

Kompakt topologikus terek struktúrájáról

MTA Doktori Értekezés Tézisei

Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapest

2015

Bevezetés

Kitűzött kutatási feladat

A disszertáció célja a kompakt topologikus terek struktúrájának a vizsgálata. Egy topologikus teret kompaktnak nevezünk, ha bárhogy lefedve a teret nyílt halmazokkal, a lefedő halmazok közül már véges sok is lefedi a teret. Általában a topológiát egy adott halmazon a nyílt (illetve zárt) halmazok megadása jelenti. Részhalmazok egy τ rendszere akkor határozza meg az X halmazon egy topológiát, azaz az összes nyílt halmazok rendszerét, ha τ zárt tetszőleges unióra és véges metszetre, valamint X és $\emptyset$ szerepel a nyílt halmazok között. Igen sok vizsgálat tárgya volt, hogy ugyanazt a topológiát hogyan lehet meghatározni másképp mint az összes nyílt halmaz megadásával.

Például tekinthetjük a nyílt halmazoknak egy alkalmas részhalmazát, amellyel minden más nyílt halmazt unió képzéssel kaphatunk meg, így jutunk el a bázis fogalmához. Tehát nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *bázisa* a τ topológiának, ha minden G nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$ -beli nyílt halmazok uniójaként. Természetes kérdés, hogy egy adott X topologikus térnek mekkora a "legkisebb" bázisa, azaz legkevesebb hány nyílt halmaz határozza meg az összes nyílt halmazt. Így kapjuk az X topologikus tér *súlyát*, a $w(X)$ számosságfüggvényt. Ennek a függvénynek a bevezetése és vizsgálata jól mutatja az általános topológia és a halmazelmélet szoros kapcsolatát. Speciális esetként kapjuk a *második megszámlálható* vagy M_2 tér fogalmát, ha a súly megszámlálható. Urison híres metrizációs tétele még 1925-ből való, miszerint minden reguláris M_2 tér metrizálható. Pontosabban az eredeti tétel csak normális terekről szólt, reguláris terekre egy évvel később Tyihonov bizonyította az állítást.

A topológiát meghatározhatjuk "lokálisan" is. Az X tér nyílt halmazaiból álló $\mathcal{B}$ rendszert az $x \in X$ pont *környezetbázisának* nevezzük, ha minden $x \in G$ nyílt halmaz esetén van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $x \in B \subset G$. Ennek a fogalomnak a segítségével definiáljuk az X tér $\chi(X)$ *karakterét*, mint azt a legkisebb κ számosságot, amire a tér minden pontjának van legfeljebb κ számosságú környezetbázisa. Amennyiben az X tér karaktere $\aleph_0$, a teret *első megszámlálhatónak* vagy M_1 térnek nevezzük. Alekszandrov és Urison közel 50 évig megoldatlan sejtése volt, hogy minden kompakt M_1 tér számossága legfeljebb kontinuum. A sejtést végül Arhangel'szkij bizonyította 1969-ben mégpedig általánosabb formában, Lindelöf terekre.

Más módon is meghatározhatunk topológiát egy X halmazon. Tetszőleges $A \subset X$ részhalmazra definiáljuk $\overline{A}$ -t, az A halmaz *lezárását*, mint a legszűkebb A -t tartalmazó zárt halmazt. Ezt az $A \rightarrow \overline{A}$ hozzárendelést *lezárási operátornak* nevezzük. Ennek megadása egyértelműen meghatározza az X tér topológiáját. Egy tetszőleges X metrikus térben egy A részhalmaz lezárását megadják azok a pontok, amelyekhez lehet az A halmazból konvergálni, ezért egy metrikus tér topológiáját egyértelműen meghatározzák a konvergens sorozatok. Nem minden topológiával van ez így még kompakt terek esetében sem. Például a diszkrét megszámlálható N tér Čech-Stone kompaktifikációjában, βN -ben egyáltalán nincs (nem triviális) konvergens sorozat.

A konvergencia fogalma általánosítható transzfinit sorozatokra. Legyen λ egy rendszám. Az X -beli elemek $\langle x_\xi : \xi < \lambda \rangle$ sorozatáról azt mondjuk, hogy $(\lambda$ *típusban*) *konvergál* az $x \in X$ ponthoz, ha az x pont minden G környezete tartalmazza a sorozat egy végszeletét, azaz $\exists \xi_0 < \lambda \{x_\xi : \xi \geq \xi_0\} \subset G$. Közismert, hogy bármely kompakt T_2 térben minden nem izolált ponthoz

lehet konvergálni valamilyen típusban.

Egy $D \subset X$ részhalmazt *diszkrétnek* nevezünk, ha D minden x pontjának van olyan környezete amelyik D -ből csak az x pontot tartalmazza. Például bármely T_1 térben minden ω típusú konvergens sorozat pontjai diszkrét alteret alkotnak. Azt, hogy egy topologikus tér kompakt-e, már a diszkrét alterek eldöntik, pontosabban az X tér akkor és csak akkor kompakt, ha minden diszkrét altér lezárása kompakt.

Így tehát a topologikus terek szerkezetének megismeréséhez fontos a diszkrét alterek illetve a konvergens transzfinit sorozatok vizsgálata. Ezeknek a kutatásoknak az eredményeit a disszertáció első része ismerteti. Ennek során hamar kiderül, hogy különösen kompakt terek esetén alapvető a tér szerkezetének az a jellemzője amit *szükségnek* nevezünk. Egy X topologikus tér $t(X)$ "szüksége" az a legkisebb számosság, amelyre a legfeljebb ekkora részhalmazok már meghatározzák topológiát. Pontosabban $t(X) \leq \kappa$ azt jelenti, hogy minden $A \subset X$ és minden $x \in \bar{A}$ esetén megadható egy legfeljebb κ számosságú $B \subset A$ úgy, hogy $x \in \bar{B}$.

Egy X topologikus tér fontos jellemzője a tér $d(X)$ *sűrűsége*. Ez az a legkisebb κ számosság, amelyhez található egy $D \subset X$, $|D| \leq \kappa$ részhalmaz, amelyik sűrű X -ben, azaz $\bar{D} = X$. Nyilvánvaló tény, hogy ha $\kappa \geq d(X)$, és tetszőlegesen megadunk κ -nál több nyílt halmazt, akkor találunk közülük κ -nál többet, amelyek metszete nem üres. Az, hogy ez az utóbbi tulajdonság és a tér szüksége meghatározza-e az X tér sűrűségét, a második fejezet kutatásainak a témája.

