átmeneti tartományt tekintve, az áramlásban két, egymással versenyző visszacsatolási mechanizmus van, amelyek meghatározhatják a nyíróréteg lengését. Hasonló móduskapcsolgatást tapasztalt Kegerise et al. (2004) és Lusseyran et al. (2008). Az ablak méretét úgy választottuk, hogy az kb. 8 Rossiter lengést és 11 alacsony frekvenciás lengést tartalmazott, és az ablak eltolása az ablak méretének 1/60-ad része. Az alacsony frekvenciás lengéseknek alacsonyabb Reynolds-számoknál is voltak előképei.

A szabályos tartományban két moduláló frekvencia is megjelent (mod1 és mod2) a második Rossiter frekvencia mellett. Az I.3.5a ábrán ezek alig láthatóak, de az I.3.5b ábrán sokkal erősebbek, mint a második Rossiter csúcs. (Az I.3.5b ábra az impulzusáram spektrumát mutatja egy másik helyen, amit az I.3.1a ábrán vázolunk. A spektrum frekvenciatartalmát várhatóan nem befolyásolja a fizikai mennyiség választása, de később kifejtett okok miatt itt megfelelőbbnek láttuk az impulzusáram alkalmazását, mint a nyomásét.) E két moduláló frekvencia összege egyenlő a második Rossiter frekvenciával.

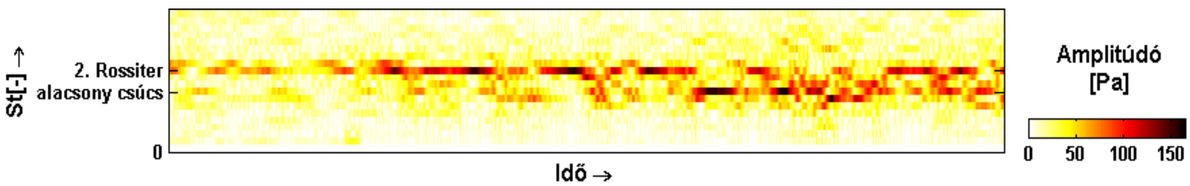


(a)



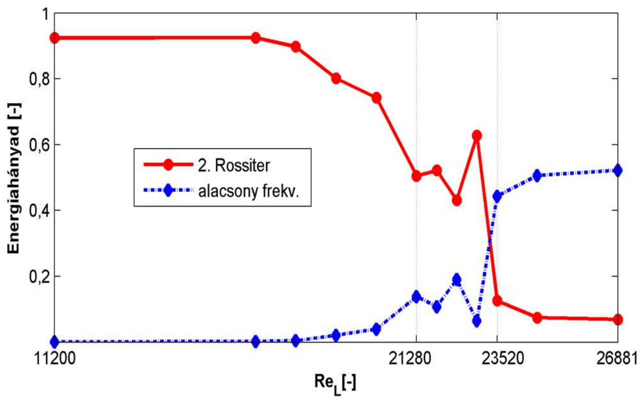
(b)

I.3.5. ábra. A szimulációk dimenziótlan spektrumai. Dimenziótlan frekvenciaként $St = fL/U$-t használtuk. A dimenziótlan amplitúdó $a_{rel} = \|a\|/a$, ahol $\|a\|$ a euklidészi normája, mivel az a amplitúdó vektor, a diszkrét Fourier transzformáció következtében. (a) nyomás a hátsó saroknál; (b) impulzusáram az ellenőrző felületen keresztül (I.3.1. ábra)



I.3.6. ábra. A csúszóablakos Fourier transzformáció eredménye Re_L = 22400-nál

Ez arra enged következtetni, hogy a moduláló frekvenciák egyike a másik moduláló frekvencia és a Rossiter frekvencia nemlineáris kölcsönhatásából adódik (Knisely & Rockwell (1982), Kourta & Vitale (2008)). A szabályos tartományban talált moduláló frekvenciák és az átmeneti tartományban föllépő alacsony frekvencia közötti kapcsolatot ennek az alfejezetnek a végére tisztázzuk.



I.3.7. ábra. Az I.3.5a ábrán bemutatott Strouhal-szám sávok energiája a hátsó sarok alatt mért nyomásspektrum teljes energiájának arányában

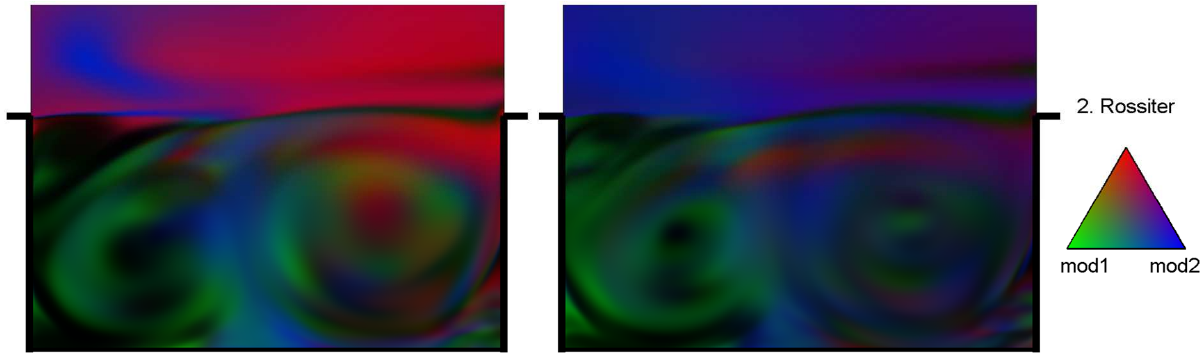
Az I.3.5a ábra mutatja, hogy alacsonyabb Reynolds-számok esetén az energia a második Rossiter módusban koncentrálódik, míg magasabb Reynolds-számok esetén az alacsonyabb Strouhal-számú tartománynak van nagyobb energiája. A I.3.7 ábrán kvantifikáljuk ezt a jelenséget oly módon, hogy az I.3.5a ábra I. és II. Strouhal-szám tartományának energia-részarányát ábrázoljuk a Reynolds-szám függvényében.

(Számítási szempontból a teljesítményspektrum I., illetve II. tartománya alatti terület képviselte az egyes tartományok energiáját, míg a teljes teljesítményspektrum alatti terület a teljes energiát.) Figyelemre méltó, hogy kisebb Reynolds-számok esetén az I. tartományban tartalmazott energia 90% fölött van, míg a nagyobb Reynolds-számoknál a II. tartományban épphogy meghaladja az 50%-ot a szélessávú zaj miatt. A Re_L = 22960-nál fölvett érték trenden kívül esik. Ez lehet, hogy annak tulajdonítható, hogy a vizsgált időszakban a szimulált jel véletlenül aránytalanul hosszabb időt töltött a második Rossiter módusban.

Az I.3.5a és az I.3.5b ábrák közti különbség megvilágítja a spektrum helyre való érzékenységét. Ez alapján érdekes lehet a kritikus spektrális csúcsok (második Rossiter csúcs és a két modulációs csúcs) arányát a hely függvényében látni. A következő elemzés az üregben és az a fölötti 0,5*D* vastagságú rétegben a I.3.8. ábrához hasonló ábrákat hoz létre. Az ábrázolás módszere az RGB additív színmodellen alapszik. A vízszintes sebességkomponenst, *u*-t Fourier-transzformáltuk a kiválasztott terület minden pontjában. Minden pontban a szín az RGB komponensek intenzitásának összegeként jött létre. A piros, zöld és kék komponensek intenzitása rendre arányos volt a második Rossiter, a mod1 és a mod2 spektrális csúcsok energiatartalmával, az illető térbeli pontban.

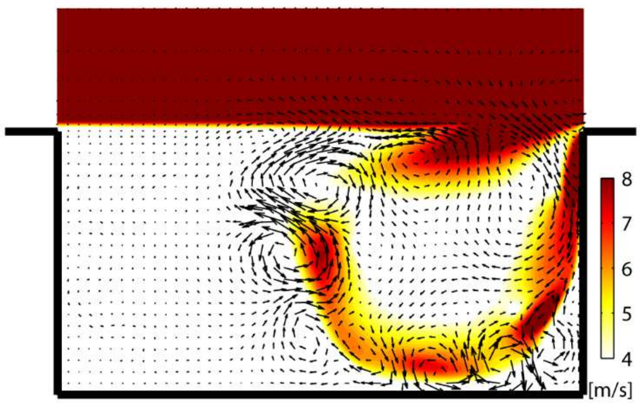
Ugyanazzal a számítási módszerrel, mint amit az I.3.5a ábránál az I. és a II. intervallumra alkalmaztunk, három, ΔSt = ± 0,07 sávszélességű intervallumot definiáltunk a második Rossiter és a két moduláló frekvencia körül. Voltak helyek, amelyeknek spektruma a három definiált sávon kívüli domináns csúcsot tartalmazott (tipikusan nagyon alacsony frekvenciánál); ezt feketéhez közeli színnel jelöltük. Miután ezt a színezési technikát különböző Reynolds-számú szimulációkra alkalmaztuk, kiderült, hogy két alapvető térbeli konfiguráció van. Míg a szabályos tartományban végzett szimulációk a I.3.8a ábra mintázatát mutatták, az elnyomott tartományban végzett szimulációk a I.3.8b ábrához hasonló eredményt szolgáltattak.

Az átmeneti tartományban mindkét mintázat előfordulhatott, aszerint, hogy pillanatnyilag melyik



I.3.8. ábra. A különböző frekvenciasávok relatív energiája. Mindkét kép Re_L = 22400 - nél készült, de az időjel különböző (6000 időlépésnyi) részeit felhasználva. Egy módusugrás történt a két időszak között. (a)-ban a szabályos módusban, míg (b)-ben az elnyomott módusban működik a rendszer.

frekvencia dominál (móduskapcsolgatás). A csapkodó nyíróréteg az alvízi saroknál periodikusan nagy energiájú folyadékot táplál be az üregbe. Ezek a folyadékcsomagok a nagy alvízi örvény szélén utaznak körbe. Eszerint azt várnánk, hogy a nyíróréteg lengési frekvenciája dominál a nagy alvízi örvényben. Ehelyett viszont a I.3.8a ábra tanúsága szerint a moduláló frekvenciák uralják az örvény bal oldalát. Ahhoz, hogy ezt a jelenséget részletesebben is megvizsgáljuk, a sebességmezőt harmonikus komponenseire bontottuk és a moduláló frekvenciának megfelelő rész-sebességmezőből a nagy energiájú folyadékcsomagokkal együtt animációt készítettünk. Ennek az animációnak egy pillanata látszódik a I.3.9. ábrán.

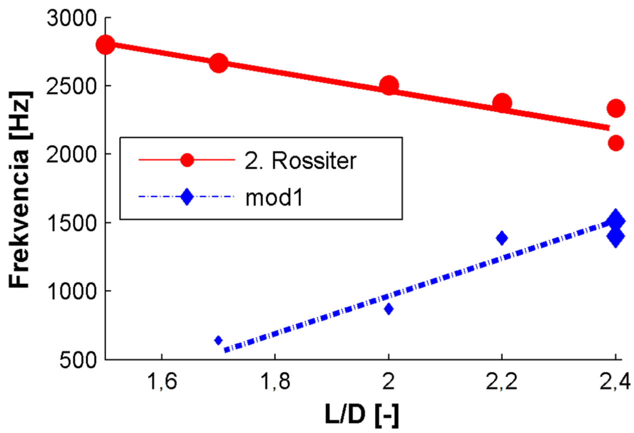


I.3.9. ábra. A moduláló frekvenciakomponens szerkezete Re_L = 17920 esetén. A színezés a sebességvektor nagyságát jelzi, kiemelve a nagy energiájú csomagok advekcióját, míg a vektormező a sávszűrt sebességmezőt mutatja

A modulációs frekvenciakomponens sebességmezeje és a belépő nagy energiájú folyadékcsomagok relatív fázisától függően az utóbbiak lelassulhatnak vagy felgyorsulhatnak, erősödhetnek vagy gyengülhetnek, szétszakadhatnak vagy összeolvadhatnak. Egy, a I.3.9. ábrára vetett pillantás megmagyarázza, miért az impulzusáramot tekintettük változónak és miért pont ezt a helyet (lásd az I.3.1a ábrát is) választottuk a nagy energiájú folyadékcsomagok érkezési gyakoriságának leírására az I.3.5b ábrán. Egy másik ok az, hogy az impulzusáram-spektrum az alacsony frekvenciájú csúcsokat nagyobb relatív amplitúdóval jeleníti meg, mint a nyomásspektrum.

Sok tapasztalatot gyűjtöttünk a szabályos tartományban a moduláló frekvenciákkal kapcsolatban numerikus és fizikai paramétertanulmányok segítségével. Alapos hálótanulmányt hajtottunk végre a paramétertanulmány megkezdése előtt. Ez a hálótanulmány nem csak a háló globális méretére, hanem a kritikus helyeken való lokális finomítás szükségességére is kiterjedt. Azt találtuk, hogy ha az üreg közepén a hálófelbontás nem eléggé finom, akkor néha a moduláló frekvenciák eltűnnek.

Az üreg hosszára vonatkozó paramétertanulmányt végeztünk U = 27,69 m/s esetére, miközben az üreg mélysége állandó maradt. A I.3.10. ábrán az alvízi saroknál mért nyomásspektrum frekvenciacsúcsai láthatók a hossz-mélység arány függvényében.



I.3.10. ábra. A 2. Rossiter frekvenciacsúcsok és a moduláló frekvenciacsúcsok helye az üreghossz/mélység arány függvényében. A szimbólumok mérete a spektrális csúcsok nagyságát jelképezi.

Az üreghossz növelése hasonló változásokat idézett elő az áramlásban, mint a szabad áramlás sebességének növelése: a moduláló frekvenciák amplitúdója fokozatosan elérte Rossiter frekvenciáét. (Az átmeneti tartományt nem tanulmányoztuk részletesen az üreghossz-tanulmány esetén.)

Farkas & Paál (2009) tanúsága szerint (a cikk 7. ábrája) a moduláló frekvenciák rendkívül közel esnek az első Rossiter módushoz, annyira, hogy az ember könnyen hajlamos azt hinni, hogy azonosak vele. Mégis az alábbiakban több érvet sorolunk föl, miért sokkal valószínűbb, hogy a moduláló frekvenciák nem azonosak az első Rossiter frekvenciákkal.

A moduláló frekvencia növekszik az üreghosszal, míg a Rossiter frekvenciáknak csökkenni kell (I.3.1 egyenlet). Így a moduláló frekvenciának más visszacsatolási mechanizmuson kell alapulnia; nem lehet Rossiter frekvencia. A moduláló frekvenciák térbeli eloszlása azt sugallja, hogy a visszacsatolási mechanizmus összefüggésben állhat a nyíróréteg üreghossz mentén középső szakaszával, mivel ezek a frekvenciák ott koncentrálódnak a legerősebben. Haigermoser et al. (2008) szintén at találta, hogy a nagy alvízi örvénnyel együtt utazó zavarások az üreg közepén kölcsönhathatnak a nyíróréteggel. Knisely & Rockwell (1982) kísérleti munkájában szintén hasonló alacsony frekvenciájú modulációkat talált. Az általuk használt L/Θ = 100 nem különbözött lényegesen a mi, 65 és 80 közötti értékeinktől. Ők az alacsony frekvenciájú modulációt a nyíróréteg-örvény változó felütközési helyével magyarázták. Ez azonban nem ellentmond a mi magyarázatunknak, hanem inkább kiegészíti azt. A Knisely és Rockwell által talált moduláló frekvenciák az alapfrekvenciának durván 0,4 és 0,6-szorosai. Ezek közül az egyiket tartják a valódi moduláló frekvenciának, a másikat pedig az alapfrekvenciával való nemlineáris kölcsönhatás eredményének, azaz így létrejövő különbségfrekvenciának. Pereira & Sousa (1995) nagyon hasonló jelenségeket talált ugyancsak kétdimenziós szimuláció segítségével és amellett érvelnek cikkükben, hogy eredményeiket jól lehet használni háromdimenziós áramlás jellemzésére is, miután az időátlagolt áramlás nagyon jó egyezést mutatott kísérleti eredményekkel. Chang et al. (2006) megintcsak alacsony frekvenciára bukkantak háromdimenziós LES felhasználásával, amit az örvény és a nyíróréteg kölcsönhatásának tulajdonítottak. Az alapvető frekvenciák térbeli eloszlása némileg megvilágítja a móduskapcsolgatást is. A moduláló frekvenciával összefüggő (ismeretlen) fizikai mechanizmus mindkét módusban megjelenik az üreg közepén és lehetséges, hogy szakaszosan képes a nyírórétegl engés visszacsatolási mechanizmusát szolgáltatni, azaz szakaszosan a nyírórétegl engés is erre a frekvenciára vált (I.3.8b ábra).

Mindezek alapján az átmeneti tartomány alacsony frekvenciás csúcsait a szabályos tartomány modulációs frekvenciáinak „utódjainak” tekintjük, ezért ezek nem lehetnek első Rossiter frekvenciák. Ez az állítás azonban nem feltétlenül igaz az elnyomott tartományra. Az üreghossz paramétertanulmány eredményei bizonytalanok ebben a tartományban. Itt a csúcsok kissé alacsonyabb Strouhal-számnál vannak, mint az átmeneti tartomány csúcsai (I.3.5a ábra) és ezek a Strouhal-számok pontosan illeszkednek az első Rossiter módus frekvenciáira.

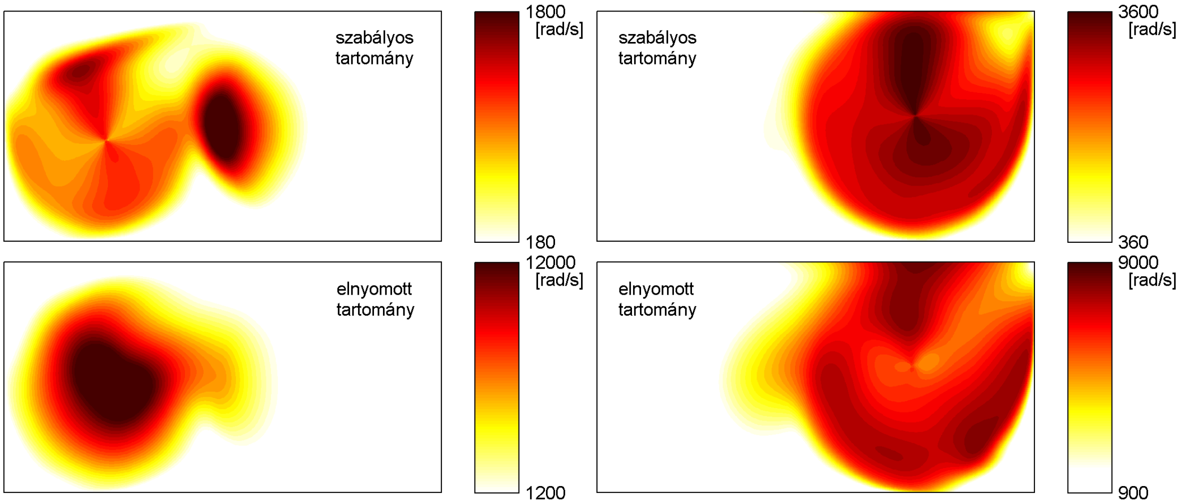
Összefoglalva, eddig a pontig nem világos, hogy az elnyomott tartomány csúcsai az átmeneti tartomány alacsony frekvenciájú csúcsainak utódai vagy az újonnan megjelenő első Rossiter módus lengései. Az utóbbi ellentmondana Murray et al. (2009) eredményeinek, aki csak M > 0,38-ra talált első Rossiter módusú lengést.

Ismeretes, hogy háromdimenziós üregek másképp viselkednek, mint kétdimenziósak (pl. Rockwell & Knisely (1980a)). Mégis azt állítjuk, hogy kétdimenziós szimulációink relevánsak a fizikai realitás leírására, mivel számos eredményünket tőlünk függetlenül, kísérletileg is megtalálták. A kísérleti munka természeténél fogva háromdimenziós, bár Ahuja & Mendoza (1995) szerint, ha az üreg mélysége kisebb, mint a hossza, a háromdimenziós hatások kicsik. Nagyon hasonló Strouhal-számokat talált Sarohia (1976) és Gharib & Roshko (1987), mint a mi 0,88-as értékünk, mindkét cikk hasonló Reynolds-szám és L/Θ tartományban. Sarohia (1976) definiálta saját paraméterét

$$S = \frac{L}{\delta}\sqrt{Re_\delta} \qquad \text{(I.3.2)}$$

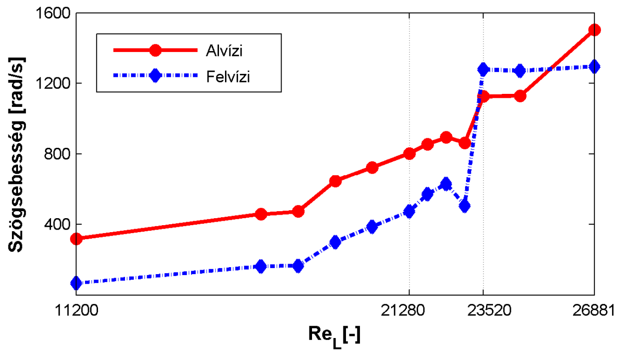
amely szerinte jobb indikátora a lengés létrejöttének, mint a Reynolds-szám (δ itt a határrétegvastagság). Sarohia kritikus S értéke 290, míg a mi S_{krit} értékünk 287,5 és 303 között van (lásd az I. táblázatot), ami kiváló egyezés. Pereira & Sousa (1995) nagyon jó egyezést talált a kétdimenziós szimulációk és kísérletek között az időátlagolt sebességmezőre, (a mi jelölésünkkel) Re_L = 6700 esetére. Ez ugyanabban a nagyságrendben van, mint a mi legalacsonyabb, 11200-as Reynolds-számunk. A moduláló nagy energiájú folyadékcsomagokkal kapcsolatban hasonló jelenségeket találtak, mint mi. Knisely és Rockwell fönt tárgyalt kísérleti eredményei szintén erős támogatást nyújtanak kétdimenziós szimulációink relevanciájának alátámasztásához. (Mindemellett Rowley et al. (2002) Krishnamurthy (1956) kísérleteivel támasztotta alá kétdimenziós szimulációit. Lawson & Barakos (2011) üreghangokról szóló review cikkében szintén legitim módszernek tekintette a kétdimenziós szimulációt és 22 különböző kísérletileg validált 2D numerikus szimulációt idéz.)

I.3.5. Nagy örvények szögsebessége



I.3.11. ábra. Időátlagolt szögsebességek (teljes körülfordulás másodpercenként). Vegyük észre a különböző skálákat! Csak az üreg területe van ábrázolva.

Ahogy ezt az I.3.1. ábrán vázoltuk, két nagy örvény van az üregben. Kiderült, hogy bizonyos esetekben örvény által generált visszacsatolás fontos szerepet játszhat a rendszer dinamikájában. Az örvények forgási sebességének ismerete mindehhez elengedhetetlen, mivel annak erős hatása van a zavarások terjedésére az örvényekben. A két örvényt külön vizsgáltuk. A két időátlagolt örvényközéppont körül számítottuk a szögsebességet. Az örvényközéppontokat a következőképpen határoztuk meg. Az időátlagolt sebességvektorokat 90 fokkal elforgatva megkaptuk az áramfüggvény gradiensének irányát. Ezután a gradiens módszert alkalmazva megtaláltuk az áramfüggvény szélsőértékét. A I.3.11. ábrán az időátlagolt lokális szögsebesség eloszlása látható. (Megjegyezzük, hogy ez a módszer nem szándékoltan bevonja a másik nagy örvény szomszédos részét is. Ezt leghangsúlyosabban a bal felső képen láthatjuk.) Az elülső örvény forgása nagyon lassú a szabályos tartományban, de az elnyomott tartományban az örvénymag szögsebessége meghaladja a hátulsó örvényét. Ott az alvízi örvény szilárdtestszerű forgást mutat, míg az felvízi nem.

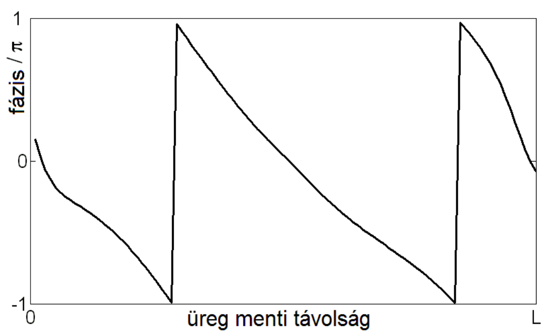


I.3.12. ábra. A felvízi és az alvízi örvény globális szögsebessége a Reynolds-szám függvényében

A nagy örvényeken belül globális átlagos szögsebességeket is meghatároztunk korong alakú, az időátlagolt örvényközépponttal koncentrikus felületeken. Az alvízi örvény esetében a korong átmérője épp annyival volt kisebb az üreg mélységénél, hogy az nem tartalmazta a határréteget és a nyíróréteget. A felvízi örvény fedőkorongja valamivel kisebb volt (lásd az I.3.1 ábrát is). A helyi fordulatszámokat a fedőkorongon belül mind időben, mind térben átlagoltuk, és így kaptuk a globális szögsebességeket. A I.3.12. ábra mutatja az eredményeket különböző Reynolds-számokra. Vegyük észre a felvízi örvény szögsebességében beálló meredek növekedést az átmeneti tartományban, míg az alvízi örvény forgási sebességének Reynolds-szám függvényében való emelkedése állandóbb.

A felvízi örvény szögsebessége nagyon hasonló a tendenciákat mutat, mint a mod2 frekvencia relatív energiája a I.3.7. ábrán.

I.3.6. Az instabilitási hullám terjedési sebessége



I.3.13. ábra. Az instabilitási hullám fázisa a nyírórétegben, egy időpillanatban, Re_L = 17914 esetén

Az instabilitási hullám terjedési sebességének (fázissebességének) Rossiter képletén keresztül nagy hatása van a frekvenciák előrejelezhetőségére. Ezek megfigyelésére 100 egyenlő távolságban lévő monitorpontot fektettünk le az üreg szájában, a fal szintjében. Ezekben a szabad áramlás sebességére merőleges sebesség-komponenseket rögzítettük. A Fourier transzformáció végrehajtása után minden pontban meghatároztuk a megfelelő frekvenciakomponens *fázisát* a fázisspektrum felhasználásával. Ilyen képet láthatunk az I.3.13. ábrán, amely tipikus a szabályos tartományban. A helyi hullámterjedési sebesség a domináns (Rossiter) frekvenciájú lengés két szomszédos pontban mért fáziskülönbségéből határozható meg. A fáziskülönbség és a frekvencia felhasználásával a terjedési idő számítható. A teljes terjedési idő hasonlóan számítható, ebből határozzuk meg az átlagos hullámterjedési sebességet.

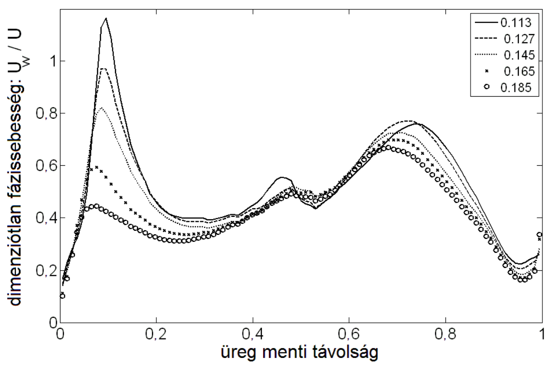
A zavarási hullám folyamatosan terjedt a felvízi saroktól. A terjedési sebesség vadul változott a hossz mentén (lásd a I.3.14. ábrát). Az *átlagos* terjedési sebesség viszont figyelemre méltóan állandó maradt: $0{,}4 \le U_w/U = \kappa \le 0{,}42$, a szabályos tartományban, ahol U_w a hullám terjedési sebessége. Ez élesen ellentmond Rossiternek, aki 0,66-os értéket talált – igaz, hogy jóval nagyobb sebességeknél. Az I.3.13. ábra szintén elárulja, hogy durván két teljes hullám van a nyírórétegben minden pillanatban, azaz a lengés valóban második Rossiter típusú.

Az elnyomott tartományban viszont egészen más eredményeket kaptunk. Az alapfrekvencián nem volt folyamatos fázisterjedés az üreghossz első 20-25%-ában. Ez összhangban van a hálótanulmány azon megállapításával, hogy az üreg felvízi szakaszának semmi hatása nem volt az alacsony frekvenciájú komponensre. Ez újabb alátámasztása annak a hipotézisnek, hogy az alacsony frekvenciák más mechanizmuson keresztül ébrednek.

I.3.7. A Rossiter paraméterek

Az (I.3.1) egyenlet két empirikus paraméterét a fenti hullámterjedési elemzés alapján, görbeillesztéssel határoztuk meg. A szabályos tartományban $\kappa = 0{,}41$ és $\gamma = -0{,}12$ adódott. γ értéke jelentősen eltér Rossiter 0,25-ös értékétől, de Rossiter más sebességtartományban dolgozott és esetünkben valóban kicsit több, mint két teljes hullám volt az üreg hossza mentén, megfelelően a negatív γ értéknek. Ennek a jelenségnek egy lehetséges magyarázata a következő. A nyíróréteg kezdetének elemi zavarását a nyírórétegnek az alvízi sarokra való felütközéséből eredő nyomás- vagy örvényességfluktuáció okozza. A felütközés nem pillanatnyi, hanem időben kiterjedt esemény. A lineáris elmélet szerint infinitézimálisan kicsi zavarás is elég, hogy egy instabilitási hullámot indítson el a felvízi sarok közelében. Viszont későbbi pillanatokban egyre nagyobb amplitúdójú zavarások indulnak és a hullám fázisát a legmagasabb amplitúdó időpontjával azonosítjuk.

I.3.8. A nyíróréteg belépő vastagságának hatása



I.3.14. ábra. Hullámterjedési sebesség különböző impulzusvastagságú határrétegekből kifejlődő nyírórétegekben

Rögzített $Re_L = 17914$ mellett változtattuk a belépő Blasius profil vastagságát. A tesztelt határrétegek adatait az I.3.2. táblázatban foglaltuk össze. Itt H az alaktényező. Az I.3.2. táblázatban előforduló legvékonyabb belépő határréteg rendkívül heves lengéseket végzett, minek következtében κ meghatározása nehéz volt, a legvastagabb viszont egyáltalán nem lengett. Az instabilitási hullám helyfüggő terjedési sebességét a I.3.14. ábrán láthatjuk. A legjelentősebb különbség a nyíróréteg második tizedében tapasztalható. $\theta = 0{,}113$ esetén a hullámterjedési sebesség U_w meghaladta a szabad áramlás sebességét U-t, holott azon a területen az áramlási sebesség csak kb. $0{,}4U$. Ez a jelenség gyanút kelthet, azonban Bechert & Pfizenmaier (1975) Michalke (1971) elméleti munkájára alapozva kísérletileg megmutatta, hogy nyírórétegekben és szabadsugarakban előfordul ilyen, „ultragyorsnak” nevezett instabilitási hullám, szintén elsősorban vékony nyírórétegekben, alacsony Strouhal-számoknál.

I.3.2. táblázat. Blasius határrétegek adatai a belépő élnél

δ [mm]	δ* [mm]	Θ [mm]	H [-]	κ [-]
0,81	0,246	0,057	4,734	
1,02	0,318	0,113	2,811	0,460
1,11	0,353	0,127	2,773	0,446
1,22	0,295	0,145	2,713	0,428
1,34	0,440	0,165	2,664	0,397
1,46	0,484	0,185	2,620	0,372
1,83	0,618	0,239	2,584	-

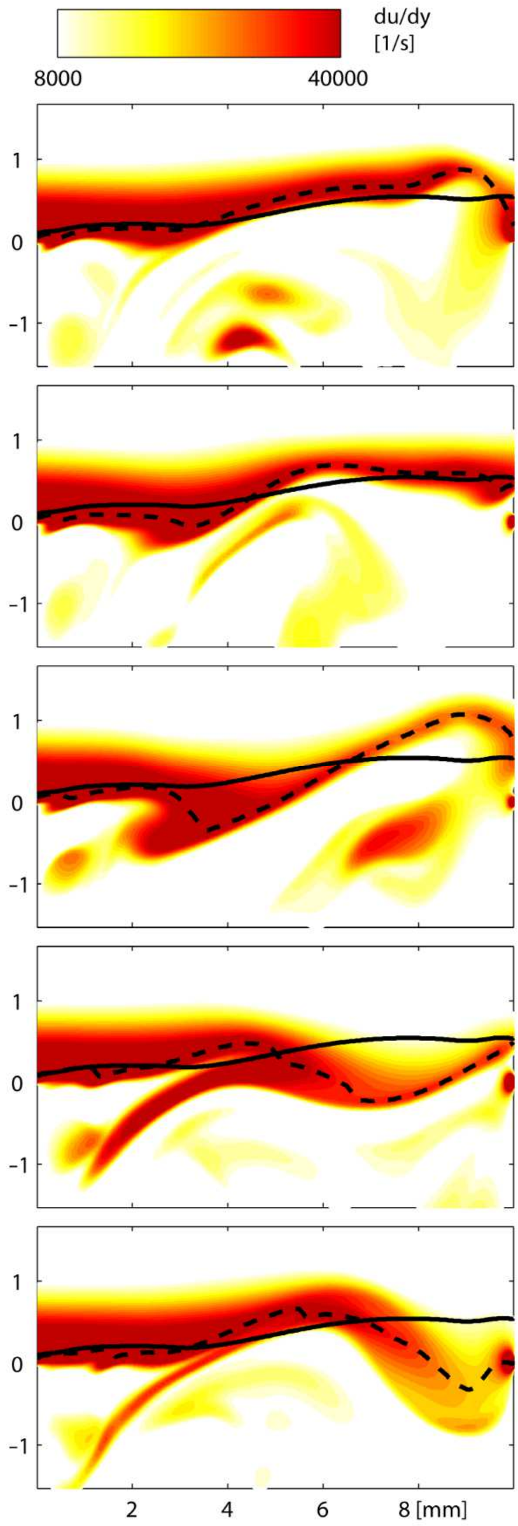
Látjuk, hogy az átlagos terjedési sebesség *κ* is nagyobb volt vékonyabb nyírórétegek esetén, összhangban Rockwell & Naudascher (1979) cikkével. Ez a függés főleg az üreghossz fent említett második tizedének tulajdonítható. Emellett, a I.3.13. ábrához hasonló fázisdiagramok elemzése kimutatta, hogy *γ* konstans marad a nyírórétegvastagság függvényében. Mindezek alapján a vizsgált tartományban kb. 40%-os impulzusvastagság csökkenés kb. 20% frekvencianövekedést eredményezett, majdnem lineáris lefutással (lásd Farkas & Paál (2009) 9. ábrája).

I.3.9 Az instabilitási hullám amplitúdója

Ahhoz, hogy a nyíróréteg mozgását tanulmányozzuk, először definiálnunk kell annak pillanatnyi pozícióját. A nyíróréteget vonallal helyettesítettük. A módszer lényege az, hogy minden x koordinátához függetlenül meghatározzuk a maximális *du/dy* sebességgradiens helyét és ezeket a pontokat összekötve kapjuk a nyíróréteg középvonalát.

Ez az algoritmus az elnyomott tartományban nem volt eléggé robusztus, két ok miatt. Egyrészt, ideiglenesen megjelentek olyan régiók az üregben (tipikusan a központi és az alvízi részben), ahol a nyírófeszültség ugyanannál az *x* koordinátánál meghaladta a nyírórétegét, mint például a I.3.15. ábra harmadik képén. Másrészt, a felvízi örvény gyors forgása erősen hatott a nyírórétegre, mivel ott a folyadék helyileg a főiránnyal szemben folyik. Következésképpen egy másik erősen nyírt terület fejlődött ki periodikusan a felvízi örvény kerülete mentén a nyíróréteg „nyelveként”. Az I.3.15. ábra a „nyelv” kialakulását és megszűnését mutatja be. Amikor a nyelv megjelenik, két erősen nyírt terület tartozik ugyanahhoz az *x* koordinátához. Azt a szélsőértéket, amelyik távolabb volt az üreg fenekétől tekintettük a nyíróréteg középvonalának, még ha alacsonyabb nyírófeszültség-érték tartozott is hozzá. Néhány kiegészítést tettünk a nyíróréteg-középvonal meghatározási módszerhez, hogy kezelje a fönt említett nehézségeket. Ezzel a továbbfejlesztett módszerrel a középvonal érintője a vízszinteshez képest mindig ±36^o-on belül volt (többnyire ±15^o-on belül) tehát *du/dy* használata elfogadható volt a vonalra merőleges derivált használata helyett.

Figyelembe véve az összes egyszerűsítést és kompromisszumot, az így meghatározott középvonal alkalmas volt arra, hogy leírja a nyíróréteg mozgását, de az üreghossz utolsó 10%-án a módszer szisztematikusan alulbecsüli a nyíróréteg mozgásának amplitúdóját, tehát az ott kapott eredményeket figyelmen kívül kell hagyni. Minden x értékre kiszámítottuk a középvonal időátlagolt pozícióját. Az időátlagolt pozíciót kivontuk a pillanatnyi pozícióból és így megkaptuk az átlag körüli lengést. Ez az időjel azonban annyira szabálytalan volt, hogy nem lehetett periodikus görbét ráilleszteni és így az amplitúdót meghatározni. Ehelyett kiszámítottuk az instabilitási hullám átlagos távolságát az *x* koordináta mentén és az amplitúdót az átlagos távolság kétszereseként definiáltuk. Az eredmények különböző Reynolds-számokra a I.3.16. ábrán láthatóak.



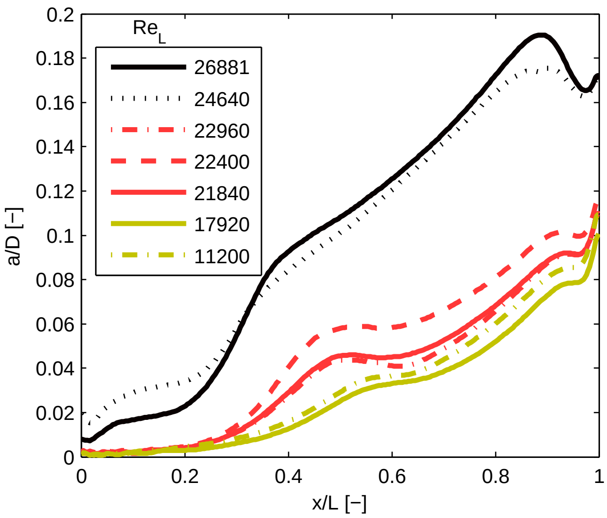
I.3.15. ábra. A nyíróréteg mozgása Re_L = 24640 esetében. A szaggatott vonal a középvonal pillanatnyi helyzetét, míg a folytonos vonal az időátlagot képviseli. Az ábrán az üreg teljes hossza és a nyíróréteg fölső 1,5 mm-e látható, az utóbbi kétszeres nagyításban

Az elnyomott tartományban az amplitúdó *x*-szel lényegesen gyorsabban növekszik, mint a szabályos és az átmeneti esetekben. Az elnyomott esetben a hullámnak tulajdonképpen már a felvízi saroknál jelentős amplitúdója van.

I.3.10. Örvénydetektálási módszerek alkalmazása

Az áramlástani mechanizmusok mélyebb megértéséhez a kisebb léptékű áramlási struktúrákat is azonosítanunk kell. Ehhez általában úgynevezett örvénydetektálási módszereket alkalmaznak. A következőkben három ilyen módszert alkalmazunk az üregben lezajló áramlásra. Az első kritériumot több néven ismeri az irodalom, emlegetik Okubo kritérium (Okubo (1970)), Weiss kritérium (Weiss (1991)) néven is, de ez valójában azonos a széles körben elterjedt *Q* kritérium kétdimenziós változatával. Mivel a kritérium alapjait Truesdell fektette le (Truesdell (1953)), Truesdell-Okubo-Weiss (TOW) kritériumnak fogjuk nevezni. A második kritérium a Farkas et al. (2012)-ben levezetett saját kritériumunk, ami részben a TOW kritérium továbbfejlesztése, részben Hua & Klein (1998) kritériumának kijavítása.

Ezt kiegészített (amended) kritériumnak neveztük. A kritériumok levezetését az 1. Függelékben adom meg. Ebben a levezetésben döntő része van vonatkozó cikkünk társszerzőjének, Dr. Szabó K. Gábornak. Itt csak röviden utalok a levezetésből adódó fizikai felismerésekre. E két kritérium lényege ugyanaz: örvénynek tartja az áramlás elliptikus régióit, ami azt jelenti, hogy egy örvényben azok a folyadékrészecskék, amik egy bizonyos időpontban közel voltak egymáshoz, még egy ideig közel is maradnak. TOW kritérium a térben is és az időben is nulladrendű közelítést ad, és egy elsőrendű közönséges differenciálegyenleten keresztül a lokális sebességgradiens mátrix sajátértékei segítségével definiál egy skalár értéket, *Q*-t, ami eldönti, hogy az illető pont elliptikus vagy hiperbolikus. A kiegészített kritérium időben továbbra is nulladrendű, térben viszont elsőrendű és ez két további tagot eredményez, ellentétben Hua és Klein helytelen levezetésével, ahol csak egy további tagot vettek észre. A kritérium egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet megoldásából adódik és a kritériumnak megfelelő skalárértékeket a sebességgyorsulás mátrix



I.3.16. ábra. Az instabilitási hullámok átlagos amplitúdója

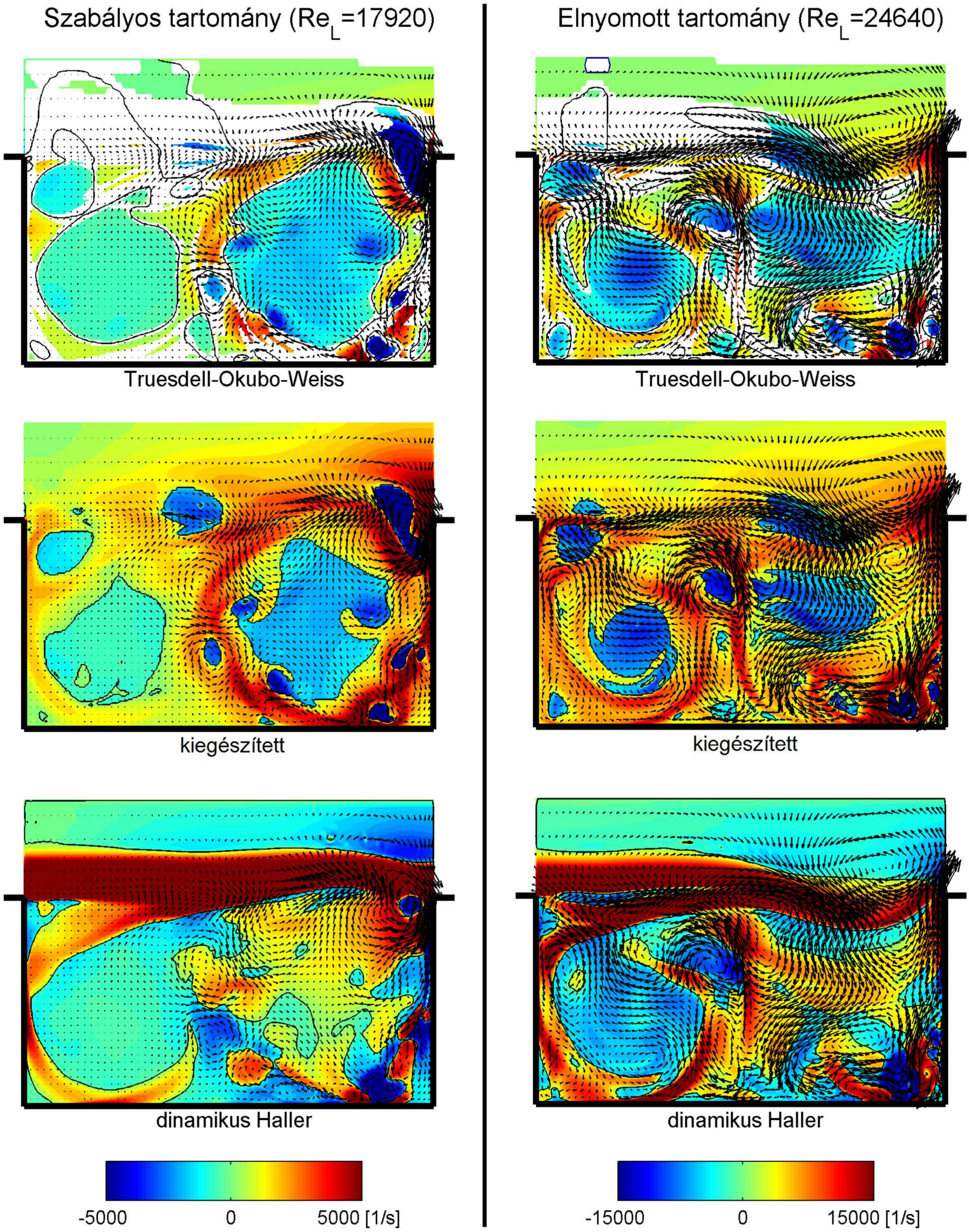
sajátértékeiből vezetjük le. Értelemszerűen a plusz tagok egyike a lokális, másika a konvektív gyorsulást jelképezi, és ahogyan hamarosan látjuk, mindkettő fontos.

A harmadik kritérium, Haller dinamikus kritériuma (Haller (2001)) más filozófián alapul, ennek részletes ismertetése azonban meghaladja e disszertáció kereteit. A teljes módszer nagyon nagyszámú részecskepálya kiszámítását kívánja hosszú ideig és így lagrange-i koherens struktúrák segítségével definiál elliptikus és hiperbolikus halmazokat. Viszont a módszernek kvázi melléktermékeként Haller definiált egy skalármennyiséget, amit *Q′*-vel jelölünk, és amit alább az (I.3.3) egyenlettel definiálunk. (Az egyenletben szereplő változókat a függelékben definiáljuk.) Ahol *Q′* pozitív, az a régió a pillanatnyi hiperbolikus halmazhoz tartozik.

A képletben foglalt változókat az 1. függelékben definiáljuk. Néhány megjegyzést kell tennünk Haller kritériumának értelmezéséhez. Először: ez hiperbolikus tartományok azonosítására szolgál és nem örvényekére (elliptikus tartományok). Másodszor: nem szükséges, hanem elégséges feltételt szolgáltat a hiperbolikusságra. Ezért *Q′* negatív értékei csak megengedik az ellipticitást, de azt nem vonják kötelezően maguk után. Harmadszor: a pillanatnyi hiperbolikus vonalak tartalmaznak lagrange-i információt, ellentétben a TOW kritérium $Q > 0$ értékével, tehát ezeknek nem kell megegyezniük. Negyedszer: ha a vizsgálat időtartamát növelnénk, a „kövér” hiperbolikus tartományok, amik az ábrán láthatók, vékonyabb, vonalszerű struktúrákra zsugorodnának, a véges idejű stabil és instabil sokaságokra. A három módszert az I.3.17. ábrán hasonlítom össze. Mindegyik ábrán az örvénynek megfelelő elliptikus (a kiegészített kritérium esetén bielliptikus) régiót kék színnel jelöltem. A két oszlop a szabályos és az elnyomott tartomány áramlásának tipikus pillanatait jeleníti meg. A szabályos tartományban mindkét örvénynek kerek magja van és az örvények nagyjából kitöltik az üreg teljes mélységét. Az alvízi örvény erősebb (azaz gyorsabban forog) és erősen nyírt kör alakú perifériája van. Mind a magon, mind a periférián szabálytalan zavarási mintázatokat láthatunk.

A felvízi örvény gyengébb, simább és nincs érzékelhető perifériája. Az elnyomott tartományban szembeötlik, hogy az alvízi örvény eredeti kör alakját kisebb struktúrák szabdalják, mind a magban, mind a fal közelében. A felvízi örvény nagyjából körszimmetrikusnak tűnik, mint a másik esetben, de itt jelentősen erősebb. Érdekes viszont, hogy a mérete lecsökkent és a *Q* eloszlás (gyakorlatilag az örvényességeloszlás) a magban jelentős radiális függést mutat.

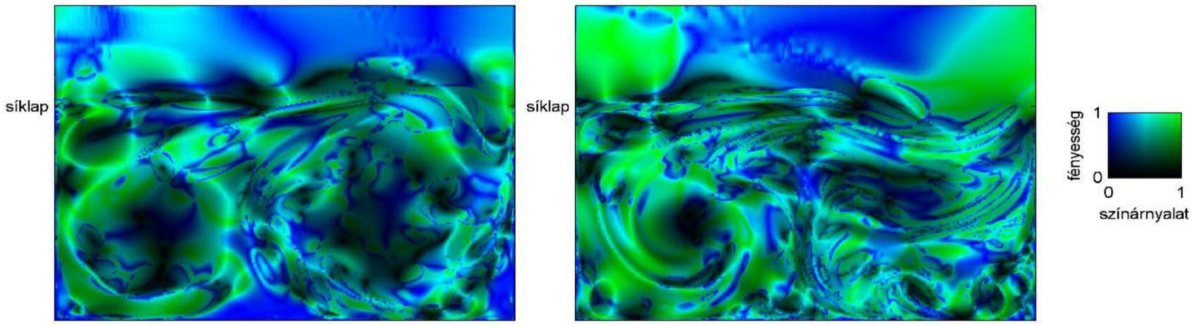
$$Q' = (\sigma/2 - |\omega|/2)^2 - \left(\lambda_\sigma \nu + \lambda_p/\rho\right) \qquad \text{(I.3.3)}$$



I.3.17. ábra. Az áramlási struktúrák összehasonlítása a szabályos tartományban (bal oldal) és az elnyomott tartományban (jobb oldal) az I.3.10 alfejezetben említett különböző örvénydetektálási módszerekkel. Minden sorban egy más módszernek megfelelő skalármező látható. A skalármezőkre a sebességmező fluktuáló részét fektettük. A módszerek részletes leírása részben a folyó szövegben, részben az I. Függelékben található

Ez a felismerés összhangban van az I.3.5. fejezet megállapításával, miszerint az alvízi örvény szilárdtestszerű forgást mutat, és a felvízi nem. A két eset összehasonlításából az is kiderül, hogy a kis örvény a nyíróréteg leválási pontjánál erősebb az elnyomott tartományban.

Az I.3.17. ábra felső sora, ami a TOW, illetve népszerűbb nevén a 2D *Q* kritériumot ábrázolja, tartalmaz fehér tartományokat is – ezek azt jelképezik, hogy a kritérium reális érvényességi tartományán kívül esnek, ahol nem lehet felelősséggel állítani, hogy az illető pontok hiperbolikusak vagy elliptikusak, ehhez magasabb rendű eljárásra lenne szükség. A középső sorban az 1. Függelékben leírt „kiegészített" kritériummal történő elemzés látható, ami térben magasabb rendű, mint a *Q* kritérium. Az I.3.17. ábra középső sorában a negatív értékek fizikai jelentése forgási



I.3.18. ábra. A gyorsulási tagok relatív kvalitatív fontossága. A fényesség azt jelzi, hogy a totális lagrange-i gyorsulás figyelembevétele hol javít az euleri TOW kritériumon, míg a szín a lokális (kékes) illetve a konvektív (zöldes) gyorsulások relatív jelentőségét mutatja. A bal és a jobb oldal megfelelnek az I.3.17. ábra hasonló képeinek

sebesség, míg a pozitív értékeké a nyújtási ráta.

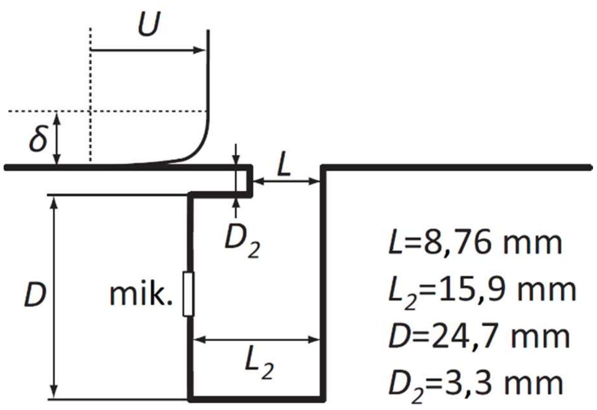
A felső sorral való összehasonlítás szerint a pontosabb kritérium megerősítette korábbi megfigyeléseinket az örvények magjában. Ez várható volt, hiszen ezekben a pontokban a TOW kritérium pontossága is kielégítő, mint ahogyan ezt a I.3.18. ábra sötét részei mutatják. Emellett viszont az örvények perifériáján az áramlási struktúrák új részletei bukkannak elő, ahogyan ezt a I.3.18. ábra fényes részei is mutatják. A szabályos tartományban szembetűnő köralakú nyírási övezet jelenik meg az alvízi örvény körül. Ez a megjelenítés tisztán mutatja, hogy számos kis kerületi örvénystruktúrát sodor magával az áramlás, mind a nyírási övezetben, mind beljebb, az örvénymag szélén. Az elnyomott tartományban a kiegészített kritérium elárulja egy kifejlődött nyírási övezet létezését a felvízi örvény körül. Az alvízi örvény struktúrája még inkább összetöredezett, az örvénymag nagysága nagyjából megfeleződik. A kerületi örvények, amelyeket ezzel a módszerrel is detektáltunk (bár létezésüket sejtettük), mindkét tartományban nagy energiájú folyadékcsomagokat szállítanak az alvízi sarok felütközési pontjától a falak mentén, visszatáplálva a nyírórétegbe. A kerületi örvények megjelenítése mindkét tartományban hangsúlyosabb, világosabb a „kiegészített" módszerrel.

Az örvénymagok TOW kritérium szerinti definíciója „megfagyott", euleri áramlási konfigurációra alapozódik. A „kiegészített" módszer szerinti örvénydefiníció a folyadékcsomagok lagrange-i eredetű diszperzióját is figyelembe veszi, egy bizonyos időhorizonton belül. A I.3.17. ábra fölső és középső sorának összehasonlítása világosan illusztrálja, hogy az időhorizont kiterjesztése a csapdázó örvénymagok területét szűkíti és növeli azokat a területeket, ahol exponenciális diszperzió megy végbe. Másképp kifejezve, az ellipticitás törékenyebb, a hiperbolicitás robusztusabb.

