

Opponensi vélemény

Bérczes Attila

EFFECTIVE RESULTS FOR DIOPHANTINE PROBLEMS OVER FINITELY
GENERATED DOMAINS

című doktori értékeléséről

A diofantikus egyenletek elmélete a matematika egyik legrégebb, legszébb de egyben legnehezebb fejezete. Az elmélet nem csak a modern számelmélet, algebra, és algebrai geometria fejlődésében játszott alapvető szerepet, hanem a matematika egészére nagy kihatással volt, még a logikára, a modellelméletre is. Habár a Hilbert 10. problémájában felvetett reményről tudjuk, hogy megvalósíthatatlan, a diofantikus egyenletek megoldhatóságának kérdése nem válaszolható meg algoritmikusan, konkrét esetekben jelentős eredmények születtek. A külső szemlélő számára esetleg elszigeletelt egyedi problémáknak tűnő terület a XX. század során néhány egyszerűen kimondható, de mégis mély alapelv mentén átlátható szerkezetbe szerveződött, széles körben használható, általános módszerekhez vezetett.

Ezek egyike a Thue-Siegel módszer, ami egy új általános problémára vezet, az úgy nevezett ineffektivitás problémájára. Ineffektív eredmények általában $P \vee Q$ típusú állításon alapulnak, ahol nem tudjuk, hogy P vagy Q áll fenn. Illusztrációként vehetjük például Siegel tételét, ha egy két változós polinom egy legalább 1 génuszú affin görbét határoz meg (a génuszt itt a komplex megoldáshalmaz által megadott topologikus felület adja), akkor a polinomnak csak véges sok egész megoldása lehet. Az állítás igaz marad, ha a megoldásokat az egész számok helyett a racionális számtest egy véges bővítése algebrai egészeinek gyűrűjében keressük. Ez a kiterjesztés klasszikus problémáknál is fontos szerepet játszik. Ami a megoldások számát illeti, az egy hipotetikus megoldás létezése esetén kvantitatív módon becsülhető, de a megoldások mérete nem. Méreten itt például a megoldások 10-es számrendszerbeli hosszát érthetjük. A méret egy kicsit pontosabb, számrendszertől független változatát magasságnak nevezünk, és az effektivitás problémája a megoldások magasságának becslése a Diofantikus egyenlet együtthatóinak illetve a megengedett megoldások gyűrűjének paramétereiben.

Bérczes disszertációja ilyen effektivitási problémákat tárgyal. Az első áttörés ezen a téren, a Thue egyenlet egész megoldásainak becslése, Baker módszeréhez fűződik. A módszert Győry Kálmán honosította meg, kiváló iskolát teremtve. Ugyancsak ő kezdeményezte a kérdés legáltalánosabb alakjának vizsgálatát, amelyben tetszőleges végesen generált tartományban keresünk effektív becslést a megoldásokra. Bérczes disszertációja ebben az általánosságban

foglalmaz meg effektivitási eredményeket az egyenletek egy nagy osztályára. A dolgozatban 17 ilyen jellegű tétel szerepel, melyek fontos előrelépést jelentenek a Diofantikus egyenletek elméletében. Ezek közül csak néhányat emelek ki, egy rövid ismertetés erejéig.

A második fejezet első tételei egy általánosabb egység egyenlet megoldásait vizsgálja algebrai számtest felett. Ezek az eredmények 2009-es megjelenésükkor úttörő jellegűek voltak, az első ilyen jellegű állításokat eredményezve. Ugyanebben a fejezetben Bérczes a Lang-Bogomolov kérdéskör egyes aleteit tárgyalja. Mordell, Lang és Bogomolov sejtéseinek bizonyítása a 80-as, 90-es évek kiemelkedő eredményei. Természetes módon merül fel ezen eredmények effektív tétele. A második fejezetben több tétel is ezt a problémát járja körül algebrai tóruszokon, effektíven számítható konstansokkal becsülve a megoldásokat.

A harmadik fejezet az általános végesen generált tartomány esetét tanulmányozza. E fejezetben jól látható, hogy Bérczes egyedül is kiemelkedő eredményeket publikált. Kiemelendő például a 3.5 és 3.6 tétel, amelyekben Everste-Győry és Bombieri-Gubler eredményeit általánosította, és effektív becsléseket adott kétváltozós polinomok egység megoldásaira egy az egészek felett végesen generált tartomány esetén.

Talán az egyetlen kritikai megjegyzésem az illusztratív példák hiánya. Bő félvszázaddal ezelőtt Lang Diofantikus geometria című absztrakt könyve és Mordell Diofantikus egyenletek című konkrét kérdésekre koncentráló munkája két szélsőséges megközelítési módot jelenített meg. A terület, és a számítástechnika is, nagyon sokat fejlődött azóta, talán illusztratív esetek alkalmanként jobban visszaadnák a diofantoszi gondolat szépségét. Különösen a korábbi becslések javításánál lett volna hasznos olyan példát látni, amikor az új becslés nem csak szignifikánsan jobb a korábbinál, hanem valamely konkrét esetben lehetővé teszi a megoldások gyakorlati felsorolását. Bár ilyen esetek ritkák, és talán illuzorikus is részemről ilyet várni, de ebben az esetben is jó lett volna valamilyen kézzel fogható példán látni a konstansok számszerűsítését, és ennek hatását, különösen a 3. fejezet tételeiben az implikált $O(\cdot)$ becslések esetén.

Összefoglalva. Győri Kálmán iskolája az egyik legrégibb matematikai hagyomány magyarországi matematikába építésére rendkívül jelentős. Ennek az iskolának kiváló képviselője Bérczes Attila, akinek a disszertációban összefoglalt, a diofantoszi egyenletek terén elért eredményei számosak, kiemelkedőek és a terület legtekintélyesebb folyóirataiban jelentek meg. A doktori értekezés vitára bocsátását és a doktori fokozat megítélését a legnagyobb mértékben támogatom.

Budapest, 2017. január 7.

Tóth Árpád