Nem üres nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere π -*bázis*, ha minden nem üres nyílt halmaz tartalmaz egy $\mathcal{B}$ -beli nyílt halmazt. Egy tetszőleges X reguláris térben bármely sűrű halmaz és bármely π -bázis meghatározza a topológiát, mert segítségükkel elő lehet állítani minden reguláris zárt halmazt, azaz a nyílt halmazok lezárását. A kutatások következő feladata a π -bázisok bizonyos tulajdonságainak a vizsgálata volt.

A topológiai ismeretek alapjaihoz tartozik az a tény, hogy bármely $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés esetén minden kompakt altér képe kompakt és minden összefüggő altér képe összefüggő Y -ban. Az, hogy ez a két tulajdonság a számegyenes illetve $\mathbb{R}^n$ esetén maga után vonja a folytonosságot is, már régóta ismert. A disszertációban leírt kutatások utolsó fejezete azt vizsgálja meg, hogy ezek az "őrzési" tulajdonságok milyen térosztályokon biztosítják egy leképezés folytonosságát.

Vizsgálati módszerek

A kutatások során alapvetően a halmazelméleti topológia módszereit használjuk. Egy X topologikus tér struktúrájának jellemzőit számosságok hozzárendelésével írhatjuk le. Ezeket a hozzárendeléseket *számosságfüggvényeknek* nevezzük. Ilyen például az eddig említettek közül a súly, $w(X)$, a sűrűség, $d(X)$ és a szükség, $t(X)$. A számosságfüggvények közötti kapcsolatokat a halmazelmélet, ezen belül a végtelen kombinatorika módszereivel vizsgálhatjuk. A vizsgálatok halmazelméleti jellegénél fogva gyakran szembesülünk olyan állításokkal amelyek igazságát nem lehet (vagy nem tudjuk) a halmazelmélet szokásos axiómarendszeréből, ZFC-ből levezetni. Ilyenkor a "forszolás" technikájának segítségével kaphatunk olyan, a ZFC axiómarendszert kiterjesztő axiómarendszert, ahol már bizonyítható az állítás.

Definíciók, jelölések

A disszertáció használja a halmazelmélet és a topológia megszokott jelöléseit.

Számosságfüggvények

Itt adjuk meg a legtöbbször használt számosságfüggvényeket. A teljesség kedvéért megismételjük azokat is, amelyek már szerepeltek a kutatási feladatok leírásánál.

Legyen X egy T_1 topologikus tér. Hogy elkerüljünk néhány kényelmetlen esetszétválasztást, a továbbiakban feltesszük, hogy az X tér végtelen. Azt is feltesszük, hogy minden tér T_1 tér, azaz a véges részhalmazok zártak X -ben.

Globális számosságfüggvények.

- Nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *bázis*, ha minden G nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$ -beli nyílt halmazok uniójaként.
Az X tér *súlya*, $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ bázis}\}$.
Az X tér M_2 tér, ha $w(X) = \omega$.
- Nem üres nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere π -*bázis*, ha minden nem üres nyílt halmaz tartalmaz egy $\mathcal{B}$ -beli halmazt.
Az X tér π -*súlya*, $\pi(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ } \pi\text{-bázis}\}$.
- Egy $D \subset X$ halmaz *sűrű* X -ben, ha $\overline{D} = X$.
Az X tér *a tér sűrűsége*, $d(X) = \min\{|D| : D \text{ sűrű } X\text{-ben}\}$.
Az X tér *szeparábilis*, ha $d(X) \leq \omega$.
- Az X tér *Lindelöf száma*,
 $L(X) = \min\{\kappa : \text{minden nyílt fedésnek van legfeljebb } \kappa \text{ számosságú részfedése}\}$.
Az X tér *Lindelöf*, ha $L(X) = \omega$.
- Nyílt halmazok egy $\mathcal{G}$ rendszere *celluláris*, ha elemei páronként diszjunktak.
Az X tér *cellularitása*, $c(X) = \sup\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G} \text{ celluláris}\}$.
Az X tér *Szuszlín tulajdonságú*, ha $c(X) = \omega$.
 $\hat{c}(X) = \min\{\kappa : \text{nincs } \kappa \text{ számosságú celluláris rendszer}\}$.
- Egy $D \subset X$ részhalmazt *diszkrétnek* nevezünk, ha D minden x pontjának van olyan környezete amelyik D -ből csak az x pontot tartalmazza.
Az X tér *szórása* (*spread*), $s(X) = \sup\{|D| : D \text{ diszkrét}\}$.
 $\hat{s}(X) = \min\{\kappa : \text{nincs } \kappa \text{ számosságú diszkrét részhalmaz}\}$.
- Azt mondjuk, hogy az $\{x_\xi : \xi < \lambda\} \subset X$ egy $(\lambda \text{ hosszú})$ *szabad sorozat*, ha bármely kezdőszelet lezárása diszjunkt a megfelelő végszelet lezárásától, azaz
$$\forall \xi < \lambda \quad \overline{\{x_\eta : \eta < \xi\}} \cap \overline{\{x_\eta : \eta \geq \xi\}} = \emptyset.$$

$$F(X) = \sup\{|S| : S \text{ szabad sorozat}\}$$

$$\hat{F}(X) = \min\{\kappa : \text{nincs } \kappa \text{ hosszú szabad sorozat}\}$$

Lokális számosságfüggvények.

Legyen x az X tér egy tetszőleges pontja.

- Nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *környezet bázisa* az $x \in X$ pontnak, ha $\mathcal{B}$ minden eleme tartalmazza az x pontot és az x pont minden környezete (x -et tartalmazó nyílt halmaz) tartalmaz egy $\mathcal{B}$ -beli halmazt.

Az x pont *karaktere* X -ben,

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ környezet bázisa } x\text{-nek } X\text{-ben}\}.$$

Az X tér *karaktere*,

$$\chi(X) = \min\{\kappa : \text{minden pont karaktere legfeljebb } \kappa\}.$$

Az X tér M_1 vagy *első megszámlálható tér*, ha $\chi(X) \leq \omega$.

- Az x pont *pszeudo-karaktere* X -ben,

$$\psi(x, X) = \min\{\kappa : x \text{ előáll legfeljebb } \kappa \text{ darab nyílt halmaz metszeteként}\}$$

Az X tér *pszeudo-karaktere*,

$$\psi(X) = \min\{\kappa : \text{minden pont pszeudo-karaktere legfeljebb } \kappa\}.$$

- Az x pont *szűksége* X -ben,

$$t(x, X) = \min\{\kappa : (\forall A \subset X, x \in \overline{A})(\exists B \subset A) |B| \leq \kappa \text{ és } x \in \overline{B}\}.$$

Az X tér *szűksége*,

$$t(X) = \min\{\kappa : \text{minden pont szűksége legfeljebb } \kappa\}.$$

- Nem üres nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *lokális π -bázis* az x pontban, ha x minden környezete tartalmaz egy $\mathcal{B}$ -beli halmazt.