Haller dinamikus kritériumával kapcsolatos korlátozó megjegyzéseimet figyelembe véve, tekintsük a I.3.17. ábra 3. sorát! Csak a pozitív *Q'*-jű régiókra kell koncentrálnunk. Két fő változás jelenik meg az előző két kritériumhoz képest. Egyrészt nincsenek finom struktúrák, kevés jele van a szállított kerületi örvényeknek. Másrészt, az alvízi örvény elliptikus struktúrája teljesen szét van zilálva, nemcsak az elnyomott tartományban, hanem a szabályos tartományban is. Mindazonáltal, a felvízi örvénynek mind a magja, mind a perifériája koherens marad. Ez a különbség lehet, hogy azért van, mert a felvízi örvény nem szállít nagy energiájú, kisméretű struktúrákat.

1.3.11 Jármű-ajtórés modelljének szimulációja egy régi „benchmark” probléma alapján

Az üreghang egyik gyakorlati alkalmazása az jármű-ajtórések áramlásának és az az által gerjesztett hangnak szimulációja. Ez annyira érdekelte a tudományos közvéleményt, hogy „benchmark” problémákat fogalmaztak meg, amihez az egyik résztvevő méréseket készített (Henderson (2000)), és a többi résztvevő szabadon választott szimulációs módszerrel próbálta reprodukálni a kísérleti eredményeket (Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems (Category 6)). Mi ennek a problémának a geometriáját és peremfeltételeit használjuk saját vizsgálatainkhoz, a többi résztvevő szimulációs eredményeit itt nem ismertetjük. A disszertációban csak a munka lényegét foglalom össze, részleteket a Farkas & Paál (2015) cikkben találhat az olvasó.



I.3.19. ábra Az ajtórés-modell geometriája

A geometriai adatokat a I.3.19. ábrán foglaljuk össze. Eredetileg a résztvevők számára 16 és 22 mm-es határrétegvastagságot (δ) definiáltak rendre 26,8 és 50,9 m/s-os zavartalan sebességhez (*U*). Technikai nehézségek miatt azonban a méréseket később vékonyabb határrétegekkel hajtották végre. Az ezzel kapcsolatos információk nem teljesen világosak, de valószínűleg δ = 2 és 12 mm lett a végső határrétegvastagság, amelyeket ezentúl vékony, illetve vastag határrétegként emlegettek (Henderson (2000)). Az áramlási sebesség szintén megváltozott 50,9-ről 50 m/s-ra. A nyomásjelet két, a bal oldali fal közepén elhelyezett ¼’’-os kondenzátor-mikrofonnal és egy dinamikus jelfeldolgozóval rögzítettük Henderson (2000).

Ez a geometria egy ún. mély üreget jelenít meg, ami azt jelenti, hogy az üreg transzverzális (áramlás irányára merőleges) sajátfrekvenciái fontos szerepet játszanak. Ha e frekvenciák közül valamelyik közel van valamelyik Rossiter frekvenciához, akkor ezek kölcsönhathatnak és rezonancia jöhet létre. Ez az úgynevezett áramlási-rezonáns eset, lásd az I.3.1. alfejezetet. Emiatt azt várjuk, hogy még alacsony Mach számnál sem alkalmazhatunk összenyomhatatlan közelítést, hiszen az üregrezonanciák reprodukálásához szükséges az összenyomhatóság. Ez a feltételezésünk be is fog igazolódni.

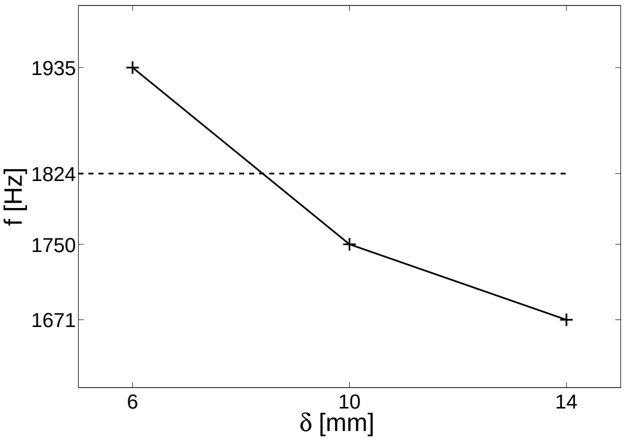
Szimulációinkat az ANSYS CFX 14.0 kereskedelmi szoftverrel végeztük, míg a hálókat ANSYS ICEM-mel készítettük. A szimulációk többségét összenyomható modellel készítettük, nem visszaverő peremfeltételekkel és a kapott nyomásspektrumokat összehasonlítottuk a kísérleti adatokkal. Nem végeztünk külön akusztikai szimulációt.

A kereskedelmi szoftver nem visszaverő peremfeltétele sajnos nem működött tökéletesen; egy bizonyos számú iteráció után a megoldás instabillá vált. Emiatt rengeteget kísérleteztünk mind a tartomány alakjával, mind a peremfeltételekkel, mind a hálókkal. Ennek részletei Farkas & Paál (2015)-ben találhatók.

Az örvényviszkozitáson és a Reynolds feszültségen alapuló turbulenciamodellek esetén 2D szimulációt végeztünk. A DES (Detached Eddy Simulation) turbulenciamodellt viszont csak 3D-ben lehet használni. Ezért 3D geometriát is készítettünk. Mivel a kísérletben használt vastagság megfelelő felbontása meghaladta volna számítógépes kapacitásunkat, ezért 15,9 mm-es vastagságot választottunk, ami pont L_2-nek felel meg a I.3.19. ábra jelölései szerint. Ezt Ahuja & Mendoza (1995) megállapítása alapján tettük, akik a szimulációs tartomány vastagságának hatását vizsgálva arra a következtetésre jutottak, hogy ha a vastagság meghaladja az üreg hosszát, annak már a hangkibocsátásra nincs további hatása. Mindemellett definiáltunk egy *pszeudo-3D tartományt is,* ami egy nagyon vékony, 0,1 mm nagyságrendű réteg, további 6-20 cellára felosztva. Ez átmenetet képez a 2D és a 3D tartományok között és az az értelme, hogy segítségével el lehet választani 3D hatását a turbulenciamodell hatásától.

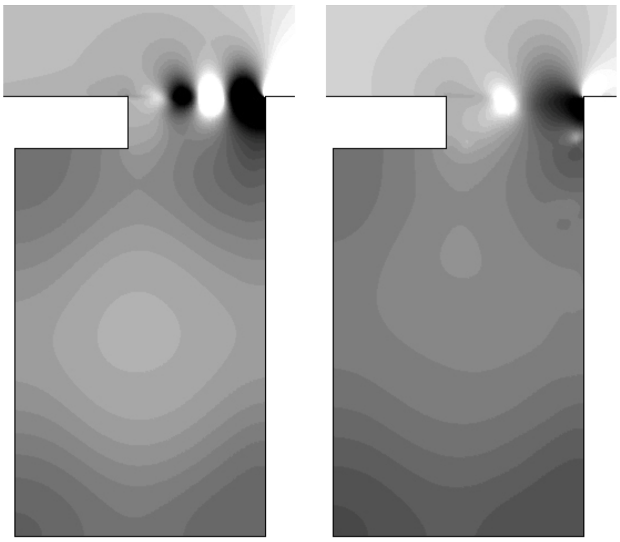
A tartomány jóval nagyobb volt, mint az üreg és környéke és a tartomány bal oldalán sebességprofil bemenő peremfeltételt írtunk elő. A turbulens határréteg sebességprofilját egy SST turbulenciamodellel, sík fal mellett végzett segédszimulációval állítottuk elő. További részleteket Farkas & Paál (2015)-ben közlünk.

Mivel a referenciamérésekben nem közöltek hőmérsékletértékeket, egy rövid paramétertanulmányt végeztünk a viszkozitás hatásáról. Ha a hőmérséklet 0°C és 50°C között változik, a kapott lengési frekvencia 2%-on belül marad, tehát a hatás elhanyagolható.



I.3.20. ábra. A határrétegvastagság hatása a nyíróréteglengés frekvenciájára *U* = 50 m/s esetén. A szaggatott vonal a Henderson kísérleti eredményét jelzi

A következőkben a belépő határréteg hatásával foglalkozunk. A Workshop résztvevőinek többsége vékonyabb határréteget használt, mint Henderson (2000) tette méréseiben a „vastag” esetben (valószínűleg 12 mm). Ez azért volt szükséges, hogy ellensúlyozzák a numerikus disszipációt és kikényszerítsék a nyíróréteglengést, hiszen ismert, hogy a lengés egyik legjobb ellenszere a vastag beérkező határréteg (Ahuja & Mendoza (1995)). Hasonló tanulmányokkal összhangban (Kurbatskii & Tam (2000)) azt találtuk, hogy a határréteg vékonyítása a nyíróréteglengésnek nemcsak az amplitúdóját, hanem a frekvenciáját is növeli (I.3.20. ábra). Ez magyarázza, hogy miért volt olyan gyakori a frekvencia túlbecslése a Workshop résztvevői között. A mi eredményeink viszont az ellentétes hibától szenvednek $\delta \geq 10$ mm esetén. A „vastag” referenciaeredménnyel való egybeesés δ = 8-9 mm esetén lehetne lehetséges.

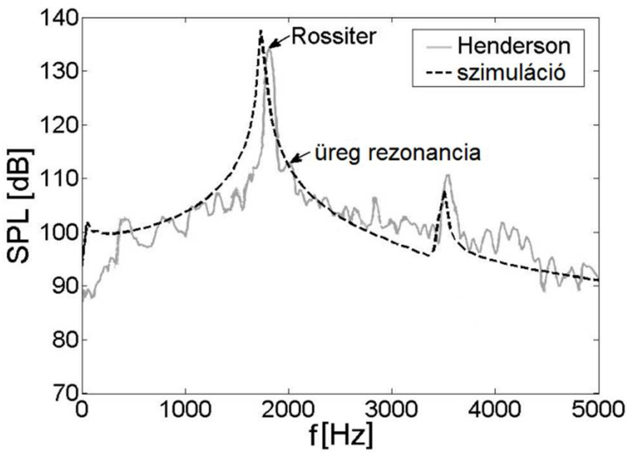


I.3.21. ábra. Nyomáskontúrok az *U* = 50 m/s esetben. Bal oldal: összenyomhatatlan; jobb oldal: összenyomható.

Az összenyomhatatlan szimuláció eredménye minden más paraméter állandósága esetén kvalitatíve különbözött az összenyomható szimulációétól. Az összenyomható modell 1. Rossiter módusú nyíróréteglengést hozott létre, ahogyan ez Rossiter képletéből és Henderson méréseiből várható is volt, míg az összenyomhatatlan modell 2. Rossiter módusú lengést eredményezett. Erről tanúskodik a I.3.21. ábra is. Az összenyomhatatlan szimuláció helytelen eredménye állhatatosan megmaradt, miközben *U*-t kb. 20%-al perturbáltuk és különböző turbulenciamodelleket próbáltunk ki. Ez a körülmény arra figyelmeztet, hogy a hibrid CAA módszerek hibás eredményekhez vezethetnek, ha az áramlásban az akusztikai visszacsatolás jelentős. Wang et al. (2007) hasonló tapasztalatokat szerzett ugyanezekkel a geometriai és áramlási paraméterekkel.

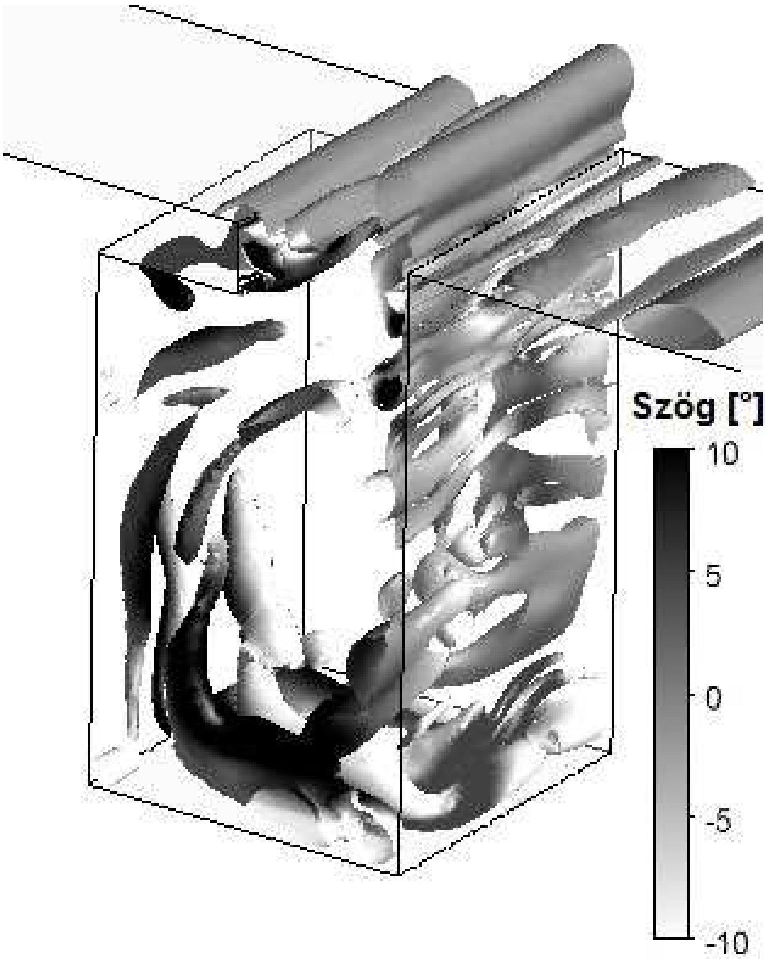
Számos turbulenciamodellt teszteltünk, aminek részleteit Farkas & Paál (2015)-ben közöljük. A 2D szimulációkhoz a legmegfelelőbbnek az SSG Reynolds feszültség és az ω Reynolds feszültség modellek bizonyultak. U = 50 m/s esetén a spektrális csúcsok helyét 3,5-5%-al becsüljük alá, míg a domináns csúcsok amplitúdóját 4 dB-lel, ahogyan ezt a I.3.22. ábra mutatja. Csak a nyírórétegoszcilláció (Rossiter 1. módus, az 1. felharmonikussal együtt) jelenik meg a spektrumban, az akusztikai módusok nem. Ezt a kísérleti eredményekben a 2016 Hz-nél egy kis csúcs jelzi. Más eredményeket is figyelembe véve, amelyeket később vitatunk meg, állíthatjuk, hogy a versenyző mechanizmusok szimulálása általánosságban sikertelen volt: az egyik mechanizmus mindig elnyomta a másikat. Ennek ellenére a I.3.22. ábra rendkívül jó egyezést mutat a kísérleti eredményekkel, mivel a hiányzó üregrezonancia csúcs gyenge a Rossiter módushoz képest. Az U = 26,8 m/s esetben a két mechanizmus teljesítménye kiegyenlítettebb, ezért a kísérleti és szimulációs eredmények kevésbé jól egyeznek (I.3.24. ábra). Két olyan munkáról tudunk, amelyek sikeresen szimulálták ennek a „benchmark” problémának kompetitív mechanizmusait (Koh et al. (2003) és Kurbatskii & Tam (2000)), de ezek egyrészt lamináris határréteget, másrészt sokkal magasabb rendű numerikus sémát használtak.

A hiányzó kvalitatív tulajdonságokat 3D szimulációkkal próbáltuk pótolni, L_2-es vastagsággal és periodikus peremfeltételekkel. A I.3.23. ábra nagyon világosan mutatja a longitudinális örvények kialakulását a recirkulációs zónában. A szürkeségszintből következtetni lehet arra, hogy a folyadékrészecskék milyen irányban forognak longitudinális örvénycsövekben.



I.3.22. ábra Spektrumok *U* = 50 m/s esetén. A 2D szimulációhoz SSG turbulenciamodellt használtunk *δ* = 10 mm- el.

Az eredmények azt jelzik, hogy a Taylor-Görtler mechanizmus felelős a bal oldali fal mellett látható longitudinális örvények kialakulásáért, egyetértésben Brés & Colonius (2008) és Faure et al. (2007) munkáival. Rögtön az alvízi sarokra való fölütközés után a longitudinális örvények hullámhossza kb. a nyíróréteg-instabilitás hullámhossz fele lesz mind az üregen belül, mind azon kívül, összhangban Rockwell & Knisely (1980a) kísérleti eredményével. A várakozásnak megfelelően a DES modellnek megvan az az előnye, hogy finomabb struktúrákat képes reprodukálni, mint a Reynolds feszültség modellek. A jelentős 3D struktúrák mellett azt is észrevehetjük, hogy az „ajak” megóvta a nyíróréteget a nagy recirkulációs zóna által szállított zavarások direkt hatásától.



I.3.23. ábra. *Q* = 0,032 izofelület *U* = 50 m/s esetén, a DES turbulenciamodell és periodikus peremfeltételek alkalmazásával. A szürkeségszint az áramlás iránya és a szimmetriasík közötti szöget jelzi.

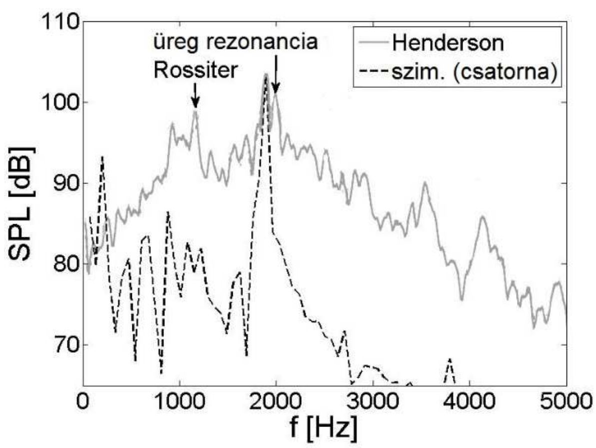
A recirkulációs zóna nem tudott kölcsönhatásba lépni a nyíróréteggel, ahogyan azt az előző fejezetekben láttuk, így a nyíróréteg megőrizte kétdimenziós jellegét. Mivel az elsődleges hangforrás a nyíróréteg alvízi felütközési pontján van (ahol az áramlás lényegében 2D maradt), nem merült fel újabb fontos frekvencia az áramlás 3D jellegéből adódóan. Mivel azonban a DES szimulációval kapott frekvenciáink valamivel rosszabb egyezést mutatnak a mérési eredményekkel, mint a 2D SSG Reynolds feszültség szimulációk, ezért óvatosan kell kezelni ezeket az eredményeket. *U* = 26,8 m/s és „vastag” határréteg esetén Henderson spektrumának két jellegzetessége volt. Egyrészt az 1. Rossiter módusú lengés (1168 Hz) és a transzverzális üreghullámok (1984 Hz) amplitúdója nagyon közel volt egymáshoz (rendre 99 és 101 Hz), ahogyan ez a I.3.24. ábrán is látható.

I.3.3. táblázat. Domináns frekvenciák az *U* = 26,8 m/s és „vastag határréteg” esetben különböző modellekkel és numerikus beállításokkal. Az I.3.24. ábrán is bemutatott főbb kísérleti frekvenciák a következők voltak: 1890 Hz (103 dB), 1984 Hz (101 dB) and 1168 Hz (99 dB).

geometria	δ [mm]	turbulenciamodell	oszcilláció típusa	f [Hz]
2D	10	*ω* Reynolds-feszültség	2. Rossiter	1311
pszeudo 3D	10	DES	2. Rossiter	1486
pszeudo 3D	14	SSG Reynolds-feszültség	2. Rossiter	1502
3D	14	DES	2. Rossiter	1538
pszeudo 3D	10	*ω* Reynolds-feszültség	2. Rossiter	1659
2D csatorna	10	SSG Reynolds-feszültség	2. Rossiter	1817
2D csatorna	12	BSL Reynolds-feszültség	csatorna rezonancia	1890

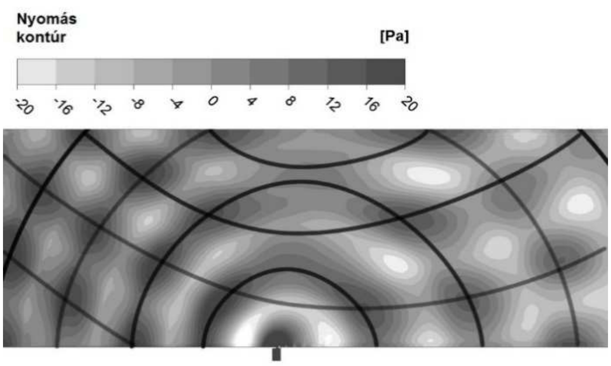
Másrészt egy újabb csúcs jelent meg a spektrumban 1890 Hz-nél és ennek amplitúdója a legnagyobb (103 Hz). Az irodalomban ezt a csúcsot következetesen ismeretlen eredetűnek nevezik.

Említettük már, hogy a kompetitív mechanizmusok szimulációja igen nehéz.



I.3.24. ábra. Spektrumok *U* = 26,8 m/s esetére. A 2D szimulációkhoz BSL turbulenciamodellt használtunk *δ* = 12 mm-el

Rengeteg különböző szimulációt végeztünk erre az esetre, de az eredmény mindig egy 2. módusú Rossiter csúccsal és annak felharmonikusaival rendelkező spektrum volt. A hibás eredmények közül néhányat a 3. táblázatba gyűjtöttünk, demonstrálandó, hogy mennyire széles körben szórnak a kapott frekvenciák. Az 1. Rossiter módus kikényszerítéséhez a legközelebb a 3D DES szimuláció járt, ahol a 2. Rossiter módus két visszacsatolási köre közül az egyik jelentősen gyengébbé vált, mint a másik, de azt teljesen nem sikerült megszüntetni. Ez ahhoz vezetett, hogy a spektrumban megjelent a 2. Rossiter frekvencia erős szubharmonikus komponense és hasonló nyomásjelhez, mint Rockwell & Knisely (1980b) cikkében a „teljes levágás – részleges elszabadulás” („complete clipping – partial escape”) mintázat. A fenti szimulációk minden hiányossága ellenére egy fontos felismerést tettünk, mialatt a hibák okait kerestük.



I.3.25. ábra. Nyomáshullámok visszaverődése a csatorna faláról

Henderson 48"x18"x18" mérőszakaszú szélcsatornában végezte méréseit, azaz a mérőszakasz fölső fala a domináns frekvenciára vonatkoztatva kevesebb, mint három hullámhossznyira volt az üregtől mind a kisebb, mind a nagyobb sebességre. Így a fölső falról való hullámvisszaverődések hatással lehetnek az áramlásra. Meglepő módon a szerzőnek nincs tudomása arról, hogy eddig bárki tanulmányozta volna ezt a hatást. Egy 2D szimulációban a tartományt 48”x18” méretűre választottuk és a fölső falon a peremfeltétel egyszerű csúszásmentes fal volt. (A felvízi és alvízi peremfeltételek az eddigiekhez hasonlóan nem visszaverők maradtak.) A I.3.25. ábra illusztrálja a felső falról való visszaverődéseket. A folytonos fekete vonalakat, amik a hullámfrontokat képviselik, kézzel rajzoltuk a nyomásmezőbe. A legértékesebb következtetésre a szélcsatorna mérőszakaszának modellezéséből akkor juthatunk, ha BSL turbulenciamodellt és 12 mm-es határrétegvastagságot használunk U = 26,8 m/s-nál. Korábban megállapítottuk, hogy a BSL turbulenciamodellel nem sikerült rendezett nyíróréteglengést létrehozni vastag határréteggel és alacsony sebességgel. Itt mégis létrejön egy erős periodikus fluktuáció, ami a csatornán kívüli szimulációkban nem volt jelen. A I.3.24. ábrán jól látható, hogy az új lengésnek mind a frekvenciája, mind az amplitúdója tökéletesen egybeesik Henderson spektrumának legmagasabb csúcsával, aminek eredete eddig megmagyarázatlan volt. Ez az eredmény arra utal, hogy a csúcs az üreg-csatorna rendszer akusztikai rezonanciájával kapcsolatos.

TÉZISEK

2. Az L/D = 2 üregkonfigurációban spektrálanalízis segítségével a Reynolds-szám függvényében három tartományt azonosítottam: a *szabályos*, az *átmeneti* és az *elnyomott* tartományt. A szabályos tartományban a 2. Rossiter módus dominál, az elnyomott tartományban egy másik mechanizmus, ami bár numerikusan az 1. Rossiter frekvenciához hasonló értékeket produkál, mégis erős érvek szólnak amellett, hogy egy új, fizikailag más mechanizmusról van szó, éspedig az alvízi nagy örvényen utazó kis örvények és a nyíróréteg kölcsönhatásáról, nagyjából az üreg hosszának felénél. Az átmeneti tartományban a két mechanizmus verseng egymással és móduskapcsolgatás (mode switching) jelenség lép fel.
3. Módszert dolgoztam ki a nyírórétegen terjedő instabilitási hullám sebességének mérésére. A hullám terjedési sebessége függ a belépő határréteg vastagságától és az üreg mentén igen hevesen változik. Ha a határréteg-vastagságot rögzítjük, az üreghossz mentén átlagolt terjedési sebesség viszont széles Reynolds-szám tartományban gyakorlatilag állandó.
4. Módszert dolgoztam ki a nyírórétegen terjedő instabilitási hullám amplitúdójának mérésére. Az amplitúdó üreg menti lefutása jellegre minden Reynolds-számra hasonló, számszerűen azonban az elnyomott tartományban körülbelül a kétszerese a szabályos tartományban tapasztaltaknak, ahol az amplitúdó alig függ a Reynolds-számtól.
5. Az új 2D örvénydetektálási módszerrel az üreghang áramlásában sokkal finomabb struktúrákat lehet észlelni, mint az irodalomban elterjedt Q kritérium 2D változatával.
6. A jármű-ajtórést modellező mély üreg szimulációjával kapcsolatban megállapítottam, hogy:
   - Mély üreg szimulációjára az összenyomhatatlan modell nem alkalmas – használható eredményeket csak összenyomható modellel kapunk.
   - Egymással versengő, különböző fizikai mechanizmusokból eredő lengések egyidejű reprodukálása rendkívül nehéz, kereskedelmi szoftverrel jelenlegi tudásunk alapján szinte lehetetlen, de különböző numerikus beállításokkal sikerült különböző mechanizmusokból származó frekvenciacsúcsokat nagy pontossággal előállítani.
   - A kísérleti spektrumban az egyik csúcsot, amelyet egyik Workshop résztvevőnek sem sikerült reprodukálni, csatornarezonanciaként azonosítottam és szimuláció segítségével, nagy pontossággal reprodukáltam.

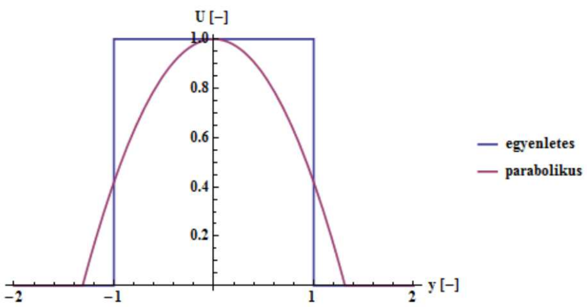
I.4. Sík szabadsugarak érzékenységéről

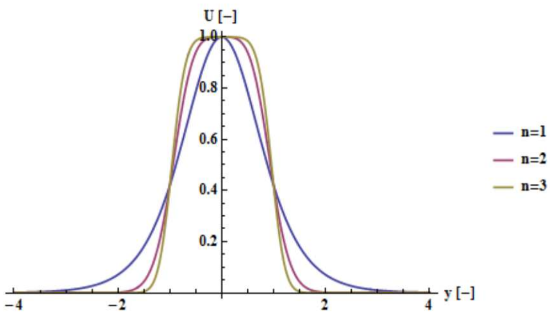
I.4.1. Bevezetés

Az öngerjesztett áramlásokról szóló publikációkban, a visszacsatolási kör leírásában hosszú időre visszamenőleg minden szerző explicite vagy implicite feltételezi, hogy a szabadsugár vagy nyíróréteg zavarásra „legérzékenyebb” része a fúvóka vagy a síklap elhagyásának közvetlen környezetében van és az új instabilitási hullámok itt keletkeznek (Powell (1953), Powell (1961), Rockwell & Naudascher (1979), Lucas & Rockwell (1984), Ohring (1986), Lin & Rockwell (2001)). Ezt a szerzők szinte mindegyike axiómaként kezeli és nem igazán firtatja, miért van ez így. Ez alól némileg kivétel Bechert (1988) munkája, aki ugyan nem ezt a kifejezést használta és nem is ezt a kérdést tette föl, de egy mellékmondatban utalt erre is, és elméleti magyarázattal is szolgált. Ebben a fejezetben viszont kizárólag erre a kérdésre próbálunk választ találni. A fejezet anyagát Nagy Péter MSc hallgatóval közös munkánkra alapozom, amelyből rektori különdíjas TDK dolgozat és konferenciacikk született (Nagy & Paál (2014)), de azt folyóiratban még nem publikáltuk.

Egyetlen, a fent említett kérdésfeltevéshez hasonló problémával foglalkoznak az irodalomban, az ú.n. „fogékonyság” (angolul receptivity) problémájával (pl. Kerschen (1977) vagy Parekh et al. (1997)), azonban ők nem a szabadsugáron belül keresik a legérzékenyebb helyet, hanem pontszerű harmonikus források frekvenciájának és helyének változtatásával keresik a maximális érzékenységet, illetve instabilitást. Ezen kívül erős közelítésekkel élnek, pl. a szabadsugarat nyíróréteggel közelítik, a nyíróréteget pedig végtelen vékonynak tételezik fel. Az általunk felvetett kérdésre való válaszkísérletet nem találtunk az irodalomban.

Megközelítésünk a következő: tudjuk azt, hogy a sík szabadsugár, függetlenül a kezdeti sebességprofiltól, kb. a kiömlő nyílás szélességének 6-8-szorosának megfelelő távolság megtétele után önhasonló, $U = \mathrm{sech}^2 y$ profilt vesz föl. Ezt Bickley profilnak is nevezik Bickley (1937) alapján. Ez a képlet dimenziótlan; a sebességet minden keresztmetszetben a helyi maximális sebességgel dimenziótlanítjuk, y-t pedig azzal a távolsággal a szimmetriatengelytől, ahol az áramlás sebessége eléri a maximális sebesség közel 0,42-szeresét, ez az érték a Bickley-profil kiértékeléséből adódik y =1 esetén. A profil kialakulását később Andrade (1939) is igazolta. A két legtipikusabb kilépő sebességprofil az egyenletes – ez akkor alakul ki, ha a fúvóka rövid és erős kontrakciója van – és a parabolikus – ez akkor alakul ki, ha a fúvókát hosszú párhuzamos falak alkotják. Az egyenletes sebességprofilból a Bickley profilba való átmenet analitikusan könnyen kezelhető, mivel Nolle (1998) képletével, az n paraméter változtatásával a két profil és a köztük lévő átmenet leírható. Nolle profilja: $U = \mathrm{sech}^2(y^n)$. n = 1 megfelel a Bickley profilnak, n növelésével a profil egyre „szögletesebb”





I.4.1. ábra Bal oldal: kilépési sebességprofilok; jobb oldal: a sebességprofil egyenletesből Bickley profillá való átalakításának fázisai Nolle képletének segítségével.

lesz, az egyenletes profil tetszőlegesen megközelíthető. E fejezetben az n = 1, 2, 3 eseteket vizsgáljuk. A parabolikus profilból való átmenet kezelése kicsit nehezebb, mert nem áll rendelkezésre ilyen közelítés. Itt az ideális parabolikus profil leírására a következő képletet használtuk: $U = 1\text{-}0{,}58y^2$, ha $|y| \leq 1{,}31304$, egyébként 0. A sebességprofilokat az I.4.1. ábrán mutatjuk be. A maximális sebesség a dimenziótlanítás természetéből fakadóan mindenhol 1, de összehasonlításképpen az 1. táblázatban összefoglaljuk a különböző sebességprofiloknak megfelelő dimenziótlan térfogatáramokat is.

I.4.1. táblázat. A dimenziótlan sebességprofilok térfogatárama

Profil	Dimenziótlan térfogatáram [-]	Eltérés a Bickley-profiltól [%]
Parabola	1.75072	-12.464
Bickley	2	0
$\mathrm{sech}^2(y^2)$	1.90556	-4.722
$\mathrm{sech}^2(y^3)$	1.91378	-4.311
Egyenletes	2	0

Hipotézisünk az, hogy az egyenletes sebességprofilhoz közelebbi profilok instabilabbak, mint a Bickley profilhoz közelebbi profilok. Hasonló hipotézist lehet a parabolikus profil esetére felállítani. Ezzel lehetne bizonyítani, hogy a kilépéshez közelebbi helyeken a szabadsugár hajlamosabb az instabilitásra, azaz érzékenyebb. Ennek vizsgálatához kell a megfelelő módszert megtalálni.

A stabilitásvizsgálatot e fejezetben csak analitikus profilokra mutatom be, de sok vizsgálatot végeztünk numerikus szimulációkból származó profilokra is, és a fejezet végén azok eredményéről is röviden beszámolok.

I.4.2. A stabilitásvizsgálat módszere

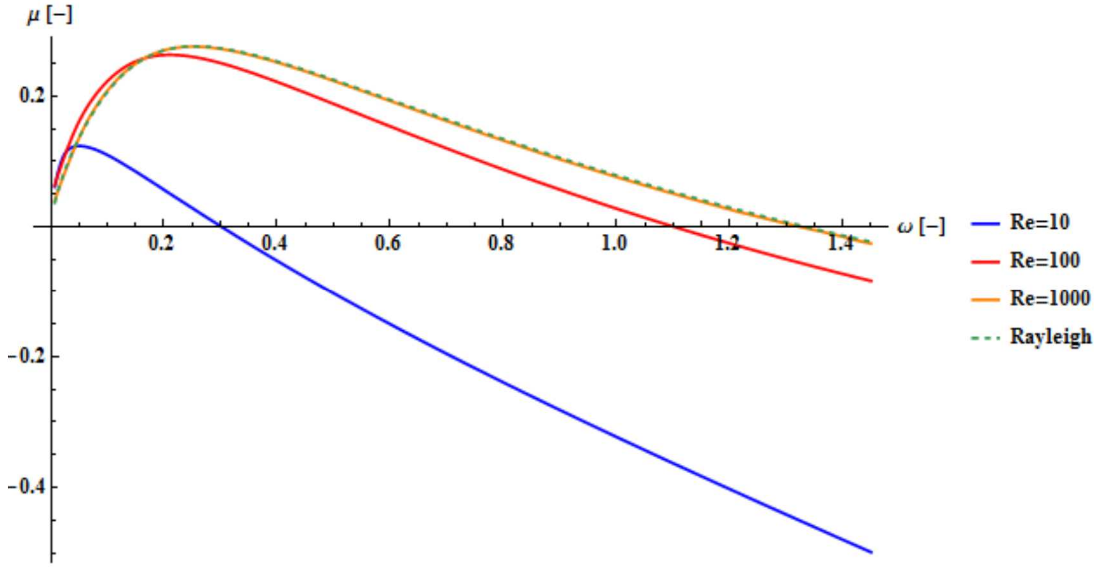
A stabilitásvizsgálat kiindulópontja a jól ismert Orr-Sommerfeld egyenlet (pl. Sengupta (2012)), negyedrendű közönséges differenciálegyenlet párhuzamos áramlások kis amplitúdójú perturbációjának vizsgálatára. Az Orr-Sommerfeld egyenlet közös minden párhuzamos alapáramlásra, a különbség csak a peremfeltételekben jelentkezik. Végtelenben előírt peremfeltételek esetén megoldása nehézkes, ennek oka az egyenlet merevsége[4]. Ennek innovatív kiküszöbölésére dolgozta ki Sengupta (2012) az ún. *összetett mátrix módszert* (compound matrix method) Blasius profilú határréteg esetére és ezzel látványos eredményeket ért el. Sengupta levezetését módosítottuk és szabadsugárra adaptáltuk. A módszer levezetését a 2. Függelékben közlöm.

Az Orr-Sommerfeld egyenlet levezetésének kiindulópontja, hogy az alapáramláshoz $exp[i(\alpha x\text{-}\omega t)]$ alakú zavarást adunk. A stabilitáselemzés térbeli, azaz a dimenziótlan hullámszámnak α-nak valós és képzetes része is van, míg ω-nak, a körfrekvenciának csak valós része. $\mu = -\alpha_i$ a zavarás növekedési rátája. A stabilitáselemzés outputja olyan (Re, ω, α) számhármasok (α komplex), amikre az Orr-Sommerfeld egyenletnek a peremfeltételeket is kielégítő megoldása van. Meghatároztuk a fázissebességet, ami egy tisztán harmonikus zavarás terjedési sebessége ez itt $c = \omega/\alpha_r$. c a sebességprofilok maximális kiömlési sebességével dimenziótlanított hullámterjedési sebesség. Valódi helyzetekben, amikor a zavarás nem tisztán harmonikus, az ún. csoportsebességet használjuk: diszperzív rendszerekben ez az energiaterjedés sebessége. Definíciója: $Re[1/(d\alpha/d\omega)]$.

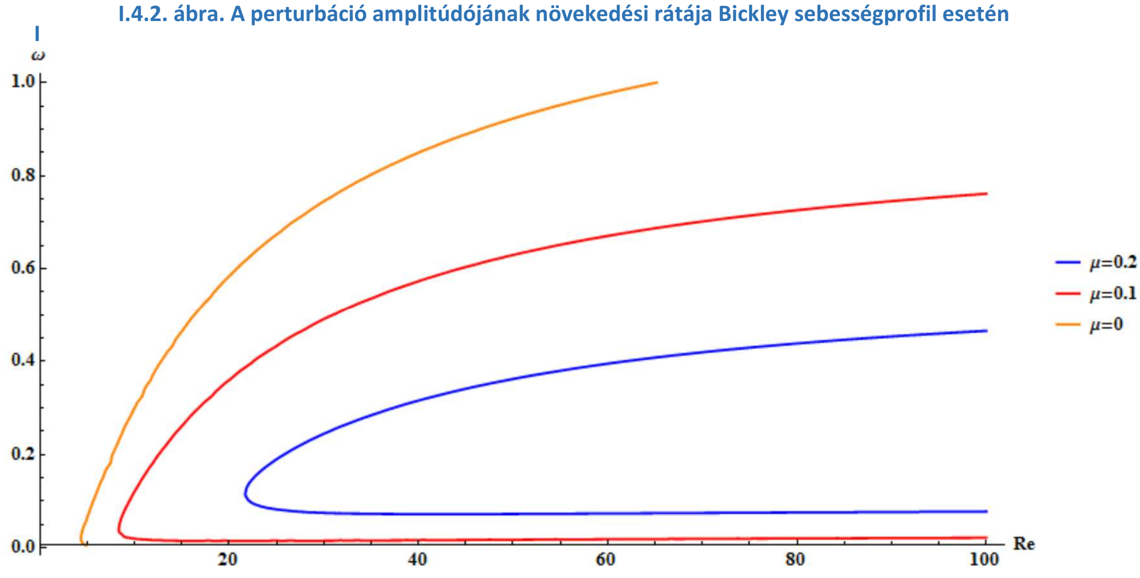
[4] Egy differenciálegyenletet merevnek nevezünk, ha a linearizált egyenlet sajátértékeinek abszolút értéke között (több) nagyságrendnyi különbség van.

I.4.3. Eredmények

Nolle (1998) más módszerrel, a Rayleigh egyenlet alapján végzett stabilitáselemzést sík szabadsugáron. A Rayleigh egyenlet az Orr-Sommerfeld egyenlet egyszerűsített formája, súrlódásmentesség feltételezésével. Eredményeinket ezekkel az eredményekkel is összehasonlítjuk.

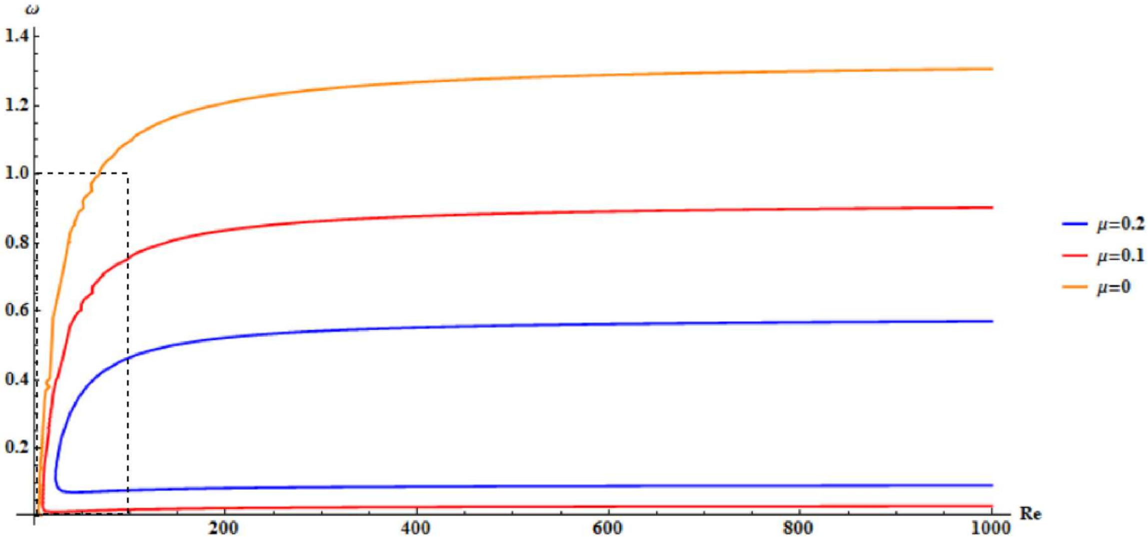


I.4.2. ábra. A perturbáció amplitúdójának növekedési rátája Bickley sebességprofil esetén



I.4.3. ábra. A sech²(y) profil stabilitásdiagramja, alacsony *Re* esetén

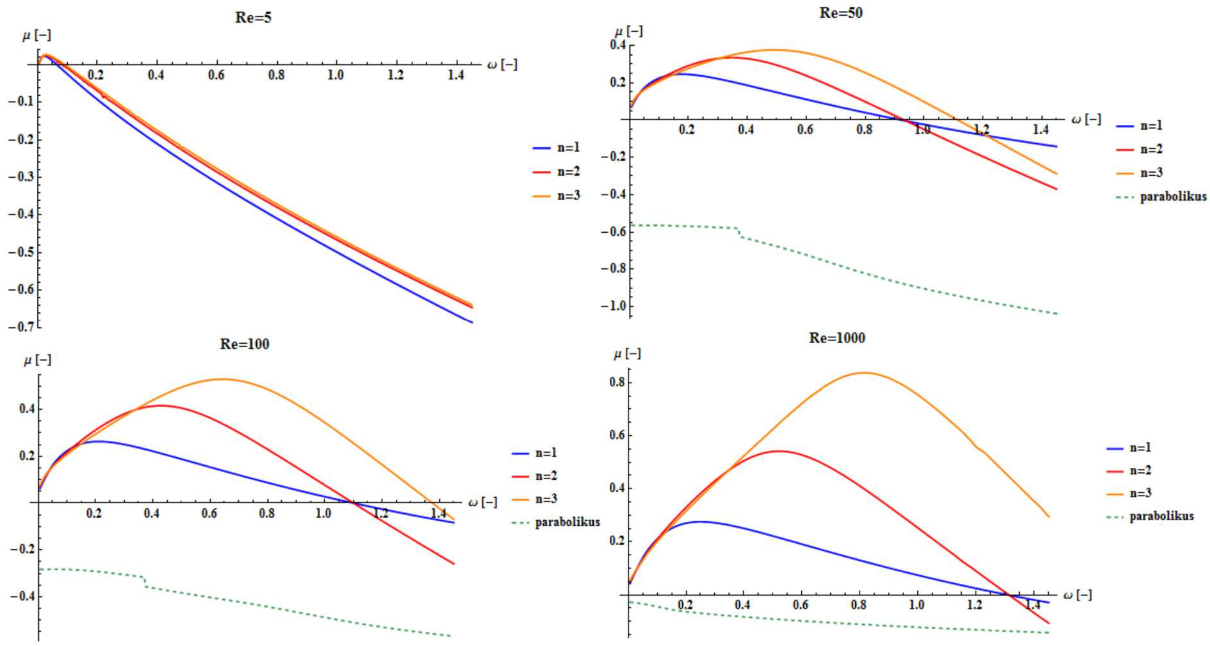
Először a stabilitási tulajdonságok Reynolds-szám függését vizsgáljuk. A I.4.2. ábrán egyensúlyi Bickley profilra vonatkozó eredményeket látunk. Az ábrán az látható, hogy különböző Reynolds-számok esetén mennyire függ az instabilitás a körfrekvenciától. Megfigyelhető, hogy 1000-es Reynolds-szám esetén az Orr-Sommerfeld egyenlet megoldása már a Rayleigh egyenlet megoldásával azonos. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy 1000-es Reynolds-szám felett a súrlódás a rendszer stabilitásának szempontjából elhanyagolható. Ez a teljes {*Re, ω*} síkot lefedő stabilitásdiagramokon (ú. n. hüvelykujj-görbéken) is jól látszik (I.4.3. és I.4.4. ábra). A hüvelykujj-görbék állandó növekedési rátát megjelenítő görbék, és a Reynolds-szám függetlenség 1000 fölött a *Re* tengellyel való párhuzamosságból látszik. Ezenkívül megfigyelhető az is, hogy mindhárom profil (n = 1, 2, 3) instabilitása csökkent a Reynolds-szám csökkentésével, tehát ezekben az esetekben a súrlódás stabilizáló hatású. A Reynolds-szám csökkentésének másik hatása, hogy a maximális növekedési



I.4.4. ábra. A sech²(y)profil stabilitásdiagramja a teljes Re tartományra. Szaggatott vonallal jelöltük az I.4.3. ábra területét

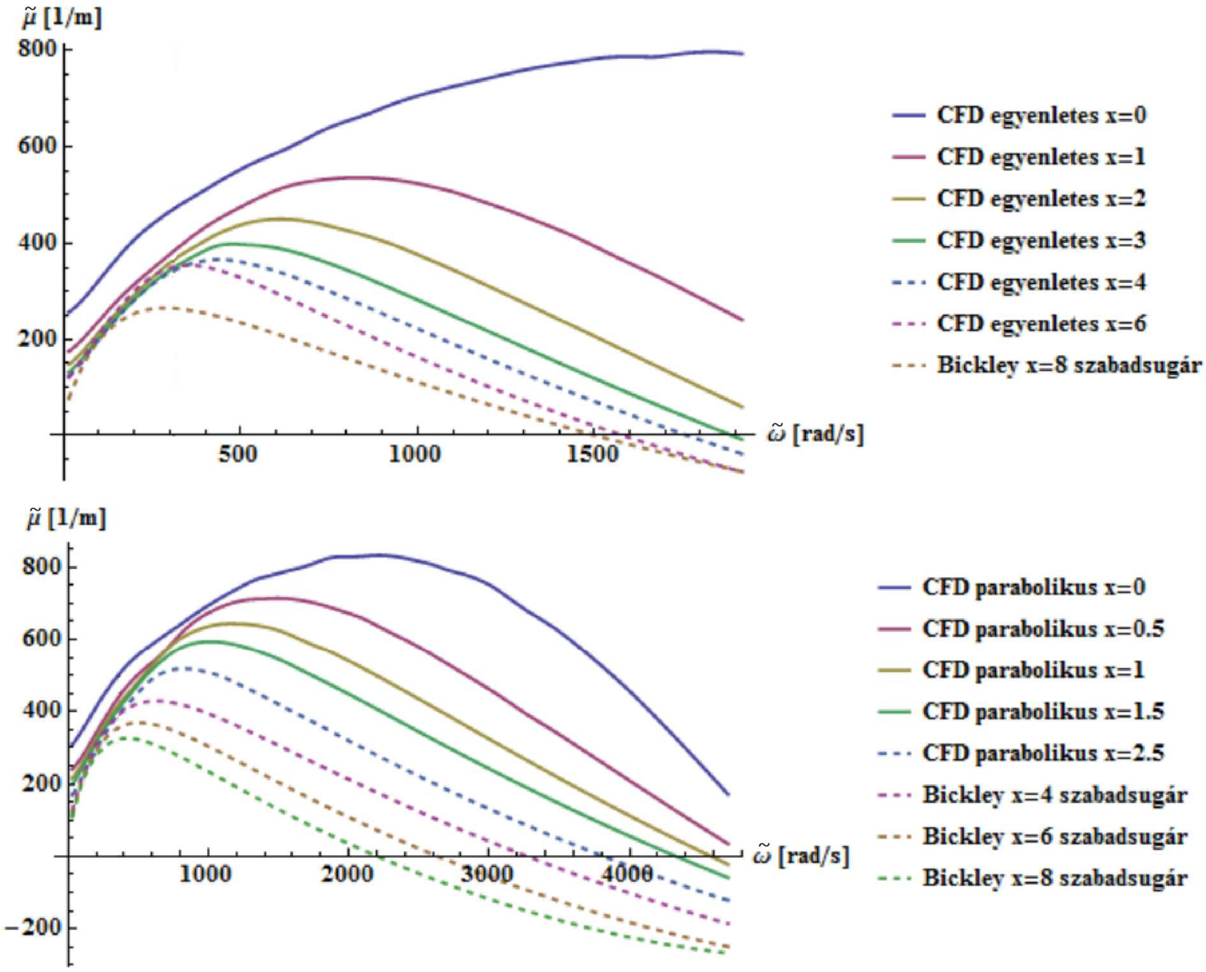
rátához tartozó körfrekvencia egyre alacsonyabb, illetve a kritikus körfrekvencia, mely felett az áramlás nem veszíti el a stabilitását, is csökken.

A következő lépésben a fejezet eredeti célja szerint megvizsgáltuk a különböző profilú szabadsugarak stabilitását, megnézve, hogy vajon nő-e az instabilitás a fúvóka felé közeledve. Mivel a profilok egymásba történő átalakulására nincs pontos, analitikus közelítés, azonos Reynolds-számon hasonlítottuk össze a profilokat, elhanyagolva azt a tényt, hogy a Reynolds-szám a kilépéstől kezdve folyamatosan növekszik.



I.4.5. ábra. Dimenziótlan analitikus sebességprofilok perturbációjának növekedési rátája különböző Reynolds-számokra

Az I.4.5. ábra a-d képein egyenletes sebességprofilú kilépés esetén jól látható, hogy a nagyobb *n* paraméterrel rendelkező profilok, amelyek közelebb állnak a kilépési nyíláshoz, a tartomány nagy részén instabilabbak. Alacsony körfrekvenciák esetén figyelhető meg, hogy a távolabbi profilok elhanyagolható mértékben instabilabbak a kilépéshez közeliekhez képest. Az instabilitás mértékében tapasztalható, profilok közötti különbség, valamint az instabilitás tartománya is a Reynolds-szám növelésével nő. Fontos még megemlíteni, hogy a számításaink alapján a kritikus Reynolds-szám, ami az stabilitásvesztés alsó határa, mind a három profil esetén közelítőleg *Re* = 4,3 volt. Ez viszonylag alacsony értéknek számít, ami alapján kijelenthető, hogy a szabadsugár viszonylag könnyen elveszti a stabilitását. Ha azonban az alacsony Reynolds-számot a kis jellemző méret okozza, előfordulhat az is, hogy a saját-hullámszám rendkívül magas lesz, ami a kinetikus energia jelentős disszipációjával jár (Sengupta (2012)). Ez a jelenség pedig stabilizáló hatású lehet, amit a számítások során nem vettünk figyelembe.



I.4.6. ábra. Dimenziós szimulált sebességprofilok perturbációjának növekedési rátája különböző keresztmetszetekben

Az idealizált parabolikus profilt vizsgálva semmiféle instabilitást nem tapasztaltunk. Lehetséges, hogy ennek csak elméleti jelentősége van, mert a fúvóka elhagyása után infinitezimális távolságra már más a profil, ami már instabil. Numerikus szimulációval kapott profilok elemzése megerősíti ez a sejtést: a fúvóka közvetlen közelében kapott profil már instabilnak bizonyul. Ez a tény magyarázható Rayleigh inflexiós pont elméletével, miszerint súrlódásmentes esetben az instabilitás szükséges feltétele, hogy a sebességprofilnak inflexiós pontja legyen (Sengupta (2012)). Kétségtelen tény, hogy az általunk figyelembe vett viszkozitás destabilizáló hatású is lehet, azonban az inflexiós pont hiánya jelezheti azt, hogy stabil marad az áramlás. Ez az inflexiós pont az idealizált parabolikus profilból hiányzik, miközben a tényleges kilépés közvetlen környezetében a numerikus szimulációk alapján úgy tűnik, hogy létrejön.

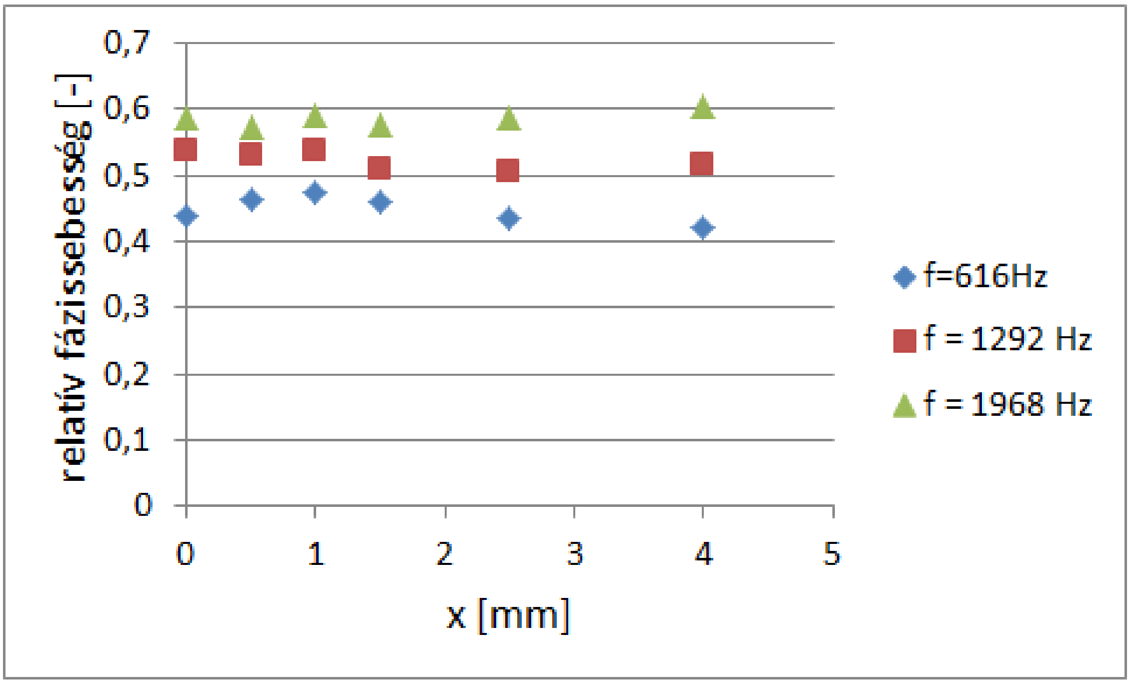
Az analitikus profilok vizsgálata alapján az egyenletes kilépő sebességprofil esetén a hipotézist bizonyítottnak tekinthetjük: a körfrekvencia-tartomány nagy részén minél közelebb esik a sebességprofil az egyenleteshez, azaz minél közelebb vagyunk a fúvókából való kilépéshez, annál nagyobb az zavarások növekedési rátája, azaz annál instabilabb, érzékenyebb a szabadsugár.

