

Bérczes Attila Doktori Értekezésének Bírálata

ELŐLJÁRÓBAN

Bérczes Attila dolgozata a számelmélet fontos, aktívan fejlődő területével foglalkozik. A dolgozatban a szerző 6 publikált cikkének eredményeit foglalja össze, ezek közül [6] és [7] önálló munka, a többi társszerzőkkel íródott. Az értekezés számos új, értékes eredményt tartalmaz, jelentős mértékben járul hozzá a számelmélet ezen ágához. Érdekes külön kiemelni az értekezés 3.6. Tételét, mely a szerző önálló eredménye: *az irodalomban ez az első effektív végerségi eredmény egy tetszőleges végesen generált csoport divízió-csoportja feletti diofantikus egyenlet megoldásaira.*

A dolgozat felépítése logikus, kívülálló számára is jól követhető. Az alapfogalmakat precízen definiálja, és a szükséges előismeretek egy részét bizonyítja is, jól megtalálva az egyensúlyt az idézés és részletes ismertetés határmezsgyéjén. Az új eredmények bizonyítása teljes, és még arra is figyel a szerző, hogy a már régen szerepelt definíciókat újra meg újra felelevenítse. Külön elismerés illeti a szerzőt, amiért ezeket a bizonyításokat kívülálló számára is érthető módon tudta megfogalmazni.

RÉSZLETES ÉRTÉKELÉS

Mivel a diofantikus egyenletek teljes általánosságban nem oldhatók meg algoritmikusan, azért a számelmélészek nagy hangsúlyt fektetnek speciális alakú egyenlet-osztályok vizsgálatára. Ebben a dolgozatban négy – igen általános – egyenlet-osztályt vizsgál a szerző: egység egyenleteket, Thue egyenleteket, hiperelliptikus egyenleteket, és szuperelliptikus egyenleteket. Mind a négy osztályban igen általános körülmények között bizonyít effektív korlátokat a megoldások méretére. Ezen korlátok lehetővé teszik (legalábbis elméletben) az ilyen típusú egyenletek algoritmikus megoldását.

A 2. fejezet algebrai számok körében (pontosabban, számtestek S -egészeinek gyűrűje fölött) vizsgálja a négy egyenlet-osztályt, a [8], [9], [11] cikkek eredményeit ismerteti. Ez egy klasszikus téma hatalmas irodalommal, már az 1900-as évek elejétől fogva sokan foglalkoznak vele, az első effektív becslések az 1960-as években születtek. A fejezet fő célja, amint azt a [8] és [9] cikkek bevezetőjében olvashatjuk, hogy sok korábban már ismert effektív becslést lényegesen precízebbé tegyen, és ezzel előkészítse az utat a 3. fejezetbeli alkalmazásukhoz. Újdonság még az is, hogy a 2.3 szakaszban adott korlátok korábban még nem voltak effektívek (lásd a [11] cikk bevezetőjét).

A 2. fejezet eredményeit a 4. és az 5. fejezetben bizonyítja a szerző. A bizonyításokat egy új Diofantikus approximációs tétel, a 2.6. Tétel mozgatja. Ennek bizonyítása pedig Liouville tételét, és konvex geometriát használ. Érdekes még megemlíteni a 2.11. Tétel bizonyítását, ami a (az 5.5. szakaszban) lineáris programozást használ.

A 3. fejezet a fenti négy egyenlet-osztályt sokkal nagyobb általánosságban, tetszőleges végesen generált tartomány felett vizsgálja. Az ilyen típusú vizsgálatok a múlt század közepe táján indultak, az első effektív becslések az 1980-as években születtek. A 3.2 szakasz a [10] cikk eredményeit ismerteti, Thue egyenletek, hiperelliptikus egyenletek, és szuperelliptikus egyenletek megoldásaira ad effektív korlátokat tetszőleges integritási tartományban. Ebben az általánosságban ez az első effektív eredmény ezekre az egyenlet-osztályokra.

A 3.3 szakasz pedig a [6] és [7] cikkeket ismerteti, majdnem tetszőleges síkgörbe egységpontjaira, illetve divízió pontjaira ad effektív korlátokat. Ebben az általánosságban ez az első effektív korlát ami majdnem minden síkgörbére érvényes. [6] és [7] a szerző önálló cikkei, és egyben ezek a disszertáció legfontosabb eredményei.

A 3. fejezet eredményeit a 7., 8., 9. fejezetekben bizonyítja a szerző. A magasság-becsléseket alkalmas specializációkkal vezeti vissza a 2. fejezet eredményeire, a foksám-becsléseket pedig lokalizálással vezeti vissza függvénytestek feletti egyenletekre vonatkozó (már ismert) becslésekre. A 3.2 szakasz tételeinek bizonyításában kulcsfontosságú, hogy a 2.2 szakasz magasság-korlátai nem függenek az egyenlet együtthatójától. A 3.3 szakasz tételeinek bizonyításánál nem állt rendelkezésre ilyen erős becslés, ezért itt a szerzőnek egy új módszert kellett találnia.

ÖSSZEFOGLALÁS

A doktori értekezés téziseit értékes, új eredményeknek fogadom el, és elegendőnek tartom a doktori cím megszerzéséhez. A nyilvános vita kitűzését javaslom.

Budapest, 2017. január 5.

Szabó Endre