Az x pont *π -karaktere* X -ben,

$$\pi\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ lokális } \pi\text{-bázisa } x\text{-nek } X\text{-ben}\}.$$

A tér *π -karaktere*,

$$\pi\chi(X) = \min\{\kappa : \text{minden pontnak } \pi\text{-karaktere legfeljebb } \kappa\}.$$

Gyakran használt tételek számosságfüggvényekről

Itt sorolunk fel néhány, a disszertációban gyakran használt állítást.

- Egy $A \subset X$ halmaznak az $x \in X$ pont *teljes felhalmozódási pontja*, ha x minden U környezetére teljesül, hogy $|U \cap A| = |A|$.
Egy X tér akkor és csak akkor kompakt, ha minden végtelen részhalmaznak van teljes felhalmozódási pontja.
- (Tyihonov) Kompakt terek szorzata kompakt.
- Egy $f : X \rightarrow Y$ folytonos ráképezést *irreducibilisnek* nevezünk, ha X minden valódi zárt részhalmazának a képe valódi része Y -nak.
Ha X és Y kompakt T_2 terek, $f : X \rightarrow Y$ folytonosan ráképezés, akkor van olyan $F \subset X$ zárt altér, amelyre f megszorítása már irreducibilis ráképezés Y -ra.
- Minden X kompakt T_2 tér és minden $x \in X$ esetén $\psi(x, X) = \chi(x, X)$.

- (Arhangelszkij, 1971) Minden X kompakt T_2 tér esetén $t(X) = F(X)$.

1. Diszkrét alterek

1.1. Konvergens szabad sorozatok kompakt terekben

Mint már említettük, van olyan kompakt T_2 tér, tudniillik βN , amelyben egyáltalán nincs (nem triviális) konvergens sorozat. Viszont minden X kompakt T_2 térben minden nem izolált p ponthoz lehet konvergálni $\kappa = \chi(p, X)$ típusban.

Másrészt ismert (ld. [8] vagy [71]), hogy az előbb említett βN tér tartalmaz ω_1 típusú konvergens sorozatot. Így tehát természetes kérdés, hogy minden végtelen kompakt T_2 tér tartalmaz-e ω vagy ω_1 típusú konvergens sorozatot. A kérdést először Hušek fogalmazta meg a 70-es évek végén, és közel egy időben egy ehhez kapcsolódó erősebb kérdést Juhász István: Igaz-e, hogy minden nem első megszámlálható kompakt T_2 tér tartalmaz ω_1 típusú konvergens sorozatot?

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy ez az erősebb sejtés igaz, ha $t(X) > \omega$, sőt azt, hogy ebben az esetben a tér tartalmaz ω_1 típusú konvergens *szabad* sorozatot. Pontosabban megmutatjuk, hogy ha egy kompakt T_2 tér tartalmaz κ hosszú szabad sorozatot, ahol $\kappa > \omega$ reguláris számosság, akkor a tér tartalmaz egy ugyanilyen hosszú *konvergens* szabad sorozatot is. Az állítást két külön tételben bizonyítjuk aszerint, hogy a tér tartalmaz-e olyan zárt részhalmazt, amely ráképezhető-e a 2^κ Cantor-kockára vagy sem.

1.1. Tétel. [disz. 1.1] *Legyen κ tetszőleges nem megszámlálható számosság valamint $f : X \rightarrow 2^\kappa$ egy folytonos irreducibilis ráképezése az X kompakt T_2 térnek a 2^κ Cantor-kockára. Ekkor minden $x \in X$ pont esetén*

- (i) *létezik egy $D \subset X \setminus \{x\}$, $|D| = \kappa$ diszkrét altér, amelyik konvergál x -hez abban az erős értelemben, hogy x minden környezete csak megszámlálható pontot hagy ki D -ből;*
- (ii) *ha még azt is feltesszük, hogy $\text{cf}(\kappa) > \omega$, akkor létezik egy $\{x_\xi : \xi \in \kappa\} \subset X \setminus \{x\}$, κ típusú szabad sorozat, amelyik konvergál x -hez.*

1.2. Tétel. [disz. 1.2] *Legyen $\kappa > \omega$ egy reguláris számosság. Ha egy kompakt T_2 tér tartalmaz egy κ típusú szabad sorozatot, akkor tartalmaz egy ugyanilyen hosszú konvergens szabad sorozatot is.*

Ennek az erős tételnek számos következménye van.

1.3. Következmény. [disz. 1.3] *Ha $2^\kappa = \kappa^+$, X egy kompakt T_2 tér amelyben $\chi(X) > \kappa$, akkor az X tér tartalmaz egy F zárt alteret és ebben egy p pontot úgy, hogy $\chi(p, F) = \kappa^+$, és ezért F tartalmaz egy κ^+ típusú p -hez konvergáló sorozatot is.*

1.4. Következmény. [disz. 1.4] *Ha V -ben igaz a kontinuum-hipotézis (KH) és W ennek Cohen valóssakkal való bővítése, akkor W -ben minden nem elő megszámlálható kompakt T_2 tér tartalmaz konvergens ω_1 -sorozatot.*

Ha X egy topologikus tér, akkor az X tér *diagonálisa*, $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X^2$. Ismert, hogy egy kompakt T_2 pontosan akkor metrizálható, ha Δ egy G_δ halmaz X^2 -ben, azaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként.

Hušek a [24] cikkben vezette be a *kis diagonális* fogalmát: Δ kis diagonális, ha bármely nem megszámlálható $A \subset X^2 \setminus \Delta$ esetén Δ -nak van olyan környezete, amelyik nem megszámlálható sok pontot kihagy A -ból. Ebben a cikkben kérdezte, hogy vajon KH-ból következik-e, hogy minden kompakt T_2 tér amelynek kis diagonálisa van, metrizálható. A válasz igen, sőt erősebb is bizonyítható.