A numerikus szimulációk alapján, a részletek ismertetése nélkül a következő megállapításokat tudtuk tenni.

Ahogy korábban említettük, a parabolikus kilépő profillal is fellép az instabilitás és az instabilitás a kilépésnél a legnagyobb. A későbbi profilokban a különbség nagyon lecsökken és egész nagy frekvenciánál egy kis tartományon a trend meg is fordul, ennek azonban nincs nagy jelentősége, mert ott az instabilitás mértéke kicsi.

Az egyenletes kilépő profilú szabadsugárban az analitikus profilokkal talált trendek még erősebben, még hangsúlyosabban lépnek fel, nincsen jelen az alacsony körfrekvenciáknál található nem egészen egyértelmű tartomány. Mindez annak ellenére történik, hogy a kilépéshez közelebb a lokális Reynolds-szám kisebb.

A dimenziótlanítás során a jellemző mennyiségek (sebesség, méret) folyamatosan változtak, ezért érdemes megvizsgálni a stabilitásgörbék dimenziós alakjait is. Itt az egyes görbék már más-más lokális Reynolds-számoknak felelnek meg. Ezzel az ábrázolásmóddal (I.4.6. ábra) még tisztábban látszik az instabilitás (érzékenység) mértékének növekedése a kiömléstől való távolság függvényében. A dimenziós növekedési rátát $\tilde{\mu}$-val jelöljük.



I.4.7. ábra. Az instabilitási hullám relatív fázissebessége parabolikus kilépő profilra, a kilépéstől való távolság függvényében, három különböző frekvenciára

Végül, az I.4.7 ábrán az instabilitási hullám fázissebességét láthatjuk a fúvókától való távolság függvényében, parabolikus kilépő sebességprofil esetén különböző frekvenciákra. Megfigyelhető, hogy a fázissebesség itt konstans frekvenciára nagyjából konstans, bár a frekvenciától függ, éspedig nagyobb frekvencia esetén nagyobb a fázissebesség. A kiömlési sebességnek 30 és 40%-a között mozognak az értékek. Érdekes ezt összehasonlítani mind az élhangnál, mind az üreghangnál tapasztalt, távolság szerinti erős változással. A különbség valószínűleg két okra vezethető vissza: egyrészt a bonyolultabb áramlások, akadályok miatt az instabilitási hullám nem olyan tiszta formában jelenik meg, mint a szabadsugár esetében, másrészt az említett két áramlásban sohasem egy tiszta frekvencia van jelen, és bár a fázissebességet egy frekvencián mérjük, a többi frekvencia jelenléte is befolyásolhatja azt.

TÉZIS:

7. Sengupta (2012) határrétegre kidolgozott, általam sík szabadsugárra adaptált stabilitáselemzési módszere és analitikus sebességprofilok segítségével kimutattam, hogy minél közelebb van egy sebességprofil az egyenleteshez, és minél távolabb az egyensúlyi Bickley profiltól, annál instabilabb. Ezzel a felismeréssel magyarázom az irodalomban elterjedt, de eddig nem magyarázott „kilépéshez közeli fokozott érzékenységet”.

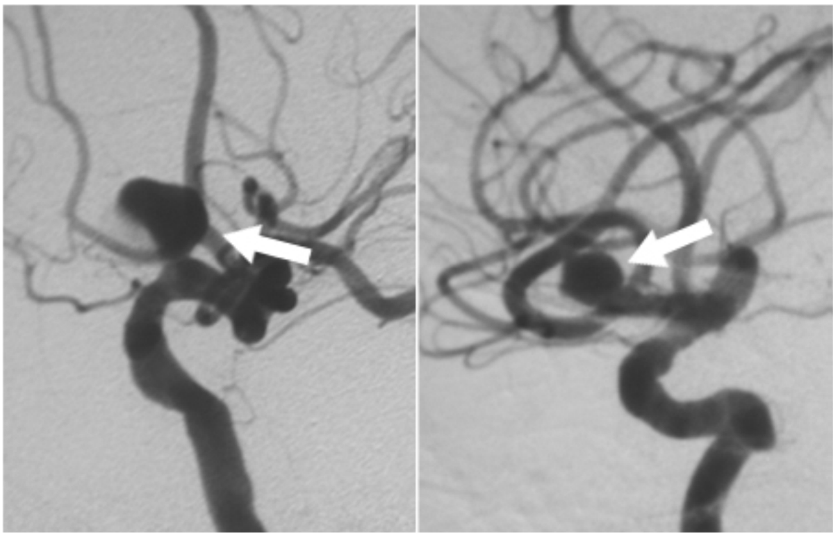
II. Aneurizmák hemodinamikája

II.1. Bevezetés

Az értekezés második részében a véráramlások egy speciális fajtájáról, az aneurizmákon belüli, illetve az aneurizmák környezetében lezajló áramlásokról lesz szó. Az aneurizmák kóros értágulatok és leggyakrabban agyi artériákon, illetve az aorta veseartériák alatt elhelyezkedő szakaszán alakulnak ki. Az agyi aneurizmák tipikusan „zsákszerű” („saccularis”) aneurizmák; vagy az érfal egyoldali kiöblösödésével keletkeznek, vagy elágazások „villájában” alakulnak ki. A hasi aneurizmák ezzel szemben tipikusan „fusiformisak”, azaz orsó alakúak, az érfal minden irányban öblösödik.

Az aneurizmák kialakulásának, növekedésének, esetleges kihasadásának okai nem világosak. Egy biztos: mindezek a folyamatok sok tényező, életmódbeli, genetikai, élettani, biokémiai, biomechanikai és hemodinamikai tényezők komplex kölcsönhatásának köszönhetők. Én ezek közül a hemodinamikai (véráramlástani) tényezőkkel foglalkozom. A disszertációban, mint ahogy kutatásaim során is, lényegesen többet foglalkozom agyi aneurizmákkal, de bizonyos részkérdésekben kitérek a hasi aneurizmák tárgyalására is.

II.1.1. Agyi aneurizmák



II.1.1. ábra. Tipikus agyi aneurizma-formák. Bal oldal: oldalfal-aneurizma; jobb oldal: bifurkációs aneurizma

Agyi aneurizmák a világ népességének kb. 5%-ában fordulnak elő (Isuia (1998)). Aneurizmák hasadása (ruptúrája) a fő oka az ú. n. szubarachnoidális vérzésnek, ami a populáció 0,1-0,15%-át érinti és az esetek 35-40%-ában halállal vagy maradandó rokkantsággal végződik (Longstreth Jr et al. (1985)). Az agyi aneurizmák tetszőleges életkorban kialakulhatnak. A II.1.1. ábrán két tipikus, digitális szubtrakciós angiográfiával (DSA) felvett aneurizmazsákot láthatunk. Az előző két adat jelzi a kezelőorvos dilemmáját: az aneurizmáknak csak egy kis hányada jelent veszélyt a páciensre, ugyanakkor a kezelés rizikója sem elhanyagolható. A kezelésből származó súlyos, az életminőséget jelentősen korlátozó szövődmény valószínűsége jóval kisebb, mint a vérzésből származó hasonló komplikációké. Még nem vérzett aneurizma esetén azonban ilyen veszélynek tünetmentes beteget kell kitenni, míg ezzel szemben nem bizonyos, hogy vérzés valaha is bekövetkezik-e. Az alapvető kérdések, amikre a választ keressük a következők. Miért alakul ki az aneurizma? Mitől nő vagy nem nő? Mitől hasad ki vagy nem hasad ki? Mi a legjobb kezelési mód?

Mivel a mindezekre a folyamatokra ható tényezők száma nagy, és nem is világos, mik a legfontosabb és mik a kevésbé fontos tényezők, mi a vizsgálatainkat a hemodinamikára korlátozzuk. Elég sok jel utal arra, hogy a hemodinamika legalábbis egyike a folyamatokat befolyásoló tényezőknek. A következőkben röviden írok mind a négy kérdésről.

Kialakulás

Az aneurizmák kialakulása az elfogadott nézet szerint bizonyos biológiai degradációs folyamatok és hemodinamikai feltételek együttállásához kapcsolódik. A biológiai folyamatokat kockázati tényezők (genetikai hajlam, kövérség, magas vérnyomás, diabétesz, táplálkozás, mozgáshiány, alkohol, kor és nem) erősítik (Lasheras (2007)). Az intima (az érfal legbelső rétege) csúsztatófeszültségre (WSS = wall shear stress) való érzékenysége miatt azt gyanítjuk, hogy az aneurizma kialakulását kórosan megváltozott fali csúsztatófeszültség-eloszlás indítja be. A legtöbb agyi aneurizma az ú. n. Willis körön alakul ki, ami zárt artériahurok az agyalapon, így megfelelő agyi vérellátást biztosít akár szélsőséges élettani körülmények ellenére is. A Willis körön áramlik az agyi vérellátás 80%-a. Ez az artériaalakzat jellegzetesen sok éles kanyart és elágazást tartalmaz, amik ismert módon WSS fluktuációknak illetve gradienseknek vannak kitéve. Emellett az elágazási pontoknál a media (az érfal középső rétege) rétegből hiányoznak a simaizom sejtek, amik többek között az ér szerkezeti integritását biztosítják (Lasheras (2007)). Állatkísérletek azt mutatták, hogy a megemelkedett WSS az intima széttöredezését okozta. Ezt látszik alátámasztani az a megfigyelés is, hogy aneurizmák közelében gyakran sérült endotheliumot (az intimát legbelül borító sejtréteg) találtak (Stehbens (1989), Steiger (1989)). Az érfalnak ez a patologiás állapota a fibrillin és elasztin szálak átépüléséhez, simaizom sejtek proliferációjához, később az endothel és a simaizom sejtek apoptózisához (=programozott sejthalál) és más gyulladásos folyamatokhoz vezethet (Sho et al. (2001)). A gyulladásos folyamatok érfalkárosító hatása a fehérvérsejtek és az általuk termelt lytikus enzimek által valósul meg. Ennek eredményeképpen a fal vékonyodik, elveszti rugalmasságát, és a belső nyomás és a szerkezeti átstruktúrálódás együttes hatására kidudorodás alakulhat ki. Sforza et al. (2009), illetve Kondo et al. (1997) megmutatták, hogy az aneurizma kialakulásához nagyobb térfogatáram és magas vérnyomás együttesen szükségesek, de a WSS pontos szerepe az aneurizma megjelenésében szerintük tisztázatlan. Sforza et al. (2009) további áttekintést ad az aneurizmák kórfolyamatával kapcsolatos jelenlegi elméletekről.

Növekedés

Két fő, egymásnak ellentmondó, a növekedést leíró elmélet van: az „erős áramlás” és a „gyenge áramlás” elmélet (Sforza et al. (2009)). Az erős áramlás elmélet szerint a megnövekedett WSS a fő tényező, ami az intima réteg sérülésén keresztül degeneratív biológiai folyamatokat indít el az érfalban, pl. a simaizom feszültségét növelő csökkent nitrogén-monoxid termelést. A folyamatos megemelkedett fali feszültség erősíti a fal degeneratív átalakulását. A fali feszültség folyamatosan a fal rugalmasságának határait feszegeti, így az átstruktúrálódás következtében a fal elkezdhet kidudorodni.

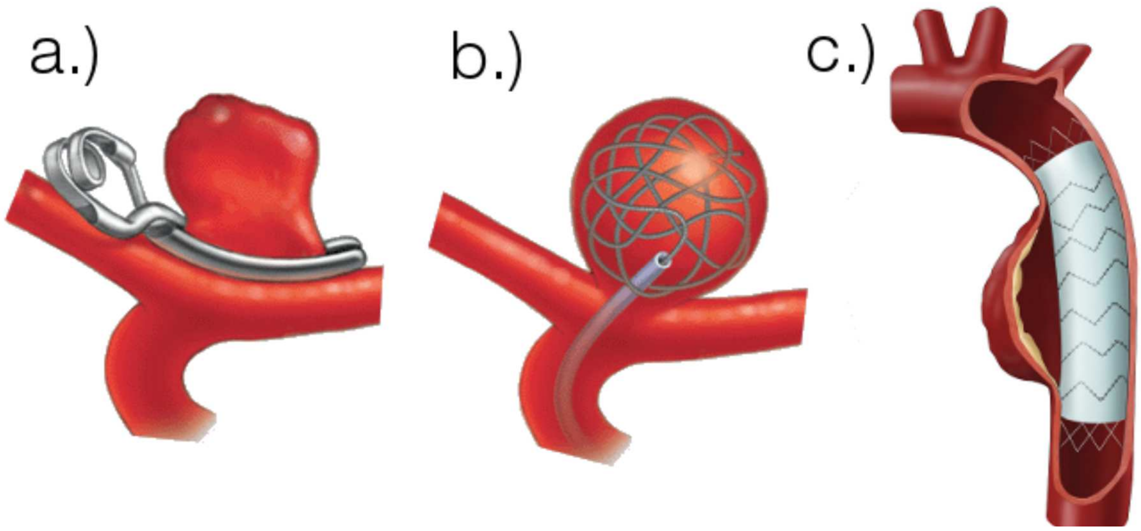
A „gyenge áramlás” elméletek úgy érvelnek, hogy az alacsony áramlási sebesség stagnáló zónákat hoz létre, ami szintén abnormálisan hathat az intimára, nemkívánatos biokémiai reakciókon keresztül. A vérlemezkék aggregációja ezekben a zónákban szintén az intima sérüléséhez és ezáltal a fal lokális gyulladásához és degeneratív átstruktúrálódásához vezethet. Az aneurizmazsák növekedése nagyban függ a páciensről páciensre változó környezettől is, ami magyarázza az aneurizmák formájának nagy változatosságát.

Kihasadás

Az aneurizma akkor hasad ki (ruptúrál), ha a meggyengült fal már nem képes ellenállni a véráramlás által okozott terhelésnek. Ebben a folyamatban a vérnyomás és az aneurizma környezete fontos szerepet játszik, hiszen az utóbbi külső támaszt nyújthat az aneurizmazsáknak akkor is, ha az egyébként nem bírná a terhelést. Bizonyos megtámasztási körülmények között, pl. ha egy idegrost nyomja az érfalat, feszültséggócok alakulhatnak ki. Az aneurizma kihasadásának kockázatát többnyire az aneurizma mérete, helyzete és a páciens kórtörténete alapján ítélik meg. A méret alapján való döntéshozatalról pl. Rinkel et al. (1998) írt. A kihasadás kockázatának másik elfogadott indikátora a „zsák-nyak arány”, angolul „aspect ratio”, vagy „sac to neck ratio”, ami az aneurizma magasságának és nyakátmérőjének aránya, és amit Ujiie et al. (1999) javasolt. 1,6 fölötti zsák-nyak aránynál a kihasadás valószínűsége megnő. Ez a kritérium logikusnak tűnik, ugyanakkor viszont az irodalom számos esetről számolt be, amikor kisebb zsák-nyak arányú aneurizmák kihasadtak, míg sokkal nagyobb zsák-nyak arányú aneurizmák pedig nem. Ebben a kérdésben tehát jelenlegi ismereteink ellentmondásosak. További elméletek a kihasadás kockázatát a WSS-el (Shojima et al. (2004), Sforza et al. (2009)), illetve újabb mennyiségekkel, mint az oszcilláló csúsztatófeszültség-index (Kawaguchi et al. (2012)) és az energiaveszteség hozzák összefüggésbe (Qian et al. (2011)). Szélesebb áttekintést nyújt a kihasadást jellemző szóba jövő paraméterekről Zanaty et al. (2014). Sajnos eddig egyik paraméter sem bizonyult megfelelően megbízhatónak a kihasadás előrejelzésében, úgyhogy ezen a területen további kutatásra van szükség.

Kezelés

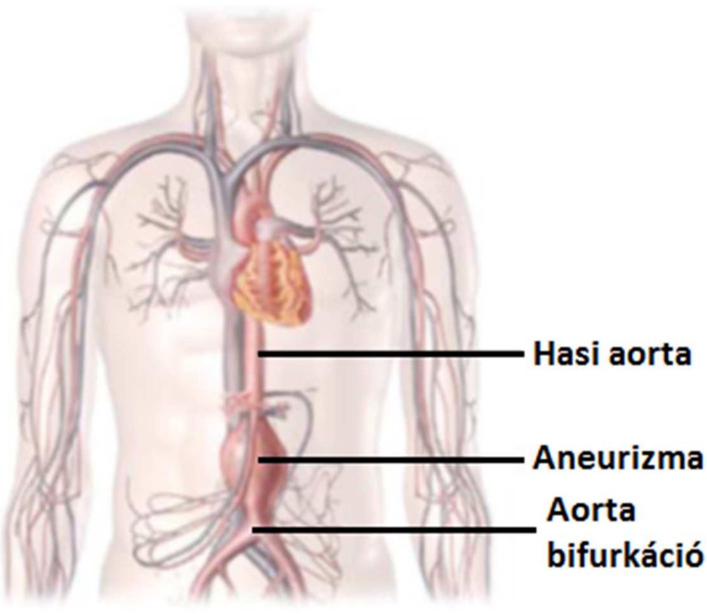
Az agyi aneurizmák terápiájának szempontjából alapvetően két stratégia létezik. Az első, a sebészeti módszer, amelyben koponyafeltárásból az aneurizmát egy csipesszel (clip) elszorítják (II.1.2a. ábra). Ez a módszer bizonyos esetekben (pl. friss vérzés utáni rossz idegrendszeri állapot, bizonyos anatómiai lokalizációk) jelentős kockázattal jár.



II.1.2. ábra. A jelenleg leggyakrabban alkalmazott aneurizma-kezelési módszerek. a) clip; b) mikrospirálok; c) áramlásmódosító (sztent)

A másik terápiás út az endovaszkuláris technika, ahol az értágulatot az artériákon keresztül közelítjük meg. Ezen belül az aneurizmazsákot megtölthetjük a II.1.2b. ábrán ábrázolt mikrospirálokkal. Ami az ábrán egy nagy drótgombolyagnak látszik, az a valóságban sok apró platina spirál, amelyeket mikrokatéteren keresztül vezetünk be, és a bevezető rendszerről leválasztunk. A drótgombolyag esetén az alapgondolat az, hogy az aneurizmazsákban a megnövekedett áramlási ellenállás következtében oly mértékben lelassul az áramlás, hogy a vér megalvad és az aneurizma visszafejlődik (Guglielmi et al. (1991), Taha et al. (2006)). Az aneurizmazsák polimerhabbal való megtöltésével is próbálkoztak, amely esetén az áramlás teljesen megszűnik, és ezáltal vezet az aneurizma regressziójához. Ez a kezelési mód azonban a klinikai gyakorlatban nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket, így jelentősége elenyésző. A II.1.2c ábrán feltüntetett, sztentnek is nevezett áramlásmódosító (angolul flow diverter) egy finom, hengeres drótháló, ami nekifeszül az érfalnak. Az aneurizma nyakánál a sűrű drótháló szintén áramlási ellenállást jelent, ami megnehezíti a szülőér és az aneurizmazsák közötti áramlási kommunikációt, így az aneurizmazsákban lelassul az áramlás, a vér megalvad, az aneurizma visszafejlődik. Az áramlásmódosító jelen pillanatban a legígéretesebb és bizonyos anatómiai lokalizációkban illetve aneurizma geometriáknál a legtöbbet alkalmazott kezelési mód (Szikora et al. (2010)). Bizonyos speciális esetekben a drótgombolyag és az áramlásmódosító sztent kombinációját alkalmazzák.

II.1.2 Hasi aneurizmák



II.1.3. ábra. Hasi aneurizma az aortán. Forrás: Lasheras (2007)

A hasi aneurizmákat a szakirodalomban gyakran AAA-val jelölik (= Abdominal Aortic Aneurysm). A II.1.3. ábrán látható, hogy az általában az aortán, aorta-bifurkáció (iliaca communis) fölött, de a vese- (renális) artéria alatt található, és bár sohasem tökéletesen forgásszimmetrikus, mindig fuziformis (orsó alakú). Hasi anurizmák ritkán alakulnak ki 50 éves kor alatt, 55 éves kortól hirtelen megugrik a számuk és a csúcsot 80 éves kor környékén érik el. Az a tény, hogy a hasi aneurizmák diagnosztizált száma folyamatosan növekedett az utóbbi évtizedekben, annak is tulajdonítható, hogy a diagnosztikai módszerek fejlődtek és az emberek gyakrabban mennek szűrővizsgálatokra (Lasheras (2007)).

Kialakulás

A hasi aneurizmák kialakulására alapvetően kétféle hipotézis van. Az egyik, az ú. n. öregedési hipotézis, ami abból a logikus feltevésből indul ki, hogy ha a kor a legmeghatározóbb tényező az aneurizmák kialakulásában, akkor az az öregedési mechanizmusokkal is összefüggésben lehet. E feltevés szerint az egészséges öregedési folyamat eredményeképpen az ér hosszában, átmérőjében és a fal struktúrájában változások állnak be. Ezek a változások befolyásolják a lokális hemodinamikai körülményeket, ami viszont visszahathat az érfal degradációjára.

Az öregedés folyamán a nagyobb, rugalmasabb erek átmérője nő, a falak vastagodnak és merevebbé válnak. A fő szerkezeti változás a media rétegben megy végbe, ami elvékonyodik, az elasztin lamellák és szálak rendezett struktúrája felbomlik, töredezetté és rendezetlenné válik. Az elasztin szálak degenerációjával párhuzamosan a kollagén rostok mennyisége megnő, ez a merevebb komponens. Ahogyan az elasztin/kollagén arány csökken, úgy lesz egyre rugalmatlanabb az érfal. Az érfal merevedése a pulzushullám sebességének növekedéséhez vezet: a pulzushullám tipikus sebessége egy 10 éves gyerekben 6,5 m/s, míg egy 60 éves felnőttben 11 m/s-t is elérheti (Nichols & O'Rourke (1990)). Nichols & O'Rourke (1990) szerint a fő degenerációs mechanizmus a fáradásos roncsolás. A sok évtizeden keresztül tartó ciklikus fárasztás a terhelést hordozó elasztin lapok szakadásához vezet, amik szerintük kb. 40 évig változatlanok maradnak. A ciklikus terhelés hatására az elasztin polimerizált struktúrája átrendeződik, és már olyan feszültségek hatására tönkremegy, amiket azelőtt problémamentesen elviselt. A rugalmasság csökkenésének következtében az ér már nem nyeri vissza eredeti átmérőjét, hanem maradandó átmérőnagyobbodást szenved. Ez, az előbb említett kollagén-elasztin átrendeződéssel együtt eredményezheti az aneurizmák kialakulását.

Az aorta-aneurizmák legtöbbször a veseartéria és az iliaca bifurkáció között fordulnak elő. A bifurkáció ismert módon a pulzushullám visszaverődését hozza létre. Ha az aorta átmérője nő, a bifurkációnál jelentkező átmérőarány csökken, így a visszaverődés mértéke is nő. Ehhez hozzájárul még az is, hogy az iliaca artéria hossza a korral megnőhet és az ér kanyargóssá válhat, átmérője plakklerakódások miatt csökkenhet. Mindezek a hatások ahhoz vezetnek, hogy az aortában a szisztolés csúcsnyomás megnő, így nagyobb feszültségek keletkeznek az érfalban. A nagyobb feszültségek az elasztin lapokban keletkező repedések, szakadások terjedéséhez vezetnek, ami megint csak az átmérő növekedését eredményezi, így az előbb leírt mechanizmus instabil erősödéséhez vezet. Mindezeket a folyamatokat erősíti a magas vérnyomás, a dohányzás és a mozgáshiány.

Az aneurizmák kialakulásának másik elmélete a csúsztatófeszültség-hipotézis. Endotheliumon végzett tanulmányok azt mutatják, hogy a „megzavart áramlás” roncsolja az endotheliumot és annak szabályozó funkciójának részleges vagy teljes elvesztése lehet az első lépés a fal minőségromlása felé (Davies (1995)). Nagyon kicsi fali csúsztatófeszültség, ami pl. leválásos áramlások recirkulációs zónáiban alakulhat ki, az endothel réteg áteresztőképességét korlátozza. Nagy csúsztatófeszültség-gradiensek, illetve időbeli deriváltak módosíthatják az endothel sejtek biológiai aktivitását.

A kor előrehaladtával az aorta hossza is és átmérője is nő. Így egyrészt az átlagsebesség csökkenésével pangó zónák, másrészt a kanyarulatok megjelenésével másodlagos áramlások és leválások jelennek meg, amelyek mind a „megzavart áramlás” kategóriájába sorolhatók, szokatlanul kicsi, vagy nagy, időben vagy térben erősen változó csúsztatófeszültséget létrehozva. A hipotézis szerint ezek az áramlási körülmények az endothel réteg és később a teljes érfal degradációjához vezetnek. Sajnos, mivel még mindig hiányzik egy megbízható modell e jelenségek leírására, a kutatásnak ez az iránya kissé spekulatív.

Növekedés

Az aneurizmazsákok növekedését nagyjából ugyanazoknak a tényezőknek tulajdonítják, mint a kialakulásukat. Az a tény, hogy a már kialakult fuziformis aneurizmazsákon belül, különösen a diasztolés fázisban, sorozatban alakulnak ki az örvények, amik végigfutnak a kitágult szakaszon, a csúsztatófeszültség-hipotézis alapján tovább rongálva a falat, alátámasztja a feltételezést. Sajnos azonban több probléma is van. Az egyik, hogy még mindig nagyon keveset tudunk a csúsztatófeszültség és a fal degradációjának pontos összefüggéseiről. A másik, hogy valójában az AAA-k 90%-ában az aneurizmazsákon belül trombusréteg alakul ki, ami nagyjából kitölti a tágulással keletkező teret. Ez viszont azt jelenti, hogy a valódi lumen (áramlási keresztmetszet) nem, vagy alig változik, azaz a csúsztatófeszültség a tágulás további szakaszában nem játszik szerepet. A trombus kialakulása viszont a feltételezés szerint annak is tulajdonítható, hogy a nagy nyírású rétegekben a vérlemezkék aktiválódnak és bekerülve a lassan áramló fali örvénybe, ott az alvadást elősegítik. Ugyanakkor, egy másik mechanizmus is kialakul, mivel a thrombus lefedi az endothel réteget, az érfal hypoxia (oxigénhiány) következtében tovább rongálódik. Ez az endothel sejtek pusztulásán és az azzal összefüggő értónus-szabályozó mechanizmusok megszűnésén, a simaizomsejtek elhalásán keresztül valósul meg. Ezenkívül a thrombusban gyulladáskeltő fehérvérsejtek vannak, amelyek működésük révén tovább gyengítik az izomsejteket. Hozzá kell tenni, hogy a gyakorlatban az AAA-k általában aszimmetrikus formájúak, a gerincre való támaszkodás következtében a gerinc oldalán laposabbak.

Összefoglalva tehát a növekedési fázisban az áramlástani tényezők csak közvetett szerepet játszanak; itt inkább a kórélettani és biokémiai folyamatok dominálnak.

Kihasadás

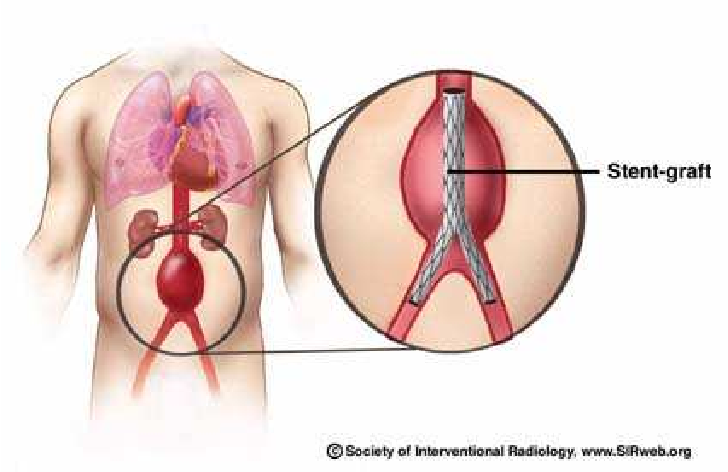
Hasonlóan az agyi aneurizmákhoz, a klinikai gyakorlatban a kezelés legfőbb kritériuma a méret. Ha az AAA-k legnagyobb átmérője meghaladja az 5 cm-t és az átmérő növekedési rátája a 0,5 cm/évet, akkor javasolt az operáció. Ez a kritérium némileg tetszőleges, és az operáció kockázatát kell a betegség kockázatával összehasonlítani.

Azt mindenképpen feltételezhetjük, hogy a kihasadás a falban ébredő feszültségekkel van összefüggésben. Ennek meghatározására kapcsolt szilárdtest és folyadékmechanikai (FSI = fluid-structure interaction) szimulációkat lehet végezni, ami azonban számos bizonytalansággal terhelt. Az egyik a geometria bizonytalansága. Ez a képalkotó technikák és az algoritmusok fejlődésével viszonylag könnyen kézben tartható. A második az áramlástani peremfeltételek bizonytalansága. Ezzel behatóan foglalkozunk a következő fejezetben. Másfajta peremfeltétel az aneurizmán kívüli külső környezet, a támasztás. Erről már kevesebbet tudunk, bár arra vannak bizonyítékok, hogy a laposabb, gerinchez közelebbi oldalon a feszültségek nagyobbak, következésképpen ott gyakrabban hasad föl az aneurizma. Ez orvosi szempontból is kedvezőbb, hiszen így a megrepedt aneurizmából eredő vérzés egy zárt térben átmenetileg megállhat (fedett ruptúra) így több idő áll rendelkezésre az szakszerű ellátásra. Amennyiben az aneurizma a szabad hasüreg vagy mellüreg, esetleg üreges szerv (pl. belek) felé hasad, a vérzéses sokk és az azt követő keringés-összeomlás sokkal gyorsabban bekövetkezik, a sebészi beavatkozásra sokkal kevesebb idő áll rendelkezésre. Igen fontos információ lenne az aneurizma teljes területén az érfal anyagi tulajdonsága, az azt leíró anyagmodell, valamint az érfal vastagsága. Erre vonatkozóan pillanatnyilag nincs információnk, így a szimulációk csak tájékoztató jellegűek lehetnek. Valószínűleg kevésbé fontos a trombus (szintén ismeretlen) mechanikai tulajdonsága, mert vélhetően nincs teherhordó szerepe.

Kezelés

A sebészeti kezelés esetén a hasat felnyitják, az operáció idejére az aortát a keringésből kirekesztik, megnyitják az aneurizmazsákot és a főverőeret műérrel pótolják a végeket egymáshoz öltve. Ezáltal az aorta ép végei vannak összekötve és az aneurizmán belül nincs többé áramlás, nincs nyomás- és csúsztatófeszültség-terhelés, így az nem tud tovább tágulni. Az továbbra is nyitott kérdés, hogy a műér felett és alatt a natív ér tovább tágul-e.

A minimálisan invazív kezelés esetén, a lágyékon ejtett kis metszésből feltárják a közös combverőeret, és azon keresztül katéteres módon borított öntáguló sztentet vezetnek be az aneurizma helyére. Ott a sztent felső részét (koronáját) az aorta ép részében nyitják ki, és az így ép aorta falnak tud feszülni (II.1.4. ábra).



II.1.4. ábra Sztent aneurizmába helyezésének sematikus ábrázolása

Az agyi aneurizmák sztentjeivel ellentétben a hasi aneurizmák sztentjei nem átjárhatóak, hanem Dacron vagy PTFE borításúak. Ha a sztent elfedné fontos kiágazó artériákat, pl. a vese-artériát, akkor a vérellátás biztosítása érdekében speciális sztenteket, ún. fenesztrált graftokat alkalmazunk.

A minimálisan invazív kezelés előnye amellett, hogy hasat vagy a mellkast nem kell megnyitni az, hogy az operáció idejére sem kell az artériát elszorítani. Ez sokkal kisebb operáció alatti terhelést jelent a beteg számára. Kevesebb komplikációval jár és sokkal gyorsabb felépülési időt biztosít. Kevesebb viszont még vele a tapasztalat, a hosszú távú kilátások bizonytalanabbak, de az eredmények biztatóak.

II.2. Agyi aneurizmák áramlásszimulációjának validálása

Az agyi aneurizmákat kétféle szoftverrel szimuláltuk: a már az első részben is használt véges térfogatok módszerét használó kereskedelmi szoftverrel és saját fejlesztésű, lattice Boltzmann módszeren (LBM) alapuló szoftverrel. Bár a CFD szoftverek egyre megbízhatóbbak, új típusú áramlás esetén mégis tanácsos validációs kísérleteket végezni, hogy meggyőződjünk az eredmények korrektségéről. Különösen igaz ez az érzékeny orvosi területen, ahol az áramlástani szimulációkból levont következtetéseket a gyógyításban is felhasználhatják.

Aneurizmák áramlásszimulációjának validálására az ideális megoldás in vivo mérések végzése lenne, de sajnos nem áll rendelkezésre időben és térben kellő felbontású adatokat szolgáltató módszer. A legjobb jelölt 3D időfüggő fáziskontraszt mágneses rezonancia képalkotás (4D PC-MRI) lenne. Meckel et al. (2008), Hope et al. (2010) és Isoda et al. (2010) számoltak be mindhárom sebességkomponens szimultán méréséről, de közülük csak Isoda et al. (2010) hasonlították össze eredményeiket CFD eredményekkel. A szerzők a CFD-ből és a PC-MRI-ből kapott sebességek és fali csúsztatófeszültségek (= Wall Shear Stress = WSS) közötti korrelációt vizsgálták az érdekes térrészben, és 0,1 és 0,9 közötti korrelációs együtthatókat találtak. Karmonik et al. (2008) jó egyezést találtak CFD és 2D PC-MRI eredményeik között a sebességek irányát tekintve az artéria communicans anterior két keresztmetszetében. Mindaddig, amíg új módszerek nem szolgáltatnak kellő felbontású adatokat, a validációra indirekt in vivo és in vitro megközelítések maradnak.

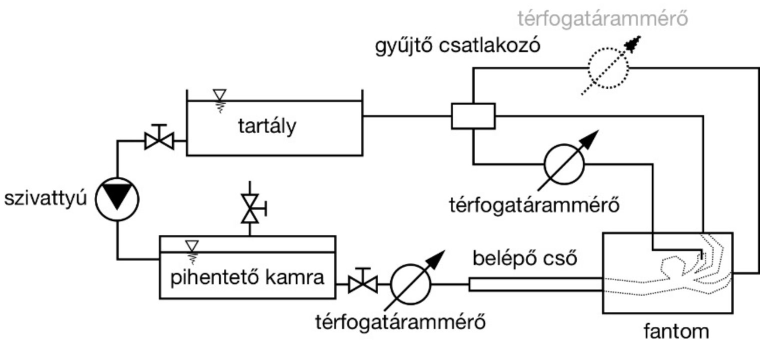
Az indirekt in vivo validáció az angiográfia folyamatának virtuális reprodukálását kísérli meg. Az angiográfia segítségével, az orvosi képalkotás során láthatóvá teszik a vérrel telt ereket, miután egy speciális kontrasztanyagot juttatnak a véráramlásba. A kontrasztanyag terjedése, ami a véráramban való diffúzió és a konvekció eredője, az intervenciók alatt rögzíthető. Ennek a folyamatnak a numerikus rekonstrukciója lehetővé teszi az in vivo folyamatok és a numerikus eredmények indirekt kvalitatív összehasonlítását. Cebral et al. (2007) ezzel a módszerrel kitűnő egyezést kaptak, különösen a feltöltési fázisban. Ford et al. (2005) megkísérelték virtuális és valódi festék tartózkodási idejének kvantitatív összehasonlítását is. A különbségeket az összehasonlított képterület 75%-ban 10%-nál kisebbnek találták. Az ígéretes eredmények ellenére mindkét tanulmány szerzője hangsúlyozza, hogy megfelelő validációhoz közvetlenebb összehasonlítás szükséges.

A sebességmezőről közvetlenül adatokat jól kézben tartott in vitro kísérletekből lehet kapni. Több kutatócsoport készített szilikon modelleket, úgynevezett fantomokat, vagy idealizált geometriákról (Liou et al. (1997); Hoi et al. (2006)) vagy valódi, páciens-specifikus geometriákról (Tateshima et al. (2001); Ford et al. (2008); Gülan et al. (2009); Boutsianis et al. (2009); Seshadhri et al. (2009); Sun et al. (2010)) az áramlási mező különböző módokon való mérése céljából. Ezekben a tanulmányokban vagy lézer-optikai módszereket, mint lézer-Doppler anemometria (LDA), „particle image velocimetry” (PIV), „particle tracking velocimetry” (PTV), vagy orvosi képalkotó eljárásokat használtak. Közülük csak néhányan számolnak be numerikus eredményekkel való összehasonlításról. Hoi et al. (2006) idealizált oldalfal aneurizma négy reprezentatív síkjában számol be PIV mérések és numerikus eredmények összehasonlításáról. A szerzők ez alapján CFD kódjukat megfelelőnek ítélik. A validáció végső célja felé haladva Ford et al. (2008) ugyanazzal a módszertannal valódi aneurizmageometriák áramlását validálták. Két páciens-specifikus geometria mindegyikén 10 reprezentatív síkon hasonlították össze CFD kódjuk eredményeit PIV mérésekkel. Kvalitatív egyezést találtak az örvénystruktúrákban, de kvantitatíve jelentős különbségeket tapasztaltak. Seshadhri et al. (2009) kereskedelmi szoftverrel kapott eredményeket hasonlítottak össze LDA mérésekkel egy aortaív-aneurizmában, stacionárius áramlásban. „Jó egyezést” találtak három összehasonlított keresztmetszetben.

Mi az in vitro páciens-specifikus megközelítést alkalmazzuk instacionárius áramlással és jobb tér- és időbeli felbontással, jobb minőségű mérésekkel jobb egyezéseket kapunk.

Mindkét szoftverrel készített szimuláció validálására ugyanazokat a kísérleteket használtuk. Először ezeket a kísérleteket ismertetem, majd a szimulációkról írok a szoftverek részletes ismertetése nélkül, végül az összehasonlítást mutatom be.

II.2.1. Kísérleti berendezés és módszertan



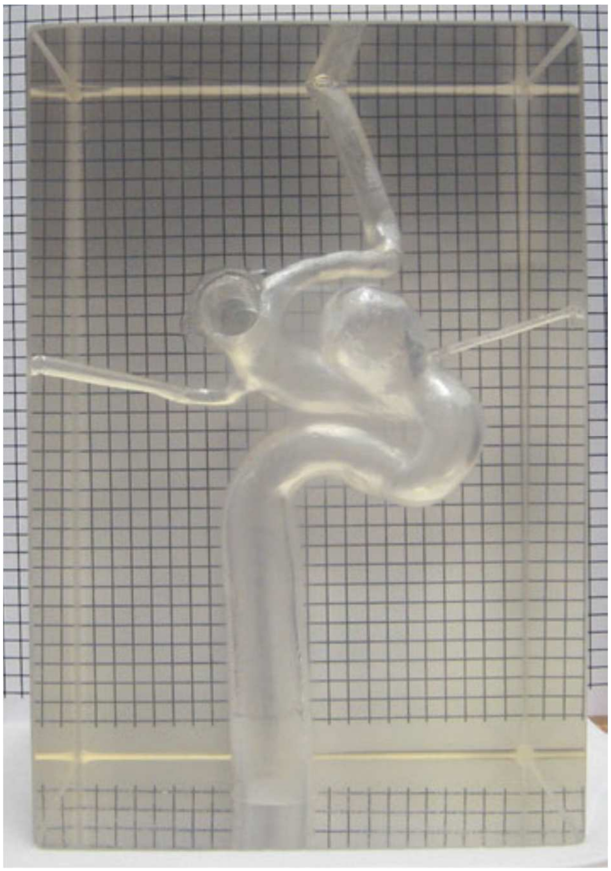
II.2.1. ábra. A mérőkör vázlata

Ez az alfejezet Ugron et al. (2012) alapján készült. A kísérletek célja a már régebben végrehajtott numerikus szimulációk validálása volt (Paal et al. (2007); Szikora et al. (2008)). Mivel a sebességet lézer-optikai módszerekkel nagy tér- és időbeli felbontással lehet mérni, a validációt a sebességre alapoztuk. E célból átlátszó aneurizmamodellt tartalmazó mérőberendezést építettünk, amely hasonló áramlási feltételeket biztosít, mint amilyenek a szimulációkban uralkodtak.

Az aneurizma és a környező szülőér geometriáját szilikon tömbben üres térként hoztuk létre. A mérésekhez szükséges instacionárius periodikus áramlást változtatható sebességű fogaskerékszivattyúval generáltuk. A térfogatáramot ultrahangos áramlásmérővel mértük.

A mérőkört a II.2.1. ábrán mutatjuk be. A számítógéppel szabályozott szivattyú nyílt felszínű tartályból egy szelepen keresztül pihentető kamrába szállítja a folyadékot. A pihentető kamra célja az, hogy az oldott gázt eltávolítsa a folyadékból, ezért kb. 45 cm-el a szivattyú szintje fölött helyeztük el. A kamrából ¾”-os TYGON vezetéken keresztül jut a folyadék a bevezető csőbe. Ezen a vezetéken helyeztük el az egyik áramlásmérő műszert, valamint egy szelepet. Az áramlás az 1,3 m (≈74 belépő átmérő) hosszú akril belépő csövön keresztül érkezik a fantomba és a három kimenet egyikén távozik (ki1, ki2 és ki3 a II.2.7 ábrán). A negyedik kimenetet, ki4-et a mérések során lezártuk, technikai nehézségek miatt, mivel nem tudtunk megfelelő TYGON csövet csatlakoztatni hozzá). A második áramlásmérőt a két fő kimeneti cső egyikére helyeztük. A kimeneteken nyomásmegcsapolások is voltak. A három kimeneten kiáramló folyadék a gyűjtőegységben találkozik újra és innen a folyadék visszajut a tartályba. A mérőkör hozzávetőleg 8 l mérőfolyadékkal volt föltöltve. Föltöltött rendszer esetén, amikor a rendszert nem működtettük, a pihentető kamrát elválasztottuk a mérőkörtől, hogy a kamrában az állandó nyomást megtartsuk.

A validáció tárgya egy arteria carotis internán ülő aneurizma orvosi képalkotó eljárásból eredő 3D geometriája volt. Az eredeti adatokat kb. 3,57-szeresére nagyítva kaptuk a fantom geometriáját, ezzel a bemenő ér átmérője 17,5 mm lett. A bemenő és a négy kimenő eret egyenes csőszakaszokkal hosszabbítottuk meg, amíg el nem érték a tömb határait. A teljes szilikontömb dimenziói 172x114x103 mm és a II.2.2. ábrán látható. A fantom legyártása után a végső, folyadékot tartalmazó geometriát lézerszkennelés segítségével újra meghatároztuk és az áramlásszimulációkat már ezen a geometrián végeztük el. A mérőfolyadék törésmutatóját a szilikontömbéhez illesztettük, hogy a határfelületen fellépő fénytörési effektusokat minimalizáljuk.

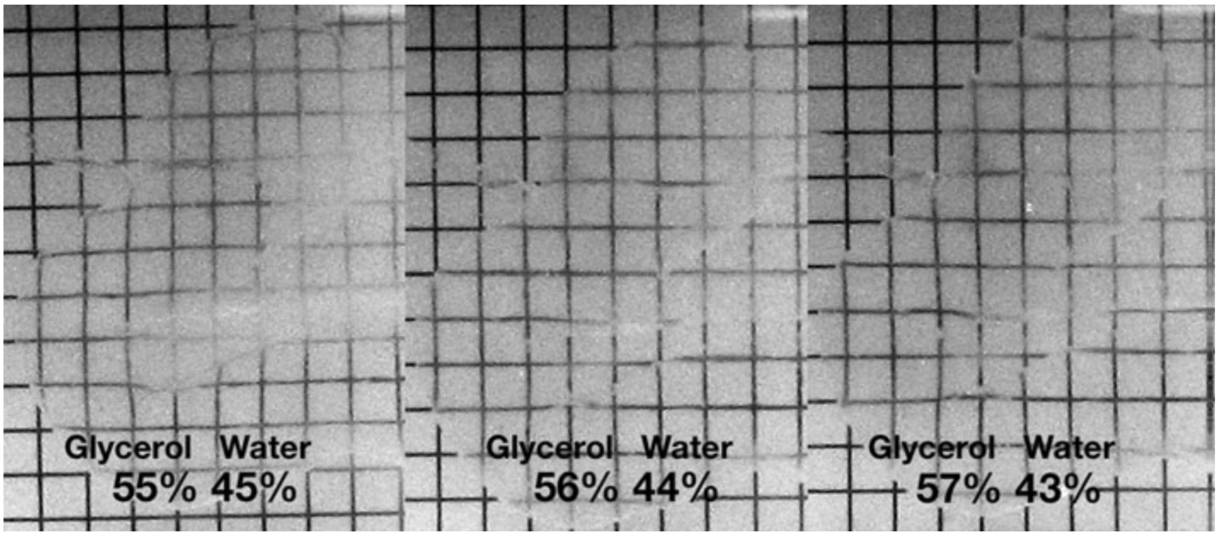


II.2.2. ábra. A méréseknél használt szilikon „fantom”

A mérőfolyadék glicerin és desztillált víz keveréke volt; a megfelelő keverési arányt kellett megtalálni a lehető legjobban illesztett törésmutatóhoz. Különböző keverési arányú folyadékokat töltöttünk a fantomba és ezeken keresztül egy szabályos rács torzulását figyeltük meg és fényképeztük le. Ezeket ábrázoljuk a II.2.3. ábrán. A legkisebb torzulás alapján a kísérletekhez kiválasztott keverék 56% glicerinből és 44% desztillált vízből állt.

4 g fehérítőt és 2 g sót adtunk a mérőfolyadék minden kg-jához, hogy a keveréket változatlan minőségben, hosszabb ideig megőrizzük a mérőkörben.

A törésmutatóillesztést fehér fényben végeztük, ami monokromatikus fénnyel való mérés esetén korlátozza a pontosságot. A lehetséges hiba becsléséhez feltételeztük, hogy az illesztés zöld fénynél optimális. Két végletet ellenőriztünk: mekkora lesz a fénytörés által okozott eltérés, ha kék vagy piros fényt bocsájtunk a rendszerbe? Azt találtuk, hogy fantomban haladó leghosszabb fénysugár esetén is csak

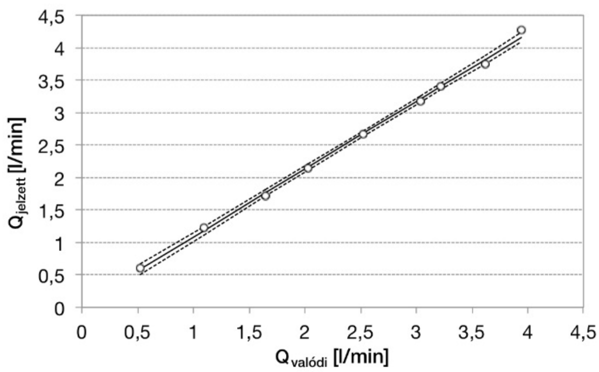


II.2.3. ábra. A törésmutatóillesztési tanulmány eredménye

akkor érünk el 1 mm eltérést, ha a felületre való beesési szög 80°, ami nyilvánvalóan irreálisan nagy érték. Így tehát a kromatikus hatásoktól eltekinthetünk.

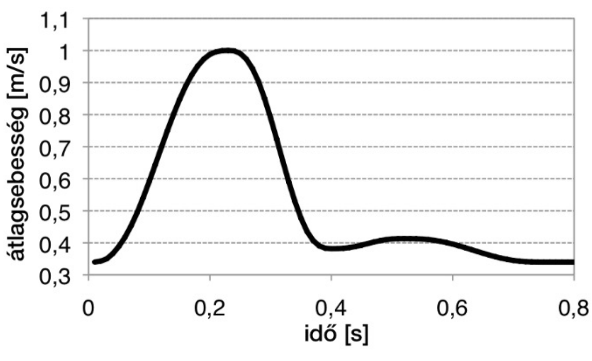
A lézer-optikai mérésekhez kétféle áramláskövető részecskét alkalmaztunk: üreges üveggömböket (8-12 µm mérettartományban, 1050 és 1150 kg/m^3 közötti sűrűséggel) és fluorescens RhodamineB anyaggal jelölt polimergolyókat. Az üveggömböket a lézer-Doppler Anemometria (LDA), a fluorescens részecskéket a „particle image velocimetry” (PIV) mérésekben használtuk.

Bár közismert, hogy a vér nemnewtoni folyadék, a modellfolyadék, a víz-glicerin keverék newtoni. Az agyi aneurizmák azonban legtöbbször nagyobb artériákon keletkeznek, így a vér newtoni viselkedésének feltételezése jó közelítés (Sforza et al. (2009)). Az itt előforduló nyírófeszültség-tartományban a vér viszkozitása jó közelítéssel konstans marad. Meg kell jegyeznünk, hogy az aneurizmazsákon belül kis nyírású zónák jöhetnek létre és itt a newtoni közelítés az áramlás finom részleteiben hibához vezethet. Mindazonáltal ez a munkánk általános következtetéseit nem befolyásolja. Megmértük a létrejövő folyadék sűrűségét és viszkozitását. A sűrűséget 50 ml-s referenciatartály súlyának mérésével határoztuk meg, és az 1140 kg/m^3-nek adódott. A viszkozitást Cannon-Feske viszkoziméterrel végeztük. A többször megismételt mérés átlaga 0,01017 Pa·s, 0,00018 Pa·s szórással. Minden mérést 22 °C környezeti hőmérsékleten végeztünk.



II.2.4. ábra. A Transonic térfogatárammérő kalibrációs diagramja. A képen látható a 95%-os konfidenciasáv

A térfogatáramot két ultrahangos térfogatáram-mérő fejjel mértük (ME12PXL). Mindkettő egy-egy Transonic Systems Inc. által gyártott adatfeldolgozó egységhez volt kötve (TS410). A jelet adatgyűjtő kártyával (Measurement Computing Corp. PMD 1208FS) digitalizáltuk, amely közönséges személyi számítógéphez (PC) volt kötve. A gyári kalibrációs adatok csak fiziológiás sóoldatra, és 60%-40%-os víz-glicerin keverékre vonatkoznak (ez felel meg a vér fizikai adatainak). A törésmutatóillesztett folyadék térfogatáramának méréséhez a szenzorok újrakalibrálása szükséges. Ezt kilenc különböző térfogatáramon történő köbözéssel és a műszer által jelzett térfogatáram összehasonlításával valósítottuk meg. A szobahőmérsékleten kapott kalibrációs görbét a II.2.4. ábrán mutatjuk be.

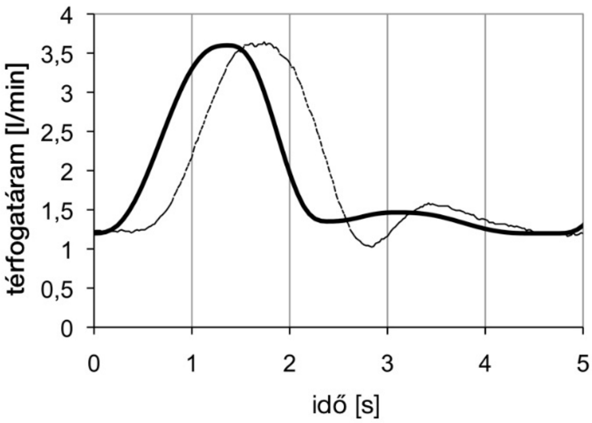


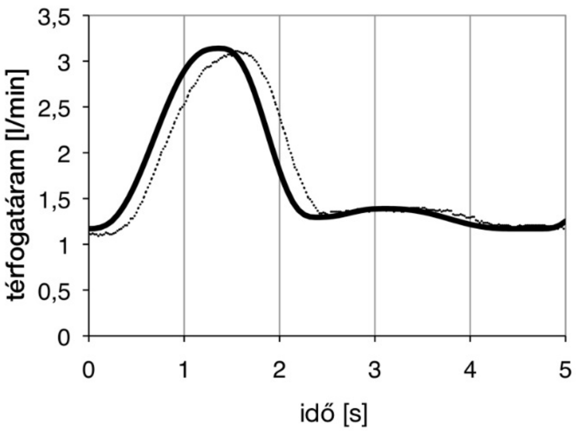
II.2.5. ábra. A kívánt bemenő térfogatáramgörbe

A mérések során az II.2.5. ábrán látható mesterséges térfogatáram-idő görbét szeretnénk előállítani, amit már Paal et al. (2007) és Szikora et al. (2008)-ban is használt a szimulációkban. Az előírt instacionárius térfogatáram előállítása több lépésben történt.

Az instacionárius térfogatáramot egy MICROPUMP (Cole Palmer: Model No. 73004-03) gyártmányú fogaskerékszivattyúval állítottuk elő. A hajtómotor fordulatszámát kézzel, egy szabályozógomb elforgatásával lehetett állítani. Hogy ne kelljen jelentősen módosítani ezt a rendszert, egy Futaba (S3003) gyártmányú standard szervomotort alkalmaztunk, hogy a gomb elforgatásával változtassa a térfogatáramot.

