

Opponensi vélemény Bérces Attila

Effective results for Diophantine problems over finitely generated domains

című MTA DSc értekezéséről.

Bérces Attila 6 tudományos munkáját dolgozza fel Doktori értekezésében, melyek 2009 és 2015 között jelentek meg, jellemzően az Acta Arithmetica és a Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society folyóiratokban. 2 cikkének egyedüli szerzője, a továbbiaknak társszerzői J.-H. Evertse, K. Győry, és egynek még C. Pongré. Ez a Doktori értekezés benyújtásához elegendő. A későbbiekben konzekvensen a "jelölt eredménye", a "jelölt megmutatja" kifejezéseket használom, mivel nincs információ arról, ténylegesen hogyan oszlanak meg a gondolatok a társszerzők között. Ezzel természetesen sem a társszerzők érdemeit csökkenteni, sem a jelölt érdemeit túlozni nem akarom, csak a megfogalmazást egyszerűsíteni.

Az értekezés angol nyelven íródott, szerkezete logikus. Az első rész három fejezete bevezet a téma történetébe, és megismerteti az új eredményekkel. A téma összetettségére utal, hogy ez a rész mintegy 30 oldalt vesz igénybe, már a felhasznált fogalmak ismertetése sem egyszerű. A második rész a bizonyításokat tartalmazza további hat fejezetre osztva. A bizonyításokról csak annyit említenék meg, hogy nem elég az ismert módszereket kombinálni, hanem új módszerekre, például új diofantoszi approximációs tételekre is szükség van (2.6–2.7 Tételek).

Az informatív cím és bevezetés pontosan megjelöli a témát. A jelölt effektív korlátokat nyer bizonyos diofantoszi egyenletekre. Ez alatt a matematika köznyelve leginkább egész együtthatós többváltozós polinomok egész megoldásainak megadását érti. Ennél bizonyos értelemben többről van azonban szó. Köztudott, hogy gyakran nem nehezebb a megoldások végességét az egész számok halmazánál tágabb algebrai számtestek egészeinek körében kimutatni. Ez a dolgozat még ennél is tovább megy egy lépéssel, nevezetesen megmutatja, hogy sok, szép végességi eredményhez az algebrai egészek csupán egyetlen tulajdonsága kell, hogy végesen generált rácsot alkotnak (az egészek felett), azaz egy $\Gamma = \mathbb{Z}z_1 + \dots + \mathbb{Z}z_r$ alakú halmazt. (A jelölt természetesen a hivatalos "integrális tartomány" kifejezést használja, míg én, szigorúan csak itt a védésen, szemléletesebbnek tartom a rácsszerűség hangsúlyozását). Ez az észrevétel S. Lang érdeme az 1960-as évekből, de kezdetben csak ineffektív eredményeket sikerült elérni. A lassan csordogáló effektív eredmények olyan neves matematikusokhoz köthetők, mint K. Győry vagy E. Bombieri, és az említett általánosságban csak az elmúlt néhány évben születtek. Ennek a kutatásnak képviselője a jelölt is. Az is köztudott, hogy nincs olyan általános algoritmus, amivel minden diofantoszi egyenlet megoldása megtalálható, azaz a probléma minden egyenletre, vagy legalábbis egyenlet osztályokra különböző. Ez indokolja egyes speciális egyenletek vizsgálatát, egyszerűen nincs más út.

A második fejezetben ismertetett, és a 4–5. fejezetekben bizonyított tételek az algebrai esettel foglalkoznak, azaz a Γ rács generátorai $z_1, \dots, z_r$ algebrai számok. A jelölt nem csak a rácsot alkotó számok közt keresi az egyenlet megoldásait, de a rács divízió pontjai, illetve

azok különböző értelemben vett környezetében is. Minden esetben effektív végességi tételt bizonyít (esetenként egyéb feltételek teljesülése mellett). A vizsgált egyenletek

$$ax + by = 1$$

alakú egység egyenletet kielégítő $x, y \in \Gamma$ számok (2.1–2.5 Tételek). Általánosabban

$$f(x, y) = 0$$

alakú görbéken levő Γ koordinátájú pontok (2.8–2.10 Tételek). Még általánosabban, m darab N változós polinom közös gyökei varietást alkotnak, ezen varietáson levő Γ koordinátájú pontok (2.11–2.13 Tételek).

A harmadik fejezetben ismertetett, és a 6–9. fejezetekben bizonyított tételek azzal az esettel foglalkoznak, amikor az A rács generátorai $z_1, \dots, z_r$ közt algebrai és transzcendens számok egyaránt lehetnek. Megint effektív végességi tételeket bizonyít a jelölt (esetenként bizonyos feltételek teljesülése mellett). A vizsgált egyenletek

$$F(x, y) = \delta$$

alakú Thue egyenletet kielégítő $x, y \in A$ számok, ahol F egy legalább harmadfokú bináris forma (3.1 Tétel).

$$F(x) = \delta y^m$$

alakú hiper- vagy szuperelliptikus egyenletet kielégítő $x, y \in A$ számok, ahol F egy legalább harmadfokú polinom, és $m \geq 2$ rögzített egész, illetve egy egész változó (3.3–3.4 Tételek). Végül

$$F(x, y) = 0$$

alakú görbe, ahol F egy kétváltozós polinom A -beli együtthatókkal, megoldásokat pedig az A hányados testének egység csoportjában vagy annak egy végesen generált Γ részcsoportjának divízió csoportjában keresünk (3.5–3.6 Tételek).

Személy szerint e két utolsó eredményt tartom az értekezés legértékesebb részének. Egyrészt klasszikus ineffektív eredmények közös általánosítását igazolja a jelölt, ráadásul elsőként effektív korláttal. Másrészt a bizonyítás igazi érdekessége, hogy egy specializációs módszer segítségével a problémát vissza vezeti az azonos probléma algebrai számtestek, illetve függvénytestek feletti változatára. Ugyanakkor megjegyzem, hogy alkalmazások bemutatása világosabbá tehetné volna a nagyon technikainak látszó eredmények megemésztését. A harmadik fejezet (3.1–3.4 Tételek) részleteivel kapcsolatban a következő kérdést tenném fel.

Kérdés: Az A rács elemeinek mérésére természetesen ajánlkozik a maximális abszolút értékű koordináta az $\alpha = m_1 z_1 + \dots + m_r z_r$ felírásban. Ehelyett A mint a $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]$ polinomgyűrű egy faktorgyűrűje jelenik meg, azaz A elemeit polinomok reprezentálják, és az elemek méretét e polinomok fokszámából és logaritmikus magasságából számoljuk. Miért jobb a komplikáltabb méret, illetve lehet-e az egyikre kapott korlátból következtetni a másikra?

E rövid összefoglalóból is kiderül, hogy a jelölt eredményeivel kiváló, nemzetközileg elismert kutatók munkájához csatlakozik, Ő maga is a téma elismert szakértője. Az értekezés eredményei komoly tudományos visszhangot generálnak. A kicsit laikus kérdésre kapott választól függetlenül is **a Doktori értekezést nyilvános vitára alkalmasnak tartom.**

Budapest, 2016.12.20.

Balog Antal