1.5. Következmény. [disz. 1.5] *Ha W az előző állításban szereplő Cohen-modell, akkor W -ben minden X kompakt T_2 tér metrizálható, ha X -nek kis diagonálisa van.*

Végül egy tétel, amelyik ugyan nem kapcsolódik a konvergens szabad sorozatokról szóló tételhez, viszont szorosan kapcsolódik a Hušek sejtéshez. Ehhez szükségünk van a $\clubsuit$ (treff) kombinatorikus elvre, amelyet Ostaszevskij (ld. [49]) vezetett be: minden $\alpha \in \omega_1$ limesz rendszámhoz megadható egy ω típusú α -hoz konvergáló $S_\alpha \subset \alpha$ halmaz úgy, hogy bármely nem megszámlálható $H \subset \omega_1$ halmaz esetén van olyan α amelyre $S_\alpha \subset H$.

1.6. Tétel. [disz. 1.8] *Tegyük fel, hogy teljesül a $\clubsuit$ halmazelméleti feltevés és legyen X egy (végtelen) megszámlálhatóan kompakt T_2 tér, amelyik nem tartalmaz (valódi) ω hosszú konvergens sorozatot. Ekkor X tartalmaz egy ω_1 számosságú Y alteret úgy, hogy Y minden (relatíván) nyílt része vagy megszámlálható vagy ko-megszámlálható (a komplementer megszámlálható).*

Ha a fenti tételben szereplő Y egy T_3 tér, akkor S -tér is, azaz öröklődően szeparábilis de nem Lindelőf. Az is nyilvánvaló, hogy Y -nak legfeljebb egy teljes felhalmozódási pontja lehet. Egy topologikus teret *iniciálisan ω_1 -kompakt* térnek nevezünk, ha minden legfeljebb ω_1 számosságú nyílt fedésből kiválasztható egy véges részfedés. Ezt a terminológiát használva kapjuk a következő állítást:

1.7. Következmény. [disz. 1.8] *Ha $\clubsuit$ teljesül, akkor minden iniciálisan ω_1 -kompakt T_2 tér tartalmaz konvergens ω - vagy ω_1 -sorozatot.*

1.2. Megszámlálhatóan szűk kompakt terek diszkrét alterei

Ebben a fejezetben kompakt terek diszkrét altereit vizsgáljuk, pontosabban azt, hogy ezek lezárása mekkora. Világos, hogy van olyan tér, például a $[0, 1]$ intervallum, ahol minden diszkrét altér mérete kisebb a tér számosságánál. De az már jóval nehezebb kérdés, hogy lehet-e olyan tér, ahol a diszkrét alterek lezárása is kisebb.

Adott X tér esetén jelölje $g(X)$ azon zárt halmazok számosságainak a szuprémumát, amelyek egy diszkrét altér lezárásai, azaz

$$g(X) = \sup\{|\overline{D}| : D \subset X \text{ diszkrét}\}.$$

Hasonlóan a szabad sorozatoknál használt jelöléshez,

$$\widehat{g}(X) = \min\{\kappa : \forall D \subset X (D \text{ diszkrét} \implies |\overline{D}| < \kappa)\}.$$

Arhangelszkij kérdezte 2003-ban: igaz-e, hogy minden X kompakt tér tartalmaz olyan D diszkrét alteret, amelyre $|\overline{D}| = |X|$, azaz $\widehat{g}(X) = |X|^+$? Egy kicsit gyengébb kérdés (ld. [2]), hogy $g(X) = |X|$ igaz-e? Abban a speciális esetben, amikor $|X|$ egy szinguláris erős limesz számosság, Hajnal és Juhász bizonyította (ld. [25, 4.2]) hogy ha X T_2 -tér, akkor $\widehat{g}(X) = |X|^+$, és így még olyan D diszkrét altér is van, amelyre $|\overline{D}| = |X|$.

K.Kunen mutatta meg, hogy az első sejtés általában nem igaz, ha létezik elérhetetlen számosság, míg a gyengébb állításra A. Dow (ld. [11]) mutatott konzisztens ellenpéldát. Az még mindig nyitott kérdés, hogy van-e ZFC ellenpélda valamelyik állításra.

Másrészt A. Dow bizonyította (ld. [11]), hogy az megszámlálhatóan szűk kompakt terek körében mondhatunk valami pozitívat is a problémáról.

1.8. Tétel. (A. Dow) [disz. 1.10] *Ha X kompakt ω -szűk tér akkor*

$$(i) |X| \leq g(X)^\omega$$

$$(ii) \text{ Ha } |X| \leq \aleph_\omega \text{ akkor } \widehat{g}(X) = |X|^+.$$

Az általános kontinuum hipotézis egy gyengített változatával megválaszolhatjuk az eredeti kérdést az ω -szűk terek esetén.

1.9. Tétel. [disz. 1.13] *Tegyük fel, hogy minden κ számosság esetén $2^\kappa < \kappa^{+\omega}$. Ekkor minden ω -szűk kompakt T_2 -tér esetén $\widehat{g}(X) = |X|^+$, azaz van olyan D diszkrét altér, amelyre $|\overline{D}| = |X|$.*

1.3. Tkacsenko addíciós tételei

Ebben a részben azt vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk egy térről amelyet "kevés" egyszerű (diszkrétéhez közeli) altér uniójaként tudunk előállítani.

Egy X teret D -térnek nevezünk, ha bárhogy megadva X -en egy ϕ környezetkijelölést, található egy D zárt diszkrét altér úgy, hogy

$$\phi[D] = \bigcup \{ \phi(x) : x \in D \} = X.$$

Tetszőleges X tér esetén jelölje

$$D(X) = \min \{ |\mathcal{A}| : X = \bigcup \mathcal{A} \text{ és minden } A \in \mathcal{A} \text{ } D\text{-tér} \}.$$

Az X teret *bal-szeparáltnak* mondjuk, ha megadható X -en egy jólrendezés, amelyre nézve a kezdőselekciók zártak. Tetszőleges X tér esetén jelölje

$$ls(X) = \min \{ |\mathcal{A}| : X = \bigcup \mathcal{A} \text{ és minden } A \in \mathcal{A} \text{ bal-szeparált} \}.$$

Megjegyezzük, hogy $D(X)$ és $ls(X)$ véges is lehet. Ismert (ld. [70]), hogy minden bal-szeparált tér D -tér is, így $D(X) \leq ls(X)$.

Az X tér *diszpergált*, ha minden $A \subset X$ altérnek van izolált pontja. Az X tér *szekvenciális*, ha bármely $A \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt halmaz, ha nem lehet A -ból (ω típusban) kikonvergálni.