A szervomotor helyzetét egy standard PC és a fönt használt adatgyűjtő kártya segítségével határoztuk meg. A kártya mikrokontrollerhez volt kötve, amely 0 és 4,096 V közötti analóg feszültségjelet alakított át standard szervojellé. Ez az összeállítás egy LabView kóddal előállított analóg kimeneti jel segítségével lehetővé teszi a térfogatáram szabályozását. A kívánt görbealak előállításához a rendszer statikus és dinamikus kalibrálása szükséges.





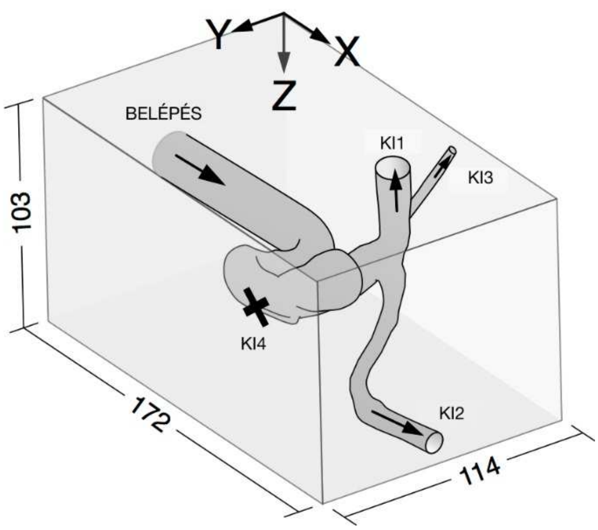
II.2.6. ábra. Kívánt (vastag vonal) és megvalósult (pontozott vonal) térfogatáram a dinamikus kalibráció előtt (fönt) és után (lent)

A statikus kalibrációhoz 0 és 4,096 Volt között különböző feszültségeket írunk elő és mérjük hozzá a térfogatáramot. A folyamatot automatikusan hajtja végre egy LabView alapú irányító program és kalibrációs file-t generál. A kalibráció azt mutatja, hogy a gomb pozíciója és a térfogatáram között nincs lineáris kapcsolat. Nagy és kicsi térfogatáramok esetén a kalibrációs görbe meredeksége csökken a tartomány középső részéhez képest.

A dinamikus kalibráció innovatív módszer, és meglehetősen hosszú levezetést tartalmaz. A levezetés megtalálható Ugron et al. (2012) 2.6.2 alfejezetében és a cikk Függelékében. Mindössze a végeredményt mutatom be a II.2.6. ábrán: az előírt és a megvalósult jel közti különbség markánsan csökkenthető a dinamikus kalibráció bevezetésével.

II.2.1.1. Lézer-optikai mérések

A PIV (Particle Image Velocimetry) méréseket egy New Wave Research Solo I Nd:YAG lézerrel és a hozzá tartozó optikával végeztük, ami egy kb. 1 mm vastagságú zöld (532 nm) lézersíkot állít elő. A képeket egy Dantec NanoSense Mk III kamerával, 1280x1024 pixeles felbontással készítettük. Mivel a fantom belső felülete nem teljesen sima és nem mentes a szennyeződésektől, a folyadék-szilárd határfelület fényt szór. A szórt fény mérésekre gyakorolt hatásának elkerüléséhez fluoreszkáló részecskéket és optikai (hullámhossz-) szűrőt alkalmaztunk. A részecskéket 532 nm-es zöld fény gerjesztette és ≈625 nm-es fényt bocsájt ki. A gerjesztő zöld fényt, beleértve a határfelületen szórt fényt a szűrő kiszűrte. Ezzel a mozgó részecskék mögötti háttér tökéletesen fekete lett.



II.2.7. ábra. Az aneurizmamodell referencia-koordinátarendszere, méretei mm-ben és elnevezései

Az LDA (Laser-Doppler Anemometry) mérőrendszer egy egydimenziós Dantec PDA

(Particle Dynamics Analysis) rendszer része, így egyidejűleg csak egy sebességkomponenst képes érzékelni. Ezzel az eszközzel két kritikus helyen (II.2.16. ábra) mértük a domináns sebességkomponenst. Az LDA fej hátrafelé szóró optikát tartalmazott és a zöld lézerforrás is ehhez kapcsolódott. Az elülső lencse fókusztávolsága 400 mm, a nyalábok távolsága 38 mm volt. A sebességirány meghatározásában egy Bragg cella segített, amely az egyik lézernyalábon 40 MHz-es frekvenciaeltolást hozott létre. A mérőtérfogat átmérője kb. 0,14 mm, a hossza kb. 2,86 mm volt.

Az LDA rendszert szinkronizálni kellett a periodikus áramlással. Ezt egy bizonyos fázisban, az adatgyűjtő kártya egyik kimenetén generált TTL jel segítségével értük el. Két TTL jel között az LDA szoftver az adatokat a ciklusban elfoglalt fázisuk szerint rendezi. A PIV esetén ugyanez a TTL jel triggereli a képpárok exponálását. A felvételek szükséges számát a felhasználó határozza meg.

A mérések pozícionálása a II.2.7. ábrán látható koordinátarendszer szerint történt. Ahhoz, hogy mindhárom sebességkomponenst mérjük, a PIV két különböző irányú felépítésére volt szükség. Először a lézersíkot az *Y* irányra merőlegesen állítottuk be és az *U* és *W* sebességkomponenseket mértük. Majd a síkot az *X* irányra merőlegesen állítottuk be és a *V* és *W* sebességkomponenseket mértük. A kamerát és a lézert ugyanarra a traverzre szereltük. Így a mérőrendszert a lézersíkra merőlegesen tudtuk mozgatni. Az LDA segítségével egy pár egykomponensű sebességprofilt mértünk, hogy ellenőrizzük a PIV mérések pontosságát.

II.2.1.2. A mérés menete

Először a hasonlósági megfontolásokról írok. A mérőrendszerben geometria mérete és a folyadék tulajdonságai különböznek az élettanilag helyes paraméterektől. Ahhoz, hogy élettanilag helyes paraméterek mellett validáljuk a szimulációkat, gondoskodni kell az áramlás hasonlóságáról. A jelen esetben fontos dimenziótlan paraméterek a Reynolds és a Womersley szám (ez utóbbi helyett használhatjuk a Strouhal-számot is). Bár a pontos hasonlóság nem volt tartható, a dimenziótlan paraméterekben megjelenő különbségek olyan alacsony szinten maradtak, hogy az az áramlás kvalitatív jellegét nem befolyásolta. Az II.2.5. ábrán bemutatott görbe alapján a bemeneti érben fellépő minimális és maximális átlagsebesség rendre 0,37 és 1 m/s és a periódusidő 0,8 s. A newtoni vérmodell sűrűsége 1050 kg/m^3 és a dinamikai viszkozitás 0,003 Pa·s. Mivel a bemeneti ér átmérője 4,9 mm, a fönti paraméterekkel számolt minimális és maximális Reynolds-számok rendre 652 és 1715. Ezeket a Reynolds-számokat a kísérleti berendezés a szivattyú elégtelensége miatt sajnos nem tudta reprodukálni. A stratégia az volt, hogy a lehető legnagyobb Reynolds-számot állítottuk be a szisztólés csúcsnál és ehhez a csúcshoz képest a szívciklus többi részének arányait megtartottuk. A kísérletben használt folyadék és geometria paraméterei: $\rho_{kís}$ = 1140 kg/m^3; $\mu_{kís}$ = 0,01017 Pa·s; D_{be} = 17,5 mm.

A kísérletben a cikluson belüli legkisebb és legnagyobb térfogatáram közötti különbség 2 l/perc volt. Ez, a fenti paraméterekkel ΔRe = 272 cikluson belüli Reynolds-szám különbségnek felel meg. A maximális megvalósítható Reynolds-számot a (II.2.1) egyenletből számoltuk:

$$\Delta Re = \frac{1}{u_{max}}\left(u_{max} Re_{maxmegv} - u_{min} Re_{maxmegv}\right), \qquad \text{(II.2.1)}$$

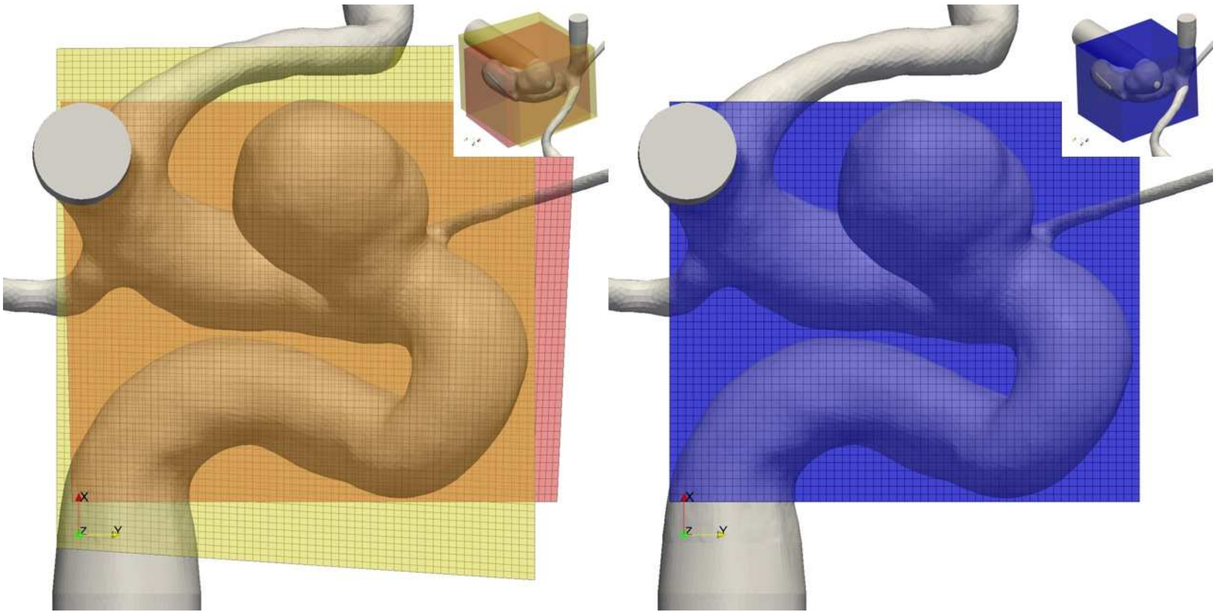
ahol u_{max} és u_{min} a bemeneti keresztmetszetben mért átlagsebességeknek rendre a ciklusbeli maximuma és minimuma. Ezzel a maximális és minimális megvalósítható Reynolds-szám rendre 160 és 432 lett. A megvalósítható Reynolds-számok a valódiaknak kb. egynegyedei. Mégis azt várjuk, hogy a két áramlás kvalitatív viselkedése ugyanolyan lesz. Ezt a várakozást a két különböző Reynolds-számon végrehajtott szimulációk megerősítették.

A valódi eset Womersley számát a (II.2.2) egyenlet szerint számítottuk:

$$Wo = \sqrt{2\pi ReSt} = d\sqrt{\frac{\omega\rho}{\mu}} = 8{,}12 \qquad \text{(II.2.2)}$$

A mérésekben használt Womersley szám valamivel alacsonyabb volt, *Wo* = 6,73, ennek oka az volt, hogy a folyadék mért viszkozitása különbözött az irodalomban megadott viszkozitástól.

Mindezek alapján a mérésekben használt értékek a következők voltak: Q_{max} = 3,14 l/perc; Q_{min} = 1,17 l/perc; *f* = 0,21 Hz.



II.2.8. ábra. Az *X* irányra (baloldal, kisebb terület), és az *Y* irányra (baloldal, nagyobb terület) merőleges síkokon való mérésekhez tartozó térfogatok és a közös térfogat (jobb oldal) a PIV mérésekben. A rács a mérés felbontását mutatja

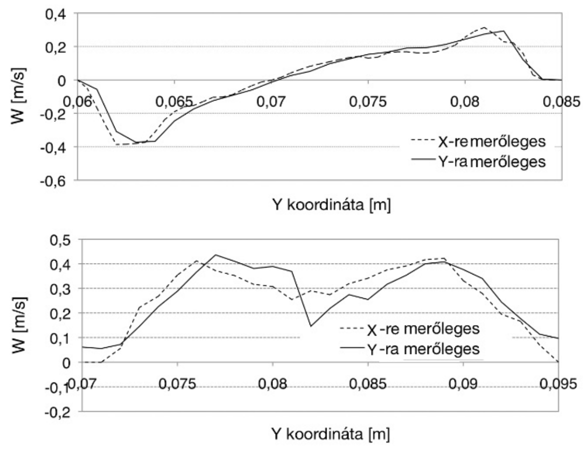
II.2.1.3. Előkészítő mérések

Ennek és a következő két alfejezetnek a tartalma nagy részletességgel le van írva Ugron et al. (2012)-ben. Itt csak rövid összefoglalót adok. Stacionárius áramlással néhány előkészítő LDA mérést végeztünk a belépő cső egyenes szakaszán, a belépő profil lamináris voltának ellenőrzésére. Ezenkívül szintén stacionárius áramlással teszteket végeztünk, hogy a két különböző irányú síkban végzett PIV mérések összehangolhatók-e. Mérőrács segítségével a PIV mérésekhez a különböző síkokban szükséges nagyítási/kicsinyítési tényezőt is meghatároztuk.

PIV méréseket csak az aneurizmazsákban és az azt megelőző görbült csőszakaszban végeztünk. A mérősíkok egymástól 1 mm-re voltak. A lézerimpulzusok közötti késleltetési idő 956 μs volt. Az vizsgált terület egy felvételnél 32x32 pixel volt, szomszédos területeknél 50% átfedéssel. A legnagyobb mért sebesség 0,8 m/s, ami 0,765 mm elmozduláshoz vezet. A pixelek képének mérete 0,048 és 0,053 mm között változott, a lézersík helyének függvényében. Eszerint a részecskék maximális elmozdulása 16 pixel volt, ami még a legkedvezőtlenebb esetben is csak a vizsgált terület felét teszi ki.

II.2.1.4. Mérések instacionárius áramlásban

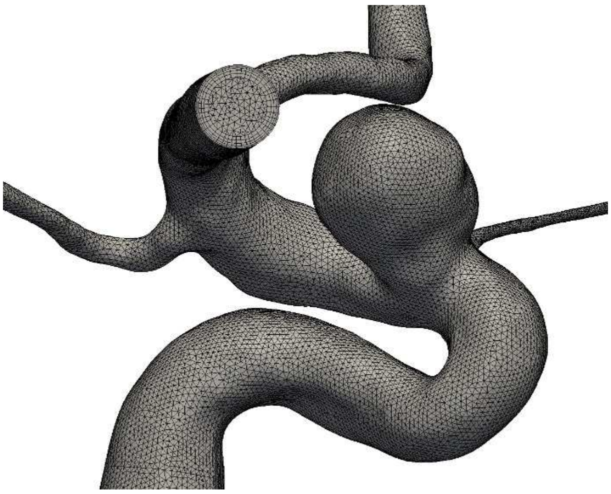
Két vonal mentén végeztünk referencia LDA méréseket. A *W* sebességkomponenst a zsákban húzódó *Y* irányú szakaszon, míg az *U* komponenst egy hasonló, az aneurizma bejáratánál található szakaszon mértük (II.2.16. ábra). 8 pontot mértünk 1,4 mm-es egyenlő lépésközzel, és a ciklust 20 egyenlő fázisközű „dobozra” osztottuk. Az adatgyűjtést addig folytattuk, amíg mindegyik fázisdobozba legalább 20 érvényes jel nem érkezett. Bár ez egyes dobozokban meglehetősen nagy relatív szórást (az átlag 50-70%-a) eredményezett, ez volt az ára az ésszerű mérési időtartamnak.



II.2.9. ábra. A két különböző orientációjú, különböző PIV mérésből kapott W sebességkomponens összehasonlítása a zsákon belül (fölül) és a bejáratnál (alul) a szisztólé pillanatában

A PIV méréseket a II.2.1.3. alfejezetben leírt paraméterekkel végeztük. A cikluson belül egyenletesen elosztva 40 triggerjel segítségével 40 képpárt vettünk fel különböző fázisokban. A kamera 406 képpárt tud tárolni, így egy mérésben 10 ciklusnyi képet vettünk föl, mielőtt a képeket a merevlemezre feltöltöttük. Ezt a folyamatot minden helyen ötször ismételtük meg, így minden időlépésben a végső sebességmező 50 képpár átlagából alakult ki. 1 mm-es lépésekkel összesen 52 *X* irányra merőleges síkon és 62 *Y* irányra merőleges síkon mértünk. A bemenő és a két fontos kimenő csövön minden mérési napon megmértük a térfogatáramot és az eltérések a mérési hibán belül voltak.

Miután mindkét irányban elvégeztük a méréseket, az eredményeket arra a közös térfogatra interpoláltuk, ahol mindhárom sebességkomponens rendelkezésre állt. A *W* komponenst kétszer mértük; ezt, miután ugyanarra a térbeli pontra interpoláltuk, átlagoltuk. Így egy 1 mm térbeli felbontású, mindhárom sebességkomponenst tartalmazó adathalmazt kaptunk. A két különböző és a közös mérőtérfogatot a II.2.8. ábrán mutatjuk be. A két mérőtérfogat helyes összehangolását és a mérések reprodukálhatóságát a *W* komponens két mérésből származó összehasonlításával a II.2.9. ábrán demonstráljuk. A méréseket a II.2.16. ábrán mutatott két szakaszon, az aneurizmazsákban és az aneurizma szájában, a szisztólés csúcsnál rögzítettük. A II.2.9. ábra tanúsága szerint az egyezés kielégítő. Az eltérések főként pozícionálási hibákból erednek, illetve az aneurizma szájánál a törésmutatóillesztés pontatlanságából, mivel ott a határfelület lokálisan majdnem párhuzamos a lézersíkkal.

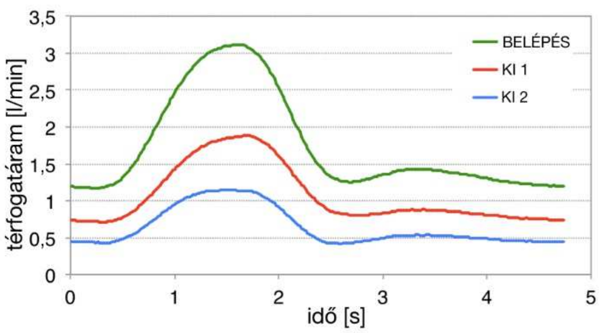


II.2.10. ábra. A szimulációkban használt numerikus háló

II.2.2 Véges térfogatos numerikus szimulációk

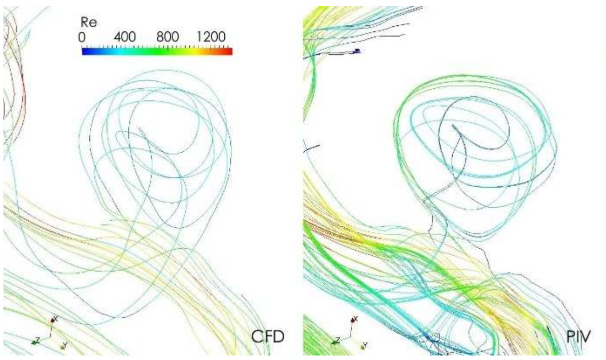
A szimulációt a fantom geometriájában végeztük, amit lekicsinyítettünk az ér eredeti méretére.

A geometriát ANSYS ICEM CFD 11.0-val hálóztuk. A háló durván 811 000 elemből állt, aminek nagy része a bemenő átmérő 6%-ának megfelelő méretű tetraéder volt, de a falak mentén jobb felbontással 5 prizmatikus réteget alkalmaztunk. A hálót a II.2.10. ábrán láthatjuk.
A folyadék newtoni vérmodell volt μ = 0,003 Pa·s dinamikus viszkozitással, és ρ = 1050 kg/m^3 sűrűséggel. A peremfeltételeket a mért térfogatáramoknak megfelelően állítottuk be a bemenő és a két nagyobb kimenő érszakaszon.



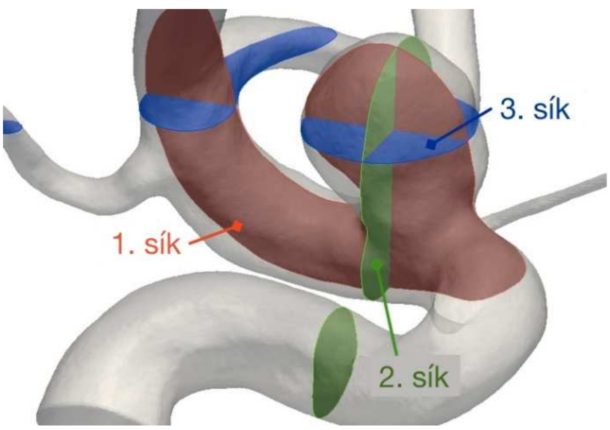
II.2.11. ábra. A szimulációhoz használt mért térfogatáramok

A valódi méretre vonatkoztatott értékeket a dimenziótlan paraméterek, Re és Wo egyenlősége alapján számítottuk. A mért instacionárius térfogatáramjeleket a II.2.11. ábrán mutatjuk be. A bemenetnél a sebesség térbeli eloszlása parabolikus volt és az átlagsebesség a térfogatáramgörbe szerint változott. A ki1 és ki2 jelű kimeneti ereken szintén időben változó tömegáramot, és a harmadik, legkisebb, ki3 jelű kimeneti éren 0 Pa statikus nyomást írtunk elő. A ki4 jelű vezeték a számítási modellben is le volt zárva. Az időlépés úgy volt beállítva, hogy egy ciklusra 80 időlépés jusson. Három ciklust szimuláltunk másodrendű sémával mind időben, mind térben. A mérésekkel való összehasonlításhoz csak a harmadik ciklus eredményeit használtuk. Ugyanezt a numerikus módszertant használtuk korábbi publikációinkban is (Paal et al. (2007); Szikora et al. (2008)). A számítások előkészítését és a számításokat ANSYS CFX 12.1-ben végeztük.



II.2.12. ábra. A sebességmező áramvonalak alapján történő összehasonlítása a szisztólés csúcs közelében

II.2.3 Mérési és véges térfogatos szimulációs eredmények összehasonlítása

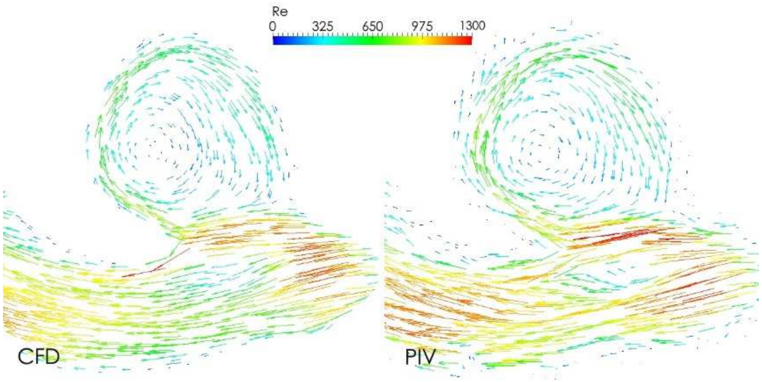


II.2.13. ábra. 3 sík, amelyeken a CFD és PIV eredményeket összehasonlítottuk

A stacionárus LDA mérések három különböző térfogatáramon tökéletesen visszaadták a várt lamináris parabolikus profilt és a térfogatáram integrálással kapott értéke legrosszabb esetben is 2,7%-on belül volt az ultrahangos térfogatárammérővel kapott eredményhez képest.
A PIV mérésekből, interpolációval kapott 3D sebességadatokat, a mért LDA profilokat és a szimulációk eredményeit dimenziótlan számokon keresztül hasonlítottuk össze.
Először egy kvalitatív összehasonlítást mutatunk be. A CFD és a PIV eredményeket és a ParaView-ba exportálva tudtuk a II.2.12. ábrán látható összehasonlítást elvégezni. A II.2.12. ábrán látható áramvonalak a szisztólés csúcs közelében az aneurizmában, és annak közvetlen közelében lévő áramlásról mutatnak kvalitatív képet. Az ábra az

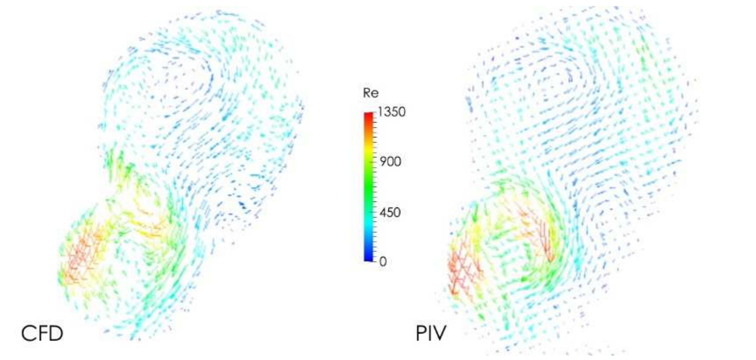
agyi aneurizmákban jellemző két tipikus áramlás egyikét mutatja: az örvényes áramlást (a másik a sugaras áramlás). Ebben az esetben van egy domináns örvény, aminek tengelye körülbelül egybeesik a zsák tengelyével. (Megjegyezzük, hogy a szisztólés csúcs alatt itt a maximális térfogatáram csúcsát értjük.)

A kvantitatív összehasonlításokat a II.2.13. ábrán látható három síkon végeztük el, sebességvektorok segítségével. Az 1. síkon (II.2.14. ábra) a tipikus örvényes áramlást láthatjuk a szisztólés csúcsnál. A ciklus folyamán az örvény középpontjának helyzete változik; a sebesség növekedésével a középpont fölfelé mozog. A numerikus és a kísérleti adatok kiváló egyezést mutatnak. A 2. síkon (II.2.15. ábra) látszik a komplex örvényszerkezet a viszonylag egyszerű geometriában. Mindhárom síkon rendkívül jó egyezést tapasztalunk (ebből a 3. sík eredményeit itt nem mutatjuk be).

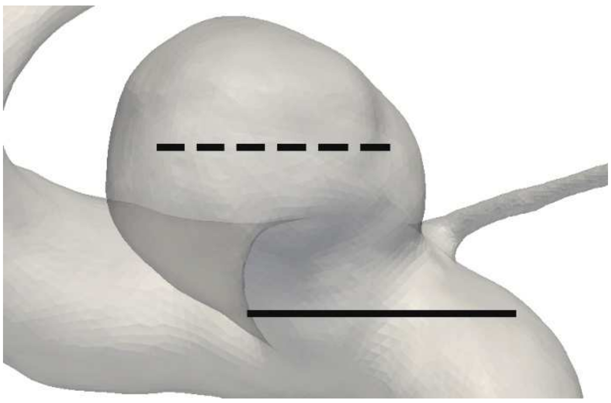


II.2.14. ábra. Dimenziótlan mért és szimulált sebességek összehasonlítása az 1. síkban, a szisztólés csúcs pillanatában

A legszigorúbb kvantitatív összehasonlítást egy sebességkomponens vonalmenti eloszlásával, és egy pontban mért sebesség időbeli lefutásával tudjuk megvalósítani. A II.2.16. ábra mutatja azt a két vonalat, ami mentén az összehasonlítást végeztük: az egyik nagyjából az aneurizma közepén, a másik a zsák bejáratánál helyezkedett el. Ezen vonalak mentén LDA, PIV mérések és CFD szimulációk eredményeit hasonlítottuk össze mind a diasztólés, mind a szisztólés pillanatban. Az összehasonlítást a dimenziótlan sebesség Re* alapján végeztük, ami „előjeles Reynolds-számként” fogható fel. A II.2.17. ábrán az aneurizma belsejében, a szaggatott vonal menti eredményeket látjuk. Ezek az eloszlások jelzik a nagy örvény jelenlétét az aneurizmazsákban, ahogyan azt már a II.2.12. ábrán láttuk. Az örvénymag mozgására a vízszintes tengellyel való metszéspont elmozdulásából következtethetünk. Az LDA mérések megerősítik mind az PIV mérések, mind a szimulációk helyességét. A II.2.18. ábrán Y/D_{INLET} = 4,5-nél az időbeli lefutás látható, szintén kitűnő egyezéssel a mérések és a szimuláció között, valamint a két mérési módszer között is. Hasonlóképpen, az aneurizma bejáratánál található,



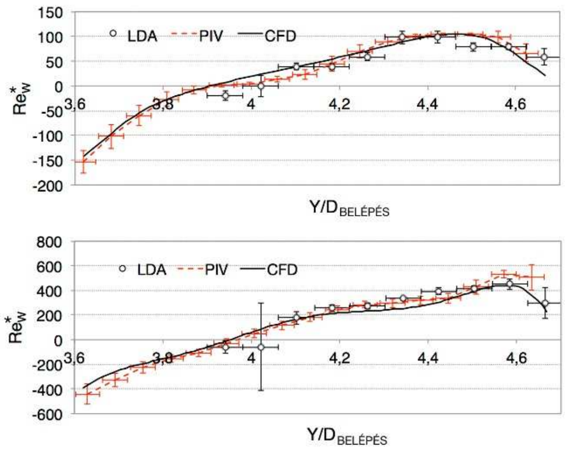
II.2.15. ábra. Dimenziótlan mért és szimulált sebességek összehasonlítása a 2. síkban, a szisztólés csúcs pillanatában



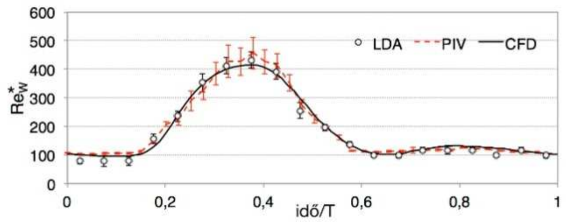
II.2.16. ábra. A két mért sebességprofil helye: az egyik az aneurizmazsákban (szaggatott vonal), a másik a zsák bejáratánál (folytonos vonal)

folytonos vonal menti eloszlásokat a II.2.19. ábrán, az Y/D_{INLET} = 5 helyen az időbeli lefutást a II.2.20. ábrán láthatjuk.

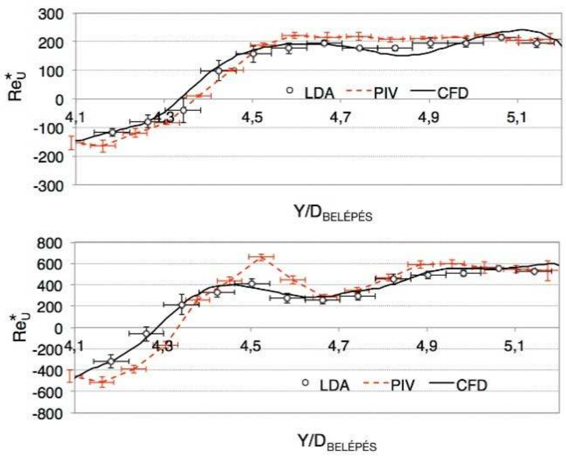
A térbeli eloszlásból következtethetünk a keskeny beömlési zónára (negatív értékek) és a széles kiömlési zónára, amelyek az ilyen típusú aneurizmáknál jellegzetesek.



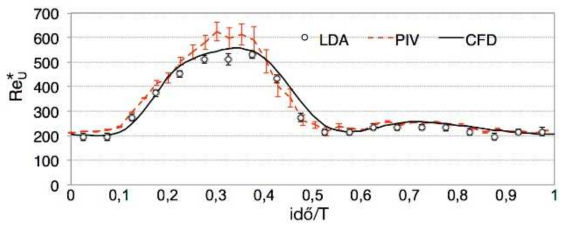
II.2.17. ábra. Az aneurizmán belüli dimenziótlan sebességprofil összehasonlítása a minimális (fönt) és a maximális (lent) térfogatáram pillanatában



II.2.18. ábra. Az eredmények összehasonlítása az aneurizmában, *Y/D*$_{BELÉPÉS}$ = 4,5



II.2.19. ábra. A zsák bejáratánál lévő dimenziótlan sebességprofil összehasonlítása a minimális (fönt) és a maximális (lent) térfogatáram pillanatában



II.2.20. ábra. Az eredmények összehasonlítása a zsák bejáratánál, $Y/D_{BELÉPÉS}$ = 5

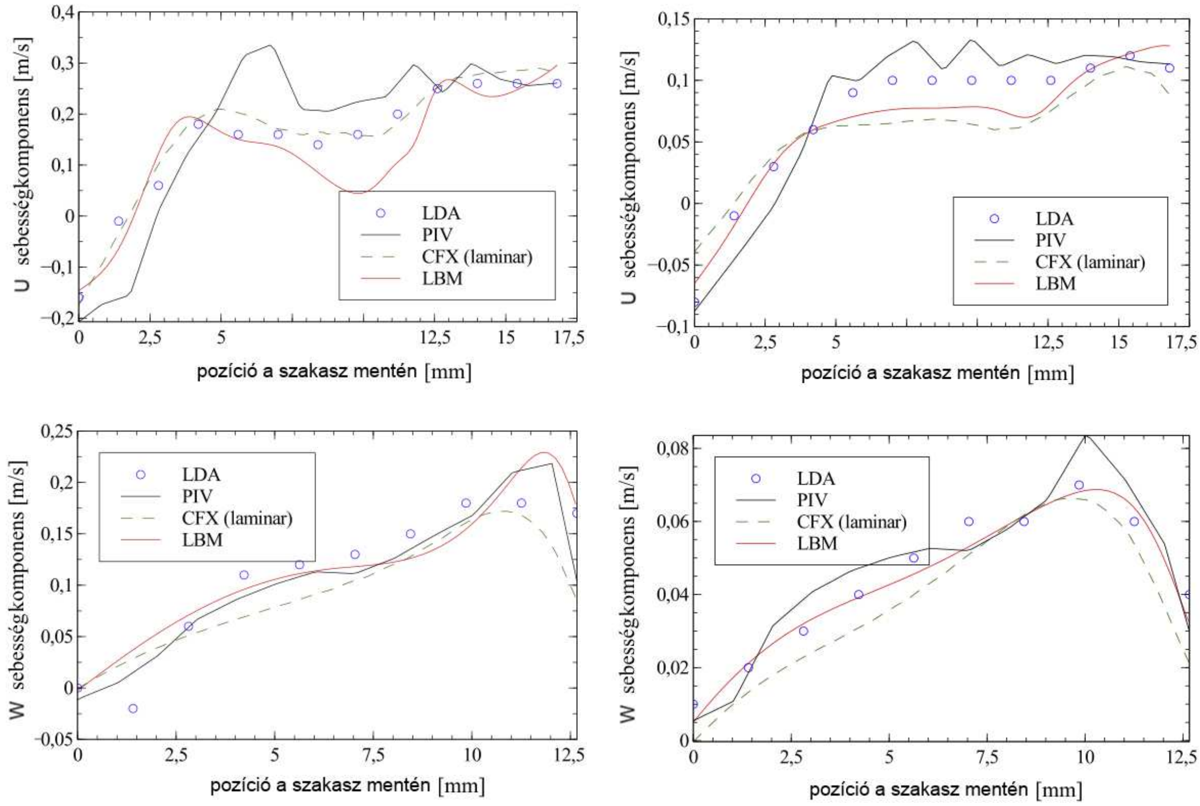
II.2.4 Numerikus szimulációk rács Boltzmann módszerrel

A véges térfogatos módszer mellett egy alapvetően más numerikus módszerrel is szimuláltuk az áramlást, a rács Boltzmann (lattice Boltzmann) módszerrel (LBM). Ez a módszer a gázok kinetikus elméletén alapul. Az egyes molekulák számontartása helyett egy adott térbeli pontban tartózkodó molekulák sebességeloszlásával számol. A sebességeloszlás-függvényre két lépésben az advekciós-diffúziós egyenletet oldjuk meg. Az advekciós lépésben a sebességeloszlás komponenseit továbbléptetjük a megfelelő irányba, míg a diffúziós lépésben a részecskék ütközését modellező operátort hattatjuk a lokális sebességeloszlásra. Ez a dinamika az összenyomhatatlan Navier-Stokes egyenletek másodrendű közelítését adja. A rács Boltzmann módszer részletes ismertetése megtalálható pl. Succi (2001) könyvében és Qian et al. (1992) illetve D'Humières et al. (2002) cikkeiben.

A rács Boltzmann módszernek számunkra legnagyobb előnye az, hogy szabályos (egybevágó kockákat tartalmazó) voxelrácson működik. Az orvosi szoftverekből kapott érgeometria is ugyanilyen voxeles szerkezetű (DICOM formátum), úgyhogy a véges térfogatos módszer leginkább munka- és időigényes munkafázisa, a numerikus háló gyártása drasztikusan egyszerűsödik és automatizálható. Ez különösen ilyen rendkívül komplikált geometria, mint az agyi aneurizma esetén jelent nagy könnyebbséget. További előny, hogy a módszer könnyen párhuzamosítható, illetve implementálható GPU-ra (Graphics Processing Unit).
Hátránya, hogy mivel a módszer fiatalabb, sokkal kevesebb tapasztalat áll rendelkezésre használatával kapcsolatban. További hátrány, hogy a csúszásmentes fal peremfeltétel implementálása csak elsőrendű pontosságot eredményez.

Nyílt forráskódú programok felhasználásával saját háromdimenziós instacionárius áramlásszimulációs szoftvert írtunk és ezt az előző fejezetben ismertetett mérésekkel validáltuk.

Ennek részletes leírása Závodszky & Paál (2013)-ban található, itt csak egy-két reprezentatív eredményt ismertetek. Először a megfelelő implementációt és a szükséges hálófelbontást határoztuk meg. A kiválasztott hálóban az áramlási térnek megfelelő cellák száma 8,17 millió körül volt. (A valódi cellaszám ennél sokkal nagyobb, csak az áramlási téren kívül lévő cellák inaktívak.) A véges térfogatos szimulációkkal ellentétben itt pontosan a kísérletet szimuláltuk, azaz a kísérleti folyadék viszkozitását és sűrűségét, a kísérleti ciklus periódusidejét és a valódi geometriai méreteket használtuk. Az

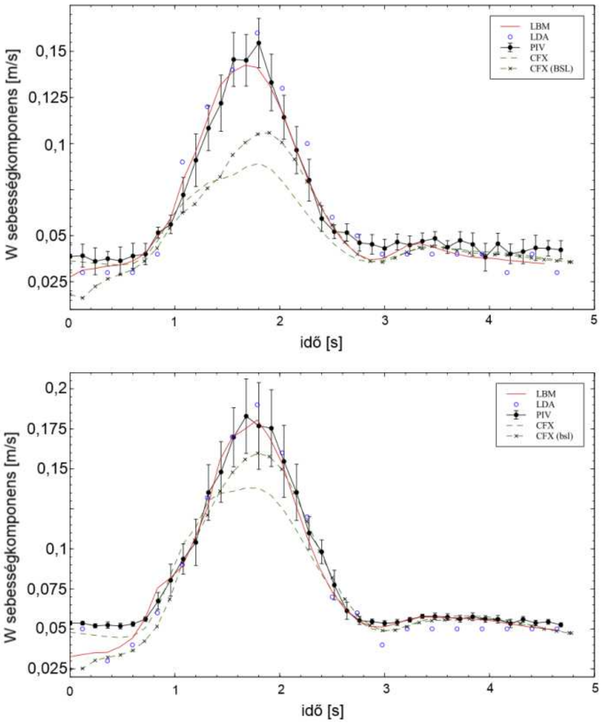


II.2.21. ábra. Sebességek összehasonlítása. Jobb oldal: 1,32 s; bal oldal: 2,64 s. Fönt: *U* komponens, a II.2.16. ábra folytonos vonalán, lent: *W* komponens a II.2.16. ábra szaggatott vonalán

összehasonlítást mind a mérésekkel, mind a véges térfogatos szimulációkkal ugyanazon a két vonalon végeztük, mint az előző alfejezetben (II.2.16. ábra).

Mindkét vonalon két időpillanatban végeztük az összehasonlítást: 1,32 és 2,64 s-nál; ezek rendre a szisztólés csúcs és a diasztólés völgy közelében lévő térfogatáramoknak felelnek meg.

Az összehasonlításokat szisztólés csúcsnál és a diasztólés völgyben a II.2.21 ábrán mutatjuk be. A kísérleti és az LBM szimulációs eredmények között jó egyezést találunk, különösen az LDA mérések eredményeivel, amik bizonyosan pontosabbak, mint a PIV eredmények. A nagyobb eltérést az aneurizma nyakánál tapasztaljuk. Ez megfelel a várakozásnak, ugyanis az áramlás a nagy sebességgradiens miatt ott a leginstabilabb.



II.2.22. ábra. Sebességek időfüggő összehasonlítása a II.2.16. ábra szaggatott vonalának két pontjában: fönt *Y* = 6,5 mm; lent *Y* = 10 mm

A II.2.22. ábrán az időfüggő *W* sebességkomponenst látjuk két pontban. A szimmetrikus hibasávok a PIV adatpontokon a pozícionálási bizonytalanságot tükrözik, a valódi mérési hiba ennél nagyobb. Az LBM eredmények a hibasávokon belül jól követik a kísérleti eredményeket. A véges térfogatos (CFX) szimuláció görbéje erős letörést mutat a nagyobb sebességek (a szisztólés csúcs) közelében. Ha a lamináris modellt kicseréljük BSL Reynolds feszültség modellre, az eredmények javulnak, legfőképpen a szisztólés csúcs közelében. Az általános egyezés a mérések és az LBM szimulációk között jó volt, különösen az aneurizmazsákon belül, ami végülis a szimulációk fő célja.

II.3 Peremfeltételek aneurizmák szimulációinál

Aneurizmák numerikus áramlásszimulációinál a geometria pontossága és a háló jó minősége mellett, egy szimuláció sikerességét meghatározó legkritikusabb tényező a peremfeltételek helyes megválasztása. Cebral et al. (2005) megmutatták, hogy a geometria bizonytalanságai viszonylag kis mértékben hatnak a szimuláció végeredményére. A háló bizonytalanságai jól kézben tarthatók hálótanulmányokkal, de a tapasztalat szerint megfelelő minőségű hálók esetén nem kritikus a hatásuk. A peremfeltételek ezzel szemben óriási bizonytalanságot visznek a szimulációkba, ezért hatásuk feltérképezése kritikus jelentőségű. Megdöbbentő módon a megjelent publikációk jelentős hányada egyszerűen hallgat a peremfeltételekről, vagy azoknak egy részéről. Mi korán felismertük ezek jelentőségét és szisztematikusan megvizsgáltuk őket, illetve hatásukat. Mindkét aneurizmatípusra vonatkozik, hogy mivel tág értelemben csőáramlásról van szó, és az aneurizma környékén kivágott érszakaszt vizsgálunk, alapvetően három peremfeltételtípusról beszélünk: bemeneti, kimeneti és fali peremfeltételről. Az ezekről szóló vizsgálatokat foglalom össze ebben a fejezetben.

II.3.1 Agyi aneurizmák szimulációinak peremfeltételei

Feltételezve, hogy a szimuláció instacionárius (időfüggő, tranziens), azaz követi a szívcikluson belül lezajló térfogatáram- és nyomásváltozásokat, a bemenő peremfeltétel vagy időfüggő térfogatáram, vagy időfüggő átlagsebesség. (Elvileg időfüggő nyomás is lehet a peremfeltétel, de ez gyakorlati okokból nem tanácsos.) Mindkét esetben meg kell határozni a sebesség keresztmetszet menti eloszlását is. Az időfüggés lehet mért vagy szintetikus függvény. Ideális esetben a mért függvény páciens-specifikus, azaz annak a páciensnek a mért térfogatáramfüggvényét adjuk meg, akinek az aneurizmáját szimuláljuk. A mérés a gyakorlatban nehéz és pontatlan, ezért ezt tudomásunk szerint rutinszerűen sehol sem alkalmazzák. Helyette vagy egy páciens mért függvényét alkalmazzák más páciensekre is, vagy szintetikus függvényt alkalmaznak. Ez utóbbit tettük mi is. Ami a keresztmetszet menti sebességeloszlást illeti, a legegyszerűbb az egyenletes sebességeloszlás feltételezése, de ez a valóságtól biztosan távol áll. Sokszor feltételeznek Poiseuille (parabolikus) profilt, ami egyenes, merev falú hengeres cső stacionárius áramlásának pontos megoldása. A Poiseuille eloszlás átlagsebessége az előírt időfüggvény szerint változik. Látjuk, hogy agyi aneurizmák környezetében e feltételek közül gyakorlatilag egyik sem teljesül, a cső nem hengeres és nem egyenes, az áramlás nem stacionárius. Jobb közelítés a Womersley profil, ami az egyenes hengeres merev falú cső áramlásának megoldása periodikus nyomásgradiens esetére. Mivel a vizsgált tartományban az analitikus áramlások egyike sem jön létre, hagyni kell, hogy egy analitikus peremfeltételből spontán kifejlődjön a valódi áramlás. Ehhez viszont a minket érdeklő tartomány előtt kellő teret kell adni az áramlás zavartalan kifejlődéséhez. Ezt biztosítandó, egy egyenes érszakaszt csatlakoztattunk a vizsgált érszakasz elé.

A kilépő peremfeltételről sokszor nem szólnak a publikációk. Előfordul mért vagy mesterséges időfüggő nyomásgörbék megadása, de állandó nyomás is. Megint csak a kilépő peremfeltétel nem lehet túl közel az érdekes tartományhoz, hogy a nem kívánt kölcsönhatásokat elkerüljük. Emiatt egy egyenes érszakaszt csatlakoztattunk a vizsgált érszakasz után is. Az állandó nyomás peremfeltétel reális, ha a kapillárisok szintjére gondolunk. A valóságban viszont a kapillárisokig hosszú út vezet, addig nagyon sok, egyre csökkenő keresztmetszetű érben halad keresztül a vér, ami áramlási ellenállást jelent. Ennek kezelésére többféle módszer van: lehet párhuzamos áramlási ellenállásokkal, fraktál fákkal illetve porózus anyaggal modellezni. Mi a porózus anyag megközelítést alkalmaztuk, amivel a vizsgált érszakaszhoz csatlakoztatott egyenes érszakasz egy részét kitöltöttük.

További módszer a be- és kilépő peremfeltételek előállítására a teljes artériás rendszert szimuláló 1D szimuláció, amit a hasi aneurizmák esetén fogunk alkalmazni.

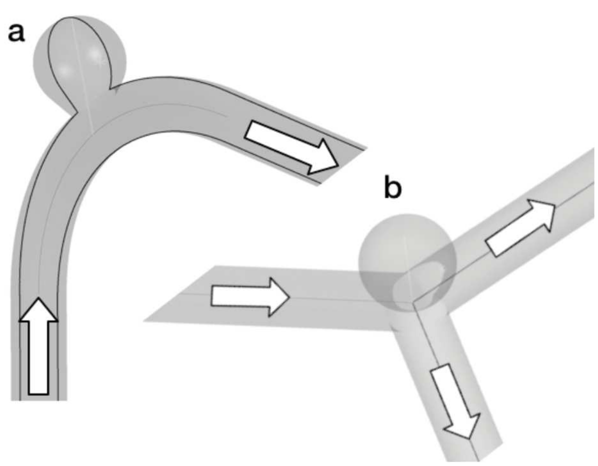
Végül a fali peremfeltételről kell szót ejtenünk. A falat a publikációk túlnyomó többsége sima, merev falként modellezi. A valóságban a fal nem merev és nem sima. Ismeretes, hogy az érfal rugalmas és a pulzushullám elhaladásakor kitágul, majd újra összehúzódik. Az érfal rugalmasságának modellezése rendkívül nehéz feladat, ugyanúgy, ahogy kapcsolt (áramlástani-mechanikai) szimulációk végzése is. Kapcsolt szimulációk nagyságrenddel nagyobb számítógépes kapacitást és felhasználói időráfordítást igényelnek. Mivel orvosi alkalmazásokban sokszor a fali csúsztatófeszültségekre vagyunk kíváncsiak, a csúsztatófeszültségeket tekintjük az összehasonlítás alapjának. Ellentmondásosak az eredmények azzal kapcsolatban, mennyire szükséges a fal rugalmasságának modellezése, illetve mennyire eredményez nagy hibát annak elhanyagolása. Pl. Torii et al. (2007) szerint bizonyos aneurizma-geometriák esetén nagy jelentőségű, más geometriák esetén nem. Sokkal kevesebb eredmény született a fal érdességével kapcsolatban. Ismeretes, hogy az érfal belső felülete érdes, az endothel sejtek „kidudorodása” miatt. Ez azt jelenti, hogy valójában egy szabálytalan hullámos felületen zajlik az áramlás, ami a csúsztatófeszültségek nagy térbeli frekvenciájú változásához vezethet. Ez behatóbb kutatást érdemel, de ebben a disszertációban nem foglalkozunk vele.

Ez az alfejezet nagyrészt Ugron & Paál (2014) alapján készült; ott a témáról több részlet található.

II.3.1.1. Módszerek

A vizsgálatokat CFD segítségével végeztük. Az áramlásszimulációkhoz ANSYS CFX kereskedelmi szoftvert használtunk, a mechanikai szimulációkhoz ANSYS-t, így az FSI (Fluid-Structure Interaction) szimulációkat az ANSYS szoftverkörnyezetben hajtottuk végre. A hálózást ANSYS ICEM-mel végeztük. Néhány további számításhoz és a vizualizációhoz MatLab és ParaView szoftvereket használtunk.

Szimulációinkban összenyomhatatlan, lamináris áramlást feltételeztünk. Folyadékmodellünk newtoni volt, ρ = 1050 kg/m^3 sűrűséggel és μ = 0,003 kg/m·s dinamikus viszkozitással. A newtoni feltételezés általánosan elfogadott hemodinamikában; a vér nemnewtoni tulajdonságai csak nagyon kis átmérőjű véredényekben éreztetik hatásukat. Az érfal deformációjának tanulmányozásakor az érfalat lineárisan rugalmasnak tételeztük fel, E = 1 MPa rugalmassági modulussal, és ν = 0,35 Poisson tényezővel. A lineárisan rugalmas modell az agyi artériák esetén ésszerű feltételezés, mivel a deformáció túl kicsi ahhoz, hogy nemlineáris hatások észlelhetők legyenek.



II.3.1.1. ábra. Mesterséges aneurizmamodellek és áramlási irányok a peremfeltételtanulányokhoz. a) Oldalfalaneurizma kanyarban; b) Bifurkációs aneurizma

A belépési hossz tanulmányokhoz egy d = 3 mm átmérőjű és 60d hosszúságú egyenes csövet használtunk. A háló blokk-struktúrált volt, a fal mellett finom felbontással és hozzávetőleg 800 000 elemet tartalmazott.

Két mesterséges és két valódi aneurizmageometrián dolgoztunk. Az előbbieket az II.3.1. ábrán láthatjuk: egy idealizált oldalfali aneurizma kanyarban és egy bifurkációs aneurizma. Ezek tartalmazzák az agyi aneurizmák leglényegesebb tulajdonságait és a belépési és kilépési hossz tanulmányoknál, illetve a falrugalmassági tanulmányoknál használtuk őket. Hálózásuk részleteit Ugron &

Paál (2014)-ban közöljük. A falrugalmassági tanulmányokban a 0,4 mm-es egyenletes vastagságú fal végeselem modelljét tetraéderes elemekkel hálóztuk.

Az utóbbiak között szintén volt egy oldalfal és egy bifurkációs aneurizma. Ezen geometriákat standard orvosi képalkotó szoftverrel rögzítettük (rotációs angiográfia). A háló 530000 (oldalfal) illetve 390000 (bifurkációs) tetraéderes elemből állt. A végeselemes szimulációban a falon héjelemeket alkalmaztunk, 17000 (oldalfal) illetve 13000 (bifurkációs) darabot. A geometriák feldolgozásáról, kellő formába hozásáról és a hálózásról részletesebben Ugron & Paál (2014)-ban számolunk be.

A digitális szubtrakciós angiográfiával készített érgeometriát a vizsgált érszakasz környezetében le kell vágni véges nagyságúra. Az egyik kérdés, amit e fejezetben felteszünk az, hogy az aneurizma előtt és után mekkora érszakaszt kell megtartani ahhoz, hogy a peremfeltétel hatása ne érződjön. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához csöveket készítettünk, bonyolult, véletlenszerű görbületekkel. A csövek átmérője d = 3 mm volt, hosszuk 100 és 150d között változott. A háló extrudált O-grid volt hexaéder elemekkel.

Egy harmadik valódi aneurizmageometriát is használtunk, aminek kellően hosszú bevezető szakasza volt.

Instacionárius szimulációkat végeztünk 0,01 s-os időlépéssel, kivéve a két valódi aneurizmageometria kapcsolt szimulációját, ahol az időlépés 0,02 s volt. Egy szívciklus 0,8 s volt. A konvergencia-szükségletektől függően egy szimuláció 2-4 ciklusig tartott. Mind időben, mind térben másodrendű numerikus sémát alkalmaztunk.

II.3.1.1.1 Belépő peremfeltételek

A belépéssel kapcsolatos tanulmányok fő célja az, hogy azonosítsuk a hibaforrásokat és meghatározzuk, hogy ezek a hibák eljutnak-e a minket érdeklő helyre. Először egyenes csövekben tanulmányoztuk a sebességprofilok alakulását, majd a profilok változását különböző bemeneti hosszal. A görbült csövek tanulmányozásánál a két lépést egyszerre hajtottuk végre.