M. Tkacsenko egy cikkében (ld. [62]) bizonyította a következőket: Ha X egy megszámlálhatóan kompakt T_3 tér, amelyre $ls(X) \leq \omega$, akkor

$$(i) \text{ } X \text{ kompakt,}$$

$$(ii) \text{ } X \text{ diszpergált,}$$

$$(iii) \text{ } X \text{ szekvenciális.}$$

Könnyű belátni, hogy ha egy kompakt diszpergált tér minden megszámlálhatóan kompakt altere kompakt, akkor a tér szekvenciális, ezért (iii) következik az (i) és (ii) állításokból. Az (i) és (ii) állításokat sikerült általánosítani a következő módon:

(A) Ha X megszámlálhatóan kompakt és $D(X) \leq \omega$, akkor X kompakt.

(B) Ha X kompakt, $ls(X) < N(\mathbb{R})$, akkor X diszpergált.

Itt $N(\mathbb{R})$ jelöli a számegegyenes Novák számát, azaz azt a legkisebb κ számosságot, amelyre a számegegyenes lefedhető κ darab sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Ezt az $N(\mathbb{R})$ számosságot jelölik még m -al is, ez a sovány halmazok fedési száma.

Az (A) állítás gyengített változata, amikor $D(X)$ véges, megtalálható Gruenhage [20] cikkében.

Egy X teret *iniciálisan κ -kompakt térnek* nevezzük, ha bármely legfeljebb κ számosságú nyílt fedésének van véges részfedése.

Az (A) állítás egy változatát is sikerült bizonyítanunk:

1.10. Tétel. [disz. 1.14] Legyen κ végtelen számosság és X iniciálisan κ -kompakt tér, $D(X) \leq \kappa$. Ekkor X kompakt.

A (B) állítást megfogalmazó tétel:

1.11. Tétel. [disz. 1.17] Ha X kompakt T_2 tér amelyre $ls(X) < N(\mathbb{R})$, akkor X diszpergált.

A két fenti tétel egy következménye, amely erősíti Tkacsenko említett tételét, mert az X térre T_3 helyett csak a T_2 tulajdonságot követeli meg:

1.12. Következmény. [disz. 1.18] Legyen X megszámlálhatóan kompakt T_2 tér, $ls(X) \leq \omega$. Ekkor X kompakt, diszpergált és szekvenciális.

1.4. d -szeparábilis hatványterek és $C_p(X)$ terek

Egy topologikus teret *d -szeparábilis térnek* nevezzük, ha található benne olyan sűrű altér, amelyik megszámlálható sok diszkrét tér uniója. Minden szeparábilis és minden metrikus tér d -szeparábilis.

Először Arhangelszkij tanulmányozta ezeket a tereket az [3] cikkében. Itt bizonyította, hogy d -szeparábilis terek tetszőleges szorzata d -szeparábilis. A [64] cikkben Tkacsuk keresett olyan feltételeket, amelyek mellett egy X téren folytonos függvények $C_p(X)$ tere d -szeparábilis. Ugyanitt vetett fel néhány problémát bizonyos terek véges illetve végtelen hatványainak d -szeparábilis tulajdonságáról. Ebben a részben ezekre a kérdésekre válaszolunk.

1.13. Tétel. [disz. 1.21] Legyen κ végtelen számosság, X pedig olyan T_1 tér, amelyre $\widehat{s}(X^\kappa) > d(X)$. Ekkor X^κ d -szeparábilis.

Jegyezzük meg, hogy minden, legalább 2 pontos T_1 tér κ -adik hatványa, X^κ , tartalmazza a 2^κ Cantor kockát és így tartalmaz κ -ás diszkrét alteret. Ezért, ha az előző tételt a $\kappa = d(X)$ esetre alkalmazzuk, kapjuk a következő állítást, amely válasz a [64, 4.10] problémára.

1.14. Következmény. [disz. 1.22] Bármely X T_1 tér $d(X)$ -edik hatványa d -szeparábilis.

A következő tétel segítségével megválaszolhatjuk az említett cikkben szereplő [64, 4.2] probléma második felét. Ez a tétel önmagában is érdekes.

1.15. Tétel. [disz. 1.23] *Ha X kompakt T_2 tér, akkor X^2 tartalmaz $d(X)$ számosságú diszkrét alteret.*

A Szuszlin egyenes tanúsítja, legalább is konzisztencia erejéig, hogy a tételben X^2 nem helyettesíthető X -el. Másrészt Shapirovszkij eredménye ([25, 3.13]) alapján $d(X) \leq s(X)^+$ minden X kompakt T_2 tér esetén.

Mivel X^2 beágyazható X^ω -ba, ezért az előző tételekből következik, hogy

1.16. Következmény. [disz. 1.25] *Ha X kompakt T_2 tér, akkor X^ω d -szeparábilis.*

A következő tétel mutatja, hogy ennél erősebbet is mondhatunk X ω -adik hatványáról. Ehhez először válasszunk egy fix pontot X -ből és jelöljük 0-val. Jelölje, a véges tartójú függvények analógiája alapján

$$\sigma(X^\omega) = \{x \in X^\omega : \{i < \omega : x(i) \neq 0\} \text{ véges}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\sigma(X^\omega)$ sűrű X^ω -ban, ezért ha ez az altér d -szeparábilis, akkor X^ω is az.

1.17. Tétel. [disz. 1.26] *Tegyük fel, hogy az X térre teljesül, hogy valamilyen $k < \omega$ esetén az X^k térnek van $d(X)$ számosságú diszkrét altere. Akkor $\sigma(X^\omega)$ (és így X^ω is) d -szeparábilis.*

Jegyezzük meg, hogy abból, hogy X^ω d -szeparábilis, a "legtöbb" esetben, nevezetesen ha $\text{cf}(d(X)) > \omega$, következik, hogy X -nek van olyan véges hatványa, amelyik tartalmaz $d(X)$ méretű diszkrét alteret. Az már nem feltétlenül igaz, hogy van X -nek olyan véges hatványa, amelyik d -szeparábilis. Egy ilyen térre példa a $\beta N \setminus N$ tér.

A következő tétel segítségével negatív választ adhatunk Tkacsuk már említett [64, 4.9] problémájának egyik részére: igaz-e, hogy ha egy X tér valamilyen végtelen X^κ hatványa d -szeparábilis, akkor már az X^ω is d -szeparábilis. Egy teret erős L -térnek nevezünk, ha reguláris, nem szeparábilis de minden véges hatványa öröklődően Lindelöf. Ilyen tér létezése következik a kontinuum hipotézisből, de például $MA_{\aleph_1}$ esetén nincs erős L -tér.

1.18. Tétel. [disz. 1.27] *Legyen X erős L -tér úgy, hogy $d(X) = \omega_1$. Akkor X^{ω_1} d -szeparábilis de X^ω nem. ZFC-ben található olyan Y tér, melyre Y^{ω_2} d -szeparábilis de Y^{ω_1} nem az.*

Végül a következő tétel választ ad arra a (ld. [64, 4.1]) kérdésre, hogy van-e ZFC-ben olyan X (Tyihonov) tér, amelyre $C_p(X)$ nem d -szeparábilis.

Jelölje $\text{Col}(\kappa, 2)$ azt az állítást, hogy megadható κ párjainak olyan színezése 2 színnel, melyre bármely $0 < n < \omega$ esetén bárhogy véve κ darab diszjunkt n -es halmazt, közöttük minden lehetséges színezés előfordul. Shelah színezési tétele szerint (ld. [59]) $\text{Col}(\lambda^+, 2)$ teljesül minden nem megszámlálható reguláris λ esetén.

1.19. Tétel. [disz. 1.28] *Ha $\text{Col}(\kappa, 2)$ teljesül a $\kappa = \lambda^+$ rákövetkező számosságra, akkor a κ súlyú $D(2)^\kappa$ Cantor kockának van olyan X sűrű altere, amelyre $C_p(X)$ nem d -szeparábilis.*

1.5. A Čech-Pospíšil tétel egy erősítése

Jelölje $\text{dis}(X)$ azt a legkisebb κ számosságot, amelyre X előáll κ darab diszkrét altér uniójaként, azaz

$$\text{dis}(X) = \min\{|\mathcal{D}| : \bigcup \mathcal{D} = X, \forall D \in \mathcal{D} \text{ diszkrét}\}.$$

A [44] cikkben merült fel a következő probléma: ha X egy zsúfolt (önmagában sűrű) kompakt T_2 tér, akkor igaz-e, hogy $\text{dis}(X) \geq \mathfrak{c}$? Ezt a kérdést Gruenhage megválaszolta [21] cikkében: Ha $f : X \rightarrow Y$ perfekt ráképezés az X és Y topologikus terek között, akkor $\text{dis}(X) \geq \text{dis}(Y)$. Mivel tetszőleges kompakt zsúfolt tér folytonosan (és ezért perfekt módon) ráképezhető a $[0, 1]$ intervallumra, ezért a kérdésre igenlő a válasz.

Ebben a részben egy másik megoldást adunk a fenti problémára, ami egyben erősítése a klasszikus Čech-Pospíšil tételnek is (ld. [25, 3.16]), amely azt mondja ki, hogy ha egy kompakt T_2 térben minden pont karaktere legalább κ , akkor a tér számossága legalább 2^κ .

Legyen λ egy végtelen számosság. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer λ -*elágazónak* mondunk, ha $|\mathcal{F}| < \lambda$, de $\mathcal{F}$ -nek van λ darab olyan részrendszere, amelyek metszetei nem üres, páronként diszjunkt halmazok.

1.20. Tétel. [disz. 1.31] *Ha az X kompakt T_1 tér tartalmazza zárt halmazoknak egy λ -elágazó rendszerét, akkor $\text{dis}(X) \geq \lambda$.*

Ebben a tételben, ellentétben a következő állítással, amelyik a Čech-Pospíšil tételnek megígért általánosítása, nem tettük fel, hogy a tér T_2 , a bizonyításhoz elég, hogy a tér T_1 .

1.21. Következmény. [disz. 1.32] *Ha X kompakt T_2 tér úgy, hogy minden $x \in X$ pont esetén $\chi(x, X) \geq \kappa$, akkor $\text{dis}(X) \geq 2^\kappa$.*

A [44, Theorem 3] cikkben egy ehhez kapcsolódó állítás szerepel. Ennek kimondásához azonban néhány fogalmat ismertetnünk kell: Az X teret *jobb-szeparáltként* mondjuk, ha megadható X -en egy jólrendezés, amelyre nézve a kezdőszeletek nyíltak. Jegyezzük meg, hogy egy X tér pontosan akkor jobb-szeparált, ha diszpergált. Tetszőleges X tér esetén jelölje

$$rs(X) = \min\{|\mathcal{A}| : X = \bigcup \mathcal{A} \text{ és minden } A \in \mathcal{A} \text{ jobb-szeparált}\}.$$

Ha X kompakt T_2 tér és minden $x \in X$ pont esetén $\chi(x, X) \geq \kappa$, akkor $rs(X) \geq \kappa^+$. Mivel minden diszkrét tér egyben jobb-szeparált is, az idézett tétel erősebb az előző állításnál, ha $2^\kappa = \kappa^+$.

1.6. A κ -kompaktság egy interpolációs tulajdonsága

Egy X topologikus teret κ -*kompaktnak* nevezünk, ha minden κ számosságú alterének van teljes felhalmozódási pontja. A bevezetőben (ld. 5 oldal) ismertetett egyik tétel szerint egy tér pontosan akkor kompakt, ha minden végtelen κ -ra κ -kompakt. Legyen most κ egy szinguláris számosság és $\kappa = \sum\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ ahol minden $\kappa_\alpha < \kappa$. Nyilvánvaló, hogy ha egy X tér minden $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ esetén κ_α -kompakt és $\text{cf}(\kappa)$ -kompakt, akkor X κ -kompakt. Ez egy "extrapolációs" tulajdonsága a κ -kompaktságnak szinguláris κ esetén. Ezért a kompakt terek fenti jellemzésében elég a κ -kompaktságot a reguláris κ számosságok esetében feltenni.

Ebben a részben a κ -kompaktság egy "interpolációs" tulajdonságát bizonyítjuk, mégpedig azt, hogy ha X egyszerre μ - és λ -kompakt és $\mu < \kappa < \lambda$ ahol κ egy szinguláris számosság, akkor X κ -kompakt is. A bizonyítás használja Shelah PCF elméletét.

Legyen κ , μ , λ három számosság. Ekkor $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ a következő állítást jelöli: $\mu < \kappa < \lambda = \text{cf}(\lambda)$ és megadható egy $\{S_\xi : \xi < \lambda\} \subset [\kappa]^\mu$ sorozat úgy, hogy $|\{\xi : |S_\xi \cap A| = \mu\}| < \lambda$ ha $A \in [\kappa]^{<\kappa}$.

1.22. Tétel. [disz. 1.36] *Tegyük fel, hogy $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ teljesül és az X tér egyszerre μ -kompakt és λ -kompakt. Akkor X κ -kompakt is.*

A következő tétel szerint $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ csak szinguláris κ esetén teljesülhet.