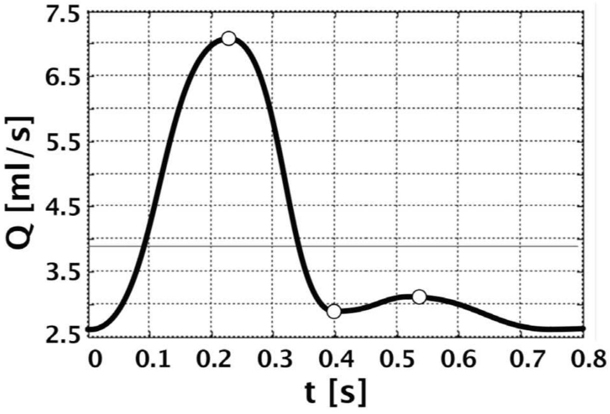
A Womersley képlet egyenes, hengeres, merev falú csőben, időben harmonikusan periodikus nyomásgradiens hatására kialakuló lamináris áramlás analitikus sebességprofilját adja meg. A megoldás alapján Fourier sor segítségével kapcsolat teremthető a periodikus térfogatáram és a sebességprofil *u(r,t)* között ((II.3.1) és (II.3.2) egyenlet).

$$u(r,t)=\frac{2Q_0}{\pi R^2}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]+\sum_{n=1}^{N}\frac{Q_n}{\pi R^2}\left[\frac{1-\dfrac{J_0(\beta_n\frac{r}{R})}{J_0(\beta_n)}}{1-\dfrac{2J_1(\beta_n)}{\beta_n J_0(\beta_n)}}\right]e^{in\omega t}, \qquad \text{(II.3.1)}$$

ahol

$$\beta_n=i^{\frac{3}{2}}\alpha_n=i^{\frac{3}{2}}R\sqrt{\frac{n\omega}{\nu}}. \qquad \text{(II.3.2)}$$

Itt u az axiális sebesség, r a cső középvonalától számított radiális távolság, t az idő, Q a térfogatáram, R a cső sugara. J_0 és J_1 rendre elsőfajú nullad- és elsőrendű Bessel függvények, ν a kinematikai viszkozitás, ω a körfrekvencia, α a Womersley szám, i a képzetes egység továbbá Q alsó indexe a Fourier sorba fejtett szívciklus-térfogatáram harmonikus komponensének sorszáma. A sebességprofilokat MatLab segítségével állítottuk elő. Parametrizált szívciklust állítottunk elő, amely reprodukálta az igazi szívciklus fő jellemzőit. A jellemző pontok helyét, mint a térfogatáram szisztólés maximuma vagy a diasztólés minimuma, amelyek a parametrizálás részei voltak, a II.3.2. ábrán üres körökkel jelöltük.



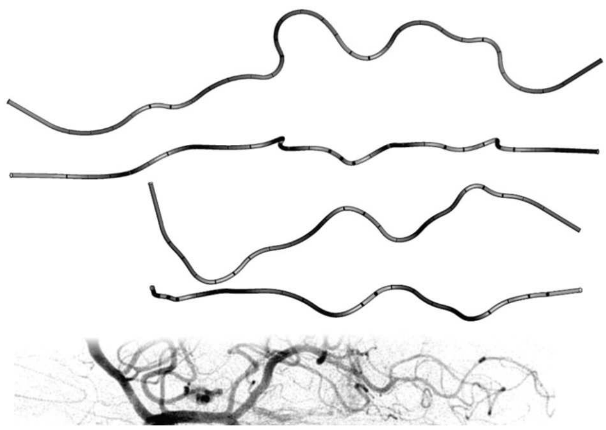
II.3.2. ábra. A legtöbb tanulmányban használt idealizált szívciklus, a jellemző pontok megjelölésével. Az átlagos térfogatáramot szürke vonal jelöli

A II.3.2. ábrán látható szívciklust egy MATLAB algoritmus segítségével Fourier sorba fejtettük, azaz kiszámítottuk a (II.3.1) egyenlet Q_n-jeit. Ezután a Womersley profilt az első 10 Fourier taggal közelítettük. Ezeket a Womersley profilokat hasonlítottuk össze a Hagen-Poiseuille profilokkal a szívciklus tetszőleges pillanataiban.

A profilok kialakulását az egyenes csőben és a két mesterséges aneurizmamodellben tanulmányoztuk. Az egyenes csőben kifejlődő profilokat összehasonlítottuk az analitikus képletekkel és feljegyeztük a kialakulási hosszokat. Az idealizált aneurizmákhoz különböző belépési hosszokat csatoltunk, hogy a különböző nem kifejlődött sebességprofiloknak az aneurizma áramlására gyakorolt hatását tanulmányozzuk. Ezenkívül véletlenszerűen görbült csőgeometriákat generáltunk. Görbült csövekben a sebességeloszlásra analitikus közelítés csak egyszerűsített esetekben létezik (Pedley (1980)). Ezeket az áramlásokat a Dean szám (De) alapján osztályozzuk (Ku (1997)):

$$De = \frac{Ud}{\nu}\sqrt{\frac{d}{2C}}, \qquad \text{(I.1.3)}$$

ahol U a csőbeli átlagsebesség, d a cső átmérője és C a csőszakasz középvonalának görbülete. Mivel az agyi artériák kvázi véletlenszerűen görbülnek, véletlenszerűen görbülő csőszakaszokat generáltunk. A generáló algoritmus olyan volt, hogy létrejövő csőszakaszok Dean számai ugyanabban a tartományban voltak, mint az elemzett valódi artériaszegmenséi. A görbült csőszakaszokra példákat a II.3.3. ábrán láthatunk, együtt agyi artériák angiogramjával. A görbült ereket ezután két egyenlő részre vágtuk és mindhárom geometriát (a teljes, a felvízi és az alvízi) ugyanazokkal a peremfeltételekkel szimuláltuk. A teljes és az alvízi geometrián kapott eredményeket összehasonlítva tanulmányozni tudtuk a kanyarok hatását a belépő profil fejlődésére. Ezt úgy tettük, hogy egymástól 5d távolságra lévő, a tengelyre merőleges síkok sorozatán összehasonlítottuk a sebességprofilokat, és minden síkon kiszámítottuk a relatív eltérés térbeli átlagát. Ezzel meg tudtuk határozni a profil kialakulási hosszát. A profil kialakulását egy valódi érgeometrián is megnéztük, ellenőrizendő, hogy az idealizált geometrián kapott eredmények átvihetők-e realisztikus esetekre. A valódi geometria hálóját úgy egészítettük ki, hogy ugyanazt a peremfeltételt tudjuk alkalmazni, mint a mesterséges geometriák



II.3.3. ábra. Két példa a generált görbült csőszakaszokra, mindkettő két nézetből (fölül és középen) és a referenciaként szolgáló valódi agyi erek (alul)

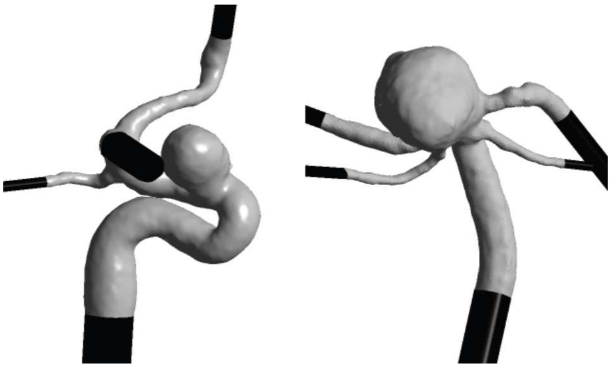
esetén. A valódi geometriában lezajló áramlás tanulmányozásához öt különböző bemenő érszakasz-hosszt készítettünk elő. Az első (alap)geometriát az aneurizmához vezető bemenő érszakasz nagy részének eltávolításával nyerjük, csak egy kb. 2*d* hosszú szakasz marad meg. A következő három geometriában az aneurizma előtt (II.3.4. ábra) egy, másfél, illetve kettő kanyar marad meg. Végül, a referenciageometria 7 kanyart tartalmaz, és 25*d* hosszú. A kapott áramlásokat az alapgeometrián a sebesség és a fali csúsztatófeszültség megvizsgálásával hasonlítottuk össze.

II.3.1.1.2 Kilépő peremfeltételek

A kilépő peremfeltételnél porózus anyag megközelítést alkalmaztunk. Minden esetben a kimenő érszakaszhoz 10*d* hosszúságú egyenes porózus csőszakaszt illesztettünk. A porózus modell Darcy modelljére alapozódott:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{K}u + B\rho|u|u, \qquad \text{(II.3.4)}$$

ahol *p* a nyomás, *μ* a dinamikus viszkozitás, *K* a permeabilitás, *u* az *x* irányú sebességkomponens, *x* az áramlás iránya, a porózus rétegre merőleges koordináta, *B* empirikus konstans, *ρ* a folyadék sűrűsége. Alacsony sebesség esetén, mint a jelen áramlásban is, a második tag elhanyagolható. A porózus réteg permeabilitása és a kimeneti nyomás úgy lettek beállítva, hogy az áramlási tartományban a nyomás a reális 80 és 120 Hgmm között volt, a II.3.2. ábrán látható térfogatáram peremfeltétellel.



II.3.4. ábra. Valódi aneurizma-geometriák extrudálással meghosszabbított be- és kimeneti érszakaszokkal (sötétebb részek)

A kilépő hossz sebességmezőre gyakorolt hatását a két mesterséges aneurizmamodellen és a véletlenszerűen görbülő csőszakaszon tanulmányoztuk.

II.3.1.1.3 Rugalmas fal kezelése

A rugalmas falat teljesen kapcsolt FSI (Fluid-Structure Interaction = folyadék-szilárd test kölcsönhatás) megközelítéssel modelleztük. Ez azt jelenti, hogy mindkét irányú kölcsönhatást figyelembe vettük: a deformáció hatását az áramlásra és az áramlás hatását a deformációra. Mind a mesterséges, mind a valódi aneurizmamodelleket bevontuk ebbe a tanulmányba. A sebesség, a WSS és a nyomáseloszlásokat hasonlítottuk össze a megfelelő merev falú eredményekkel. A valódi aneurizmageometriákat a meghosszabbított bemenő és kimenő csőszakasszal a II.3.4. ábrán láthatjuk. Ami az áramlástani peremfeltételeket illeti, azok ugyanazok voltak, mint a merev falú modellek esetében. A szilárdtest (érfal) modell kényszerei az áramlás által keltett fali terhelés volt belülről és a rugalmas ágyazás kívülről, valamint a rögzített eredeti érmodell-végek. A rugalmas ágyazás a geometria irreálisan nagy deformációjának elkerülése végett szükséges, ami a CFD hálóban negatív térfogatú elemeket eredményezhetne. (Ez a probléma csak a valódi geometriák esetén jelentkezik.) A rugalmas felfüggesztés alkalmas az eret körülvevő szövetek elmozdulással szemben kifejtett ellenállásának modellezésére. A felfüggesztés rugalmassági modulusát 0-ra vettük föl a mesterséges, és 96 000 Pa/mm-re a valódi aneurizmamodellek esetére.

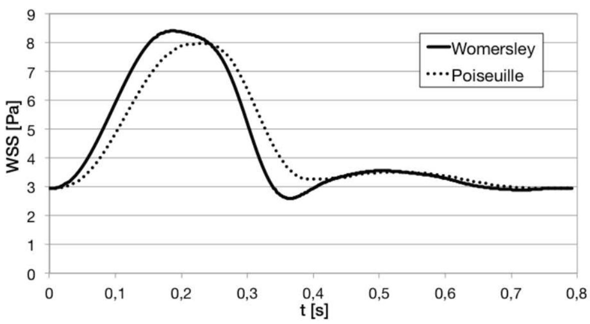
II.3.1.2 Eredmények

II.3.1.2.1 Belépő peremfeltétel

A Poiseuille és a Womersley profilt először analitikusan hasonlítottuk össze. A II.3.2. ábrán feltüntetett szívciklus jellemző pontjainak, valamint a frekvenciának és a térfogatáram időátlagának áramlásra gyakorolt hatását a Womersley profil rekonstrukciójának segítségével vizsgáltuk. A pillanatnyi térfogatáramból számolt Poiseuille megoldást és a Womersley megoldást hasonlítottuk össze. A fali csúsztatófeszültség és a profil maximális sebességének relatív hibáját a különböző paramétereket változtatva, egy cikluson át vizsgáltuk.

Az átlagos térfogatáram a Womersley képletben a nulladik tag együtthatójaként jelenik meg ((II.3.1) egyenlet), ami a profil parabolikus részét jelképezi. Ebből az következik, hogy minél nagyobb az átlagos térfogatáram, annál közelebb kerül a Womersley profil a stacionárius parabolikus profilhoz. Ezt a számítások megerősítik, részleteket lásd Ugron & Paál (2014)-ben.

Ha a frekvenciát növeljük, a parabolikus közelítés kevésbé lesz jó, mivel az instacionárius viselkedés egyre jobban dominál. Pl. a szívverési frekvencia 12%-al való növelése kb. ugyanilyen növekedést okoz a maximális WSS eltérésben.



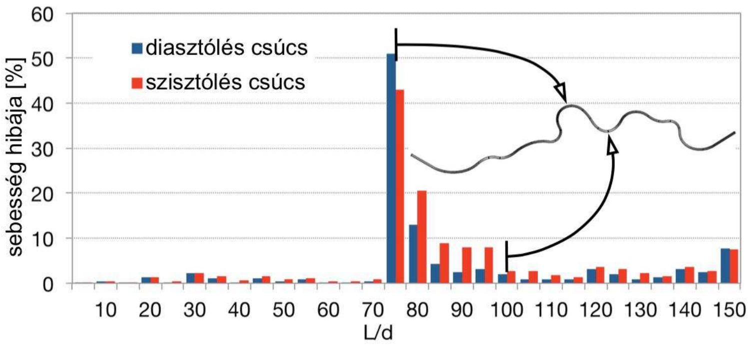
II.3.5. ábra Womersley és Poiseuille WSS lefutás; az utóbbi megfelel a Womersley sebességlefutásának

A II.3.2. ábra karakterisztikus pontjainak hatását vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a két maximumpont közül a nagyobbiknak (szisztólés csúcs) lényegesen nagyobb befolyása van a profilra. Pl. a nagyobbik csúcs értékét 20%-al növelve kb. 20%-al növekedett a WSS relatív hibája, míg a kisebbik csúcs ugyanilyen mértékű növelése 1% hibanövekedést eredményezett. A sebességprofil érzékeny volt a szisztólés csúcsot követő minimum térfogatáram értékére is. 20% változás a minimumban kb. 17%-os változást eredményezett a WSS hibájában. A maximális WSS hiba fázisa a referenciaciklus esetében egybeesett a minimum helyével. A WSS- és a sebességlefutás között fáziseltolódás volt, ami tipikus a Womersley megoldásnál – a referenciaciklusnál a maximális WSS 0,054T-vel előbb van, mint a maximális sebesség, ahol T a periódusidő. A Poiseuille megoldásnál a WSS fázisban marad a sebességgel, így a két megoldás WSS-ét együtt ábrázolva a sebesség-WSS fáziseltolódást is mutatja (II.3.5. ábra). Mivel a fáziseltolódás időbeli jelenség, az átlagos térfogatáramnak, illetve a karakterisztikus pontokban a térfogatáram értékének nincs rá hatása, a szívverés frekvenciájának viszont van. Azt várjuk, hogy növekvő frekvenciával (csökkenő periódusidővel) a fáziseltolódás is nő, mivel tehetetlenség hatása is nő. Ezt a számítások is megerősítik (Ugron & Paál (2014)).

A szisztólés csúcs alakjának megváltozása szintén erősen befolyásolja a fáziskésést. A tendencia az, hogy a csúcs meredekségének növekedésével a periódusidőhöz viszonyított fáziseltolódás csökken.

A maximális WSS értékek tehát mindig előbb jelentkeznek, mint a maximális sebességek és a fáziseltolódás tipikus értéke a periódusidő 5-7%-a.

Bár kvantitatív különbségeket észleltünk, ha változtattuk a pulzus alakját, mégis jó közelítéssel használhatunk mesterséges pulzusalakot, ha a térfogatáram maximális és minimális értékét ismerjük (Cebral et al. (2005)).

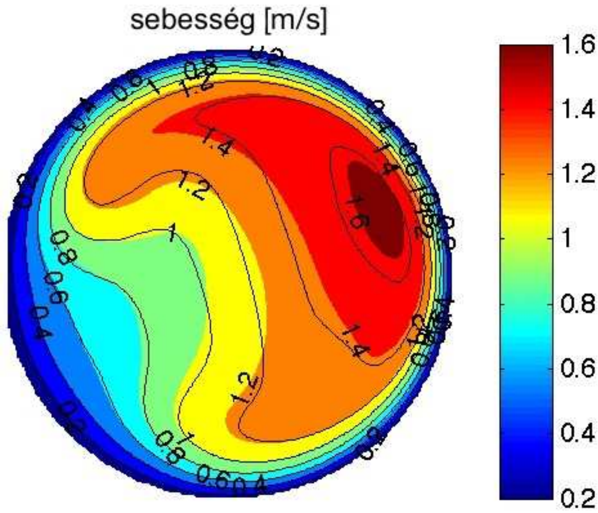


II.3.6. ábra. A sebességek átlagos hibája görbült csőben, különböző megelőző csőhosszúsággal a szívciklus két pillanatában

Eredményeinkből az is következik, hogy a szívközeli nagy artériákban fontosabb a Poiseuille és a Womersley megoldás közötti különbség, ugyanis ott a térfogatáram pulzációs amplitúdója jóval nagyobb, ami a Womersley megoldás magasabb rendű tagjait dominánssá teszi.

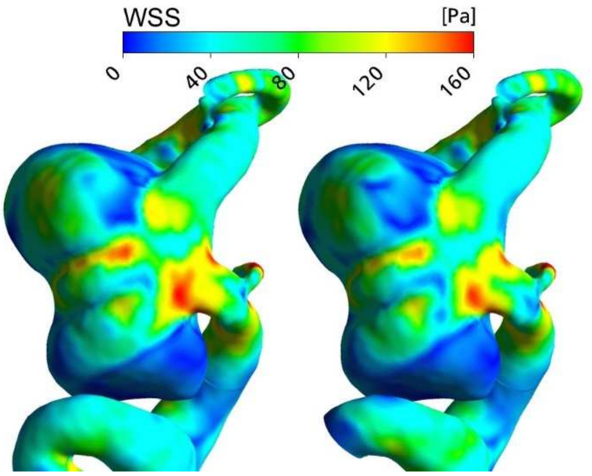
Az artériahálózat szívtől távolabbi pontjain, mint az agyi artériák, az áramlásnak a szélkazán mechanizmus következtében (Nichols & O'Rourke (1990)) jelentős stacionárius része van, azaz itt az általunk használt 10d hosszúságú bevezető csőszakasz elegendő, hogy a parabolikus bemeneti feltétel teljesen átalakuljon a Womersley profilba.

A következőkben a belépő sebességprofil fejlődését különböző geometriákban vizsgáltuk. Az egyenes merev csőnél azt találtuk, hogy a szívciklus alakjától függően 20-30d szükséges ahhoz, hogy egy időfüggő parabolikus profil átalakuljon Womersley profillá (1%-os hibán belül). Az idealizált aneurizma-geometriákon 0d belépő hosszt alkalmazva azt találtuk, hogy számunkra érdekes helyeken jelentős, 10%-ot meghaladó hibát tapasztalunk egy 20d-s belépő hosszhoz képest. 10d esetén a hiba 3% alatt van az oldalfal aneurizmánál (a) és még kisebb a bifurkációs aneurizmánál (b) (az II.3.1. ábra jelöléseit használva). Ennek alapján minden esetben egy 10d hosszú csövet erősítettünk a belépő perem elé, és parabolikus eloszlású belépő sebességet alkalmaztunk, aminek maximális sebessége az időben a II.3.2. ábra szerint változik.



II.3.7. ábra. Sebességkontúrok összehasonlítása a 20. síkban a teljes görbült cső (telt kontúrok) és az alvízi szakasz (üres kontúrok) szimulációjából

A következő kérdés az volt, hogy az aneurizmazsák előtt mekkora érszakaszt szükséges belefoglalni az áramlásszimulációba, hogy a kihagyott érszakasz már ne okozzon hibát az aneurizma áramlásában. A görbe csöveken (II.3.3. ábra) kapott eredmények azt mutatják, hogy viszonylag kis szakasz elegendő. A felvízi kanyarok hatása csökken, ahogy az áramlás újabb kanyarokon halad keresztül. Tipikus eredményt mutatunk be a II.3.6. ábrán. Az eredeti görbe csőben és a kettévágott cső felvízi és alvízi szakaszán kapott eredményeket összesen 30 sík metszetben hasonlítjuk össze. A kettévágott csövekre ugyanazt a peremfeltételt adjuk meg, mint amit a teljes csőre, azaz a vágási felülethez 10d hosszúságú csövet csatolunk és annak végén időben változó parabolikus profilt adunk meg, illetve porózus réteget konstans nyomással. A felvízi csőszakaszon azt látjuk, hogy az alvízi rész levágása elhanyagolható mértékben hat vissza a felvízi áramlásra, a maximális hiba is 3% alatt van. Az alvízi szakasz első síkjában (15. sík) mért nagy hiba könnyen magyarázható a levágott cső elején megadott peremfeltételek és a hosszabb csőben kialakult áramlás különbözőségével. Látszik, hogy 5 síkkal később (20. sík) csökken a hiba elfogadható mértékűre, 5% alá. Alacsonyabb sebességeknél ez már előbb, a 18. síknál megtörténik. Több esetet megvizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a hiba mindig az első kanyar után csökken elfogadható szintre.



II.3.8. ábra. WSS eloszlások valódi aneurizmazsák felületén a szisztólés csúcs pillanatában különböző belépő érhosszal. Referenciaszimuláció (bal oldal) és másfél kanyar az aneurizma előtt (jobb oldal)

A II.3.7. ábrán a sebesség abszolút értékek összehasonlítását látjuk közvetlenül az első kanyart követő síkon. Emellett azt is megfigyeltük, hogy a vágás közelében lévő „korai" síkokban a keresztmetszet közepén a sebességek nem jól egyeznek a referenciaszimulációval, de a fal közelében igen. Ez azt sugallja, hogy a WSS hibák gyorsabban csökkennek a vágási felülettől távolodva, mint a sebességhibák.

A II.3.8. ábrán egy valódi aneurizma felületén kialakuló csúsztatófeszültség-eloszlást az aneurizma előtt másfél kanyar esetére és a referencia-esetre. A két eloszlás nagyon jó egyezést mutat, a csúcsok ugyanazokon a helyeken vannak és értékük majdnem ugyanaz.

Oshima et al. (2005) megmutatták, hogy az aneurizmazsákon belüli áramlás érzékeny a belépő peremen fellépő szekunder áramlásokra, Castro et al. (2006) pedig azt, hogy az aneurizmán belüli áramlásokban a szülőér elhagyása nagy hibákhoz vezet. Arra a következtetésre jutottak, hogy a szükséges bemeneti hossz meghatározásához egyedi érzékenységvizsgálat szükséges. A mi eredményeink egyeznek ezekkel a megállapításokkal és jó univerzális becslést szolgáltatnak a szükséges hosszra. A valódi geometriákon kapott eredmények megerősítik a mesterséges geometriákon kapott eredményeket.

II.3.1.2.2 Kilépő peremfeltétel

A porózus réteg előtt szükséges egyenes kilépő csőhosszt keresve az találtuk, hogy növekvő csőhosszal nem változnak a sebességeloszlások. Nagyon enyhe nyomásemelkedést tapasztaltunk, ami a növekvő súrlódási veszteségnek tulajdonítható. Így tehát a kilépő csőhossz hatása csekély.

II.3.1.2.3 Rugalmas fal hatása

Az idealizált aneurizma-geometriákban azt találtuk, hogy a fal rugalmassága az összes hemodinamikailag releváns változót befolyásolja. A deformációt vizsgálva az derült ki, hogy a rögzített végek feltételezése mellett a geometria-elmozdulás fő iránya az aneurizmazsák tengelye mentén van. Ehhez a mozgáshoz hozzáadódik a geometriák tágulása. A legnagyobb deformáció az aneurizmazsák közelében van. Az oldalfal aneurizma esetében az aneurizmazsák fölfelé történő mozgása meghiúsítja a nyakra történő intenzív rááramlást, ahol általában a legnagyobb csúsztatófeszültséget szoktuk tapasztalni. Következésképpen a WSS maximális értékei csökkennek és akár -52%-ot is elérnek a merev geometriához képest. Nemcsak a csúcsértékek, hanem a térbeli átlag is csökken 16%-al. A sebesség átlagosan 12%-ot csökken, de az áramlás kvalitatív megjelenése nem változik. A bifurkációs aneurizma esetében a deformáció következtében kis leválási zónák keletkeztek, de az áramlás általános képe nem változott.

A nyomás változását két ellentétes irányú folyamat befolyásolja. A növekvő térfogat csökkenti a nyomást, ugyanakkor a csökkenő átlagsebesség miatt növekszik a nyomás. Mindezek eredményeképpen az idealizált geometriákban 2-5%-os csökkenést tapasztaltunk a deformáció hatására. A nagyobb csökkenések nagyobb térfogatáramoknak felelnek meg. A valódi modellek hasonló eredményeket mutattak. A rugalmas ágyazás miatt csak kis deformációk voltak lehetségesek. Az oldalfal aneurizma komplex mozgást végzett; az aneurizmazsák a tengelye körül kissé elcsavarodott. A kis deformációk miatt a sebességek és a nyomások csak kismértékben változtak. A csúsztatófeszültség csúcsértékének változása mindkét esetben 10% alatt maradt.

Az eredmények azt mutatják, hogy a fal deformációjának figyelembevétele minden változó értékére hat, leginkább a csúsztatófeszültségre, a sebességre kevésbé és a nyomásra a legkisebb mértékben. Szigorúan véve tehát figyelembe kellene venni a deformációt. Nagyszámú szimuláció végzésekor azonban ezt mégsem tesszük, több okból. Azt látjuk, hogy minden változóban az eredmények merev fallal is kvalitatíve helyesek, csak a számértékekben van némi változás. A rugalmas falú szimulációkban azonban rengeteg bizonytalanság van, elsősorban a fal rugalmas tulajdonságaiban, a fal vastagságában és a külső ágyazásban, ami a számszerű eredmény helyességét amúgy is megkérdőjelezi. Ezen felül a rugalmas szimuláció elvégzése nagyságrendekkel nagyobb számítógépes és emberi kapacitást igényel, mint a merev falú szimuláció. Nagyszámú szimulációra akkor érdemes ezt az erőforrást ráfordítani, ha bizonyosak vagyunk benne, hogy az FSI szimuláció közelebb visz minket a ruptúra előrejelzéséhez.

Az agyi artériák deformációja az aorta deformációjához képest amúgy is kicsi, tehát agyi artériák esetén a számszerű hatás is korlátozott. Mindehhez csatlakozik még egy kérdés, amivel a következő fejezetben foglalkozunk részletesebben: melyik merev falú geometrián kapott eredményeket hasonlítjuk össze az FSI (Fluid-Structure Interaction = kapcsolt áramlástani-mechanikai szimuláció) eredményekkel?

II.3.2 Hasi aneurizmák szimulációinak peremfeltételei

Hasi aneurizmáknál más megközelítés szükséges. A lényegesen nagyobb deformációra képes aorta esetén alaposabban szemügyre kell vennünk, hogy van-e olyan feltételrendszer, ami mellett mégis végezhetünk merev falú szimulációkat. Az áramlástani belépő és kilépő peremfeltételeket is másképpen kell kezelnünk. A szív még közel van, úgyhogy itt talán még fontosabb lenne páciens-specifikus belépő feltételeket alkalmazni. Ennek hiányában pedig kicsit reálisabb térfogatáram-görbékre lenne szükség, mint az agyi aneurizmák esetén. A kimenő peremfeltétel még problémásabb. A porózus anyag + konstans nyomás peremfeltétel itt nem alkalmazható, mert a periféria még nagyon messze van és az aorta és a periféria közötti tartományban még sok dinamikailag jelentős artéria van, amiknek áramlása visszahat az aorta áramlására. Előnyös lenne itt is mért, páciens-specifikus nyomásgörbék alkalmazása, de ennek hiányában is mást kell alkalmaznunk, mint az előző fejezetben.

Ez a fejezet Józsa & Paál (2014) alapján készült és négy, a peremfeltételeket érintő témát ölel fel.

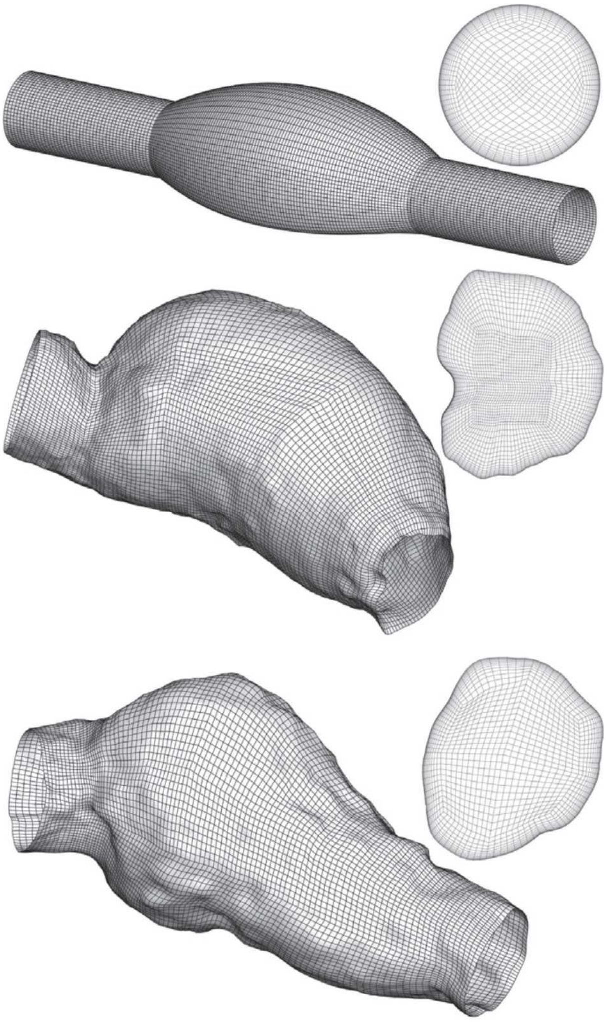
Az első téma a fal deformációjával kapcsolatos. A következő kérdéseket tesszük föl: (i) Lényegesen különböznek-e az FSI eredmények a merev falú eredményektől? (ii) Ha igen, mi okozza a különbséget, a geometria megváltozása, vagy a fal dinamikája? Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolásához kétféle merev geometriával is készítettünk szimulációkat, a deformációs ciklus során legkisebb, „diasztólés” és legnagyobb „szisztólés” geometriával.

Másodszor a gerinctámasz áramlási térre gyakorolt hatását tanulmányoztuk. Gerinctámasszal és anélkül készült FSI szimulációk eredményeit hasonlítottuk össze.

Harmadrészt analitikusan és numerikusan vizsgáltuk, hogy a széles körben alkalmazott Mooney-Rivlin anyagmodell a fiziológiás nyomástartományban lineárisan közelíthető-e. Ez a hiperelasztikus anyagmodellcsalád egyik (többparaméteres) tagja (Raghavan & Vorp (2000)). Bár léteznek reálisabb hiperelasztikus modellek, amik az anizotrópiát is figyelembe veszik (Geest et al. (2006)), illetve egy nemrégen megjelent tanulmányban az anyagi tulajdonságok páciens-specifikus eloszlását is figyelembe vették Reeps et al. (2013)), ezeknek a modelleknek valódi geometriában történő alkalmazása nagyon nehéz, főleg azért, mert in vivo adatokhoz jutni szinte lehetetlen. Ezenkívül a Mooney-Rivlin anyagmodellnek egy új implementációját dolgoztuk ki, amely a reziduális feszültségeket is számításba veszi.

Negyedrészt a háromdimenziós áramlásszimulációhoz egydimenziós szimulációból állítjuk elő a bemenő és a kimenő peremfeltételeket.

II.3.2.1 Módszerek

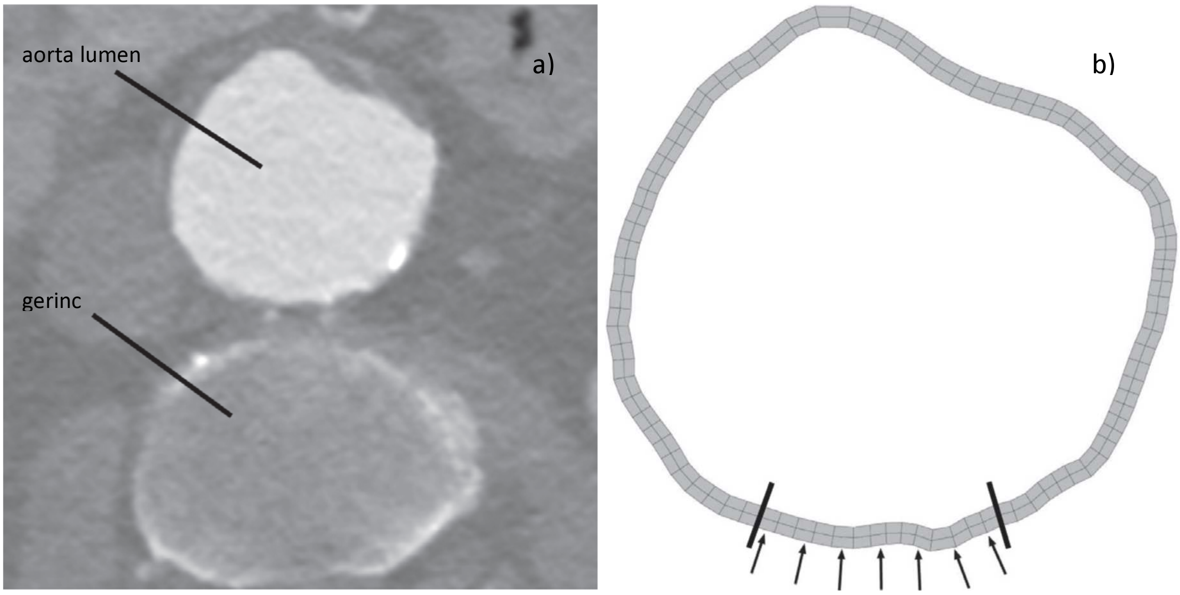


II.3.9. ábra. A felhasznált geometriák numerikus hálója a szilárd-folyadék határfelületen és a kilépő keresztmetszeten. Fölülről lefelé: mesterséges geometria; valódi geometria A; valódi geometria B

A 3D szimulációkban egy mesterséges és két valódi aneurizma-geometriát használtunk. A mesterséges geometria ugyanaz volt, mint Egelhoff et al. (1999) nem forgásszimmetrikus modellje. A II.3.9. ábrán a három geometria és a kilépő keresztmetszet látható. Az áramlás iránya balról jobbra.

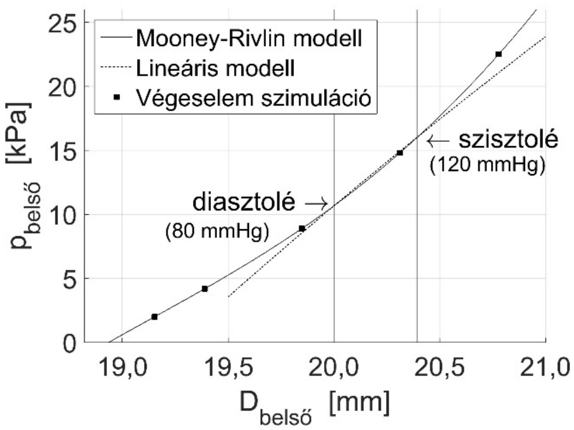
Be fogjuk bizonyítani, hogy a fiziológiai nyomástartományban (80 – 120 Hgmm = 10,7 – 16 kPa) a Mooney-Rivlin hiperelasztikus falmodell jól közelíthető lineáris modellel. Az ebből a modellből nyert pszeudo Young modulust használjuk föl a későbbi szimulációkhoz.

A külső (falon kívüli) peremfeltételek is fontos szerepet játszhatnak. A fuziformis AAA-kat gyakran támasztja a gerinc, tehát azon a szakaszon merev kényszert kell előírnunk. A II.3.10a. ábrán a B geometria aortája és a gerinc keresztmetszete látható. Az aorta ilyen esetekben gyakran megnyúlik és a teljes külső felület szabadon mozoghat. A gerinc szerepét mind mesterséges, mind valódi geometriákon FSI szimulációk segítségével tanulmányoztuk. A valódi geometria esetében a támasztott elemeket kiválasztottuk és rögzítettük. A II.3.10b ábrán a nyilak a támaszt jelzik. A mesterséges geometriánál a lapos oldalon minden elemet rögzítettünk. Összenyomhatatlan áramlásban a nyomás abszolút szintje irreleváns, csak a nyomáskülönbség számít. A folyadékoldalon ezért a zéró relatív nyomást a diasztólés állapottal azonosítottuk. A Bárdossy & Halász (2011) által fejlesztett, a karakterisztikák módszerén alapuló, MATLAB-ban írt kóddal állítottuk elő a tranziens térfogatáram-lefutást a belépő és a nyomáslefutást a kilépő peremen. A módszer nemcsak az aortára, hanem az artériás rendszer tetszőleges részére alkalmazható. A fali deformáció szimulációjánál a zéró relatív nyomást az atmoszférikus nyomással hoztuk összefüggésbe.



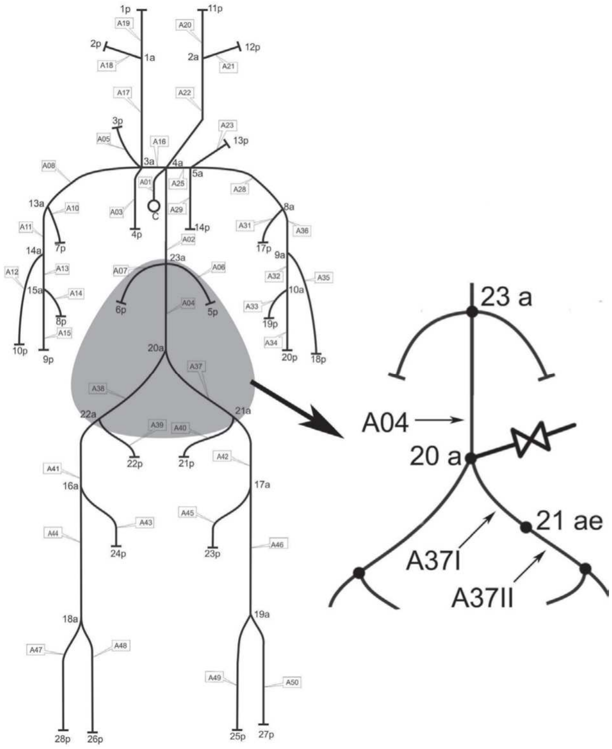
II.3.10. ábra. Gerinctámasz a B geometria egy keresztmetszetében. a) CT-kép az aortáról és a gerincről. b) gerinctámasz az érfal numerikus hálójában

A szilárdtest-mechanika oldalon Józsa & Paál (2014) hosszú levezetést közölnek a Mooney – Rivlin modell új, korrekt kezelésére. Ezt itt nem ismételjük meg, mert ebben a disszertáció fősodrától kissé idegen, mechanikai kérdésről van szó. A levezetés lényege az, hogy ellentétben az eddigi kezelésmódokkal, figyelembe veszi a terhelés teljes megszüntetésekor a falban még mindig jelenlévő reziduális feszültségeket. Ennek segítségével kiszámoljuk a terheletlen érátmérőt, majd abból számoljuk a Mooney-Rivlin modell segítségével az érátmérőt tetszőleges nyomásra. Bebizonyítjuk, hogy a modell így lényegesen pontosabb, mint ha a 80 Hgmm-hez tartozó átmérőből indítanánk a Mooney-Rivlin modellt. Az analitikus számításokat végeselemes szimulációkkal is ellenőrizzük, és jó egyezést tapasztalunk. Mindezek után az élettanilag érdekes tartományban megnézzük, hogy a nemlineáris anyagmodell mennyire közelíthető lineárisan. Ennek eredményét a II.3.11. ábrán közöljük. Ezt a linearizált modellt használva, az egyenes meredekségét pszeudo Young modulusként definiálva futtattuk az FSI szimulációkat. Gondolatban a tartományt eltoltuk az origóba és a szilárd test szempontjából 0 és 40 Hgmm közötti tartományként fogtuk fel. Ezzel a közelítéssel a deformációkat az eredeti modellhez képest jól tudtuk reprodukálni (munkánkban erre volt szükség), a falban ébredő feszültségek viszont érthető módon pontatlanok lesznek. A linearizálás maximális hibája az ábrázolt tartományban 5%. Hasonló linearizálásokat más, bonyolultabb anyagmodellekre is lehet végezni. Megemlítjük, hogy mind a Mooney-Rivlin modell, mind az egyszerűsített modell rugalmas,



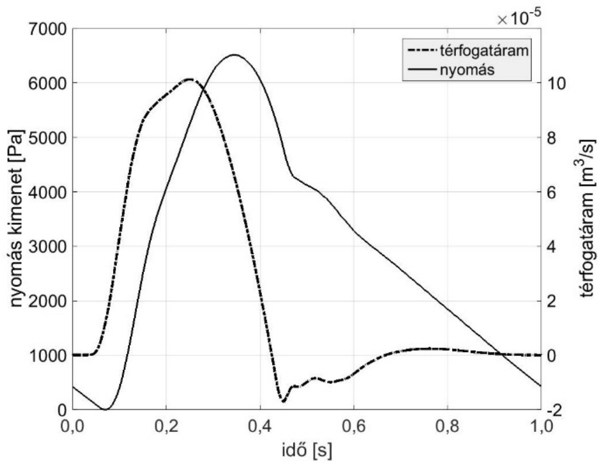
II.3.11. ábra. Az érben lévő nyomás az átmérő függvényében. Analitikus megoldások a nemlineáris és a lineáris anyagmodell esetére, valamint numerikus megoldás a nemlineáris modellel

az érfal deformációjának hiszterézisét nem tudják reprodukálni.



II.3.12. ábra. Az 1D emberi artériamodell vizsgált része Bárdossy & Halász (2011) - ből

Ami a folyadékoldalt illeti, a peremfeltételek előállításához Bárdossy & Halász (2011) 1D tranziens szimulátorát alkalmaztuk. A szerzők egyszerűsített 1D emberi artériamodellt készítettek (II.3.12. ábra), amelyben az „A04” ág a hasi aortaszakasznak felel meg és az „A37I” és „A37II” az arteria iliaca communisnak. Az „R” ellenálláson keresztül való kifolyás a kisebb artériákat modellezi, pl. az arteria mesenterica inferiort és az arteria sacralis mediana-t. A 3D-s szimulációk szempontjából a fontos ág „A04”. A 3D szimulációk belépő térfogatárama azonos az „A04” ág térfogatáramával. A 3D szimulációk kilépő peremfeltétele „opening” volt előírt időfüggő nyomással, amit az 1D szimulációkból vettünk át. A számunkra érdekes tartományhoz túl közeli peremfeltételek az áramlást befolyásolhatják, így ajánlott egy csatlakoztatott csődarab használata a vizsgált geometria után is. Ennek megfelelően kilépő peremfeltételként nem a „20a”, hanem a „21ae” csomópontban számolt nyomásgörbét használjuk. Ehhez egy ekvivalens érhosszra van szükségünk, amit úgy kapunk meg, hogy ugyanakkora nyomásesést kívánunk, mint a „20a” - „21ae” érszakaszon. Az emberi altest szimmetriáját kihasználva a baloldali és jobboldali arteria iliaca communis két egyenlő, egymással párhuzamosan kapcsolt csőként volt kezelve és egy, vele hidraulikusan ekvivalens csővel volt helyettesítve. A kilépő érszakaszt a vizsgált rész végének extrudálásával nyertük és ennek hosszát az instacionárius Bernoulli egyenlet használatával, merev fal feltételezésével, a nyomásesések ekvivalenciája alapján határoztuk meg. Vannak kisebb erek (arteria mesenterica inferior, arteria sacralis mediana), amelyek a vizsgált rész közelében ágaznak ki a hasi aneurizmából. Az 1D szimulátor ellenálláson keresztüli kifolyásként veszi őket figyelembe. A 3D modellben is lehetséges az elfolyt vér figyelembevétele, ha a kimenő érszakaszon negatív tömegforrást írunk elő. A ciklusonként elvett vér egyenlő volt az 1D szimulációban elfolyt vérrel. Ha a kis artériákat trombus zárja el, ez a forrástag természetesen nem szükséges.



II.3.13. ábra. Peremfeltételek: térfogatáram „23a”-ban és nyomás „21ae”-ben

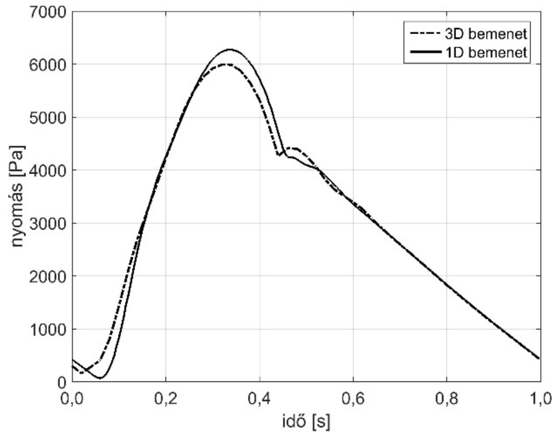
A 3D szimulációkhoz ANSYS CFX 14.0-t használtunk. A belépő peremfeltétel a folyadékoldalon mindig időben változó, térben parabolikus sebességeloszlás volt. A vizsgált szakasz elé 10 átmérőnyi egyenes érszakaszt erősítettünk, hogy a Womersley profil kialakulhasson (lásd előző alfejezet).

A szegmentációhoz itk-SNAP, ParaView és VMTK szoftvereket használtunk. A blokk-struktúrált hálót ICEM CFD 14.0-val generáltuk. A háló a II.3.9. ábrán látható.

Az ekvivalens érátmérő az artérialumen „A" keresztmetszetéből a következőképpen számolható:

$$D_{ekv} = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \quad \text{(I.1.5)}$$

Az ECG-kapuzott CT képekből a szegmentációhoz a legkevésbé deformált időpillanatot választottuk. Eszerint feltételeztük, hogy a szegmentáció a „diasztólés" geometriát szolgáltatta. A „szisztólés" geometriát az FSI szimulációkból, a maximális deformációhoz tartozó lumenként kaptuk meg.



II.3.14. ábra. Az 1D és 3D szimulációból kapott bemeneti nyomáslefutás

A kapcsolt szimulációkat a linearizált falmodellel, E =1,9 MPa pszeudo Young modulussal és η = 0,49 Poisson tényezővel végeztük. Az érfal deformációját ANSYS Mechanical 14.0-val szimuláltuk. A szilárdtest hálót a szilárd-folyadék határfelület 1,5 mm egyenletes vastagságú héjjá való extrudálásával nyertük. Radiális irányban két elem volt és statikus hálókonvergencia-tanulmánnyal ellenőriztük, hogy ez a felbontás a deformáció szempontjából elegendő. Az intraluminális trombust nem vettük figyelembe. Az érszakasz két végét rögzítettük. A lumen oldalon folyadék-szilárd határfelületet írtunk elő. A vér fizikai adatai ugyanazok voltak, mint az agyi artériák esetében. A II.3.13. ábra mutatja a peremfeltételeket: térfogatáram bemenő és nyomás kimenő peremfeltételt. A szisztólés csúcs és a diasztólés völgy közötti nyomáskülönbség 6510 Pa volt. A merev falú esetben ($D_{belső}$ = 20 mm) az átlagos Reynolds-szám ≈ 520 volt, míg a maximum érték ≈ 2260. A Womersley szám ($Wo = 0{,}5D_{belső}(2\pi\rho/T/\mu)^{1/2}$) = 14,8, ahol T = 1 s a szívciklus periódusideje. Ez jól egyezik Stalder et al. (2011) munkájával, akik 12 és 16,1 közötti Womersley számot mértek.

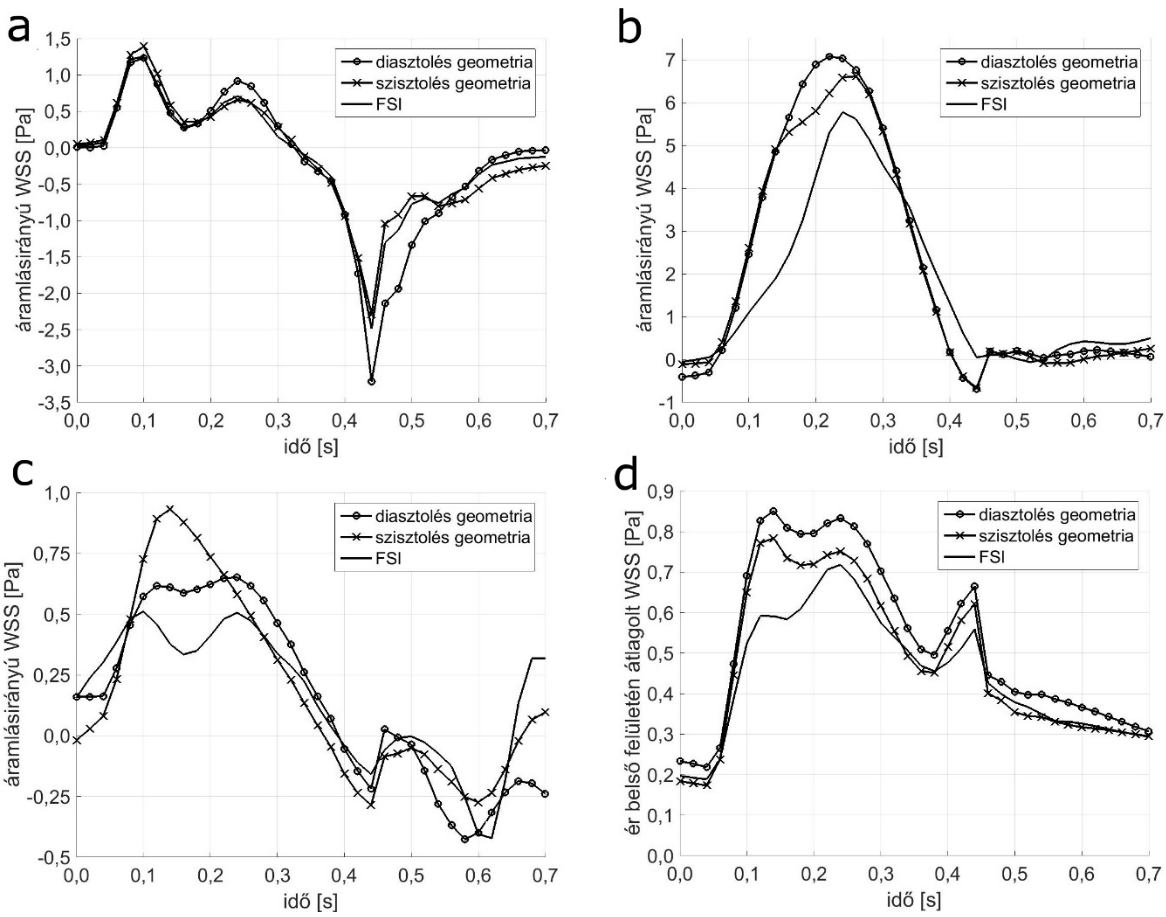
Minden szimuláció három szívciklust tartalmazott, hogy a tranziens hatások lecsillapodhassanak. Csak az utolsó ciklust értékeltük ki. Az időlépés minden esetben 0,02 s volt, mind a folyadék, mind a szilárd oldalon. A normalizált reziduumcél a folyadékoldalon $2{,}5{\cdot}10^{-5}$ volt, míg a szilárd oldalon a default érték, 10^{-2}. Az időbeli diszkretizálás másodrendű implicit Euler séma volt, míg az advekciós tag diszkretizálásához a „high resolution" opciót használtuk, ami az első és másodrendű diszkretizáció keveréke. Mindezek mellett a nyomás, a sebesség és az elmozdulás konvergenciáját is néhány kiválasztott pontban követtük. A mesterséges geometriában a folyadékoldalon stacionárius állapotban hálókonvergencia-tanulmányt végeztünk és a végsőként választott háló kielégítő felbontásúnak bizonyult.

II.3.2.2 Eredmények és értékelésük

Ellenőriztük, hogy az 1D tranziens szimulátor kimeneti adatai kompatibilisek-e a 3D szimulációkéval. E célból egy 3D FSI szimulációt végeztünk egy egyszerű hengeres csövön az 1D szimuláció által szolgáltatott bemeneti térfogatáram és kimeneti nyomás felhasználásával. A számított bemeneti nyomáslefutást összehasonlítottuk az 1D és a 3D modellen, és nagyon jó egyezést találtunk (II.3.14. ábra).

A következőkben a fal mozgásának hatását vizsgáltuk. E célból FSI szimulációkat végeztünk és összehasonlítottuk őket merev falú szimulációkkal mind a „diasztólés”, mind a „szisztólés” geometriában. A „diasztólés” geometria volt az FSI szimulációk alapgeometriája, és a „szisztólés” geometriát az FSI szimulációkból kapjuk a maximális deformációjú geometriaként.

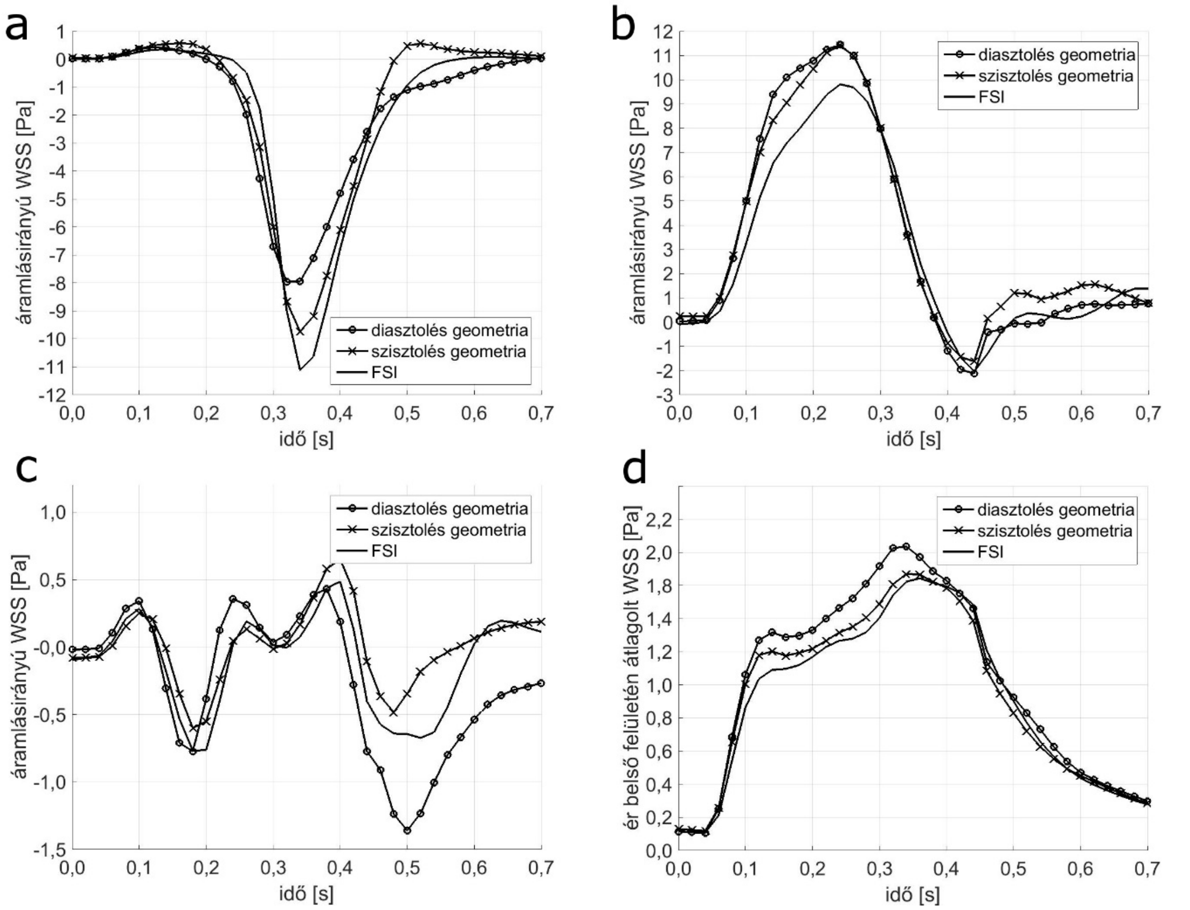
A nyomáseloszlások a folyadék-szilárd határfelületen gyakorlatilag ugyanolyanok a merev falú és az FSI szimulációk esetében.



II.3.15. ábra. Az áramlásirányú WSS lefutása az A valódi geometriában. a) a negatív WSS csúcs helyén; b) a pozitív WSS csúcs helyén; c) a maximális deformáció helyén; d) a teljes határfelületre átlagolt érték

A három szimuláció összehasonlításához minden geometriában három jellegzetes pontot választottunk. Ezek: a pozitív és negatív áramlásirányú WSS csúcsok és a maximális deformáció helyei. Ennek térbeli helye a ciklus nagy részében ugyanott volt, ezért a teljes cikluson keresztül a folyadék-szilárd határfelület ugyanazon a rácspontját tekintettük mindkét FSI és a merev falú szimulációban is. Negyedikként ábrázoljuk a felületen átlagolt WSS időbeli lefutását is. Az összehasonlításokat a II.3.15.- II.3.17. ábrákon mutatjuk be. Mivel a II.3.13. ábrán látszik, hogy a térfogatáram 0,7 s után közel 0 m/s, ezért a csúsztatófeszültségeket csak a ciklus első kétharmadában ábrázoltuk.

A 15. és a 16. ábrán a két valódi geometria eredményeit mutatjuk be. Azt láthatjuk, hogy az eredmények a pozitív és negatív csúcs helyén és átlagban is (a, b és d ábrák) azt bizonyítják, hogy a szisztólés geometria eredményei sokkal közelebb vannak a merev falú eredményekhez, mint a



II.3.16. ábra. Az áramlásirányú WSS lefutása az A valódi geometriában. a) a negatív WSS csúcs helyén; b) a pozitív WSS csúcs helyén; c) a maximális deformáció helyén; d) a teljes határfelületre átlagolt érték

diaszólés geometriáéi. A szisztólés esetben a maximális hiba 10% körül van, de a tipikus hiba jóval kisebb, míg az diasztólés esetben a hiba 20% fölött van - ez egyezik Vavourakis et al. (2011) eredményeivel. A maximális deformáció helyén (c ábrák) kevésbé egyértelmű az eredmény, de itt feltűnő, hogy a WSS értékei szokatlanul kicsik, tehát kis abszolút hiba is nagy relatív hibát eredményez.

Összefoglalva: a szisztólés geometriákon végzett merev falú szimulációk jó közelítését adják az FSI szimulációknak, ellentétben az irodalomban használt diasztólés geometriákkal, amelyeknél a hiba nagy. Ebből az is következik, hogy a bevezetésben föltett kérdésre meg tudjuk adni a választ: a rugalmas és merev falú szimulációk közti különbséget dominánsan a geometriák változása és nem a faldinamika okozza.

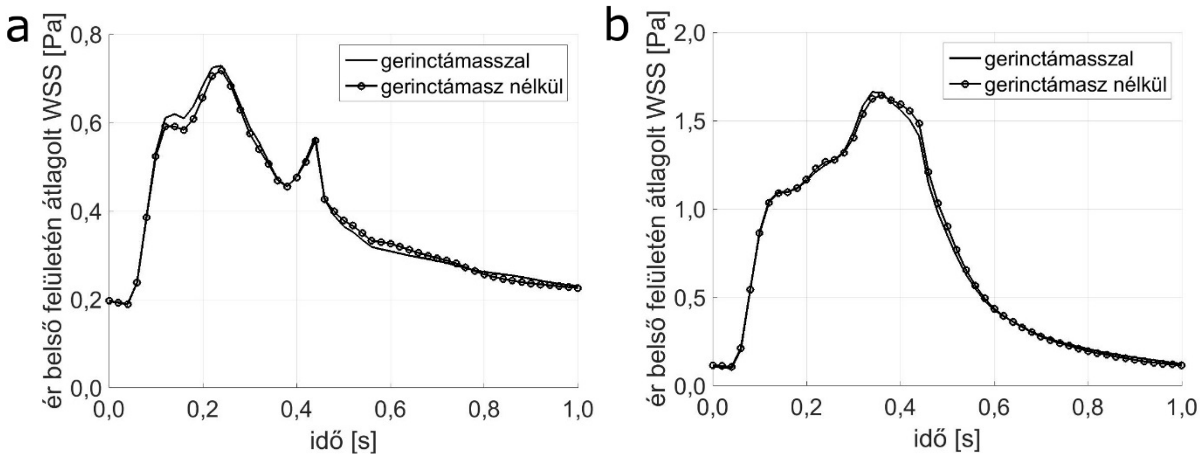
A következőkben a gerinctámasz hatását vizsgáltuk. Az áramlási teret gerinctámasszal és anélkül is FSI szimulációval számítottuk és összehasonlítottuk annak megállapítására, hogy a gerinctámasznak van-e észrevehető hatása az áramlásra.

Az II.3.1. táblázat a szabad geometriák deformációjáról tartalmaz adatokat. Ezek az adatok jól egyeznek Gee et al. (2009) végeselemes szimulációival, akik ugyanazt az anyagmodellt használták, mint mi, csak más implementációval. Náluk a maximális deformáció 1,35 és 2,5 mm között volt. Gee et al. (2009) cikkükben a trombust is modellezték és ez is oka lehet a kisebb deformációknak. Arko et al. (2007) in vivo ultrahangos mérésekből 1,7 ± 0,6 mm-t kaptak, ami szintén közel van a mi értékeinkhez.

A támasztott és nem támasztott eset összehasonlításához szintén több jellemző pontban hasonlítottuk össze az eredményeket, de mindegyik hasonlóképpen viselkedik. Ezért itt csak a felületen átlagolt WSS értékek időbeli lefutását mutatjuk be (II.3.17. ábra).

II.3.1. táblázat. Maximális és átlagos deformációk, deformációsebességek a szilárd-folyékony határfelületen

Geometria	Max. deformáció [mm]	Max. def. a gerinc felől [mm]	Felületátlagolt deformáció [mm]	Max. def.-sebesség [m/s]
Mesterséges	6,2	6,2	0,9	0,070
A	3,8	≈ 0,7	0,7	0,032
B	2,9	≈ 0,8	0,5	0,021



II.3.17. ábra. A folyadék-szilárd határfelületen átlagolt WSS-lefutások. a) A geometria; b) B geometria

A II.3.17. ábra arról tanúskodik, hogy a valódi geometriák esetén a gerinccel, illetve anélkül végzett futtatások közötti különbség észrevehetetlenül kicsi. A mesterséges geometria esetén ez a különbség nagyobb, ami a szokatlanul nagy deformációnak tulajdonítható (itt nem mutatjuk be).

Bár tisztában vagyunk a validációs kísérletek jelentőségével, hasonló in vivo kísérletekről nincs tudomásunk. Az orvosi képalkotó eljárások folyamatos fejlődése a jövőben talán lehetővé teszi az eredmények indirekt validálását. Pillanatnyilag csak más szimulációkkal való összevetés lehetséges.

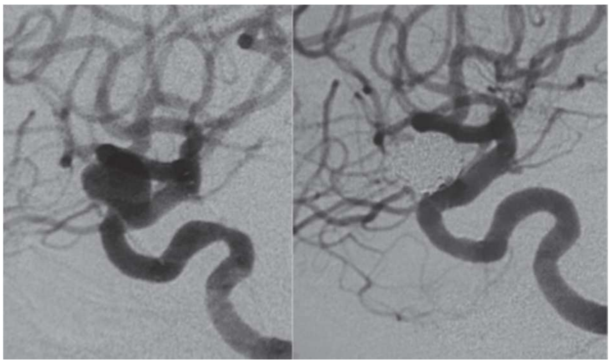
TÉZIS:

8. Hasi aneurizmák szimulációjának peremfeltételeivel kapcsolatban a következő megállapításokat teszem:
    - A valódi aneurizmageometriáknál a legnagyobb deformációjú („szisztólés”) geometriákon végzett merev falú szimulációk eredményei sokkal közelebb vannak a rugalmas falú (FSI) szimulációk eredményeihez, mint a legkisebb deformációjú („diasztólés”) geometriák eredményei.
    - A rugalmas és merev falú szimulációk közötti különbséget dominánsan a geometria változása és nem a faldinamika okozza.
    - Módszert dolgoztam ki, hogy az artériás hálózaton végzett egydimenziós szimulációk eredményeit a háromdimenziós aneurizmaszimulációk térfogatáram- és nyomás-peremfeltételeiként használjuk. A módszer tetszőleges érszakaszra alkalmazható.
    - FSI szimuláció segítségével megvizsgáltam a gerinctámasz hatását hasi aneurizmák áramlására és azt találtam, hogy a hatás elhanyagolható.

II.4. Agyi aneurizmák kezelésének elemzése

A II.1. bevezető fejezetben már röviden utaltunk agyi aneurizmák kezelésének lehetséges módjaira. E fejezet témája a mikrospirálokkal és az áramlásmódosító sztentekkel történő kezelések szimulációval való követése. Mindkét kezelési mód alapötlete az aneurizmazsákban az áramlás lelassítása, ezzel elősegítve a véralvadási folyamatot. Így az aneurizmazsák falára ható terhelést jelentősen lehet csökkenteni.

II.4.1. Kezelés mikrospirálokkal

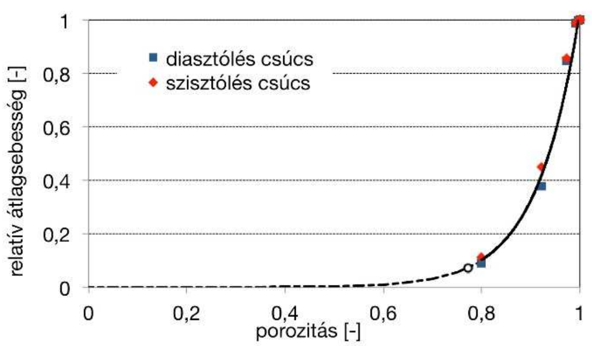


II.4.1. ábra. Aneurizma angiográfiás felvétele mikrospirálokkal való kezelés előtt (bal oldal) és után (jobb oldal)

Ez az alfejezet Ugron et al. (2012a) alapján készült.

Az aneurizmazsák mikrospirálokkal való sűrű megtöltése egyszerűen a térfogat nem elhanyagolható részének elfoglalását jelenti, ami által a maradék térfogatban megnő az áramlási ellenállás (Brilstra et al. (1999)). A mikrospirálokkal való töltést az II.4.1. ábra demonstrálja. A mikrospirálok hatását kísérletileg (Goubergrits et al. (2010); Babiker et al. (2010)) vagy CFD segítségével tanulmányozták. A CFD tanulmányokban a spirálokat egyrészt idealizált geometriával (Groden et al. (2001); Ahmed et al. (2011); Ortega et al. (2008)); másrészt porózus anyaggal (Kakalis et al. (2008)) helyettesítették. Cebral & Lohner (2005) egy hipotetikus spirálgeometriának virtuális modelaneurizmában való elhelyezésére dolgozott ki módszert. Bár ezek a tanulmányok világosan mutatják a töltőanyag áramláskorlátozó hatását, klinikailag releváns adatot a szükséges töltési sűrűségről nem szolgáltatnak. Groden et al. (2001) szerint az aneurizma tartós elzáródásához 20% szükséges töltési sűrűség szükséges, de következtetéseik a számítási modelljükben használt egyszerűsített geometriára korlátozódnak. Morales et al. (2011) megközelítésével a spirál alakjának hatása vált tanulmányozhatóvá és következtetésük szerint a spirál alakja csak kis töltési sűrűség esetén fontos.

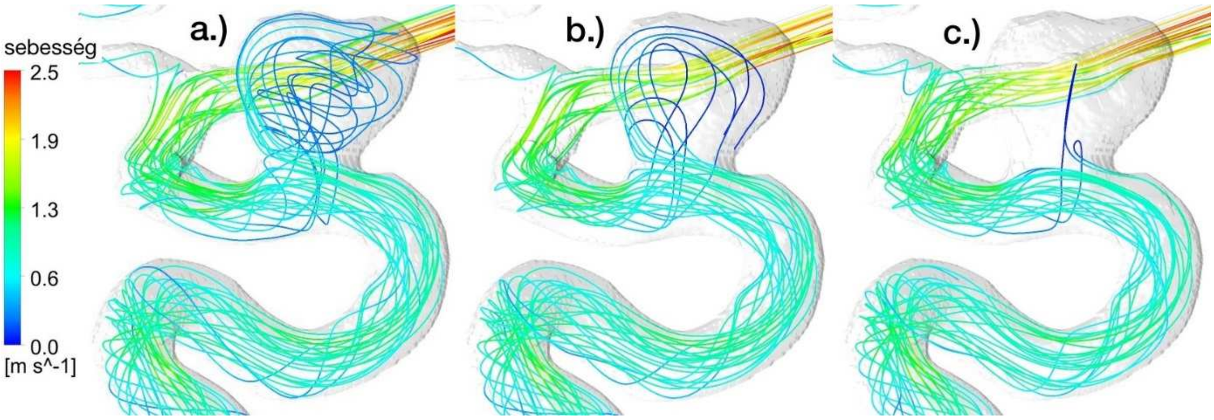
II.4.1.1 Módszerek



II.4.2. ábra. A mikrospirálokkal kezelt aneurizmában fellépő térfogati és időbeli átlagsebesség változása a kezeletlen aneurizmához képest a porozitás függvényében

A mikrospirál töltés hatásának tanulmányozására egy GDC spirálokkal töltött (Boston Scientific Neurovascular, Fremont, CA, U.S.A.) arteria carotis interna aneurizmát használtunk. A szimulációt az előző alfejezetekkel megegyező módon, a véges térfogatok módszerével végeztük. Ezeket a részleteket itt nem ismételjük meg.

Mivel a fém implantátumok jelentős képalkotási defektusokhoz vezetnek, a kezelés utáni hemodinamikai változásokat angiográfiás felvételek alapján készült modelleken nem lehet tanulmányozni. Ezeket a hatásokat az implantátumokat helyettesítő porózus anyaggal modelleztük, hasonlóan pl. Kakalis et al. (2008)-hoz. A porózus anyag megközelítés sokkal kisebb számítógépes



II.4.3. ábra. A sebesség változása csökkenő porozitással, az áramvonalak segítségével megjelenítve, a szisztólés csúcs pillanatában. a) φ = 0,97; b) φ = 0,92; c) φ = 0,8

kapacitás igénybevételével jobb eredményeket produkál, mint a spirálok geometriájának pontos leírása.

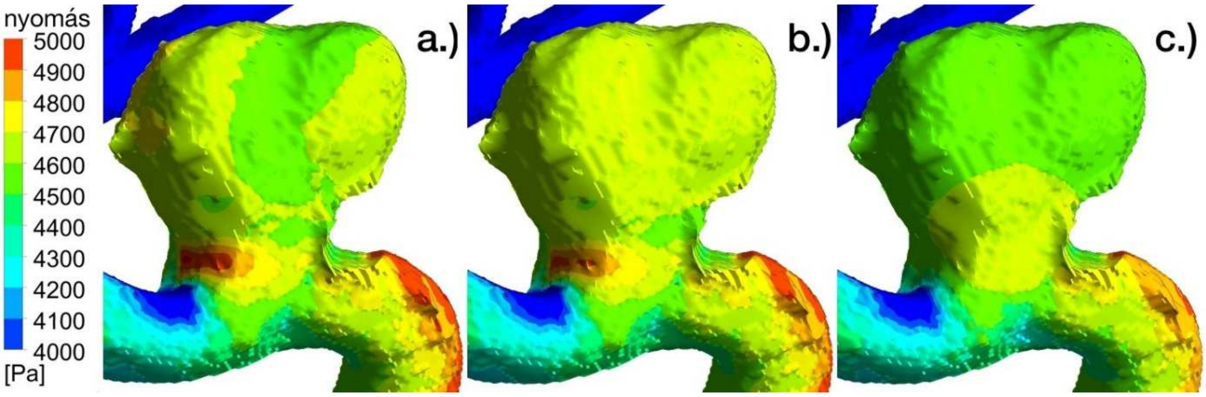
A porózus anyagot Darcy modelljével írjuk le, ami megfelel a (II.3.4) egyenletnek. Itt μ a folyadék dinamikai viszkozitása, *ρ* a sűrűsége, *K* a porózus réteg permeabilitása, *B* empirikus konstans. Az aneurizmazsákban az áramlást kis sebességűnek tételezzük fel, minek következtében a sebesség négyzetével arányos tag elhanyagolható és a nyomásgradiens a sebességgel egyenesen arányos (*B* = 0). A megmaradó ismeretlen paramétert, a permeabilitást kell meghatároznunk. Egy porózus térfogat permeabilitása a porozitástól és a fajlagos felülettől függ (Koponen et al. (1997)). A porozitás φ az üresen maradt térfogat és a teljes térfogat aránya. A fajlagos felület a porózus térfogat teljes felületének és a teljes térfogatnak aránya. Másképp kifejezve a porózus anyag struktúráinak relatív léptékét jellemzi. Minél finomabbak a struktúrák, annál nagyobb a fajlagos felület. Esetünkben minél vékonyabb dróttal érjük el ugyanazt a porozitást, annál nagyobb a fajlagos felület. E változók és a permeabilitás közötti kapcsolatot vagy méréssel, vagy idealizált áramlási konfiguráció feltételezésével tudjuk meghatározni. Mi az utóbbit tesszük. Egy párhuzamos rudakból álló rácsot feltételezünk, amire merőlegesen áramlik a folyadék. Ebben az esetben a permeabilitás és a porozitás közötti kapcsolatot a (II.4.1) egyenlet adja meg (Kuwahara et al. (1998)):

$$K = \frac{\varphi^3}{c(1-\varphi)^2} D^2, \tag{II.4.1}$$

ahol *D* a rúdátmérő, esetünkre alkalmazva a drótátmérő. Kuwahara et al. (1998) cikkében a konstans *c* 144-re adódott, más információ híján átvesszük ezt az értéket. A drótátmérő katalógusból ismert, a porozitás kiszámítható a mikrospirálok becsült térfogatkitöltéséből, amit a mikrospirálok ismert össztérfogatából és az aneurizma becsült térfogatából nyerünk. Ennek alapján a (II.4.1) képletből számítható a permeabilitás.

II.4.1.2. Eredmények

A klinikai gyakorlat azt mutatja, hogy a porozitás φ = 0,77 és φ = 0,87 között változik. Az áramlást különböző porozitások mellett tanulmányoztuk; ehhez egy konkrét valódi aneurizmageometriában a permeabilitást végtelen és *K* = 0,01 mm^2 között változtattuk, ami φ = 1 és φ = 0,8 közötti porozitásnak felel meg. Ezt a (II.4.1) egyenletből határoztuk meg, tudván, hogy a drót átmérője 0,3 mm. Az aneurizmazsákban kiszámítottuk az átlagsebességet a szisztólés maximum és a diasztólés minimum pontban.



II.4.4. ábra. Csökkenő és egyre homogénabb nyomásterhelés az aneurizma falán a csökkenő porozitás hatására. a) φ = 0,97; b) φ = 0,92; c) φ = 0,8

Az II.4.2. ábrán az aneurizmán belüli átlagsebességet a porozitás függvényében a kitöltés nélküli állapothoz viszonyítva (φ = 1) ábrázoljuk. A tanulmányozott tartományban az eredményekre exponenciális görbét tudunk illeszteni. A szaggatott vonallal jelölt rész az előző rész extrapolációja. A II.4.3. ábrán a sebességekben tapasztalt változásokat a szisztólés csúcs pillanatában áramvonalakkal demonstráljuk φ = 0,97; 0,92 és 0,8 esetére.

Tisztán lehet látni a II.4.3. ábrán, hogyan szorul ki az áramlás az aneurizmazsákból. A nyomás is csökken a felületen, valószínűleg a csökkent porozitás miatti veszteségnövekedés miatt és ezenkívül a spirálokkal való töltés terheléselosztó hatást is gyakorol, ami a csökkenő porozitással a nyomás egyre homogénabb eloszlásában figyelhető meg a II.4.4. ábrán. Mindez a szülőér nyomáseloszlását nem befolyásolja jelentősen. A nyomás mellett a WSS is csökken és homogenizálódik az aneurizma falán.

Az előbbiek alapján állíthatjuk, hogy a porozitást 1-ről 0,8-ra csökkentve radikális változás áll be az aneurizmán belüli áramlásban, 0,8-as porozitás alatt viszont a változás csekély. Ez jól összecseng Groden et al. (2001) eredményével, akik szerint 20% töltési sűrűség biztosítja az aneurizma permanens elzáródását. Eredményünket szintén megerősíteni látszik Sluzewski et al. (2004) 145 esetet feldolgozó klinikai tanulmánya, akik 20-24%-os töltési sűrűség alatt az aneurizmák nagyarányú kiújulásáról számolnak be (a kisebb szám a kisebb méretű, a nagyobb szám a nagyobb méretű aneurizmákra vonatkozik). A kiújulás ez esetben azt jelenti, hogy a pulzáló áramlás hatására a drótok összetömörödnek és a nyak közelében lévő rész újra megnyílik. Az elérhető klinikai adatok szerint a porozitás 0,77 és 0,87 között van, és ez megfelel a II.4.3c ábrának, ahol az áramlás az aneurizmazsákban majdnem megszűnik. Ez megint csak összhangban van a klinikai angiográfiás felvételekkel, mint pl. az II.4.1. ábra, ahol látható, hogy kezelés után szinte semmi kontrasztanyag nem jut be az aneurizmazsákba.

Az itt közölt eredmények korlátja egyrészt a merev falú szimuláció, másrészt a (II.4.1) egyenlet egyszerűsített geometriára való érvényessége, valamint a *c* konstans bizonytalansága. Mindezen bizonytalanságok ellenére a korlátozott klinikai tapasztalat a levont következtetéseket alátámasztja.

A kapott eredmények az orvosi gyakorlatban a töltési sűrűség megállapításához hasznosak lehetnek.

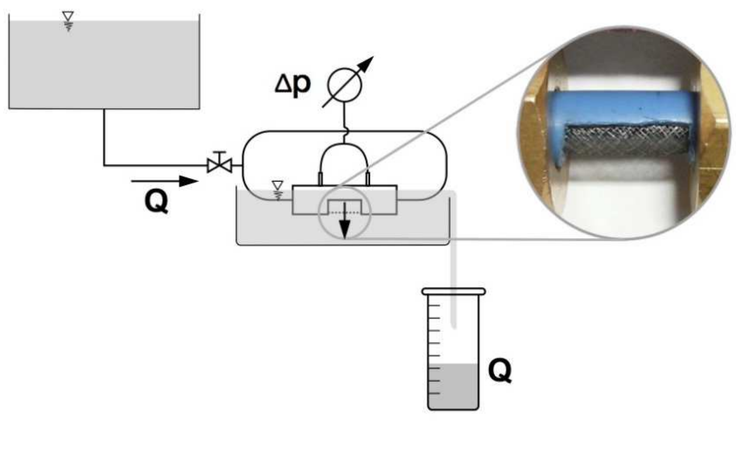
II.4.2. Kezelés áramlásmódosító sztenttel

Új és ígéretes módszer a nagyobb agyi aneurizmák kezelésére az áramlásmódosító sztentek egy vagy több rétegben való használata (Szikora et al. (2010)). Az áramlásmódosítók (ÁM) mérete a szülőér belső átmérőjéhez igazodik. Ezek az eszközök eddig nem látott mértékben sikeresek agyi aneurizmák stabil és teljes elzárásában (Szikora et al. (2010); Byrne et al. (2010); Lylyk et al. (2009); Nelson et al. (2011)). Nincs konszenzus abban a tekintetben, hogy a teljes véralvadás eléréséhez mennyi áramláscsökkentés szükséges.

Emiatt a sztentek áramlásmódosító hatását több szerző tanulmányozta CFD segítségével, pl. Appanaboyina et al. (2009), Radaelli et al. (2008), Stuhne & Steinman (2004). Ezek a munkák azt mutatják, hogy a sztent nemcsak az aneurizmazsákban, hanem annak környékén, a szülőérben is jelentős változást okoz az áramlásban és az az által okozott terhelésben. Appanaboyina et al. (2009) rámutatott, hogy a szülőér a fali terhelése a sztent behelyezése után megemelkedik.

A legtöbb tanulmány, mint például a fönt idézett három munka is a sztent finom struktúráját pontosan modellezi. A sűrű szövésű sztentek ilyen részletességű modellezése azonban olyan óriási számítógépes és felhasználói kapacitást igényel, amit az eredmények pontossága valószínűleg nem igazol. Megjegyezzük, hogy az ér belső falának érdessége az endothel sejtek szerkezete miatt nagyobb, mint a sztent drótjának vastagsága, így, ha az előbbit nem vesszük figyelembe a modellezés során, nem logikus az utóbbit figyelembe venni. A számítási igény csökkentésére Augsburger et al. (2011) a sztent helyett porózus modellt javasolt. A szerzők numerikus szimuláció segítségével határozták meg az eszközök permeabilitását. Ezt az értéket porózus modellben használva az eredményt összehasonlították a pontos modellezés eredményével, és jó egyezést találtak a két módszer között. A legnagyobb különbségeket az aneurizma nyaka közelében és időben a szisztólés csúcsnál találták. A gyártók ugyan megadják a sztentek hálósűrűségét (porozitását), de ahogyan az előző fejezetben kifejtettük, ez önmagában nem definiálja az áramlási ellenállást. Emiatt a sztent kiválasztása egy adott aneurizma kezelésére is más szempontok alapján történik. A mi megközelítésünk Augsburger et al. (2011)-éhoz hasonló, de annyiban haladjuk meg, hogy az áramlási ellenállás meghatározásához szükséges paramétereket laboratóriumi kísérletekből nyerjük. Célunk, hogy általános módszert adjunk az ÁM sztentek áramláscsökkentő hatásának meghatározására.

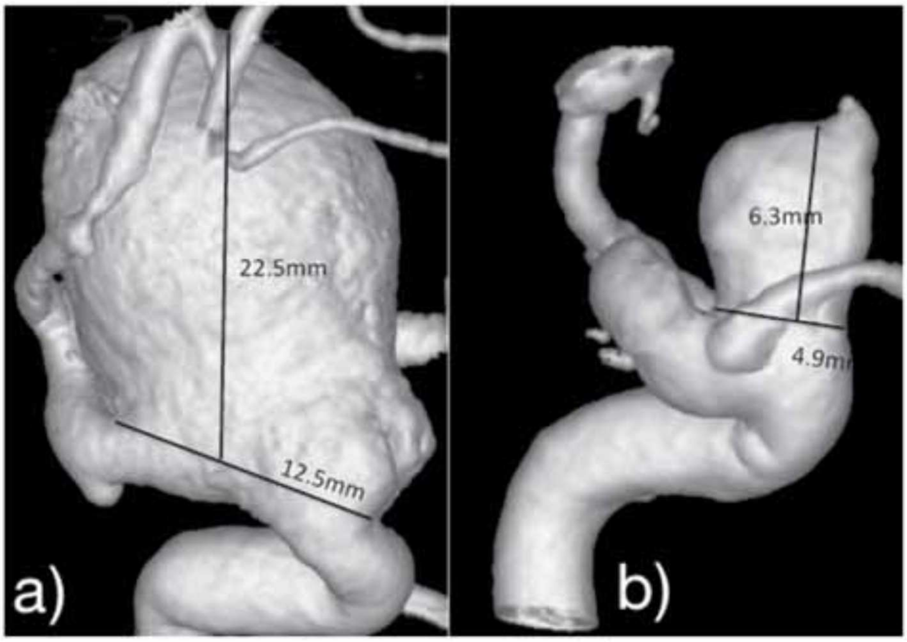
II.4.2.1. Mérési módszer az ÁM sztentek áramlási ellenállásának meghatározására



II.4.5. ábra. ÁM sztentek áramlási ellenállásának meghatározására szolgáló kísérlet vázlata

Az áramlási ellenállást (ÁE) a sztenten keresztül mért statikus nyomásgradiensként definiáljuk, és mivel a sztent vékony, jól közelíthetjük $\Delta p/\Delta x$-el, ahol Δx a sztent vastagsága. Egy sűrűn szövött sztent (Covidien/ev3, Irvine, CA, U.S.A.) egy vagy két rétegének ÁE-át mérjük az II.4.5. ábrán megjelenített kísérleti elrendezésben a térfogatáram (Q) függvényében. A tanulmányozott ÁM sztentet egy átmérőben hozzá illeszkedő műanyag csőben (mérőcső) helyezzük el. A cső falába nyílást vágunk, amit eltakar(nak) az ÁM sztent(ek). Egy vagy két koaxiális rétegnyi 3,25x20 mm-es ÁM sztentet használtunk. Az áramlást egy térfogatáramot szabályozó fojtószelepen keresztül egy víztartály táplálta. A vizet szimmetrikusan, mindkét oldalról engedtük a mérőtérbe, hogy kiküszöböljük a sztenttel párhuzamos sebességkomponenst és a sztentre merőleges áramlási ellenállást mérjük. A mérőcsövet egy második tartályba merítettük, hogy a sztent felületén a habosodást és buborékképződést elkerüljük. A víz a mérőcsövet a sztenten keresztül hagyja el, majd a második tartály túlfolyóján távozik, amit követően a térfogatáramot köbözéssel mérjük. Az átlagos átfolyási sebességet a térfogatáram és a mérőcső falán lévő nyílás területének hányadosából számoltuk. Az ÁM sztent utáni nyomás az atmoszférikus nyomás, a mérőtér fölött lévő vízoszlop állandó kis hidrosztatikus nyomásával korrigálva. Az ÁM sztent előtti nyomást két, a sztentet tartalmazó csövön lévő nyomásmegcsapoláson keresztül mérjük. A sztenten keresztüli nyomásesést a térfogatáram függvényében mértük. Az ÁE-t a nyomásgradiens térfogatáramtól való függésén keresztül, Darcy modelljével fejeztük ki ((II.3.4) egyenlet). Mivel Δx állandó, és a nyomásesést a térfogatáram függvényében a fenti módon határozzuk meg, a mérési adatok alapján a feladat egy másodfokú függvény ismeretlen paramétereinek, *K*-nak és *B*-nek meghatározására redukálódik. A mérőrendszer nyomásesését először sztent nélkül, majd sztenttel végeztük és a sztent nyomásesését az utóbbinak az előbbiből való levonásával kaptuk. Az egyréteges konfigurációt kétszer, a kétrétegeset ötször mértük meg. Az utóbbiban minden mérés után a második sztentet kivettük és újra betettük az elsőbe, hogy a két drótháló egymáshoz képesti relatív pozícióját véletlenszerűen variáljuk. Mivel a méréseket vízzel hajtottuk végre, az eredményeket először a víz anyagjellemzőivel dimenzótlan mennyiségekké alakítottuk, majd vér sűrűségével és viszkozitásával visszadimenziósítottuk őket. Bár a méréseket stacionárius áramlásban hajtottuk végre, az eredmények instacionárius áramlásban is alkalmazhatóak, mivel a térfogatáram változásának mértéke kicsi. A stacionárius és instacionárius ÁE között csak jóval nagyobb gyorsulás vagy lassulás esetén várható különbség.

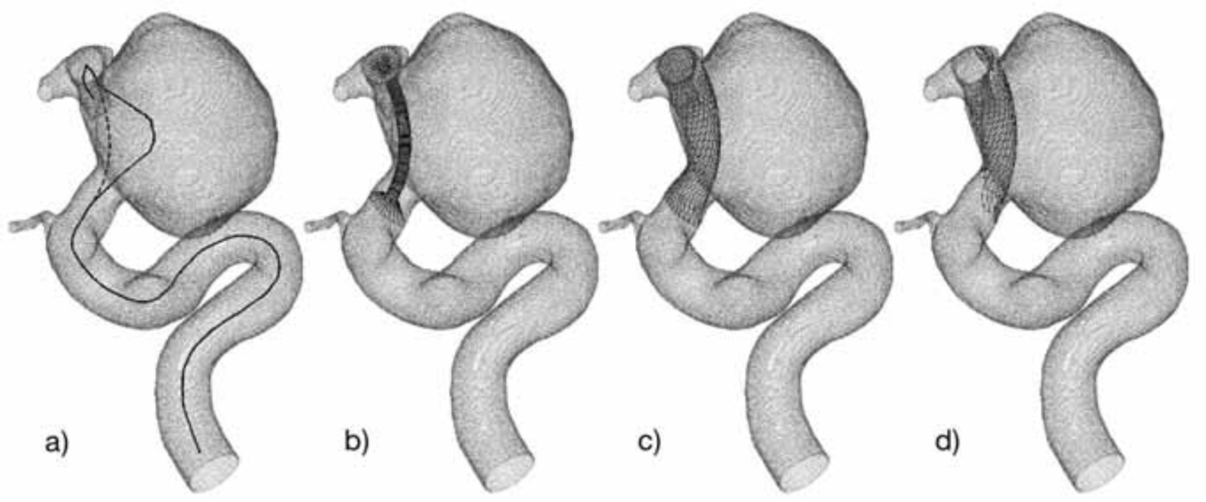
II.4.2.2. A szimulált geometriák, a sztentek szimulációjának módszere



II.4.6. ábra. A vizsgált arterial carotis interna aneurizmák háromdimenziós modelljei. a) nagy ZSNYA (1,8); b) kis ZSNYA (1,3)

Mivel az aneurizmák kihasadásának kockázatát többek között a zsák-nyak aránnyal (aspect ratio) mérik (Ujiie et al. (1999)), ezért vizsgálatainkhoz két különböző zsák-nyak arányú (ZSNYA) aneurizmát választottunk. Mindkettő az arteria carotis internán helyezkedik el, és a nagy illetve a kis ZSNYA-t rendre 1,8 illetve 1,3 képviseli (II.4.6. ábra).

A geometriák előkészítése, a szimuláció módszertana, a peremfeltételek és az anyagjellemzők az előző fejezetekben leírtakkal megegyeznek.



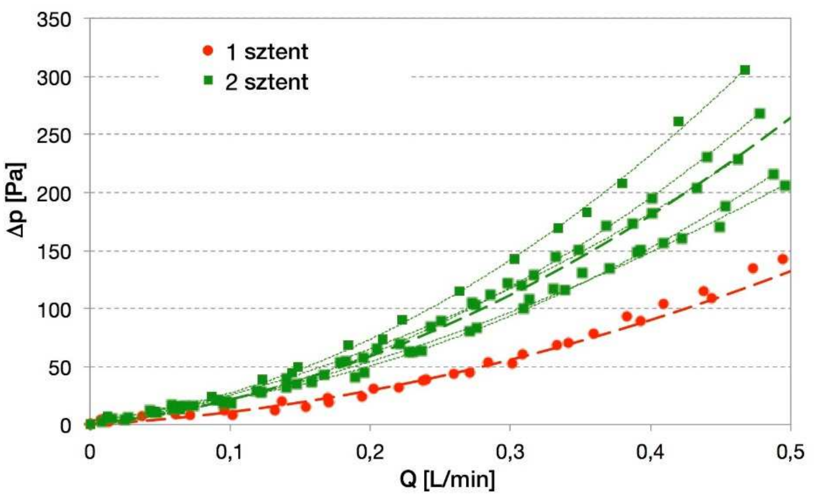
II.4.7. ábra. A virtuális áramlásmódosítás folyamatának négy lépése: a) az ér középvonalak számítása (folytonos vonal) és az ÁM sztent tengelyének definíciója (szaggatott vonal); b) a csökkentett átmérőjű sztent-cső behelyezése és a végek érfalhoz való rögzítése; c) a csőfelület felfújása; d) a fölösleges felületek eltávolítása és a megmaradó, az aneurizma nyílását fedő rész extrudálása és porózus rétegként való definiálása

A szülőérbe helyezett, az aneurizma bejáratát lefedő sztenteket 0,2 mm vastag porózus anyag réteggel modelleztük. Ezt a réteget Appanaboyina et al. (2009) módszeréhez hasonlóan helyeztük be. A véges térfogatos modelleken először az erek középvonalát számoltuk (II.4.7a ábra, folytonos vonal) egy nyílt forráskódú algoritmus segítségével, ami a Vascular Modelling Toolkit (www. vmtk.org) tartozéka. Mivel az aneurizma jelenléte lokálisan eltorzítja a középvonalat, az ÁM sztent tengelyét kezdő- és végpontjának definiálásával és a közöttük való interpolációval kézzel végeztük (II.4.7a ábra, szaggatott vonal). A sztentet kezdetben az ér átmérőjénél kisebb átmérővel alkottuk meg. A sztent két végét az érfalhoz „pattintottuk” és ott rögzítettük (II.4.7b ábra). Ezután a kezdeti csőgeometriát addig tágítottuk, amíg az ér falához nem ér, de megtartottuk az állandó átmérőt (II.4.7c ábra). A csőszerű sztentgeometriának fallal érintkező részeit eltávolítottuk és csak az aneurizma bejáratát fedő részét tartottuk meg. Végül a virtuális csőnek ezt a maradékát 0,2 mm vastagságúra extrudáltuk (II.4.7d ábra). Ezt a 0,2 mm vastag réteget porózus anyagnak tekintjük. A porózus réteg felületre merőleges áramlási ellenállását a mérések alapján állítottuk be, a felülettel párhuzamos ellenállást elhanyagoltuk. A szimulált rétegvastagság azért különbözik a valódi rétegvastagságtól, mert egy vastagabb rétegre könnyebb numerikus hálót illeszteni. Ezen túl a rétegvastagságnak semmi jelentősége nincs; az áramlásszimuláció szempontjából az egyetlen fontos paraméter az áramlási ellenállás és ennek a helyes beállításáról gondoskodtunk.

A kiértékeléshez a fali csúsztatófeszültség- és nyomáseloszlást használtuk, mind a kezelés előtt, mind az egy- vagy kétrétegű sztenttel való kezelés után. A jobb láthatóság kedvéért a kezelés utáni állapotból kivontuk a kezelés előtti állapotot és a különbséget jelenítettük meg.

II.4.2.3. Eredmények és értékelésük

Az áramlási ellenállásmérések eredményeit a II.4.8. ábra mutatja be. Az adatok már a berendezés teljes ellenállásának és az üres berendezés ellenállásának különbségét jelentik. Az egyrétegű mérések eredményeire az origón keresztülmenő parabolikus görbét illesztettünk (II.4.8. ábra alsó része, piros szaggatott vonal). Ennek az illesztett görbének segítségével határoztuk meg a Darcy egyenlet ismeretlen paramétereit, *K*-t és *B*-t. A különböző zöld pontozott vonalak dupla rétegű esetben egy-egy mérést jeleznek, és azt demonstrálják, hogy a két réteg relatív helyzetétől függően minden mérés különböző eredményt ad. Ezzel szemben az egyedi réteg minden megismételt mérésnél ugyanazt a görbét eredményezi. Érdekes módon azt találtuk, hogy a két réteg esetén az öt megismételt mérés átlaga (szaggatott zöld vonal) az egy réteggel végzett mérés (szaggatott piros vonal) nyomásveszteségének pont kétszerese.



II.4.8. ábra. Nyomásesés az ÁM sztenteken keresztül a térfogatáram függvényében, vízben. A piros és a zöld szaggatott vonal rendre az egy sztentréteg, illetve a két sztentréteg méréseinek átlagából adódik. A zöld pontozott vonalak a két sztentréteggel mért egyedi mérésekre illesztett görbék. Mindegyik görbe parabola

Mivel a méréseket vízzel végeztük, az eredményeket átszámoltuk a vér paramétereire, majd a *K* és *B* paramétereket a szimulációban használt rétegvastagságra korrigáltuk, hogy az áramlási ellenállás a valódi és a szimulált rétegben ugyanaz legyen. Az értékeket a II.4.1. táblázatban foglaltuk össze. A második sorban lévő paraméterértékeket használtuk a szimulációban. Két réteg esetén az értékeket megdupláztuk.

II.4.9. ábra. Egy vagy két sztent behelyezésével nyert átlagsebesség az aneurizmazsákban a sztent nélküli állapothoz viszonyítva

Az áramlásmódosítás hatékonyságának mérésére a kezelés előtt és után kiszámítottuk az sebesség térfogati és időbeli átlagát az aneurizmazsákban (II.4.9. ábra). A nagy ZSNYA-ú aneurizmában az átlagsebesség 62%-kal csökkent egy ÁM sztent és 75%-kal csökkent két ÁM sztent behelyezésével. A kis ZSNYA-ú aneurizmában az első réteg 50%, a második réteg 56% sebességcsökkenést eredményezett.

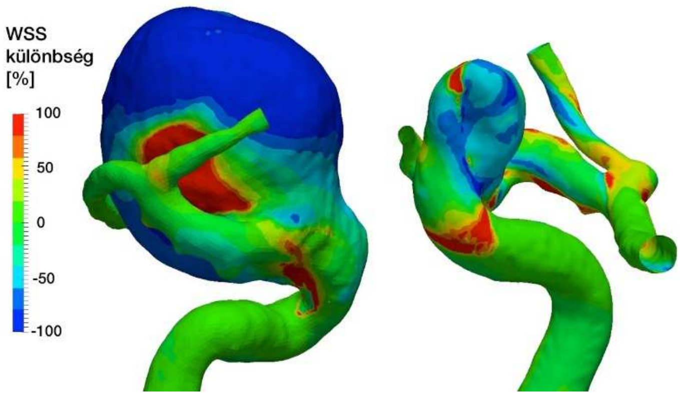
Az eredmények azt mutatják, hogy a második réteg behelyezésének hatása jóval kisebb, valamint, hogy a kis ZSNYA-ú aneurizmában az ÁM sztent hatékonysága kisebb. A sztent által okozott WSS és fali nyomáseloszlásváltozások tanulmányozására a kezelés előtti kontúrdiagramot és kivontuk a kezelés utániból és normáltuk.

II.4.1. táblázat. Görbeillesztésből számított permeabilitás, lineáris és négyzetes veszteségi tényezők egy sztentrétegre

Vastagság	*K* [μm^2]	Lineáris veszt. tényező (μ/K) [kg mm^2/s^2]	Négyzetes veszt. tényező (*B*) [1/μm]
Valódi (31,75 μm)	179,5	16,71	1,627
Szim. modell (200 μm)	1130,6	2,65	0,258

A II.4.10. ábra mutatja mindkét aneurizma relatív WSS változását a szisztólés csúcs időpillanatában. Mivel a sztent hatására az áramlás részben kiszorul az aneurizmából, a szülőérben az áramlás felgyorsul, következésképpen a WSS a szülőér falán az aneurizma alvízi oldalán és foltszerűen más helyeken is az aneurizma közelében megemelkedik. Az aneurizmazsák nagy részén a WSS jelentősen csökken, de kis foltszerű területeken ott is nőhet. Egy sztentréteg beépítése után a zsák átlagos WSS-e 45%-kal illetve 40%-kal csökkent rendre a nagy és a kis ZSNYA-ú aneurizmákon. A nyomás csak csekély mértékben csökkent: mindkét esetben kevesebb, mint 2%-kal. Mivel az aneurizma falán egyáltalán nem jelentkezett számottevő nyomásváltozás, a nyomáseloszlásokat itt nem mutatjuk be.

Az áramlási ellenállás parabolikus függése a térfogatáramtól némileg meglepő, hiszen alacsony sebességeknél intuitíve inkább lineáris függést vártunk volna, de a kísérleti eredmények meggyőzően bizonyítják a négyzetes tag jelenlétét és összhangban vannak Augsburger et al. (2011) numerikus eredményeivel. Az eredmény magyarázható Borda-Carnot-szerű hatással, ahogyan az áramlás a sztent szűkületein keresztülhalad. Az áramlásmódosító sztentek működésének fizikai lényege áramlási ellenállás bevitele az aneurizma nyakához. Ezzel az aneurizma áramlása lelassul és a vér benne megalvad. Ezért a kezelés értékelésének kulcsa az ÁE pontos meghatározása. Véleményünk szerint megközelítésünk egyszerűbb és pontosabb, mint Augsburger et al. (2011) megközelítése, akik a sztent részletes szimulációjával nyerték a porózus anyag paramétereit. Ezzel kapcsolatban egyrészt azt látjuk problematikusnak, hogy az ÁE szimulációval történő meghatározása pontatlanabb és bizonytalanabb, mint méréssel, másrészt, hogy ha már egyszer szimulációval meghatározták az ellenállást, akkor fölösleges a porózus anyag modellt használni.



II.4.10. ábra. A fali csúsztatófeszültség relatív változása a nagy (bal oldal) és a kis (jobb oldal) ZSNYA-ú aneurizmákban, egyrétegű sztent behelyezése esetén, a szisztólés csúcs pillanatában. A bemutatott eloszlások a kezelés utáni és előtti eredmények normált különbsége. Negatív értékek a WSS csökkenését, pozitív értékek annak növekedését jelentik

Hasonlóan meglepő eredmény az, hogy a második sztent véletlenszerű behelyezéseivel kapott átlag pontosan az egy sztent ellenállásának kétszerese. Ez azt jelenti, hogy a két sztentet „hidraulikailag sorba kapcsoltuk”, azaz az ellenállásuk összeadható – legalábbis nagyszámú behelyezés átlagában. Természetesen egy-egy mérés esetén ez nem igaz, hiszen a két sztent véletlenszerű relatív pozíciója miatt a két sztent ismeretlen módon hat egymásra.

A parabolikus ellenállásgörbe két paraméterrel leírható, így ennek a két paraméternek alapján különböző gyártmányú sztentek összehasonlíthatók és az adatok akár a fejlesztési fázisban is használhatóak.

Ezeken kívül még lehetséges egy harmadik módszer használata is, ami kétségtelenül jelentős egyszerűsítést tartalmaz: az előző alfejezetben bevezetett (II.4.1) egyenlet használata. Az előző fejezetben leírtuk, milyen feltételezések mellett érvényes ez az egyenlet. Mindezeken kívül ennek a képletnek a használata a nyomásesés térfogatáramtól való lineáris függését feltételezi. Ezért ennek a közelítésnek az alkalmazását akkor javasoljuk, ha mérés nem lehetséges, és gyors, hozzávetőleges eredményre van szükségünk. A c konstanst a mérések alapján lehet kalibrálni. Esetünkben D = 32 µm, φ = 0,7 és a kalibrációból c = 21,46 adódik. A képlet korlátait tanulmányozva azt találtuk, hogy a négyzetes tag elhanyagolása 20%-nál kisebb hibát eredményez, ha a sztenten keresztüli véráramlás sebessége 0,06 m/s alatt van, míg a hiba 10%-nál kisebb 0,02 m/s alatti sebesség esetén. A II.4.2. táblázatban a térbeli és időbeli pontok azon hányadát jelenítjük meg, ahol az átfolyási sebesség alacsonyabb, mint 0,02 illetve 0,06 m/s a sztent összes térbeli és időbeli pontjához képest, mindkét aneurizma esetén. (A térbeli pontok alatt a numerikus háló celláinak számát értjük.) A II.4.2. táblázat szerint a nagy ZSNYA-ú aneurizma és egy sztent használata esetén a réteg felszínére merőleges, teljes cikluson át mért sebességértékek 60%-a 0,02 m/s alatt, és 91%-a 0,06 m/s alatt van. Ugyanez az aneurizma két sztenttel még nagyobb százalékokat mutat. Itt tehát a másodfokú tag elhanyagolása megengedhető mértékű hibát jelent. Ezzel szemben a kis ZSNYA-ú aneurizmáknál a legkedvezőbb esetben is 20% vagy annál nagyobb hiba terheli a sebességértékek több, mint 35%-át, ami azt jelenti, hogy a másodfokú tag itt nem hanyagolható el.

II.4.2. táblázat. A sztentréteg(ek)re merőleges vérsebesség-értékek statisztikái

Sebesség [m/s]	KZSNYA 1 sztent [%]	KZSNYA 2 sztent [%]	NZSNYA 1 sztent [%]	NZSNYA 2 sztent [%]
<0,02	22	26	60	75
<0,06	50	64	91	95

Következésképpen a lineáris közelítés alkalmazható, ha nem állnak rendelkezésre ellenállásmérések. Kisebb aneurizmák esetén azonban nem elhanyagolható hibát visznek a sztentek porózus anyaggal való szimulációjába.

Appanaboyina et al. (2009) a sztent pontos geometriai modellezésével megmutatta, hogy a sztentek pozicionálása nincs hatással az áramlási ellenállásra, így a bonyolult szőtt drótstruktúra pontos geometriai modellezésének semmi előnye nincs a porózus anyaggal való modellezéssel szemben, viszont nagyságrendekkel munkaigényesebb, és validálása is nehezebb. A porózus anyaggal való modellezés pontosan meghatározza az áramlástanilag egyetlen releváns mennyiséget: az áramlástani ellenállást.

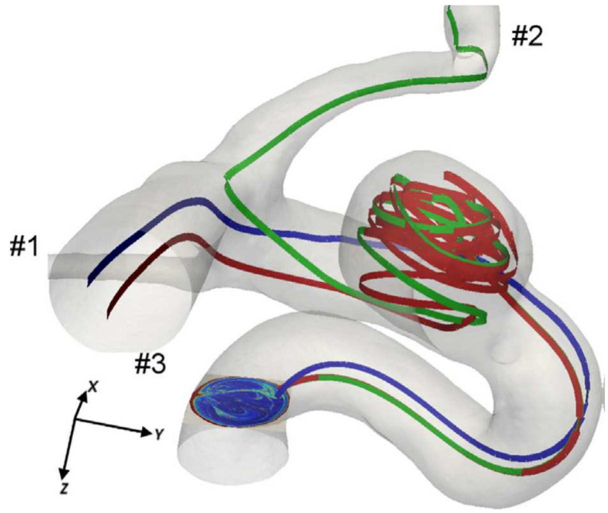
TÉZIS

9. Laboratóriumi kísérletekkel mértük áramlásmódosító sztentek áramlási ellenállását. A sztent porózus anyaggal való számítógépes modellezésében a mért áramlási ellenállás felhasználható. Az így kialakított módszer jóval gazdaságosabb az irodalomban használt, a sztentgeometriát részletesen modellező módszernél. Két sztent egymásba helyezése esetén a második sztent szövött drótszerkezetének első sztenthez képesti elhelyezkedése véletlen tényezőt vezet be a két sztent együttes ellenállásába. Megállapítottam, hogy a két sztent többszöri véletlenszerű egymásba helyezésével kapott ellenállási adatok átlagosan az egyedi sztent ellenállásának kétszeresét hozták létre.

II.5. Fraktál mintázatok agyi aneurizmák áramlásában

Ez az alfejezet Závodszky et al. (2015) alapján készült.
Ismert tény (pl. Tél et al. (2005)), hogy a folyadékok keveredése nagy hatást gyakorol a bennük lejátszódó kémiai és biológiai folyamatokra. A keveredés jellemzésére a legegyszerűbb módszer, hogy passzív skalár, azaz elhanyagolható méretű és tömegű részecskék mozgását vizsgáljuk a folyadékban, amelyek időkésleltetés és tehetetlenség nélkül felveszik a környező folyadék sebességét. Ezeknek a részecskéknek ezért a mozgásegyenlete $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, ahol $\boldsymbol{x}$ a részecske pozíciója a t időpillanatban és $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ a folyadék sebességtere. Még lamináris, időben periodikus áramlások is tipikusan kaotikusak (Aref (1984), Ottino (1990)), ahol a részecskepályák erősen eltérnek az áramvonalaktól, és ennek következménye az erős, de nem turbulens keveredés. Ezt a komplex viselkedést nevezzük *kaotikus advekciónak.*

Nyílt áramlásoknak nevezzük az áramlásoknak azt az igen nagy osztályát, ahol a folyadék a tér egy megfigyelt tartományába folyamatosan be- és onnan kiáramlik. Ezekben az áramlásokban a szállított részecskék egy része hosszabb ideig csapdázódhat a megfigyelt tartományban. A részecskék nagy része rövid idő alatt elhagyja a tartományt, de azok, amelyek maradnak, szálas fraktál mintázat mentén gyűlnek össze (Tél et al. (2005), Károlyi & Tél (1997)), ami a kaotikus halmaz instabil sokaságát rajzolja ki. A kaotikus halmaz a megfigyelési tartományon belüli periodikus és nem periodikus instabil (nyereg típusú) részecskepályákból áll. A kaotikus halmazt alkotó részecskepályák, annak ellenére, hogy instabilak, speciális, a kaotikus halmaz stabil sokaságán lévő kezdeti feltételekből elérhetőek. A stabil sokaságból induló részecskepályák folyamatosan közelednek a kaotikus halmazhoz, és a megfigyelési tartományban csapdázódnak. A kaotikus halmaz instabil sokasága azon részecskepályák összessége, amelyek időben visszafelé haladva, a kaotikus halmaz közvetlen közeléből indultak. Másképpen mondva, a kaotikus halmaz stabil sokaságának közeléből induló részecskék hosszú ideig bolyonganak a kaotikus halmaz közelében, végül onnan elszökve rajzolják ki az instabil sokaságot. Ezért az instabil sokaság fraktáldimenziója, D_0 a tovasodort részecskék által kirajzolt mintázat geometriájáról szolgáltat információt, míg az információs dimenzió, D_1 ezenkívül még a részecskék valószínűségi eloszlását (vagy relatív sűrűségét) is jellemzi a fraktál instabil sokaság mentén (Tél & Gruiz (2006)).