1.23. Tétel. [disz. 1.37] *Ha $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ igaz, akkor $\text{cf}(\mu) = \text{cf}(\kappa)$.*

E szerint a legkisebb μ , amire adott κ szinguláris számosság esetén $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ teljesülhet a $\mu = \text{cf}(\kappa)$ eset, és ez teljesül is a $\lambda = \kappa^+$ választás mellett.

1.24. Tétel. [disz. 1.38] *Minden szinguláris κ számosságra $\Phi(\text{cf}(\kappa), \kappa, \kappa^+)$ igaz.*

A fenti tétel bizonyítása használja Shelah PCF elméletének egy alapvető eredményét [56, Main Claim 1.3, p. 46]: Minden szinguláris κ esetén megadható reguláris számosságok egy $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa) \rangle$, κ -hoz konvergáló sorozata úgy, hogy a

$$P = \prod \{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$$

szorzatban van κ^+ hosszú skála, azaz megadható egy $\{f_\xi : \xi < \kappa^+\} \subset P$ sorozat, amelynek tagjai mod véges nőnek és minden $f \in P$ függvényt mod véges majorálnak.

A következő állítás szerint az előző tételben szereplő első paramétert, $\text{cf}(\kappa)$ -t minden olyan $\mu < \kappa$ számosságra kicserélhetjük, melyre $\text{cf}(\mu) = \text{cf}(\kappa)$.

1.25. Tétel. [disz. 1.39] *Ha $\Phi(\text{cf}(\kappa), \kappa, \lambda)$ igaz valamely szinguláris κ számosságra, akkor $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ is igaz, ha $\text{cf}(\kappa) < \mu < \kappa$ és $\text{cf}(\mu) = \text{cf}(\kappa)$.*

Arhangelszkij a [4] cikkben vezette be és tanulmányozta azokat a tereket, amelyek minden nem megszámlálható κ számosság esetén κ -kompaktak, ezeket a tereket *nem-megszámlálhatóan kompakt* tereknek nevezte. Ebben a cikkben Arhangelszkij megmutatta, hogy minden nem-megszámlálhatóan kompakt tér Lindelöf.

Egy hasonló fogalom már régóta szerepel az irodalomban: egy tér *lineárisan Lindelöf*, ha minden nem megszámlálható reguláris κ esetén κ -kompakt. Sokan tanulmányozták azt a kérdést, hogy milyen feltételek mellett lesz egy lineárisan Lindelöf tér Lindelöf. Jegyezzük meg, hogy ha egy lineárisan Lindelöf tér megszámlálhatóan kompakt azaz ω -kompakt, akkor kompakt is és így persze Lindelöf. A következő eredmény, ami a 1.24 és 1.25 interpolációs tételek közvetlen következménye, valami hasonlót mond ki a lineárisan Lindelöf tulajdonság és az $\aleph_\omega$ -kompaktság kapcsolatáról.

1.26. Tétel. [disz. 1.40] *Minden lineárisan Lindelöf $\aleph_\omega$ -kompakt tér nem-megszámlálhatóan kompakt és így Lindelöf.*

Az említett [4] cikkben Arhangelszkij azt is megmutatta, hogy nem-megszámlálhatóan kompakt terek meglehetősen behatároltak, csak kevéssel térhetnek el egy kompakt "magtól": Minden X nem-megszámlálhatóan kompakt T_3 tér tartalmaz (egy esetleg üres) C kompakt alteret úgy, hogy minden $U \supset C$ nyílt halmaz esetén $|X \setminus U| < \aleph_\omega$. Ezt az eredményt sikerült erősíteni úgy, hogy a T_3 szétválasztási axiómát gyengébb feltétellel helyettesítettük. Elég a T_1 tulajdonság plusz a van Douwen által bevezetett wD tulajdonság (ld. [69]).

Egy X tér wD (gyenge D) tulajdonságú, ha bárhogy megadva egy megszámlálhatóan végtelen A zárt diszkrét halmazt X -ben, találunk egy $B \subset A$ végtelen részt és egy $\{U_x : x \in B\}$

környezet-kijelölést úgy, hogy ezek a környezetek diszkrét rendszert alkossanak X -ben, azaz a tér minden $y \in X$ pontjának van olyan környezete, amely legfeljebb egy B -beli x -re metszi az U_x halmazt.

Egy X topologikus tér κ -koncentrált az $Y \subset X$ halmaz körül, ha Y minden U környezetére teljesül, hogy $|X \setminus U| < \kappa$.

Most már megfogalmazhatjuk az ígért állítást.

1.27. Tétel. [disz. 1.42] *Minden nem-megszámlálhatóan kompakt wD tulajdonságú T_1 -tér $\aleph_\omega$ -koncentrált egy (esetleg üres) kompakt altér körül.*

Minden nem-megszámlálhatóan kompakt T_3 tér normális (mert Lindelöf), a wD tulajdonság pedig a normalitás egy nagyon gyenge verziója. Ezért az 1.27 állítás az Arhangelszkij által bizonyított állítás erősítése.

A következő tétel mutatja, hogy a másik irányban is van kapcsolat a kompakt altér körüli κ -koncentrálttság és a λ -kompakt tulajdonságok között.

1.28. Tétel. [disz. 1.43] *Ha egy tér κ -koncentrált egy kompakt altere körül, akkor minden $\lambda \geq \kappa$ -ra λ -kompakt.*

2. Kaliberek, szabad sorozatok és a sűrűség

Ebben a fejezetben minden térről feltesszük, hogy T_3 .

Egy κ számosság kalibere az X topologikus térnek, röviden $\kappa \in \text{Cal}(X)$, ha akárhogy megadva κ darab nyílt halmazt, található közülük κ darab úgy, hogy ezek metszete nem üres.

Világos, hogy ha egy X tér sűrűsége $< \text{cf}(\kappa)$, akkor κ kalibere X -nek. Sanyin mutatta meg (ld. [53]), hogy az állítás megfordítása nem igaz: a Tyihonov kocka sűrűsége akármilyen nagy (a hatványkitevő logaritmus) lehet, pedig ω_1 kaliber. Sok cikk vizsgálta azt a kérdést, hogy milyen plusz feltételek mellett kaphatunk felső korlátot X sűrűségére $\text{Cal}(X)$ ismeretében.