II.5.1. ábra. A vizsgált érszakasz. A bemenet az ábra alján található, a kimenetek az átmérő csökkenő sorrendjében vannak számozva. A három színes vonal három, 0,1 µm távolságon belülről indított részecske számított pályáját jelképezi. Gyors elválásuk a kezdeti értékektől való erős függést mutatja, ami a káosz jellemzője.

A szálas fraktál szerkezet megjelenése a keveredéssel kapcsolatos nyújtás és hajtogatás következménye. Emiatt jön létre a kezdeti értékektől való erős függés is, ami a káosz fő tulajdonsága, és amit az átlagos Ljapunov-exponenssel, λ-val jellemzünk. λ a kezdetben egymáshoz közel lévő részecskék tipikus exponenciális távolodási rátáját írja le: $d(t) = d(0)e^{\lambda t}$, ahol $d(t)$ a kaotikus halmazon a részecskék távolsága t időpillanatban (Tél & Gruiz (2006)). Nyílt áramlásokban egy másik fontos szám a szökési ráta, κ, amely hosszú idő után a megfigyelési tartományban lévő részecskék számának exponenciális csökkenését adja meg a t időpillanatban:

$n(t) = n(0)e^{-\kappa t}$. Ezek a mennyiségek nem függetlenek egymástól; fennáll a $D_0 = D - \kappa/\lambda$ összefüggés, ahol D a tér dimenziója, amiben a mennyiségeket mérjük (Tél & Gruiz (2006)).

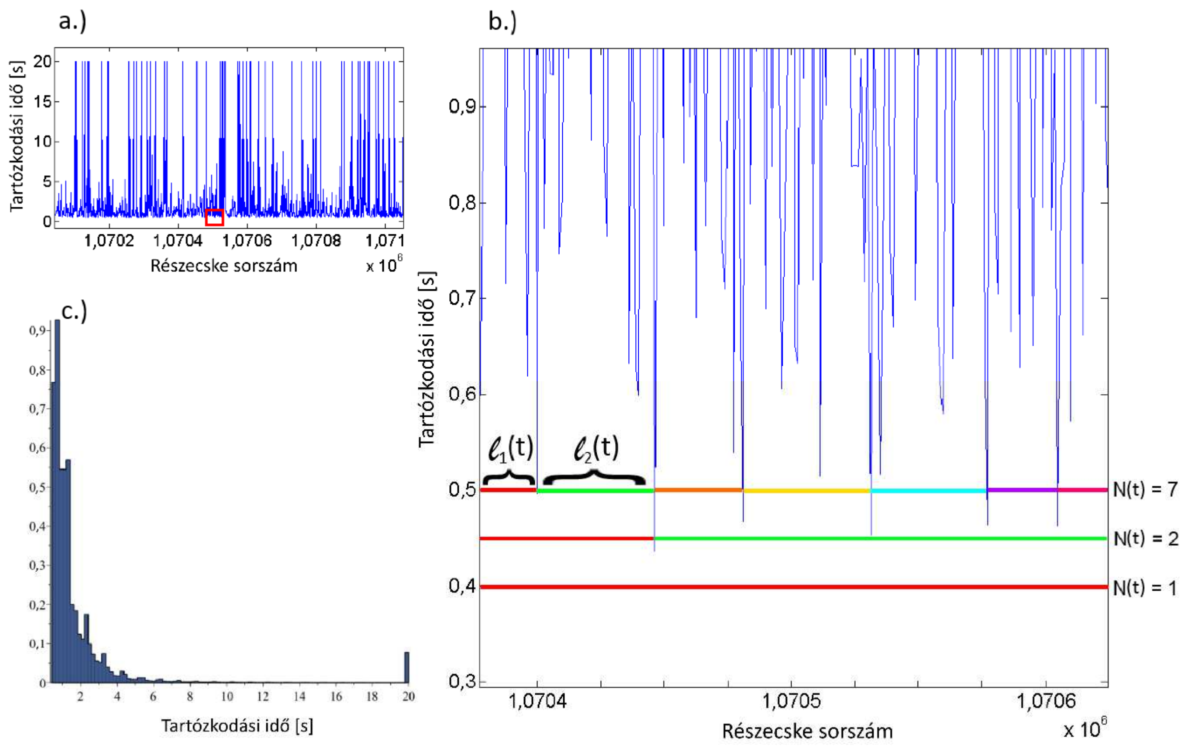
A kaotikus advekciónak véráramlás esetén is fontos következményei lehetnek (Schelin et al. (2009)), például biokémiailag aktív vérlemezkék transzportján keresztül. Többek között Tél et al. (2005) és Toroczkai et al. (1998) is megmutatta, hogy aktív részecskék által rajzolt fraktál mintázat jelentősen megváltoztatja a reakcióegyenleteket. A produktivitás, ami jól összekevert anyagban az alkotórészek koncentrációjával arányos, nyílt áramlásban a reagensek eloszlásának információs dimenziójától is függ (Tél et al. (2005)). Ez a függés szinguláris, a produktivitás $c^{-\alpha}$-val arányos, ahol c az összetevő koncentrációja és $\alpha = (D_1-1)/(2-D_1)$ (Toroczkai et al. (1998)). Mivel a hivatkozott munkában kétdimenziós idealizálást alkalmaztak, $1 < D_1 < 2$, és $\alpha > 0$. Ez azt jelenti, hogy jól összekevert anyaggal ellentétben a produktivitás inkább fordítottan, mint egyenesen arányos a koncentrációval. Ennek az úgynevezett „ritka előnye” elvnek az oka az, hogy minél kevesebb részecske alkotja a finomabb és finomabb szálas struktúrákat, annál nagyobb az a felület, amin a kémiai alkotórészek érintkezhetnek. Ez az elv nyilván csak egy bizonyos mérethatárig igaz. Schelin et al. (2009) gondolatmenete szerint a vérlemezkék is hasonló szabályokat követhetnek. Ezért nagy érdeklődésre tarthat számot a fraktál- és az információs dimenzió meghatározása valódi véráramlásban. Itt ugyannak az aneurizmának a fraktáltulajdonságait vizsgáljuk, amit a II.2 fejezetben a validációhoz használtunk. A sebességteret a nagyfelbontású lattice Boltzmann szimulációkból kaptuk. Az imént elmondott gondolatmenetet követve tömeg és kiterjedés nélküli részecskéket szórunk az áramlásba, és a fraktáltulajdonságokat ezek pályáit figyelve vezetjük le.

II.5.1. Módszerek

A geometriáról és a validált áramlási mezőről a II.2. fejezetben írtunk. A peremfeltételek, a folyadéktulajdonságok ugyanazok, a szimulációkat merev fallal végeztük. A numerikus cellák száma hozzvetőleg 10^7 volt. Az 1 s hosszú szívciklusból 36 egyenközű áramlási pillanatfelvételt készítettünk, és ezeket használtuk fel a részecskepályák integrálásához. A szükséges közbenső időpillanatokban a sebességteret lineáris interpolációval határoztuk meg. Mivel az $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ sebességmező rendelkezésünkre áll, a passzív részecskepályákat az $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ egyenletből numerikusan számítjuk. A II.5.1. ábrából benyomást szerezhetünk a részecskepályák kezdeti feltételektől való érzékeny függéséről, ami a káosz jellemzője. A három részecskét 0,1 mikronon belül indítottuk, és azok teljesen más pályát írnak le.

II.5.1.1. Szabadenergia-függvény

Fontos káoszjellemzők mérésének viszonylag egyszerű módszere az, hogy a kaotikus halmaz stabil sokaságát metsző L hosszúságú szakaszról nagyszámú részecskét indítunk. Utána minden kezdeti feltételhez tartozó részecskének megmérjük a megfigyelési tartományban való tartózkodási idejét, azaz az időt, ami alatt keresztülhalad a tartományon. Ezután meghatározzuk azon L-en belüli részintervallumok $N(t)$ számát, amiken belülről indított részecskék tartózkodási ideje hosszabb, mint t. Jelöljük $\ell_i(t)$-vel ezeket az intervallumokat, $i = 1, 2, \ldots, N(t)$. A jelölést a II.5.2a és b ábra segít elmagyarázni.



II.5.2. ábra. a) Tartózkodási idő az *L* hosszúságú intervallumon felvett kezdeti pozíció függvényében. b) Az $\ell_i(t)$ hosszúságú intervallumok *N(t)* száma három különböző tartózkodási idő-szinten az a) ábra kis piros téglalapjának fölnagyításával. c) A II.5.1. ábra alján látható síkból indított részecskék tartózkodási idejének eloszlása. A számítást 20 s-ig futtattuk, a 20 s-nál lévő csúcs a még mindig a tartományban tartózkodó részecskék számával arányos

Kellően nagy időre Tél (1988) leírását követve definiálhatjuk a szabadenergia függvényt, F(β)-t:

$$e^{-\beta F(\beta)t} \sim \sum_{i=1}^{N(t)} \left(l_i(t)\right)^{\beta}. \qquad \text{(II.5.1)}$$

A kaotikus advekció fontos paraméterei ebből a függvényből levezethetők (Tél (1988)):

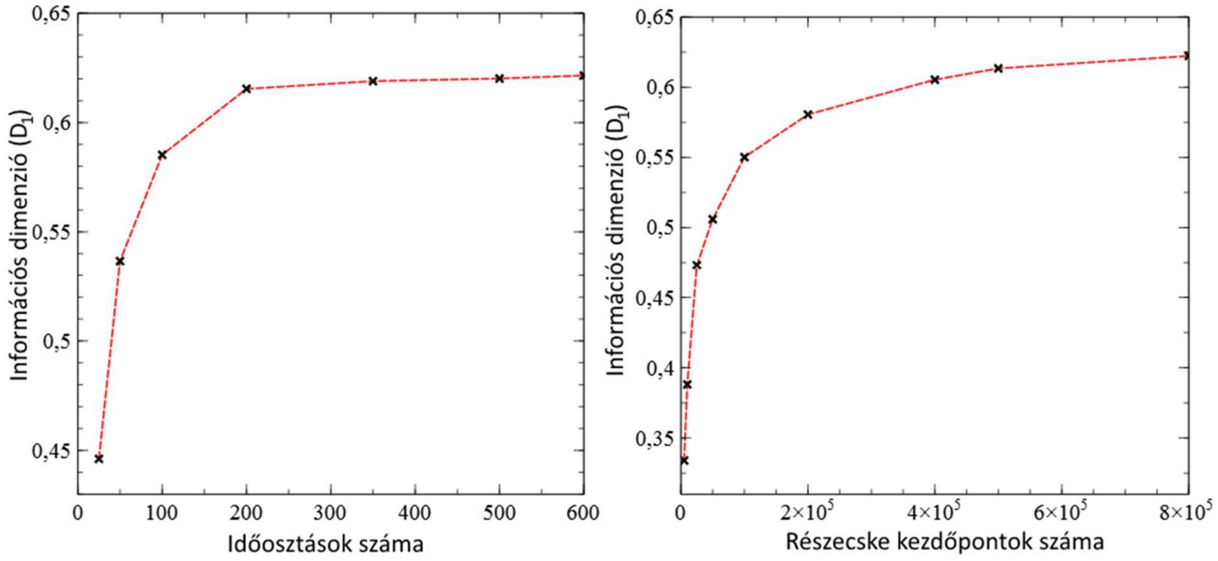
$$\kappa = \beta F(\beta)|_{\beta=1,} \qquad \text{(II.5.2)}$$

$$\lambda = \left.\frac{d\beta F(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=1}, \qquad \text{(II.5.3)}$$

$$0 = \beta F(\beta)|_{\beta=D_0}, \qquad \text{(II.5.4)}$$

$$D_1 = \left.\frac{dF(\beta)/d\beta}{d[\beta F(\beta)]/d\beta}\right|_{\beta=1}. \qquad \text{(II.5.5)}$$

II.5.1.2. A káoszparaméterek számítása



II.5.3. ábra. Az információs dimenzió a II.5.4. ábrán „b”-vel jelölt tesztszakaszon a) a két felvétel közötti időosztások számának; b) a szakaszból kiinduló részecsketrajektóriák számának függvényében

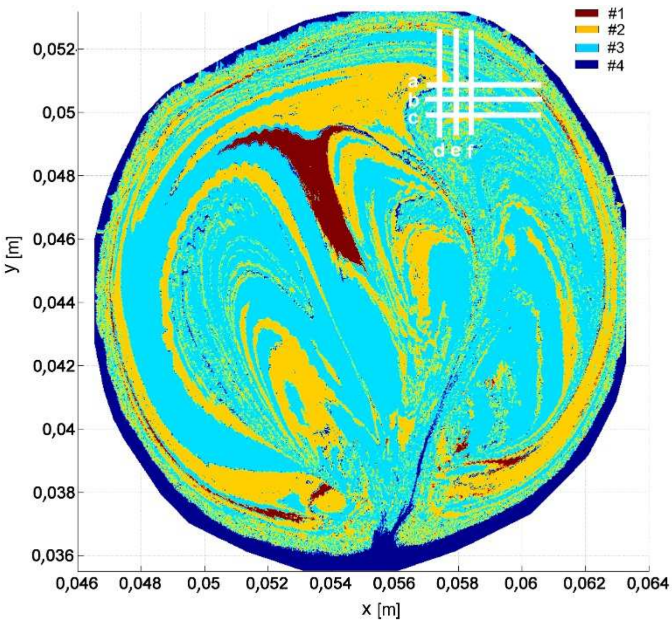
A szabadenergia-függvény alapján számított káoszparaméterek pontossága a részecskepályák számításának és a βF(β) függvény numerikus kiértékelésének pontosságától függ. Ez utóbbi viszont főleg a kijelölt szakaszról indított részecskepályák számától függ. Ezért érdemes elidőzni e számítások pontosságának elemzésén. A tömeg és kiterjedés nélküli részecskék pályáját az adott időfüggő sebességmezőből számítjuk. Az átlagos áramlási sebesség alapján (≈ 0,3 m/s) egy bemenettől kimenetig a középvonalhoz közeli pályán utazó részecske kb. 1,1 s alatt valamelyik kimeneten elhagyja a tartományt. A legtöbb részecskének több időre van szüksége, mivel az áramlásnak vannak az átlagnál lassúbb részei, és a pályák ritkán követik a középvonalat. Emiatt a számításokat általában 20 szívciklusig futtattuk, ami egyenlő 20 s-al. A pályák számítása az integrálás során nagy numerikus pontosságot igényel, mivel az áramlásban több, erősen instabil régió van. Ezekben a régiókban a szomszédos részecskék pályái gyorsan és erősen távolodhatnak egymástól, tehát kis pontatlanság a pozícióikban nagyon különböző részecskepályákhoz vezethet. Tipikus instabil régiók az érszakasz erősen görbült részei és az elágazási pontok, de a legerőteljesebb ilyen instabil régió az aneurizma bejárata környékén van. Az instabil régiók hatása megfigyelhető az II.5.1. ábrán, ahol a három trajektória pont ezeken a helyeken válik el. A kezdeti feltételekre való érzékenység miatt az integráláshoz nagyon kicsi időlépést használtunk. Az integrálást negyedrendű Runge-Kutta módszerrel végeztük; a nagyon kicsi időlépés miatt az explicit módszer stabilitásának kérdése nem merül fel. A deriváltat (a passzív részecskék lokális sebességét) az aktuális pontot körülvevő nyolc legközelebbi rácspont közötti lineáris interpolációval határoztuk meg, valamint időben a két legközelebbi felvétel közötti lineáris interpolációval. A tartózkodási időt a részecskének a bemeneti keresztmetszettől a kimeneti keresztmetszetig eltöltött idejeként definiáljuk.

A konvergenciát a D_1 információs dimenziónak az időlépéstől (II.5.3a ábra) és a szakaszról indított trajektóriák számától (II.5.3b ábra) való függésén keresztül teszteljük. A II.5.3a ábra számításához nagyon nagy pályasűrűséget használtunk: 8×10^5 részecskét indítottunk egy 3 mm-es szakaszról, ami azt jelenti, hogy a szomszédos részecskék kezdőpozíciójának távolsága $3{,}75 \times 10^{-9}$ m volt. A nagy érték ebben a kontextusban azt jelenti, hogy a legnagyobb olyan érték, ami az adott számítógépes kapacitással még értelmesen elérhető. A βF(β) függvény különböző számú trajektóriával való kiértékeléséhez, ami a II.5.3b ábrán látható, a két szomszédos időbeli felvétel között 600 időosztást állítottunk be. Ugyanarról a vonalszakaszról egyre növekvő számú részecskét indítottuk, így jött létre a II.5.3b ábra.

A tesztelés alapján a végsőként választott időosztás 500 lett, azaz a két felvétel közötti 1/36 s-ot további 500 egyenlő részre osztottuk, azaz a végső, az integrálásnál használt időlépés $5{,}5\times10^{-5}$. A végső részecskeszám pedig 5×10^{5} lett, szintén egy 3 mm-es szakaszról indítva, ami a részecskék kezdeti pozíciójában a szomszédos részecskék között 6×10^{-9} m távolságot jelent.

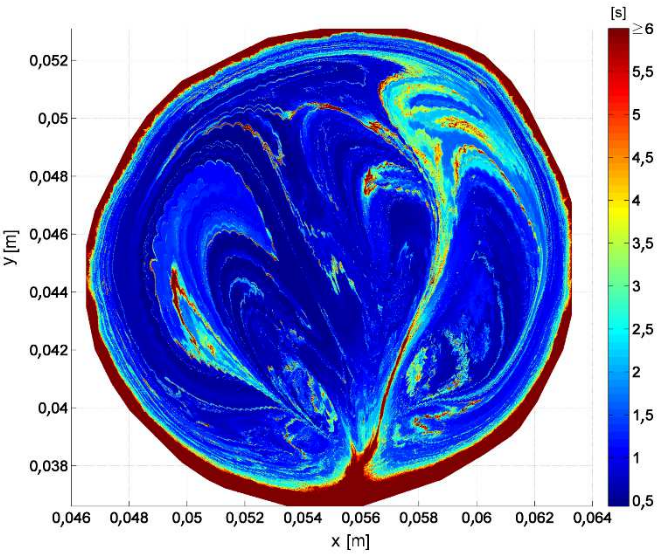
II.5.2. Eredmények

II.5.2.1. Kvalitatív eredmények



II.5.4. ábra. A bemeneti szakaszon lévő sík, ahonnan a részecskéket indítjuk. Az #1, #2, #3 szín azt a kimenetet jelképezi, amelyen a részecske elhagyja a tartományt (az 1. ábra jelölésével). A #4 szín azokat a részecskéket jelzi, amelyek 20 s elteltével még mindig a tartományban vannak. Az „a”-tól „f”-ig jelölt vonalszakaszok a dimenziók számításának helyét jelölik, lásd az II.5.1. táblázatot is.

Először a részecskék kezdeti feltételekre való érzékenységét kvalitatív módon mutatjuk be. Az II.5.1. ábra alján megjelenített síkból négymillió véletlenszerű kezdeti pozícióból indított részecske pályáját számítottuk. A II.5.4. ábrán a kezdeti keresztmetszetben minden részecske kezdeti pozícióját a szerint színeztük, hogy melyik kimeneten hagyta el a tartományt. A kép a végső pozíció tekintetében vad változatosságot mutat: nagyon közel lévő részecskék is máshol hagyják el a tartományt. Mivel a kimenet helye igen érzékenyen függ a kezdeti feltételektől, hasonló érzékeny függést várunk a tartózkodási időt illetőleg is. A II.5.2c ábra ugyanazon részecskék tartózkodási idejének hisztogramját mutatja, mint amelyeket a II.5.4. ábrán követtünk. Látjuk, hogy sok részecske elég gyorsan elhagyja a vizsgált tartományt. Vannak azonban részecskék, amelyek több mint 20 s-ot töltenek a tartományban, ami 20 szívciklusnak felel meg. E részecskék egy része letapad a falon, ezeket azonban a hisztogramból kiszűrtük. Ezért a tartományban nagyon hosszú időt töltő részecskék szükségszerűen a kaotikus halmaz közelében csapdázódnak. Ez a halmaz, bár az instabil csapdázódott pályák nullmértékű halmaza, elérhető a stabil sokaság felől (Tél & Gruiz (2006)). A kezdetben a stabil sokaság közelében tartózkodó részecskék közel jutnak a kaotikus halmaz pályáihoz és sokáig ott maradnak, mielőtt a kimenetek valamelyikén elhagyják a tartományt. Fizikailag ezek a részecskék hosszú ideig „haboznak”, hogy végülis melyik kimenetet válasszák. Pontosan a stabil sokaságon lévő pályák alkotják a különböző kimenetek, mint attraktorok medencéi közötti határt (II.5.4. ábra). Ha a kezdeti pozíció pontosan a határon, azaz a stabil sokaságon van, a részecske sohasem hagyja el a tartományt (Tél & Gruiz (2006)).



II.5.5. ábra. A részecskék indításának síkja. A színkód a teljes vizsgált tartományban való tartózkodási időt jelzi. A szívciklus hossza 1 s. A szimulációt 20 s-ig hajtottuk végre, de a jobb láthatóság kedvéért a színkódot 6 s-nál levágtuk

Hogy képet kapjunk a hosszú tartózkodási idejű részecskék térbeli eloszlásáról, a II.5.4. ábra minden részecskéjének megmérjük a tartózkodási idejét, és ezt színkódolás segítségével a II.5.5. ábrában ábrázoljuk. A nagy tartózkodási idejű pályák egy része közvetlenül az érfal mellől indul. Ez nem meglepő, hiszen a falon való tapadás miatt a fal közelében kicsi a sebesség. Mindazonáltal az ér belsejében is találunk ilyen kezdőpontokat; az ezekhez tartozó pályák a kaotikus halmaz közelébe tartanak. E pályák tartózkodási ideje jóval nagyobb, mint 1,1 s, ami az maximális sebességhez tartozó utazási időnek felel meg. A hosszú tartózkodási idejű pályák kezdeti pontjai komplikált szálas mintázatot alkotnak a II.5.5. ábrán. Hasonló mintázatot figyelt meg Károlyi & Tél (1997) másfajta időfüggő kaotikus áramlásban.

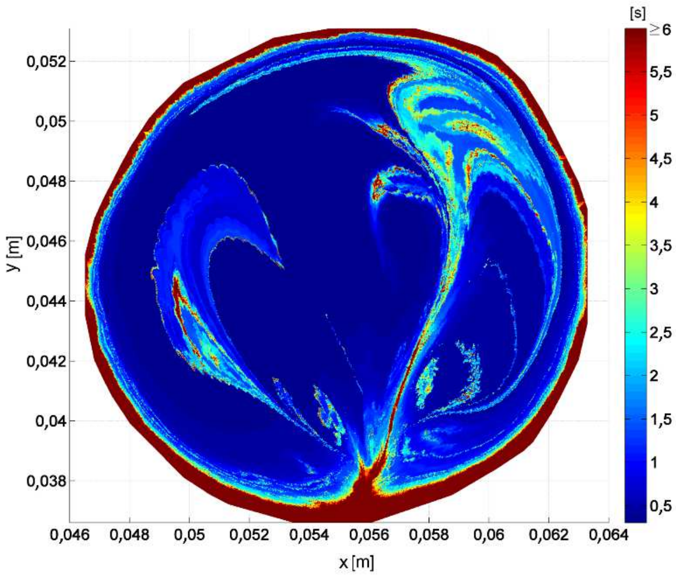
II.5.1. táblázat. A II.5.4. ábrán mutatott hat szakaszon mért káoszparaméterek a szabadenergia-függvény alapján meghatározva, a (II.5.2), (II.5.3) és a (II.5.5) egyenlet alapján számítva

Szakasz iránya	D_1	Ljapunov (λ)	Szökési ráta (κ)	Szakasz
x-szel párhuzamos	0,6233	3,3841	1,3011	a
	0,6025	4,4728	1,2156	b
	0,6427	3,3882	0,7889	c
y-nal párhuzamos	0,6446	2,2799	0,9486	d
	0,6098	2,0528	0,8935	e
	0,6143	2,6301	0,9918	f

II.5.2.2. Kvantitatív eredmények

Az aneurizmát tartalmazó érszakaszban lezajló időfüggő áramlás káoszparamétereinek meghatározására a szabadenergián alapuló formalizmust használjuk. A II.5.4. ábrán bemutatott, a bemenő keresztmetszetben található szakaszokat használjuk. Ezeknek a helyét úgy választottuk, hogy a komplikált mintázatokban leggazdagabb részekre essenek. Három szakasz az *x* tengellyel, három az *y* tengellyel párhuzamos. A számított mennyiségeket az II.5.1. táblázatban foglaljuk össze. A számítások során a stabil sokaság és a szakasz metszetének D_1 információs dimenziója bizonyult a legstabilabb mennyiségnek. A hat mérés átlaga $\overline{D_1}$ = 0,623, σ = 0,017 szórással. A többi mennyiség sokkal nagyobb térbeli variabilitást mutat. Ezért aneurizmák áramlásában az összes számított mennyiség közül a legrobusztusabb paraméterként az információs dimenziót, D_1-t javasoljuk a kaotikus advekció jellemzésére.

Mivel az áramlásban az aneurizmán kívül más instabil pontok is vannak, mint az erősen görbülő szakaszok és a bifurkációs pont, szeretnénk tudni, hogy mekkora tisztán az aneurizmazsák hatása a megnövekedett tartózkodási idejű pályákra. Ennek érdekében ugyanarról a síkról indítjuk a részecskéket, de a tartózkodási időt csak az aneurizmazsák után közvetlenül felvett síkig mérjük. Ezzel



II.5.6. ábra. A részecskék indításának síkjában a részecskék az aneurizmazsák utáni keresztmetszetig való tartózkodási idejének eloszlása színkóddal megjelenítve.

minden, az aneurizmazsákhoz képest alvízi oldalon lévő instabilitás fraktáltulajdonságokra gyakorolt hatását kizártuk. A mért/számított tartózkodási idők eloszlását a II.5.6. ábrán ábrázoljuk, ami megjelenésében nagyon hasonlít a II.5.5. ábrához. Itt is megmérjük az átlagos információs dimenziót és $\bar{D}'_1 = 0{,}607$-et kapunk, ami szóráson belül van az előző átlaghoz, $\bar{D}_1$-hez képest. Végül még egy mérést hajtottunk végre úgy, hogy csak az aneurizmazsák utáni térrészt vettük figyelembe, de a tartózkodási idő közel sem mutat akkora változatosságot, mint a II.5.5. ábrán és fraktálmintázatok sem lépnek fel. Ez bizonyítani látszik, hogy a kaotikus struktúrákat az aneurizma jelenléte okozza, és az elég robusztus ahhoz, hogy a többi, kisebb instabilitás hatását elnyomja.

TÉZIS:

10. Agyi aneurizmák körüli érszakaszban szimulált háromdimenziós, instacionárius, mérésekkel validált áramlási térben passzív részecskék pályakövetésének segítségével kaotikus struktúrákat találtunk. Bizonyítottam, hogy ezek az aneurizmazsák jelenlétének következményei.
    A szabadenergia formalizmus és a szokatlanul hosszú tartózkodási idejű részecskék kezdeti pozíciójának felhasználásával több, káoszra jellemző paramétert származtattam. Ezek közül az információs dimenziót (D_1) találtam a legkevésbé érzékenynek a mintavételezés helyére.
    Mivel a mért információs dimenzió mind az aneurizma geometriájára, mind a benne és körülötte lezajló áramlásra jellemző, fölvetem, hogy nagyszámú aneurizma megvizsgálása után D_1 akár az aneurizmák osztályozására is alkalmas lehet.

ÖSSZEFOGLALÁS, KITEKINTÉS

Az értekezésben öngerjeszett és kívülről gerjesztett instacionárius áramlásokkal foglalkoztam.

Előbbi keretében két kanonikus példát, az élhangot és az üreghangot vizsgáltuk, és az élhang által motiválva a sík szabadsugár érzékenységét. Az öngerjesztett áramlások a gyakorlatban sok helyen előfordulnak, szinte mindenhol, ahol egy szabadsugár vagy egy nyíróréteg egy szilárd testnek ütközik, és hatása az esetek többségében (de nem mindig) káros – zajkeltés és rezgés, extrém esetben törés. Az élhang esetében annak gazdag viselkedését írtuk le, módusok létezését, móduskapcsolgatást, hiszterézist, stb., mindezeket mind szimulációval, mind laboratóriumi kísérlettel igazoltuk, és kiváló mennyiségi és minőségi egyezést találtunk. Az élhang esetében kiterjedt akusztikai vizsgálatokat is folytattunk, amelyeket máshol közöltünk. Az üreghang esetén új „moduláló” frekvenciát találtunk, ami a hátsó nagy örvényen sorakozó kis örvények és a nyíróréteg kölcsönhatásából adódik. E munka „melléktermékeként” létrehoztunk egy új, az eddigieknél jobb örvénydetektálási kritériumot és ezt sikerrel alkalmaztuk az üreghang áramlására. A sík szabadsugár érzékenységének vizsgálatát az élhang kialakulásának mechanizmusa motiválta, itt magyarázatot adtunk arra, hogy a sík szabadsugár miért érzékenyebb a zavarásokra a kiömlő nyíláshoz közel, mint távolabb.

Utóbbi keretében kizárólag véráramlásokat vizsgáltunk; a külső gerjesztő szerepét egy volumetrikus elven működő szivattyú, a szív töltötte be. Nagyrészt agyi aneurizmák, kisebb részben hasi aneurizmák áramlásával foglalkoztam. Az áramlásszimulációt két módszerrel, a véges térfogatok módszerével és rács Boltzmann módszerrel végeztük. Mindkét módszert laboratóriumi kísérlettel validáltuk. Mindkét aneurizmatípus esetén igen alaposan megvizsgáltam a peremfeltételek kérdését, és hasznos megállapításokat tettem elsősorban a bemenő peremfeltételek helyes használatával kapcsolatban. Megállapítottam, hogy hasi aneurizmák esetén a „szisztólés” (a ciklus során legnagyobb kiterjedésű) geometria merev falú szimulációja sokkal közelebb áll a rugalmas falú szimulációhoz, mint az irodalomban inkább elterjedt „diasztólés” (legszűkebb) geometria szimulációja. Agyi aneurizmák többféle kezelésének szimulációját is elvégeztük; ezek közül legérdekesebb talán az áramlásmódosító sztent hatásának szimulációja, ahol a sztentet porózus anyagként modelleztük és a porózus anyag paramétereit laboratóriumi kísérletekkel határoztuk meg. Agyi aneurizmák esetén az áramlásnak érdekes kaotikus tulajdonságait fedeztük fel, és azt feltételezzük, hogy egy aneurizma és annak áramlása egy fraktálparaméterrel, az ún. információs dimenzióval jellemezhető.

A továbblépésnek számos iránya van. Az értekezés első részével kapcsolatban az akusztikai kapcsolás továbbfejlesztésének irányában teszünk lépéseket, illetve intenzíven dolgozunk a szabadsugár érzékenységének további vizsgálatán. Az örvénydetektálási kritérium továbbfejlesztése háromdimenziós illetve összenyomható áramlásokra is ígéretes irány lehet.

Az aneurizmák területén intenzíven dolgozunk az áramlásszimuláció automatizálása irányában, azzal a céllal, hogy orvosok a diagnózis részeként különösebb képzés nélkül megkaphassák a vizsgált aneurizma áramlási terét. Az áramlásmódosító sztentek áramlási ellenállásának mérési módszerét továbbfejlesztjük. A fraktáldimenziót nagyobb számú aneurizmára kiszámítjuk, hogy következtetéseink megalapozottabbak legyenek, illetve vizsgáljuk a pulzushullám alakjának vagy a sztentelésnek a fraktáldimenzióra gyakorolt hatását.

1. Függelék
A „kiegészített" örvénydetektálási módszer levezetése

A1.1. A Truesdell-Okubo-Weiss kritérium

Az áramlási struktúrák vizsgálatában a legfontosabb mennyiség a sebességgradiens tenzor,

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, t) \tag{A1.1}$$

2D-ben. Ebben a fejezetben állandó sűrűségű folyadékot feltételezek; ez divergenciamentes sebességmezőt jelent.

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 \tag{A1.2}$$

Ekkor a sebességgradiens mező a következő kényelmes formába hozható

$$\mathbf{A} = \frac{\sigma}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{pmatrix} + \frac{\omega}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A1.3}$$

három skalármező, σ, ω és ϕ segítségével. (A1.3) jobb oldalán az első tag a deformációs ráta mátrix, ami tiszta nyújtó vagy összenyomó mozgást ír le a lokális deformációs rátával. A fő deformációs tengelyek irányát a nyújtási illetve az összenyomási iránynak rendre az x_1 és x_2 koordinátatengelyekkel bezárt szöge (óramutató járásával ellenkező irányban), ϕ írja le. Az antiszimmetrikus második komponens az örvényességmátrix, amely szilárdtestszerű forgást ír le a skalár örvényesség, ω = rot $\boldsymbol{u}$ felének megfelelő szögsebességgel. Érdemes megjegyezni, hogy σ objektív[5], ω Galilei-invariáns[6] és ϕ a koordinátatengelyek irányultságától függ. A nyommentes sebességgradiens-mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + \det(\mathbf{A}) = 0, \tag{A1.4}$$

tehát a sajátértékek vagy egy konjugált tiszta képzetes számpár, vagy egy valós számpár, ugyanakkora abszolút értékkel, ellenkező előjellel. Ez az egyszerű tény az áramlási mezőnek két jellegzetesen különböző tartományra való természetes felosztását teszi lehetővé, ahogyan azt hamarosan látni fogjuk. Az egyszerű összefüggés

$$\mathbf{A}^2 = -\det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I} \tag{A1.5}$$

a Cayley-Hamilton tételből következik, de elemi számítások segítségével is igazolható. Ebből levezethető a következő összefüggés

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) = -2\det(\mathbf{A}), \tag{A1.6}$$

[5] Egy fizikai mennyiség reprezentációját objektívnek nevezzük, ha az koordinátarendszerfüggetlen, még akkor is, ha a koordinátarendszer gyorsul, vagy változó szögsebességgel forog.

[6] Egy fizikai mennyiség reprezentációját Galilei-invariánsnak nevezzük, ha az koordinátarendszerfüggetlen, feltéve, ha a koordinátarendszerek relatív sebessége és relatív orientációja konstans (azaz inerciarendszerek)

ami viszont a

$$Q = 2\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) = -4\det(\mathbf{A}) = \sigma^2 - \omega^2 \quad \text{(A1.7)}$$

definícióhoz vezet. *Q* előjele szolgáltatja az áramlási mező fönt említett természetes felosztását. Pozitív *Q*-jú összefüggő területek deformáció által dominált tartományokat, ún. lokálisan hiperbolikus régiókat jeleznek, míg negatív *Q* értékek forgás által dominált tartományokat, ún. lokálisan elliptikus régiókat jeleznek. Ennek a felosztásnak a koncepcióját eredetileg Truesdell (1953) dolgozta ki, de később Okubo (1970) és Weiss (1991), látszólag egymástól függetlenül, újra felfedezték azt. A kronológikus sorrend azt diktálja, hogy a kritériumot Truesdell-Okubo-Weiss (TOW) kritériumnak nevezzük, annak ellenére, hogy az irodalomban az „Okubo kritérium" a „Weiss kritérium" és főként a „*Q* kritérium" elnevezések széles körben el vannak terjedve. (Az utóbbi elnevezést azért nem használjuk, hogy elkerüljük a háromdimenziós *Q* kritériummal való összetévesztést, ami a TOW kritérium egyik lehetséges kiterjesztése térbeli problémákra.)
A *Q*-mező számítástechnikai egyszerűsége miatt vonzó diagnosztikai eszköz. Azonban a TOW kritérium használata a koherens struktúrák azonosítására sokszor vita tárgya, hiszen értelmezése problematikus. Fontos hangsúlyozni, hogy a *Q* mező *pillanatnyi* euleri tulajdonságokat képvisel. Ha az áramlás *stacionárius*, és ha a sebességmezőt az *x** fixpont körül hatványsorba fejtjük, akkor a folyadékrészecskék lagrange-i mozgásegyenlete *x* közvetlen környezetében* két lineáris közönséges differenciálegyenletre egyszerűsödik.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_0\mathbf{y}, \quad \text{(A1.8)}$$

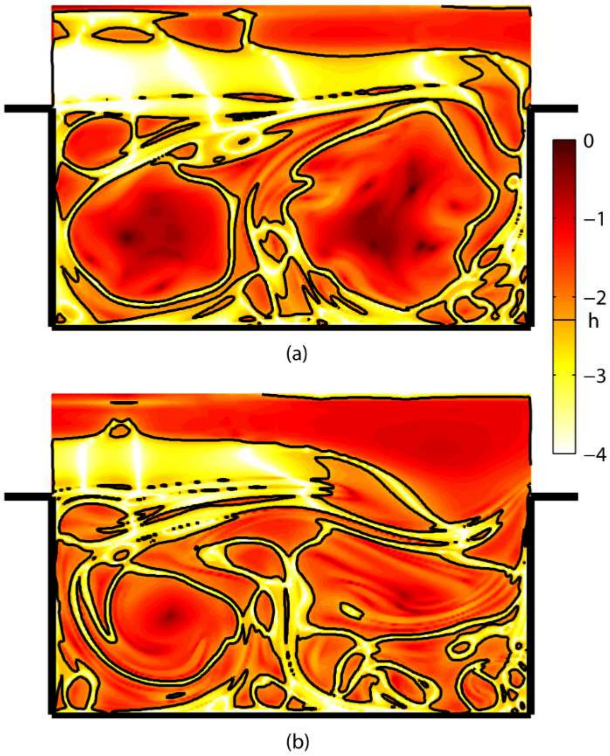
ahol ***y**(t)* **=** ***x**(t)* - ***x**** a folyadékrészecskének a fixponthoz képesti relatív pozícióját, és az $\mathbf{A_0}$ mátrix a fixpontban számolt (A1.1) sebességgradiens mátrixot jelöli. Ezt az eredményt bizonyos mértékben kiterjeszthetjük instacionárius áramlásokra is. Legyen ***y**(t)* = ***x**(t)* - ***x**(t)*** a folyadékrészecskék relatív pozíciója egy ***x**(t)*** referencia folyadékpálya közelében, amin a lokális és pillanatnyi sebességgradiens konstans, azaz a totális derivált kielégíti:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{x}^*(t),t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{x}^*(t),t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}^*(t),t)\,\mathbf{x}^*(t) = 0. \quad \text{(A1.9)}$$

Ekkor a referenciapálya körüli lagrange-i dinamikát ugyanaz az (A1.8) differenciálegyenlet írja le, az $\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^*(t), t)$ állandó együtthatós mátrixszal. Mivel (A1.8) két egyenletből álló, elsőrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatós közönséges differenciálegyenletrendszer, a megoldás jellegét az $\boldsymbol{A_0}$ együtthatómátrix sajátértékei határozzák meg. Bevezetve a

$$\lambda_0 = -\det(\mathbf{A}_0) = Q_0/4 \quad \text{(A1.10)}$$

jelölést a lokális *Q* értékének negyedére, $\boldsymbol{A_0}$ sajátértékei (A1.4) és (A1.7) alapján $\pm\sqrt{\lambda_0}$ alakban írhatók. Ha λ_0 (illetve Q_0) pozitív, akkor ***y*** = **0** a lagrange-i dinamika szempontjából hiperbolikus pont (nyeregpont), azaz a folyadékrészecskék ***x**(t)*** közelében tipikusan exponenciálisan távolodnak egymástól, $\sqrt{\lambda_0}$ lokális és pillanatnyi távolodási rátával. Ha viszont Q_0 negatív, akkor ***y*** = **0** elliptikus fixpont (fókusz), ami körül a mozgás lokálisan forgásszerű – a szomszédos részecskék jelentős diszperziója nélkül – és $\sqrt{|\lambda_0|}$ adja meg a lokális forgó mozgás szögsebességét. Ez azt sugallja, hogy *Q* előjelét az áramlás pillanatnyilag diszperzív illetve pillanatnyilag csapdázó tartományainak azonosítására lehet használni, míg *Q* abszolút értékét a pillanatnyi lokális lagrange-i mozgás négyzeteként lehet értelmezni. Így a szokásos konvenciókkal szemben az ábrákon *Q* négyzetgyökének



A1.1. ábra. A nemlinearitás jellemző mérete, L_{nemlin}, ami a TOW elemzés lineáris érvényességi tartományát becsüli. Az értékeket *L_{nemlin}/L* 10-es alapú logaritmus-skáláján közlöm. Az lg(*h*/*L*) = -2,3 kontúrvonal megfelel a számítási háló méretének. (a): Szabályos tartomány; (b): Elnyomott tartomány.

felét ábrázoljuk előjellel ellátva, ami így elliptikus tartomány esetén a karakterisztikus helyi szögsebességként értelmezhető.

A fönti megközelítés egyszerűsége azonban megtévesztő; a TOW kritérium csak az áramlási tartomány kis részén működik megbízhatóan: a legerőteljesebb örvénymagok közelében illetve bizonyos erős és kitartó hiperbolikus régióban a domináns örvények között, ahogyan ezt Basdevant & Philipovitch (1994) demonstrálta. Ennek okai a következők:

(i) az (A1.8) differenciálegyenlet érvényessége azon kivételes referenciapályák kis környezetére van korlátozva, amelyek (A1.9)-et legalább közelítőleg kielégítik (elég lassú változások). Ennek részletesebb megvitatását későbbre halasztom.

(ii) Ezen környezetek átmérője az által a követelmény által van korlátozva, hogy a sebességmező linearizálása kellően jó közelítést ad, azaz a térbeli nemlinearitások elhanyagolhatóak. Ezt így lehet matematikai formába önteni:

$$\|\mathbf{A}_0\,\mathbf{y}\| \gg \|\mathbf{B}_0\,\mathbf{y}\,\mathbf{y}\| \qquad \text{(A1.11)}$$

ahol a ***B₀*** harmadrendű tenzor a sebességmező második deriváltjának lokális értékét jelenti,

$$B_{ijk} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_1, x_2, t) \qquad \text{(A1.12)}$$

(A1.11) kielégítésének érdekében a fönt említett környezet lineáris méretének kisebbnek kell lenni, mint a nemlinearitás jellemző lokális méretének:

$$\|\mathbf{x}\| < L_{nemlin} = s_2(\mathbf{A}_0)/n(\mathbf{B}_0) = \frac{1}{2}\big|\sigma - |\omega|\big|/n(\mathbf{B}_0) \qquad \text{(A1.13)}$$

A nemlinearitás jellemző mérete (A1.11) baloldalának alsó korlátjából, a sebességgradiens mátrix második, kisebb szinguláris értékéből, $s_2(\mathbf{A}_0) = \big|\sigma - |\omega|\big|/2$-ből és (A1.11) jobb oldala felső korlátjának egy könnyen kiszámítható numerikus becsléséből

$$n(\mathbf{B}_0) \geq \sup_{\|y\|=1} \|\mathbf{B}_0\,\mathbf{y}\,\mathbf{y}\| \qquad \text{(A1.14)}$$

tevődik össze. Megjegyezzük, hogy ha *Q* = 0, az (A1.13) definícióban a nevező eltűnik. Így az áramlási mező lineáris közelítése nem igazolható a *Q* = 0 izovonal közelében, ami elméletileg az elliptikus és hiperbolikus tartományok választóvonala. Az A1.1. ábra mutatja az üregbeli áramlásra a nemlinearitás jellemző méretét, L_{nemlin}-t ugyanazokra az esetekre, mint az I.3.17. ábrán. Valóban, alacsony L_{nemlin} régiók jelennek meg mind a $Q = 0$ izovonalak közelében, (vessük össze az I.3.17. ábrával) mind tőlük jelentős távolságban, különösen a levált nyírórétegben $0 \le y \le 2$ mm között. Jelöltük azokat a tartományokat, ahol L_{nemlin} egy kritikus szint alá, a tipikus numerikus háló élmérete alá csökken, amit $h = 5 \cdot 10^{-5}$-nek tekintettünk. Ezeket a régiókat úgy tekintjük, hogy itt az (A1.8) közönséges differencálegyenlet – és következésképpen a Truesdell-Okubo-Weiss kritérium – nem alkalmas a folyadékrészecskék lokális diszperziójának leírására. A TOW kritériumnak ezt a bizonytalanságát mind az I.3.17. ábra felső sorában, mind pedig az A1.1. ábrán, az $L_{nemlin} < h$ régió elhatárolásával jelöltük.

Az A1.1. ábraábrán tanulmányozhatjuk a nemlinearitás jellemző méretét az elliptikus és a hiperbolikus áramlási tartományokban. A szabályos tartományban, az állandósult örvények magjában a lineáris közelítés érvényességi területe összehasonlítható az örvények méretével, sőt, időnként ez a lokális lépték eléri az üreg méretét. Az elnyomott tartomány jelentősen különbözik: itt a nemlinearitás jellemző mérete sokkal kisebb, általában az elliptikus sziget mérete alatt marad. Nemcsak az örvényhatárok válnak sokkal szabálytalanabbá, hanem az örvénymagokban lévő áramlás inhomogénebbé válik. Csak a felvízi fő-örvény központi része marad nagyjából kör alakú; az alvízi fő-örvényben hajtogatott szálas struktúrák keletkeznek, hasonlóan a másik eset hiperbolikus régióihoz. Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a lineáris deformáció jól közelíti az örvénymagokat a szabályos tartományban és a térbeli nemlinearitás hangsúlyozott jelenléte az elnyomott tartományra jellemző.

A1.1 A Truesdell-Okubo-Weiss kritérium kiegészítése

Az alábbi levezetésben kezdetben Hua & Klein (1998) logikáját követjük, akik megpróbálták továbbfejleszteni a Trusdell-Okubo-Weiss kritériumot, miközben átmentették a technikailag vonzó állandó együtthatós közönséges differenciálegyenlet koncepciót. Először is, fejtsük sorba az euleri sebességmezőt az áramlási tér egy tetszőleges ***(x**, t)* pontja körül, időben elsőrendűen, térben másodrendűen.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau) = \mathbf{u}_0 + \tau\dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{A}_0\boldsymbol{\xi} + \tau\dot{\mathbf{A}}_0\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0\boldsymbol{\xi}]\boldsymbol{\xi} + \tau\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{B}}_0\boldsymbol{\xi}]\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(\tau^2, \|\boldsymbol{\xi}\|^3) \tag{A1.15}$$

Itt $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{A}_0$ és $\mathbf{B}_0$ rendre a sebességmezőt, annak első és második deriváltját jelentik, a pontozott szimbólumok az illető mező idő szerinti parciális deriváltját jelentik, ezek mindegyike az (***x**, t*) pontban. Helyettesítsük be a fönti hatványsort a következő, lagrange-i gyorsulást leíró összefüggés jobb oldalába

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) + [\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \cdot \nabla]\, \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t). \tag{A1.16}$$

Az eredmény:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}(\tau) = [\dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{u}_0] + [\mathbf{A}_0^2 + \dot{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{B}_0\mathbf{u}_0]\, \boldsymbol{\xi}(\tau) + \mathcal{O}(\tau, \|\boldsymbol{\xi}\|^2), \tag{A1.17}$$

egy másodrendű, inhomogén, állandó együtthatós, lineáris, közönséges differenciálegyenletrendszer. Ennek partikuláris megoldása értelmezhető $\mathbf{x}^*(t)$ referenciapályaként, amely átmegy (***x**, t*)-n, vagy annak közelében. Homogén része,

$$\ddot{\mathbf{y}}(\tau) = \left[\mathbf{A}_0^2 + \dot{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{B}_0\mathbf{u}_0\right]\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{O}(\tau, \|\mathbf{y}\|^2), \quad \text{(A1.18)}$$

a folyadékrészecskék referenciapályához képesti relatív mozgását írja le (***x**, t*) közelében. (A1.17) és (A1.18) együtthatómátrixa három tagból áll: ezek a sebességgradiens mátrix négyzete, $\mathbf{A}_0^2$, a *lokális gyorsulásgradiens mátrix*, $\dot{\mathbf{A}}_0$, és a *konvektív gyorsulásgradiens mátrix,* $\mathbf{B}_0\mathbf{u}_0$, mind az (***x**, t*) pontban véve. a két utóbbi tag összege a totális (lagrange-i) gyorsulásgradiens mátrix. Ahogyan (A1.8) esetében is, az együttható mátrix sajátértékei jelzik a lokális relatív folyadékmozgást. Ha a gyorsulásgradiens mátrixokat elhagynánk, (A1.18) (A1.19)-re egyszerűsödne.

$$\ddot{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{A}_0^2\,\mathbf{y}(\tau) = -\det(\mathbf{A}_0)\cdot\mathbf{y}(\tau) = \lambda_0\cdot\mathbf{y}(\tau) \quad \text{(A1.19)}$$

Vessük össze ezt az egyenletet (A1.10)-el! Megfelelő kezdeti feltételek esetén (A1.19)-nek ugyanazok a megoldásai, mint (A1.8)-nak, $\pm\sqrt{\lambda_0}$ karakterisztikus rátákkal, $\mathbf{A}_0^2$ degenerált sajátértékeinek, λ_0-nak megfelelően. A gyorsulásgradiens mátrixok jelenléte miatt (A1.18)-nak négy sajátmódusa van, két különböző sajátérték szerint. Megmutatható, hogy ha a sebességmező összenyomhatatlan, akkor mindegyik gyorsulásgradiens mátrix nyoma nulla, $\mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{A}}_0\right) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}_0\mathbf{u}_0) = \mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{B}_0\mathbf{u}_0\right) = 0$. Ezeknek a valós, nyom nélküli mátrixoknak $\dot{\mathbf{A}}_0, \mathbf{B}_0\mathbf{u}_0$ és $\left(\dot{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{B}_0\mathbf{u}_0\right)$-nak sajátértékei valós, vagy tisztán képzetes párokat alkotnak, ezeket rendre $\pm\lambda_1', \pm\lambda_1''$ és $\pm\lambda_1$-el jelöljük. Ekkor az együtthatómátrix sajátértékei

$$\lambda_\pm = \lambda_0 \pm \lambda_1 \quad \text{(A1.20)}$$

alakúak, amelyek vagy mindketten valósak, vagy komplex konjugált párt alkotnak. (A1.18) megoldásainak négy karakterisztikus rátáját mindkét sajátérték két lehetséges négyzetgyöke határozza meg:

$$\pm\sqrt{\lambda_0 \pm \lambda_1}. \quad \text{(A1.21)}$$

Mielőtt folytatjuk az elemzést meg kell jegyeznünk, hogy Hua & Klein (1998) a következő egyenletet használta a relatív mozgásra:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \left[\mathbf{A}_0^2 + \dot{\mathbf{A}}_0\right]\mathbf{y} + \mathcal{O}(\tau, \|\mathbf{y}\|). \quad \text{(A1.22)}$$

Ez tulajdonképpen a valódi mozgásegyenletnek alacsonyabb rendű közelítése, mint (A1.18) mivel elhagyták a konvektív gyorsulási tagot, ami szintén lineáris rendben jelenik meg. Sajátértékeik,

$$\lambda'_\pm = \lambda_0 \pm \lambda'_1, \quad \text{(A1.23)}$$

és a megfelelő karakterisztikus rátáik

$$\pm\sqrt{\lambda_0 \pm \lambda'_1}, \quad \text{(A1.24)}$$

ezért természetesen különböznek (A1.20)-tól és (A1.21)-től.

Az I.3.17. ábra segítségével demonstráljuk mindkét gyorsulási tag fontosságát. Kissé csiszolatlan megoldásként a sajátértékek abszolút értékét használjuk, hogy az együtthatómátrixon belül vizualizáljuk az egyes tagok fontosságát. Kék és zöld szín jelöli azokat a területeket, ahol rendre a lokális és a konvektív gyorsulás dominál: a színárnyalat jelöli relatív fontosságukat. Második indikátorként a szín fényességét használtuk: ez képviseli a totális gyorsulás relatív fontosságát a tisztán euleri taghoz $\mathbf{A}_0^2$-hoz képest. (Az ábrában ez λ_1 és $\lambda_0 + \lambda_1$ arányaként volt számítva.) Más szóval: fényes színek jelölik azokat a területeket, ahol a kiegészített alak jelentősen javít az eredeti Truesdell-Okubo-Weiss kritériumon, ezen belül fényes zöld szín jelöli azokat a területeket, ahol még a Klein-Hua megközelítéshez képest is javít. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy a konvektív gyorsulás legalább annyira fontos, mint a lokális gyorsulás. A Klein-Hua megközelítés jelentős javítást eredményez a fényes kék területeken, de hamis eredményekre vezet a fényes zöld területeken.

Visszatérve az (A1.20)-as sajátértékekre és az (A1.21)-es karakterisztikus rátákra, megállapíthatjuk, hogy modellünkben a forgó illetve a nyújtó/összenyomó mozgás már nem exkluzív, ezeknek minden kombinációja előfordulhat. Az áramlási tér már nem kettő, hanem négy karakterisztikusan különböző régióra osztható. Ezek között csak egy van, amelyben a diszperzív mozgás nem lép fel: csak a két elliptikus mozgás kombinációja biztosítja a részecskék csapdázását. Könnyű belátni, ennek a *bielliptikus* viselkedésnek a feltétele a következő:

$$\text{(a)} \quad \lambda_0 < 0, \quad \text{és} \quad \text{(b)} \quad \lambda_1 \text{ valós és } \lambda_0 + |\lambda_1| < 0 \qquad \text{(A1.25)}$$

Ez a kiegészített kritérium bielliptikus régiókként azonosítja az örvénymagokat, amiket részecskecsapdának tekinthetünk. Nyilvánvaló, hogy a bielliptikus régiók a *Q* < 0 által definiált elliptikus régiók részhalmazai, mint ahogyan azt az I.3.17 ábra fölső és középső sorának összehasonlítása is mutatja. Két különböző szögsebesség jellemzi a biellipticitást; konvenciónk szerint a nagyobbikkal jellemezzük az ábrában az áramlást. Eszerint a $\lambda_0 - |\lambda_1|$ negatív mennyiség előjeles négyzetgyökét ábrázoltuk a bielliptikus régióban. A másik három tartomány közös tulajdonsága a szomszédos részecskék exponenciális távolodása forgással, vagy anélkül. Mindezek a diszperzív területek az áramlási tér mindazon részeit betöltik, amelyekre a biellipticitás nem érvényes. az I.3.17 ábrában a legnagyobb nyújtási rátát ábrázoltuk – a legnagyobb (pozitív) valós részű karakterisztikus rátát (A1.21)-ből – a diszperzió intenzitásának jellemzésére. Az összefüggő bielliptikus régiók határvonalait szintén ábrázoltuk, ezek az örvénymagokat körülvevő pillanatnyi transzport-akadályként szolgálnak.

2. Függelék

Az összetett mátrix módszer levezetése sík szabadsugár esetére

A2.1. Az Orr-Sommerfeld egyenlet

Kiindulópontunk a jól ismert Orr-Sommerfeld egyenlet, ami x irányú párhuzamos áramlások stabilitását írja le.

$$\begin{gathered}\Phi^{(iv)} - 2(\alpha^2+\beta^2)\Phi'' + (\alpha^2+\beta^2)^2\Phi = \\ i\,Re\,[(\alpha U + \beta W - \omega)[\Phi'' - (\alpha^2+\beta^2)\Phi] - (\alpha U'' + \beta W'')\Phi]\end{gathered} \tag{A2.1}$$

Ebben a ϕ változó lehet az áramlásra merőleges irányú perturbációs sebesség amplitúdója, de az áramfüggvény amplitúdója is. α és β rendre az x és z irányú dimenziótlan hullámszám, ω a dimenziótlan körfrekvencia, Re = U_0L/ν, a Reynolds-szám, ahol U_0 a mindenkori keresztmetszetben mért maximális sebesség, és L a sebességprofil jellemző mérete, amit később definiálunk. α és β 1/L-el, ω U_0/L-el van dimenziótlanítva. A perturbációs áramfüggvény alakja:

$$\tilde{\psi} = k(y)\, e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \tag{A2.2}$$

míg az y irányú perturbációs sebesség alakja:

$$\tilde{v} = \Phi(y)\, e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}. \tag{A2.3}$$

Az Orr-Sommerfeld egyenlet kétdimenziós áramlások esetén ($\beta = 0; W = 0$) egyszerűsíthető:

$$\Phi^{iv} - 2\alpha^2\Phi'' + \alpha^4\Phi = \ i\,Re\,[(\alpha U - \omega)[\Phi'' - \alpha^2\Phi] - \alpha U''\Phi] \tag{A2.4}$$

Könnyen megmutatható, hogy a két amplitúdó arányos egymással – ezért ugyanolyan alakú a rájuk fölírt Orr-Sommerfeld egyenlet:

$$\Phi(y) = -i\alpha k(y) \tag{A2.5}$$

Annak, hogy az egyenletet melyik változó szerint oldjuk meg, csak a peremfeltételek megválasztásában van jelentősége.

Az (A2.4) egyenletnek $Re \to \infty$ határesetével a súrlódásmentes esetet vizsgálhatjuk; ez a Rayleigh-egyenlethez vezet:

$$(\alpha U - \omega)[\Phi'' - \alpha^2\Phi] - \alpha U''\Phi = 0 \tag{A2.6}$$

Implicite a Rayleigh egyenlet is magában foglalja a súrlódást, éspedig az U(y) sebességprofil megadásán keresztül. Ez azonban mégiscsak nagy Reynolds-számok esetén ad jó közelítést.

A2.2. Az összetett mátrix módszer (Compound matrix method)

Az alábbiakban először Sengupta (2012) levezetését követjük, aki a módszert fali határrétegek stabilitásvizsgálatára fejlesztette ki, majd kellő módosításokkal alkalmazzuk azt a sík szabadsugárra.

Vizsgáljuk az (A2.4) Orr-Sommerfeld egyenletet az érdekes területtől (esetünkben szabadsugár) végtelen távolságban. Ha $y \to \infty, U(y) = U''(y) = 0$ mindkét esetben. Így határesetként a következő egyenletet kapjuk:

$$\Phi^{iv} - 2\alpha^2\Phi'' + \alpha^4\Phi = \; i\,Re\,\omega[\Phi'' - \alpha^2\Phi] \tag{A2.7}$$

Keressük a megoldást $\Phi \sim e^{\lambda}$alakban, ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei a következők lesznek:

$$\lambda_{1,2} = \pm\alpha, \text{ illetve } \lambda_{3,4} = \pm Q \text{ahol } Q \coloneqq \sqrt{\alpha^2 - iRe\,\omega} \tag{A2.8}$$

Látható, hogy nagy Re-számok esetén $|\lambda_{3,4}| \gg |\lambda_{1,2}|$, tehát az Orr-Sommerfeld egyenlet az úgynevezett merev differenciálegyenletek közé tartozik. Az ilyen egyenleteket a szokásos explicit numerikus sémákkal nem lehet megoldani, mert a véges számábrázolás miatt, ha annyira lecsökkentjük a lépésközt, amit az adott módszer stabilitása megkíván, akkor már pontatlan lesz a megoldásunk. Az Orr-Sommerfeld egyenlet megoldására három fő módszert szoktak használni: mátrix módszert véges differenciás vagy spektrális diszkretizációval, az alaprendszert alkotó megoldások ortogonalizációját, illetve az összetett mátrix módszert (compound matrix method = CMM). Sengupta (2012) szerint, hidrodinamikai problémák esetén a legjobb elérhető módszer a CMM, mivel egyszerű és mégis kielégítő pontosságú megoldásokhoz vezet. Ebben a levezetésben a Sengupta által a határréteg-vizsgálatokhoz (Blasius-profilhoz) kidolgozott megoldási módszert adaptáltuk szabadsugarakra. A fő különbség a kettő között a végtelen távoli (aszimptotikus) egyenletben van (A2.7): a határrétegben $y \to \infty$ esetén $U(y) \to 1$, míg a szabadsugárban $U(y) \to 0$. Ebből fakadóan a harmadik és a negyedik karakterisztikus gyök eltér a két esetben; a négyzetgyök alatti kifejezésből a határréteghez képest eltűnik az $(i\;Re\;a)$ tag. A másik eltérés a peremfeltételekben jelentkezik, az ebből adódó különbségeket az alfejezet végén és az A2.3-as alfejezetben ismertetjük.

Az Orr-Sommerfeld egyenlet általános megoldása (negyedrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet:

$$\Phi = a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 + a_3\Phi_3 + a_4\Phi_4 \tag{A2.9}$$

$$\text{ahol } y \to \infty \text{ esetén } \Phi_1 \sim e^{-\alpha y};\; \Phi_2 \sim e^{\alpha y}; \Phi_3 \sim e^{-Qy}; \Phi_4 \sim e^{Qy} \tag{A2.10}$$

Pozitív y esetén a_2 –nek és a_4 –nek zérusnak kell lennie, hogy kielégítse a $\Phi(\infty) = 0$ peremfeltételt, feltételezve, hogy $\Re e[\alpha, Q] > 0$. Így a következő megoldást kapjuk Φ-re:

$$\Phi = a_1\Phi_1 + a_3\Phi_3 \qquad y > 0 \tag{A2.11}$$

Negatív y esetén a_1 -nek és a_3 -nak kell zérusnak lennie. A pozitív illetve negatív y-okra kapott megoldások teljesen egyenértékűek, ha az első alapmegoldást felcseréljük a másodikkal, a harmadikat pedig a negyedikkel, így a továbbiakban csak a pozitív y-okra mutatjuk be a módszert.

Vezessünk be hat új változót:

$$\eta_1 = \Phi_1{\Phi_3}' - {\Phi_1}'\Phi_3 \tag{A2.12}$$

$$\eta_2 = \Phi_1{\Phi_3}'' - {\Phi_1}''\Phi_3 \tag{A2.13}$$

$$\eta_3 = \Phi_1{\Phi_3}''' - {\Phi_1}'''\Phi_3 \tag{A2.14}$$

$$\eta_4 = {\Phi_1}'{\Phi_3}'' - {\Phi_1}''{\Phi_3}' \tag{A2.15}$$

$$\eta_5 = {\Phi_1}'{\Phi_3}''' - {\Phi_1}'''{\Phi_3}' \tag{A2.16}$$

$$\eta_6 = {\Phi_1}''{\Phi_3}''' - {\Phi_1}'''{\Phi_3}'' \tag{A2.17}$$

A változókat y szerint differenciálva, és azokat a kétdimenziós Orr-Sommerfeld egyenletbe (A2.4) behelyettesítve a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\boldsymbol{\eta}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{b2} & 0 & 0 & \mathrm{b1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{b2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A\eta}, \tag{A2.18}$$

ahol $\mathrm{b1} := 2\alpha^2 + i\,\mathrm{Re}\,(\alpha\,\mathrm{U} - \omega)$ és $\mathrm{b2} := \alpha^4 + \alpha^2 i\mathrm{Re}\,(\alpha\mathrm{U} - \omega) + i\alpha\mathrm{Re}\,\mathrm{U}''$.

Így a negyedrendű differenciálegyenletet, amit általában 4 elsőrendű differenciálegyenletre írunk át, ezzel a módszerrel 6 elsőrendű differenciálegyenletre vezettük vissza. Ha azonban megnézzük az új változók aszimptotikus viselkedését $y \to \infty$ esetén, (A2.10)-hez hasonlóan, kiderül, miért hasznos ez az átírás.

$$\eta_1 \sim (-Q + \alpha)e^{-(\alpha+Q)y} \tag{A2.19}$$

$$\eta_2 \sim (Q^2 - \alpha^2)e^{-(\alpha+Q)y} \tag{A2.20}$$

$$\eta_3 \sim (-Q^3 + \alpha^3)e^{-(\alpha+Q)y} \tag{A2.21}$$

$$\eta_4 \sim (-\alpha Q^2 + \alpha^2 Q)e^{-(\alpha+Q)y} \tag{A2.22}$$

$$\eta_5 \sim (\alpha Q^3 - \alpha^3 Q)e^{-(\alpha+Q)y} \tag{A2.23}$$

$$\eta_6 \sim (-\alpha^2 Q^3 + \alpha^3 Q^2)e^{-(\alpha+Q)y} \tag{A2.24}$$

Látható, hogy a differenciálegyenlet merevségét megszüntettük, mivel minden változó azonos aszimptotikus kitevővel rendelkezik. A változók rendkívül gyors változása miatt azonban, még továbbra is nagyon kis lépés szükséges a megoldáshoz; ezen a változók normálásával lehet jelentősen javítani. Normáljuk a változókat az első szerint:

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}} := \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta_1} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\alpha - Q} e^{(\alpha+Q)y}. \tag{A2.25}$$

Ekkor $y \to \infty$-ben a következő kezdeti értékeket kapjuk $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$-ra:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ -(\alpha+Q) \\ \alpha^2+\alpha Q+Q^2 \\ \alpha\, Q \\ -\alpha Q(\alpha+Q) \\ \alpha^2 Q^2 \end{bmatrix}. \tag{A2.26}$$

A megoldást elvileg végtelenből, gyakorlatilag kellően messziről fogjuk indítani. A normálás miatt azonban változik a differenciálegyenlet-rendszer is. Deriváljuk (A2.25)-öt y szerint:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}' = \frac{\boldsymbol{\eta}'}{\alpha-Q} e^{(\alpha+Q)y} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{\alpha-Q}(\alpha+Q)e^{(\alpha+Q)y}. \tag{A2.27}$$

$\boldsymbol{\eta}'$ helyére helyettesítsük az (A2.18) egyenletet, illetve használjuk fel a (A2.25)-öst:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}' = \frac{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\eta}}{\alpha-Q} e^{(\alpha+Q)y} + (\alpha+Q)\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + (\alpha+Q)\tilde{\boldsymbol{\eta}} \tag{A2.28}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}' = [\,\boldsymbol{A} + (\alpha+Q)\boldsymbol{I}]\tilde{\boldsymbol{\eta}}. \tag{A2.29}$$

Itt $\boldsymbol{I}$ a 6x6-os egységmátrix. Ez az egyenletrendszer már könnyen megoldható numerikusan.

Az eredeti perturbációs sebesség amplitúdó függvényeket az új változók segítségével négy különböző módon kaphatjuk vissza (Sengupta (2012)):

$$\eta_1\Phi'' - \eta_2\Phi' + \eta_4\Phi = 0 \tag{A2.30}$$

$$\eta_1\Phi''' - \eta_3\Phi' + \eta_5\Phi = 0 \tag{A2.31}$$

$$\eta_2\Phi''' - \eta_3\Phi'' + \eta_6\Phi = 0 \tag{A2.32}$$

$$\eta_4\Phi''' - \eta_5\Phi'' + \eta_6\Phi' = 0 \tag{A2.33}$$

Látható, hogy egyedül az (A2.30) egyenlet másodrendű, a többi harmadrendű, így ezt a legkönnyebb megoldani. A Blasius profil stabilitásvizsgálata esetén, ahol $y = 0$ ott $\eta_1 = 0$-t is biztosítani kell, mert ott Φ–nek és Φ'-nek is zérusnak kell lennie. Ez a (A2.30) egyenlet megoldása során komoly problémákat okozna, azonban sík szabadsugarak esetén ezt a feltételt nem kell kielégíteni, így az egyenletet nyugodtan lehet használni. Ezen kívül a numerikus hibák csökkentése érdekében felesleges renormálni a korábban kiszámolt $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ függvényeket, hisz minden tagban pontosan egyszer szerepel a $(\alpha-Q)e^{-(\alpha+Q)y}$ tag, ami nem lehet zérus, így leoszthatunk vele és az (A2.30)-hoz teljesen hasonló differenciálegyenletet kapunk:

$$\tilde{\eta}_1\Phi'' - \tilde{\eta}_2\Phi' + \tilde{\eta}_4\Phi = 0 \tag{A2.34}$$

A2.3. A megoldás menete sík szabadsugárra

A stabilitásvizsgálat során meg kell határozni azokat a paramétereket, amelyek esetére az egyenlet kielégíti a peremfeltételeket. Az Orr-Sommerfeld egyenlet negyedrendű, tehát négy peremfeltételt kell meghatározni, amik a következők lesznek:

$$\tilde{u}(\pm\infty) = \tilde{v}(\pm\infty) = 0 \tag{A2.35}$$

Az (A2.3) egyenletből kiindulva, és kihasználva a kontinuitást, illetve azt, hogy $e^{i(\alpha x+\beta y-\omega t)}$ nem lehet nulla, a következő peremfeltételekhez jutunk:

$$\Phi'(\pm\infty) = \Phi(\pm\infty) = 0 \tag{A2.36}$$

Ezek a peremfeltételek a CMM-ot használva, bármelyik végtelenből kezdve a megoldást automatikusan kielégülnek a kiindulópontban, ha az (A2.26) kezdeti értékeket használjuk. Azt a módszert követjük, hogy $+\infty$-től indítjuk az integrálást -∞ felé, és keressük azokat a paramétereket, amikre az $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ változók -∞-nél is az (A2.26)-as értékeket veszik fel. Közben figyelnünk kell arra, hogy CMM módszer függvényei a pozitív számsíkról a negatívra váltva megváltoznak, azonban ez technikailag csak előjelcserét jelent α-n és Q-n. A végtelen numerikus megoldás során természetesen értelmezhetetlen, ezért olyan y-ról indítottam a megoldást ahol az időben állandó sebességkomponens elhanyagolhatóan kicsi. Ezért az analitikus megoldások esetén $y = \pm 12$-t választottam a $\pm\infty$-nek, ahol a $\mathrm{sech}^2(y) \approx 10^{-10}$. A CFD szimulációkból kapott sebességprofilok, a vizsgált tartományon, a numerikus hibák miatt nem értek el ilyen alacsony értéket, azonban a korábban ismertetett CMM módszer esetén feltételeztük, hogy a sebességprofil értéke a végtelenben zérus.

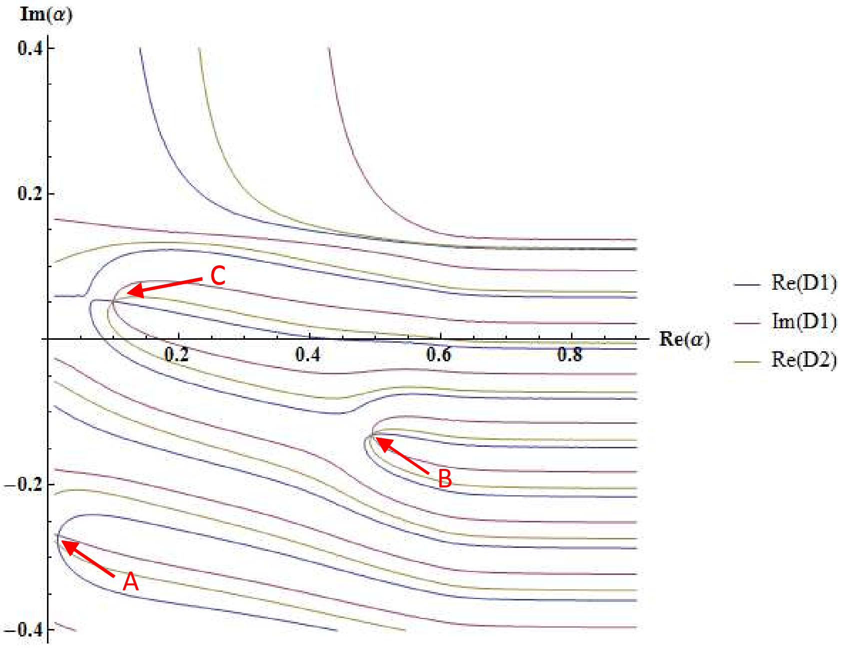
A dimenziótlan Orr-Sommerfeld egyenletben több paraméter is változtatható, azonban ezek közül csak három független. Számításaim során a következőket választottam: Re, ω és α. Ezek közül a két utóbbi komplex szám is lehet, azonban ez túl sok különböző megoldást jelentene, ezért két fő stabilitásvesztési lehetőséget különböztetünk meg. Az első az úgynevezett időbeli stabilitásvesztés, ekkor feltételezzük, hogy $\omega = \omega_r + \omega_i$ komplex, míg α valós szám. Ekkor a (A2.3) megoldási alak szerint a perturbáció növekedési rátáját $\mu = -\omega_i$ jelenti. A másik pedig a térbeli, ebben az esetben az $\alpha = \alpha_r + \alpha_i$ komplex, míg ω valós szám, a növekedési rátát pedig a $\mu = -\alpha_i$ jelenti. A valóságban természetesen előfordulhat, hogy a stabilitásvesztés egyszerre időbeli és térbeli, azonban a tapasztalat azt mutatja, hogy a tisztán térbeli stabilitásvesztés szabadsugarak esetén jól közelíti a kísérleti eredményeket. Ezért ebben a dolgozatban csak a térbeli stabilitásvesztéssel fogunk foglalkozni.

Eszerint tetszőleges, de adott Re, ω valós számok esetén kell meghatározni azt a komplex α értéket, amely esetén kielégülnek a korábban ismertetett peremfeltételek. Definiáljunk egy $\boldsymbol{D}(Re, \omega, \alpha)$ hatdimenziós függvényt, amely adott Re, ω és α paraméterek esetén a mínusz végtelenben kiszámított, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(-\infty)$ és az elvárt, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\infty$ érték (2.2.20) különbségét adja vissza:

$$\boldsymbol{D}(Re, \omega, \alpha) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}(-\infty) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}_\infty \tag{A2.37}$$

Ekkor a feladat felfogható úgy, hogy adott Re, ω esetén kell meghatározni $\boldsymbol{D}(Re, \omega, \alpha)$, így már egyváltozós, hatdimenziós függvény gyökeit. A probléma ezzel az, hogy nincs olyan általunk ismert módszer, amivel egy változó változtatásával egyszerre hat értéknél lehet a zérust biztosítani. Ezért első lépésben megvizsgáltuk, hogy egy adott α komplex síkon, a $\boldsymbol{D}$ függvény elemei hol veszik fel a nulla értéket, majd külön-külön ábrázoltuk valós és képzetes részüket (A2.1. ábra).

A jobb láthatóság kedvéért csak az első elemet, illetve a második valós részét ábrázoltam. Bickley-profil esetén a többi változót is megvizsgáltuk, és úgy találtuk, hogy ha ez a három komponens zérus, akkor a többi is az, tehát kielégítő ezt a három függvényt vizsgálni. Emellett úgy ítéljük meg, hogy annak az esélye, hogy három így definiált görbe egy pontban metssze egymást, és az adott pont ne egy saját-hullámszámhoz tartozzon, nagyon alacsony. Később, az eredmények ismertetésénél látható lesz, hogy nagy Reynolds-számok esetén a megoldás közel azonos a Rayleigh egyenlet megoldásával, és ebből is arra következtethetünk, hogy a módszer működőképes.



A2.1. ábra. A *D* függvény zérusértékű szintvonalai

Az A2.1. ábrán a $\mathrm{sech}^2(y^2)$ profil szintvonalai látható láthatók $Re = 100, \omega = 0{,}1$ esetén. Itt az A zéruspont téves találat lenne, mert a D_1 zérus lenne, azonban a vektor többi eleme nem. A B pont lesz az első „saját-hullámszám”, míg C a második. (A hullámszámok sorrendiségét a képzetes részük szerint a legkisebbtől haladva a nagyobbak felé számoztuk, hiszen a legelső növekedési rátája a legnagyobb. A továbbiakban csak az első saját-hullámszámmal fogunk foglalkozni.) Ezek után, a megoldás pontosítása érdekében, Newton-Raphson módszerrel végeztünk gyökkeresést, amelyet a szintvonalak megfelelő metszéspontjából indítottunk. A Re és ω paraméterek változtatása esetén már nem végeztük el a teljes α síknak a vizsgálatát, hanem feltételeztük, hogy kis paraméterváltozás esetén a saját-hullámszám értéke is csak kis mértékben változik. Így egy pontból kiindulva, és a továbbiakban az előző pont eredményéből indítva az újabb gyökkeresést, fel tudtuk térképezni a kívánt $\{Re, \omega\}$ paraméter tartományt.

Egy másik megoldás lehetne, hogy a vektor $|\boldsymbol{D}|$ nagyságát vesszük figyelembe, ekkor minimum-keresést kellene végezni gyökkeresés helyett. Az ilyen algoritmusok azonban jóval lassabbak, és ebben az esetben sem biztosított, hogy az első „saját-hullámszámot” találjuk meg. Így az A2.1 ábrán is bemutatott, előzetes keresést ebben az esetben sem tudjuk kiküszöbölni.

IRODALOMJEGYZÉK

Ahmed, S., Sutalo, I., Kavnoudias, H., & Madan, A. (2011). Numerical investigation of hemodynamics of lateral cerebral aneurysm following coil embolization. *Eng. Appl. Comp. Fluid Mech. , 5* (3), 329-340.

Ahuja, K. K., & Mendoza, J. (1995). *Effects of cavity dimensions, boundary layer, and temperature on cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes.* NASA: Georgia Tech Research Inst., Atlanta.

Appanaboyina, S., Mut, F., Löhner, R., Putman, C., & Cebral, J. (2009). Simulation of intracranial aneurysm stenting: Techniques and challenges. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng. , 198* (45-46), 3567–3582.

Aref, H. (1984). Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech. , 143*, 1–21.

Arko, F., Murphy, E., Davis, C., Johnson, E., Smith, S., & Zarins, C. (2007). Dynamic geometry and wall thickness of the aortic neck of abdominal aortic aneurysms with intravascular ultrasonography. Thirty-First Annual Meeting of the Southern Association for Vascular Surgery, Puerto Rico, January 18-21.

Augsburger, L., Reymond, P., Rufenacht, D. A., & Stergiopulos, N. (2011). Intracranial stents being modeled as a porous medium: Flow simulation in stented cerebral aneurysms. *Ann. Biomed. Eng. , 39* (2), 850–863.

Babiker, M., Gonzalez, L., Albuquerque, F., Collins, D., Elvikis, A., & Frakes, D. (2010). Quantitative effects of coil packing density on cerebral aneurysm fluid dynamics: an in vitro steady flow study. *Ann. Biomed. Eng. , 38* (7), 2293–2301.

Bamberger, A., Baensch, E., & Siebert, K. G. (2004). Experimental and numerical investigation of edge tones. *Z Angew Math Mech , 84* (9), 632-646.

Bárdossy, G., & Halász, G. (2011). Modelling bolld flow in the arterial system. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering , 55*, 49-55.

Basdevant, C., & Philipovitch, T. (1994). On the validity of the Weiss criterion in two-dimensional turbulence. *Physica D , 73* (1-2), 17-30.

Bechert, D., & Pfizenmaier, E. (1975). On wavelike perturbations in a free jet travelling faster than the mean flow of the jet. *Journal of Fluid Mechanics , 72* (2), 341-352.

Bilanin, A. A., & Covert, E. E. (1973). Estimation of possible excitation frequencies for shallow rectangular cavities. *AIAA J , 11* (3), 347-351.

Blake, W. K., & Powell, A. (1986). The devekopment of contemporary views of flow tone generation. In A. a. Krothapalli (Szerk.), *Recent advances in aeroacoustics* (old.: 247-335). Berlin: Springer.

Boutsianis, E., Guala, M., Olgac, U., Wildermuth, S., Hoyer, K., Ventikos, Y., és mtsai. (2009). CFD and PTV steady flow investigation in an anatomically accurate abdominal aortic aneurysm. *J. Biomech. Eng. , 131* (1), 011008.

Brackenridge, J. B. (1960). Transverse oscillations of a liquid jet. *J Acoust Soc Am , 32* (4), 1237-1242.

Brackenridge, J. B., & Nyborg, W. L. (1957). Acoustical characteristics of oscillating jet-edge systems in water. *J Acoust Soc Am , 29* (4), 459-463.

Brés, G. A., & Colonius, T. (2008). Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities. *J Fluid Mech , 599* (1), 39-339.

Brilstra, E. H., Rinkel, G. J., van der Graaf, Y., van Rooij, W., & Algra, A. (1999). Treatment of intracranial aneurysms by embolization with coils: a systematic review. *Stroke , 30* (2), 470-476.

Brown, G. B. (1937). The vortex motion causing edge tones. *P Phys Soc Lond , 49* (1), 493-521.

Byrne, J. V., Beltechi, R., Yarnold, J. A., Birks, J., & Kamran, M. (2010). Early experience in the treatment of intra-cranial aneurysms by endovascular fl ow diversion: A multicentre prospective study. *PLOS One , 5* (9), 1-8.

Castro, M. A., Putman, C. M., & Cebral, J. R. (2006). Computational fluid dynamics modeling of intracranial aneurysms: Effects of parent artery segmentation on intra-aneurysmal hemodynamics. *American Journal of Neuroradiology , 27* (8), 1703-1709.

Cebral, J. R., & Lohner, R. (2005). Efficient simulation of blood flow past complex endovascular devices using an adaptive embedding technique. *IEEE T. Med. Imaging 24(4), (2005) , 24* (4), 468–476.

Cebral, J. R., A.., C. M., Appanaboyina, S., Putman, C. M., Millan, D., & F., F. A. (2005). Efficient pipeline for image-based patient-specific analysis of cerebral aneurysm hemodynamics: Technique and sensitivity. *IEEE Trans Med Imaging , 24* (4), 457-467.

Cebral, J. R., Radaelli, A., Frangi, A., & Putman, C. M. (2007). Qualitative comparison of intra-aneurysmal flow structures determined from conventional and virtual angiograms. Medical Imaging 2007: Physiology, Function, and Structure from Medical Images, vol. 6511. SPIE, San Diego CA USA, p 65,111E–65,1119E.

Chang, K., Constantinescu, G. S., & Park, S. (2006). Analysis of the flow and mass transfer processes for the incompressible flow past an open cavity with a laminar and fully turbulent incoming boundary layer. *J Fluid Mech , 561* (1), 113-145.

Chatellier, L., Laumonier, J., & Gervais, Y. (2004). Theoretical and experimental investigations of low Mach number turbulent cavity flows. *Exp Fluids , 36* (5), 728-740.

Crighton, D. (1992). The edgetone feedback cycle. Linear theory for the operating stages. *J Fluid Mech , 232* (1), 361-391.

Curle, N. (1953). The mechanics of edge-tones. *P Roy Soc Lond A Mat , 216* (1), 412-424.

D'Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P., & and Luo, L.-S. (2002). Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. *Philosophical Transactions of the Royal Society - Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences , 360* (1792), 437-451.

Davies, P. F. (1995). Flow-Mediated Endothelial Mechanotransduction. *Physiological Reviews , 75* (3), 519-560.

Dequand, S., Hulshoff, S., & Hirschberg, A. (2003). Self-sustained oscillations in a closed side branch system. *J Sound Vib , 265* (2), 359-386.

East, L. F. (1966). Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities. *J Sound Vib , 3* (3), 277-287.

Egelhoff, C., Budwig, R., Elger, D., Khraishi, T., & Johansen, K. (1999). Model studies of the flow in abdominal aortic aneurysms during resting and exercise conditions. *Journal of Biomechanics , 32*, 1319-1329.

Farkas, B., & Paál, G. (2009). Computational investigation on the oscillation frequencies of the shear layer over an open cavity. In J. Vad (Szerk.), *Department of Fluid Mechanics, Budapest University of Technology and Economics*, (old.: 674-681). Budapest, Hungary.

Farkas, B., & Paál, G. (2015). Numerical Study on the Flow over a Simplified Vehicle Door Gap – an Old Benchmark Problem Is Revisited. *Periodica Polytechnica Civil Engineering* , online first. DOI: 10.3311/PPci.7474.

Farkas, B., Paál, G., & Szabó, K. G. (2012). Descriptive analysis of a mode transition of the flow over an open cavity. *Phys Fluids , 24* (2), 24.

Faure, T. M., Adrianos, P., Lusseyran, F., & Pastur, L. (2007). Visualizations of the flow inside an open cavity at medium range Reynolds numbers. *Exp Fluids , 42* (2), 169-184.

Ford, M. D., Nikolov, H. N., Milner, J. S., Lownie, S. P., DeMont, E. M., Kalata, W., és mtsai. (2008). Piv-measured versus cfd-predicted flow dynamics in anatomically realistic cerebral aneurysm models . *J. Biomech. Eng. , 130* (2), 021015 - 9.

Ford, M. D., Stuhne, G. R., Nikolov, H. N., Habets, D. F., Lownie, S. P., Holdsworth, D. W., és mtsai. (2005). Virtual angiography for visualization and validation of computational models of aneurysm hemodynamics. *IEEE Trans. Med. Imaging , 24* (12), 1586-1592.

Gee, J., Reeps, C., Eckstein, H., & Wall, W. (2009). Prestressing in finite deformation abdominal aortic aneurysm simulation. *J. Biomech , 42*, 1732-1739.

Geest, J., Sacks, M., & Vorp, D. (2006). The effects of aneurysm on the biaxial mechanical behavior of human abdominal aorta. *Journal of Biomechanics , 39*, 1324-1334.

Gharib, M., & Roshko, A. (1987). The effect of flow oscillations on cavity drag. *J Fluid Mech , 177* (4), 501-530.

Goubergrits, L., Thamsen, B., Berthe, A., Poethke, J., Kertzscher, U., Affeld, K., és mtsai. (2010). In vitro study of near-wall flow in a cerebral aneurysm model with and without coils. *Am. J. Neuroradiol. , 31* (8), 1521-1528.

Grace, S. M., Dewar, W. G., & Wroblewski, D. E. (2004). Experimental investigation of the flow characteristics within a shallow wall cavity for both laminar and turbulent upstream boundary layers. *Exp Fluid , 36* (5), 791-804.

Groden, C., Laudan, J., Gatchell, S., & Zeumer, H. (2001). Three dimensional pulsatile flow simulation before and after endovascular coil embolization of a terminal cerebral aneurysm. *J. Cereb. Blood Flow Metab. , 21* (12), 1464–1471.

Guglielmi, G., Viñuela, F., Dion, J., & Duckwiler, G. (1991). Electrothrombosis of saccular aneurysms via endovascular approach. Part 2: Preliminary clinical experience. *J. Neusurg. , 75* (1), 8-14.

Gülan, U., Lüthi, B., Holzner, M., Tsinober, A., Markl, M., & Kinzelbach, W. (2009). Experimental analysis of a human aorta via particle imaging and tracking velocimetry. 6th international symposium on turbulence, heat and mass transfer, September 2009, Rome, Italy.

Haigermoser, C., Vesely, L., Novara, M., & Onorato, M. (2008). A time-resolved particle image velocimetry investigation of a cavity flow with a thick incoming turbulent boundary layer. *Phys Fluids , 20* (10), 105101-105101-14.

Haller, G. (2001). Lagrangian structures and the rate of strain in apartition of two-dimensional turbulence. *Phys Fluids , 13* (11), 3365-3385.

Henderson, B. (2000). Automobile noise involving feedback-sound generation by low speed cavity flows. *Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems , 1*, 95-100.

Hoi, Y., Woodward, S. H., Kim, M., T. D., & M. H. (2006). Validation of cfd simulations of cerebral aneurysms with implication of geometric variations. *J. Biomech. Eng. , 124* (6), 844-851.

Holger, D. K., Wilson, T. A., & Beavers, G. S. (1977). Fluid mechanics od the edgetone. *J Acoust Soc Am , 62* (1), 1116-1128.

Hope, T. A., Hope, M. D., Purcell, D. D., Vigneron, D. B., Alley, M. T., & Dillon, W. P. (2010). Evaluation of intracranial stenoses and aneurysms with accelerated 4D flow. *Magn. Reson. Imaging , 28* (1), 41-46.

Hua, B., & Klein, P. (1998). An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D , 113* (1), 98-110.

Isoda, H. 1., Ohkura, Y., Kosugi, T., Hirano, M., Alley, M. T., Bammer, R., és mtsai. (2010). Comparison of hemodynamics of intracranial aneurysms between MR fluid dynamics using 3D cine phase-contrast MRI and MR-based computational fluid dynamics. *Neuroradiology , 52* (10), 913-920.

Isuia, I. (1998). Unruptured intracranial aneurysms{risk of rupture and risks of surgical intervention. International study of unruptured intracranial aneurysms investigators. *The New England Journal of Medicine , 339* (24), 1725-1733.

Jones, A. T. (1942). Edge Tones. *J Acoust Soc Am , 14* (2), 131-139.

Józsa, I. T., & Paál, G. (2014). Boundary conditions for flow simulations of abdominal aortic aneurysms. *International Journal of Heat and Fluid Flow , 50*, 342-351.

Kakalis, N. M., Mitsos, A. P., Byrne, J. V., & Ventikos, Y. (2008). The haemodynamics of endovascular aneurysm treatment: a computational modelling approach for estimating the influence of multiple coil deployment. *IEEE T. Med. Imaging , 27* (6), 814-824.

Karmonik, C., K. R., & Benndorf, G. (2008). Comparison of velocity patterns in an AComA aneurysm measured with 2D phase contrast MRI and simulated with CFD . *Technol. Health Care , 16* (2), 119-128.

Károlyi, G., & Tél, T. (1997). Chaotic tracer scattering and fractal basin boundaries in a blinking vortex-sink system. *Phys. Rep. , 290* (1), 125-247.

Kawaguchi, T., N. S., Kanamori, M., T. H., Omodaka, S., Sato, K., és mtsai. (2012). Distinctive flow pattern of wall shear stress and oscillatory shear index: similarity and dissimilarity in ruptured and unruptured cerebral aneurysm blebs: Clinical article. *Journal of Neurosurgery , 117* (4), 774-780.

Kaykayoglu, R., & Rockwell, D. (1986). Unstable jet-edge interaction. Part 1. Instantaneous pressure fields at single frequency. *J Fluid Mech , 169* (08), 125-149.

Kaykayoglu, R., & Rockwell, D. (1986). Unstable jet-edge interaction. Part 2. Multiple frequency pressure fields. *J Fluid Mech , 169* (08), 151-172.

Kegerise, M. A., Spina, E. F., Garg, S., & III, L. N. (2004). Mode-switching and nonlinear effects in compressible flow over a cavity. *Phys Fluids , 16* (1), 678-687.

Knisely, C., & Rockwell, D. (1982). Self-sustained low-frequency components in an impinging shear layer. *J Fluid Mech , 116* (2), 157-186.

Koh, S. R., Cho, Y., & Moon, Y. J. (2003). Aeroacoustic computation of cavity flow in self-sustained oscillations. *KSME Int J , 4* (17), 590-598.

Kondo, S., H., N., K., H., & H., F. (1997). Cerebral aneurysms arising at nonbranching sites: an experimental study. *Stroke , 28* (2), 398-404.

Kook, H., Mongeau, L., & Franchek, M. (2002). Active control of pressure fluctuations due to flow over Helmholtz resonators. *J Sound Vib , 255* (1), 61-76.

Koponen, A., Kataja, M., & Timonen, J. (1997). Permeability and effective porosity of porous media. *Phys Rev E , 56* (3), 3319-3325.

Kourta, A., & Vitale, E. (2008). Analysis and ontrol of cavity flow. *Phys Fluids , 20* (7), 77-104.

Kriesels, P., Hofmans, G., Peters, M., & Hirschberg, A. (1995). Flow induced pulsation in pipe systems. In P. Bearman (Szerk.), *A.A. Balkemia*, (old.: 505-514). Rotterdam, Netherlands.

Krishnamurthy, K. (1956). *Sound radiation from surface cutouts in high speed flow.* Ph.D. thesis: California Institute of Technology.

Ku, D. N. (1997). Blood flow in arteries. *Annual Review of Fluid Mechanics , 29*, 399-434.

Kurbatskii, K., & Tam, C. K. (2000). Direct numerical simulation of automobile cavity tones. *Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems , 1*, 371-383.

Kuwahara, F., Kameyama, Y., Y. S., & Nakayama, A. (1998). Numerical modeling of turbulent flow in porous media using a spatially periodic array. *J. Porous Media , 1*, 47-55.

Kwon, Y.-P. (1998). Feedback mechanism of low-speed edgetones. *J Acoust Soc Am , 12* (4), 2084-2089.

Kwon, Y.-P. (1996). Phase-locking condition in the feedback loop of low-speed edgetones. *J Acoust Soc Am , 100* (5), 3028-3032.

Lasheras, J. C. (2007). The biomechanics of arterial aneurysms. *Annual Review of Fluid Mechanics , 39*, 293-319.

Lawson, S., & Barakos, G. (2011). Review of numerical simulations for high-speed turbulent cavity flows. *Prog Aeorsp , 47* (3), 186-216.

Lee, S., Seena, A., & Sung, H. (2010). Self-sustained oscillations of turbulent flow in an open cavity. *J Aircraft , 47* (3), 820-834.

Lewis, R. I. (1991). *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems.* Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press.

Lin, J. C., & Rockwell, D. (2001). Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity. *AIAA J , 39* (6), 1139-1151.

Liou, T. M., Chang, W. C., & Liao, C. C. (1997). Ldv measurements in lateral model aneurysms of various sizes. *Exp. Fluids , 23* (4), 317-324.

Longstreth Jr, W., Koepsell, T., Yerby, M., & van Belle, G. (1985). Risk factors for subarachnoid hemorrhage. *Stroke , 16* (3), 377-385.

Lucas, M., & Rockwell, D. (1984). Self-excited jet: upstream modulation and multiple frequencies. *J Fluid Mech , 147* (10), 333-352.

Lusseyran, F., Pastur, L., & Letellier, C. (2008). Dynamical analysis of an intermittency in an open cavity flow. *Phys Fluids , 20* (1), 114101.

Lylyk, P., Miranda, C., Ceratto, R., Ferrario, A., Scrivano, E., Luna, H. R., és mtsai. (2009). Curative endovascular reconstruction of cerebral aneurysms with the pipeline embolization device: The Buenos Aires experience. *Neurosurgery , 64* (4), 632–642.

Mattingly, G., & Criminale, W. (1971). Disturbance characteristics in a plane jet. *Phys FLuids , 14* (11), 2258-2264.

Meckel, S., Stalder, A., Santini, F., Radü, E. W., Rüfenacht, D., Markl, M., és mtsai. (2008). In vivo visualization and analysis of 3-D hemodynamics in cerebral aneurysms with flow-sensitized 4-D MR imaging at 3 T. *Neuroradiology , 50* (6), 473-484.

Michalke, A. (1971). The instability of a compressible circular jet with finite boundary layer thickness (in German). *Z. Flugwiss. , 19*, 319.

Morales, H. G., Kim, M., Vivas, E. E., Villa-Uriol, M. C., Larrabide, I., Sola, T., és mtsai. (2011). How do coil configuration and packing density influence intra-aneurysmal hemodynamics? *Am. J. Neuroradiol. , 32* (10), 1935-1941.

Morris, S. C. (2011). Shear-layer instabilities: Particle image velocimetry measurements and implications for acoustics. *Annu Rev Fluid Mech , 43* (1), 529-550.

Murray, N., Sällström, E., & Ukeiley, L. (2009). Properties of subsonic open cavity flow fields. *Phys Fluids , 21* (9), 095103.

Nelson, P. K., Lylyk, P., Szikora, I., Wetzel, S., Wanke, I., & Fiorella, D. (2011). The pipeline embolization device for the intracranial treatment of aneurysms trial. *Am. J. Neuroradiol. , 32* (1), 34-40.

Nichols, W. W., & O'Rourke, M. F. (1990). *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental and Clinical Principles.* London: Edward Arnold.

Nonomura, T., Muranaka, H., & Fujii, K. (2006). Computational analysis of Mach number effects on edgetone. *AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, *2006-2876.* San Fransisco, California.

Nonomura, T., Muranaka, H., & Fujii, K. (2010). Computational analysis of Mach number effects on the edgetone phenomenon. *AIAA J , 48* (6), 1248-1251.

Okubo, A. (1970). Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep-Sea Res , 17* (1), 445-454.

Ortega, J., Hartman, J., Rodriguez, J., & Maitland, D. (2008). Post-treatment hemodynamics of a basilar aneurysm and bifurcation. *Ann. Biomed. Eng. , 36* (9), 1531–1546 .

Oshima, M., Sakai, H., & T. R. (2005). Modelling of inflow boundary conditions for image-based simulation of cerebrovascular flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids , 47* (6-7), 603-617.

Ottino, J. (1990). Mixing, chaotic advection, and turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech. , 22* (1), 207–254.

Paál, G., & Vaik, I. (2007). Unsteady phenomena in the edge tone. *Int J Heat Fluid Fl , 28* (4), 575-586.

Paal, G., Ugron, A., Szikora, I., & B. I. (2007). Flow in simplified and real models of intracranial aneurysms. *Int. J. Heat Fluid Flow , 28* (4), 653–664.

Pedley, T. J. (1980). *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels.* Cambridge: Cambridge University Press.

Pereira, J., & Sousa, J. (1995). Experimental and numerical investigation of flow oscillations in a rectangular cavity. *J Fluid Eng-T ASME , 117* (1), 68-74.

Powell, A. (1961). On the edgetone. *J Acoust Soc Am , 33* (4), 395-409.

Qian, Y. H., D'Humières, D., & Lallemand, P. (1992). Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. *EPL (Europhysics Letters) , 17* (6), 479.

Qian, Y., Takao, H., Umezu, M., & Murayama, Y. (2011). Risk analysis of unruptured aneurysms using computational fluid. *American Journal of Neuroradiology , 32* (10), 1948-1955.

Radaelli, A. G., Augsburger, L., Cebral, J. R., Ohta, M., Rüfenacht, D. A., Balossino, R., és mtsai. (2008). Reproducibility of haemodynamical simulations in a subject-specific stented aneurysm model – A report on the virtual intracranial stenting challenge 2007. *J. Biomech. , 41* (10), 2069–2081.

Raghavan, M. L., & Vorp, D. A. (2000). Toward a biomechanical tool to evaluate rupture potential of abdominal aortic aneurysm: identification of a finite strain constitutive model and evaluation of its applicability. *Journal of Biomechanics , 33* (4), 475-482.

Reeps, C., Maier, A., Pelisk, J., Hrtl, F., Grabher-Meier, V., Wall, W., és mtsai. (2013). Measuring and modeling patient-specific distributions of material properties in abdominal aortic aneurysm wall. *Biomechanics and Modelling in Mechanobiology , 12* (4), 717-733.

Rinkel, G. J., Djibuti, M., Algra, A., & van Gijn, J. (1998). Prevalence and risk of rupture of intracranial aneurysms: a systematic review. *Stroke , 29* (1), 251-256.

Rockwell, D. (1983). Oscillations of impinging shear layers. *AIAA J , 21* (5), 645-664.

Rockwell, D., & Knisely, C. (1980a). Observations of the three-dimensional nature of unstable flow past a cavity. *Phys Fluids , 23* (3), 425-431.

Rockwell, D., & Knisely, C. (1980b). Vortex-edge interaction: Mechanisms for generating low frequency components. *Phys Fluids , 23* (2), 239-240.

Rockwell, D., & Naudascher, E. (1978). Review self-sustaining oscillations of flow past cavities. *J. Fluids Eng. , 100* (7), 152-165.

Rockwell, D., & Naudascher, E. (1979). Self-sustained oscillations of impinging free shear layers. *Annu Rev Fluid Mech , 11* (1), 67-94.

Rossiter, J. E. (1964). *Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds.* London: Aeronautical Research Council Reports and Memoranda.

Rowley, C., Colonius, T., & Basu, A. J. (2002). On self-sustained oscillations in two-dimensional compressible flow over rectangular cavities. *J Fluid Mech , 455* (1), 315-346.

Sarohia, V. (1976). Experimental investigation of oscillations in flows over shallow cavities. *AIAA J , 15* (7), 984-991.

Savic, P. (1941). On acoustically effective vortex motion in gaseous jets. *Philos Mag , 32* (212), 245-252.

Schelin, A., Károlyi, G., De Moura, A., Booth, N., & Grebogi, C. (2009). Chaotic advection in blood flow. *Phys Rew. E , 80*, 016213.

Ségoufin, C., Fabre, B., & de Lacombe, L. (2004). Experimental Investigation of the Flue Channel Geometry Influence on Edge-tone Oscillations. *Acta Acustica united with Acustica , 90* (5), 966-975.

Sengupta, T. K. (2012). *Instabilities of flows and transition to turbulence* (1. kiad.). Florida, USA: CRC press.

Sengupta, T. K. (2012). *Instabilities of Flows and Transition to Turbulence.* CRC Press.

Seshadhri, S., Janiga, G., B., P., Rose, G., Skalej, M., & Thévenin, D. (2009). Numerical simulation and experimental validation in an exact aortic arch aneurysm model. 4th European Conference of the International Federation for Medical and Biological Engineering: IFMBE Proceedings, Volume 22, pp 1975-1979 .

Sforza, D. M., M., P. C., & Cebral, J. R. (2009). Hemodynamics of cerebral aneurysms. *Annual Review of Fluid Mechanics , 41* (1), 91-107.

Sho, E., Sho, M., Singh, T. M., Xu, C., Zarins, C. K., & Masuda, H. (2001). Blood flow decrease induces apoptosis of endothelial cells in previously dilated arteries resulting from chronic high blood flow. *Arteriosclerosis, thrombosis and vascular biology , 21* (7), 1139-1145.

Shojima, M., Oshima, M., T. K., Torii, R., Hayakawa, M., Katada, K., és mtsai. (2004). Magnitude and role of wall shear stress on cerebral aneurysm computational fluid dynamic study of 20 middle cerebral artery aneurysms. *Stroke , 35* (11), 2500-2505.

Sluzewski, M., Rooij, W. V., Slob, M. J., Bescós, J. O., Slump, C. H., & Wijnalda, D. (2004). Relation between aneurysm volume, packing, and compaction in 145 cerebral aneurysms treated with coils. *Radiology , 231* (3), 653–658 .

Stalder, A., Frydrychowicz, A., Russe, M., Korvink, J., Hennig, J., Li, K., és mtsai. (2011). Assessment of flow instabilities in the healthy aorta using flow-sensitive MRI. *J. Magn. Reson. Imaging , 33*, 839-846.

Stegen, G. R., & Karamcheti, K. (1970). Multiple tone operation of edgetones. *J Sound Vib , 12* (3), 281-284.

Stehbens, W. E. (1989). Etiology of intracranial berry aneurysms. *Journal of Neurosurgery , 70* (6), 823-831.

Steiger, H.-J. (1989). Pathophysiology of development and rupture of cerebral aneurysms. *Acta Neurochirurgica Supplementum , 48*, 1-57.

Stuhne, G. R., & Steinman, D. A. (2004). Finite-element modeling of the hemodynamics of stented aneurysms. *J. Biomech. Eng. , 126* (3), 382–387.

Succi, S. (2001). *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond.* Oxford: Clarendon Press.

Sun, Q., Groth, A., Bertram, M., Waechter, I., Bruijns, T., Hermans, R., és mtsai. (2010). Phantom-based experimental validation of computational fluid dynamics simulations on cerebral aneurysms. *Med. Phys. , 37* (9), 5054-5065.

Szikora, I., Berentei, Z., Kulcsar, Z., Marosfoi, M., Vajda, Z. S., Lee, W., és mtsai. (2010). Treatment of intracranial aneurysms by functional reconstruction of the parent artery: The Budapest experience with the pipeline embolization device. *Am J Neuradiol , 31*, 1139-1147.

Szikora, I., Berentei, Z., Kulcsar, Z., Marosfoi, M., Vajda, Z., Lee, W., és mtsai. (2010). Treatment of intracranial aneurysms by functional reconstruction of the parent artery: the Budapest experience with the pipeline embolization device. *Am. J. Neuroradiol. , 31* (6), 1139-1147.

Szikora, I., Paal, G., Ugron, A., Nasztanovics, F., Marosfoi, M., Berentei, Z., és mtsai. (2008). Impact of aneurysmal geometry on intraaneurysmal flow: a computerized flow simulation study. *Neuroradiology , 50* (5), 411–421.

Taha, M. M., Nakahara, I., Higashi, T., Iwamuro, Y., Iwaasa, M., Watanabe, Y., és mtsai. (2006). Endovascular embolization vs surgical clipping in treatment of cerebral aneurysms: morbidity and mortality with short-term outcome. *Surgical Neurology , 66* (3), 277-284.

Tam, C. K., & Block, P. J. (1978). On the tones and pressure oscillations induced by flow over rectangular cavities. *J Fluid Mech , 89* (2), 373-399.

Tateshima, S. 1., M. Y., Villablanca, J. P., Morino, T., H., T., Yamauchi, T., és mtsai. (2001). Intraaneurysmal flow dynamics study featuring an acrylic aneurysm model manufactured using a computerized tomography angiogram as a mold. *J. Neurosurg. , 95* (6), 1020-1027.

Tél, T. (1988). Fractals, multifractals and thermodynamics. *Z. Naturforsch. , 43a*, 1154.

Tél, T., & Gruiz, M. (2006). *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics.* New York, U.S.A.: Cambridge University Press.

Tél, T., de Moura, A., Grebogi, C., & Károlyi, G. (2005). Chemical and biological activity in open flows: a dynamical system approach. *Phys.Rep. , 413* (2), 91–196.

Torii, R., Oshima, M., Kobayashi, T., Takagi, K., & Tezduyar, T. E. (2007). Influence of wall elasticity in patient-specific hemodynamic simulations. *Computers and Fluids , 36* (1), 160-168.

Toroczkai, Z., Károlyi, G., Péntek, Á., Tél, T., & Grebogi, C. (1998). Advection of active particles in open chaotic flows. *Phys. Rev. Lett. , 80* (3), 500.

Truesdell, C. (1953). Two measures of vorticity. *J Ration Mech Anal , 2* (2), 173-217.

Ugron, Á., & Paál, G. (2014). On the boundary conditions of cerebral aneurysm simulations. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering , 58* (1), 37-45.

Ugron, Á., Farinas, M.-I., Kiss, L., & Paál, G. (2012). Unsteady velocity measurements in a realistic intracranial aneurysm model. *Exp. Fluids , 52*, 37-52.

Ugron, Á., Szikora, I., & Paál, G. (2012a). Haemodynamic changes induced by intrasaccular packing on intracranial aneurysms: A computational fluid dynamic study. *Interventional Medicine & Applied Science , 4* (2), 78–84.

Ujiie, H., Tachibana, H., Hiramatsu, O., Hazel, A. L., Matsumoto, T., Ogasawara, Y., és mtsai. (1999). Effects of size and shape (aspect ratio) on the hemodynamics of saccular aneurysms: A possible index for surgical treatment of intracranial aneurysms. *Neurosurgery , 45* (1), 119-129.

Vaik, I., & Paál, G. (2011). Mode switching and hysteresis in the edge tone. *Journal of Physics, Conference Series , 268* (1).

Vaik, I., Paál, G., Kaltenbacher, M., Triebenbacher, S., Becker, S., & Shevchenko, I. (2013). Aeroacoustics of the Edge Tone: 2D-3D Coupling Between CFD and CAA. *Acta Acustica united with Acustica , 99*, 245-259.

Vaik, I., Varga, R., & Paál, G. (2014a). Frequency and Phase Characteristics of the Edge Tone Part I. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering , 58* (1), 55-67.

Vaik, I., Varga, R., & Paál, G. (2014b). Frequency and Phase Characteristics of the Edge Tone Part II. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering , 58* (1), 69-76.

Vavourakis, V., Papaharilaou, Y., & Ekaterinaris, J. (2011). Coupled fluid-structure interaction hemodynamics in a zero-pressure state corrected arterial geometry. *J. Biomech , 44*, 2453-2460.

Wang, Z. K., Djambazov, G., Lai, C. H., & Pericleous, K. (2007). Numerical simulation of flow-induced cavity noise in self-sustained oscillations. *Comput Visual Sci , 3* (10), 123-134.

Weiss, J. (1991). The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D , 48* (2-3), 273-294.

Yang, Y., Rockwell, D., Cody, K. L.-F., & Pollack, M. (2009). Generation of tones due to flow past a deep cavity: Effect of streamwise length. *J Fluid Struct , 25* (2), 364-388.

Zanaty, M., Chalouhi, N., Tjoumakaris, S. I., Fernando Gonzalez, L., Rosenwasser, R. H., & Jabbour, P. M. (2014). Aneurysm geometry in predicting the risk of rupture. A review of the literature. *Neurological research , 36* (4), 308-313.

Závodszky, G., & Paál, G. (2013). Validation of a lattice Boltzmann method implementation for a 3D transient fluid flow in an intracranial aneurysm geometry. *International Journal of Heat and Fluid Flow , 44*, 276-283.

Závodszky, G., Károlyi, G., & Paál, G. (2015). Emerging fractal patterns in a real 3D cerebral aneurysm. *Journal of theoretical biology , 368*, 95-101.