Például Shapirovskij egy tétele (ld. [25, 3.25]) szerint kompakt X tér esetén $d(X) < \kappa$, ha $\kappa = \text{cf}(\kappa)$ kaliber és $t(X) < \kappa$. Arhangelszkij egy tétele (ld. [7]) azt mondja ki, hogy $d(X) \leq 2^\omega$ ha X Lindelöf, $T(X) = \omega$ és $\omega_1 \in \text{Cal}(X)$. Itt $T(X)$ jelöli azt a legkisebb κ számosságot, amelyre igaz, hogy zárt halmazoknak minden $\rho = \text{cf}(\rho) > \kappa$ hosszú növekvő sorozatának az uniója is zárt.

Ismert, hogy minden X kompakt térben $t(X) = F(X)$, illetve, hogy Lindelöf térben $F(X) = \omega$ ha $T(X) = \omega$. Így tehát mindkét fent említett állítás olyan terekről szól, ahol a szabad sorozatok mérete korlátozott. Ebben a részben megmutatjuk, hogy a kaliberekre tett feltevések mellett lényeges feltétel a szabad sorozatok hosszának korlátozása.

Számosságok egy (λ, κ) rendezett párja (*2-es kaliber*), jelekkel leírva $(\lambda, \kappa) \in \text{Cal}_2(X)$, ha bárhogy megadva κ darab nyílt halmazt, mindig találunk közülük λ darabot úgy, hogy a metszetük nem üres. Számosságok egy (μ, λ, κ) rendezett hármasa (*3-as kaliber*), röviden $(\mu, \lambda, \kappa) \in \text{Cal}_3(X)$, ha bárhogy megadva κ darab nyílt halmazt, mindig találunk közülük λ darabot úgy, hogy ezek közül bármely μ -nél kevesebb halmaz metszete nem üres.

Nyilvánvaló, hogy ha $\lambda \in \text{Cal}(X)$, akkor minden $\kappa \geq \lambda$ esetén $(\lambda, \kappa) \in \text{Cal}_2(X)$, illetve ha $(\lambda, \kappa) \in \text{Cal}_2(X)$ akkor $(\lambda, \lambda, \kappa) \in \text{Cal}_3(X)$.

2.1. Ha X -ben nincs "hosszú" szabad sorozat

2.1. Tétel. [disz. 2.2] *Tegyük fel, hogy az X térre és a $\lambda \leq \kappa$ végtelen számosságokra teljesül, hogy $\hat{F}(X) \leq \lambda$ és $(\lambda, \lambda, \kappa) \in \text{Cal}_3(X)$. Ekkor van olyan $\mu < \kappa$, amelyre $d(X) \leq \mu^{<\lambda}$.*

Külön említést érdemel az a speciális eset, amikor $\lambda = \rho^+$ és $\kappa = (2^\rho)^+$ valamilyen ρ számosságra. Ekkor ugyanis minden $\mu < \kappa$ számosság esetén $\mu^{<\lambda} \leq (2^\rho)^\rho = 2^\rho$, ezért igaz a következő állítás.

2.2. Következmény. [disz. 2.3] *Ha $F(X) \leq \rho$ és $(\rho^+, \rho^+, (2^\rho)^+) \in \text{Cal}_3(X)$, akkor $d(X) \leq 2^\rho$.*

Itt a $\rho = \omega$ esetben az említett Arhangelszkij tétel [7, Theorem 5.1] egy erősítését kapjuk, mivel a Lindelöf tulajdonság és $T(X) = \omega$ helyett elég az $F(X) = \omega$ feltétel. Ha viszont megtartjuk a $T(X) = \omega$ feltételt, akkor bizonyos esetekben jobb korlátot is mondhatunk a sűrűsége.

2.3. Tétel. [disz. 2.4] *Tegyük fel, hogy $2^\rho = \rho^{(+n)}$ valamilyen n természetes számra, $F(X) \leq \rho$, $T(X) \leq \rho$ és ρ^+ -tól $\rho^{(+n)}$ -ig minden számosság kalibere X -nek. Ekkor $d(X) \leq \rho$.*

Ennek a tételnek két következményét említjük meg.

2.4. Következmény. [disz. 2.5] *Ha $2^\rho = \rho^+$, $F(X) \leq \rho$, $T(X) \leq \rho$ és $\rho^+ \in \text{Cal}(X)$, akkor $d(X) \leq \rho$.*

2.5. Következmény. [disz. 2.6] *Tegyük fel, hogy $\aleph_\omega$ erős limesz, $T(X) = \omega$, $\widehat{F}(X) \leq \aleph_\omega$ és tetszőleges $n > 0$ természetes szám esetén $\aleph_n \in \text{Cal}(X)$. Ekkor X szeparábilis.*

2.2. Ha X előáll "kevés" kompakt altér uniójaként úgy, hogy egyikben sincs "hosszú" szabad sorozat

A következőkben olyan X terekről mutatjuk meg, hogy a sűrűségük "kicsi", amelyekre a kaliberekre tett feltevések mellett feltesszük, hogy X előáll "kevés" kompakt tér uniójaként úgy, hogy egyik részben sincs "hosszú" szabad sorozat. Mivel bármely Y kompakt T_2 tér esetén $F(Y) = t(Y)$, úgy is fogalmazhatunk, hogy az X tér előáll kevés, "kis" szükségű kompakt altér uniójaként.

2.6. Tétel. [disz. 2.8] *Tegyük fel, hogy $X = \bigcup \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| \leq \kappa$, ahol minden $C \in \mathcal{C}$ kompakt, $\widehat{F}(C) \leq \kappa$ és $\kappa \in \text{Cal}(X)$. Ekkor $d(X) < \kappa$.*

2.7. Tétel. [disz. 2.9] *Tegyük fel, hogy $\omega < \mu \leq \kappa$ és $X = \bigcup \mathcal{C}$ ahol $|\mathcal{C}| < \kappa$ és minden $C \in \mathcal{C}$ esetén C kompakt és $\widehat{F}(C) \leq \mu$, továbbá $(\mu, \kappa) \in \text{Cal}_2(X)$. Ekkor $d(X) < \kappa$.*

Ennek a tételnek következményeként kapjuk a fejezet elején említett Sapirowszkij-tétel egy erősítését:

2.8. Következmény. [disz. 2.13] *Ha X kompakt, $\widehat{F}(X) \leq \mu$ és $(\mu, \kappa) \in \text{Cal}_2(X)$ akkor $\pi(X) < \kappa$.*

A 2.6 tételnek talán legérdekesebb esete, amikor $\kappa = \omega_1$: Ha X előáll legfeljebb ω_1 darab kompakt és megszámlálhatóan szűk altér uniójaként, és $\omega_1 \in \text{Cal}(X)$, akkor X szeparábilis. Ezt az esetet általánosítjuk a következő tételben:

2.9. Tétel. [disz. 2.16] *Legyen X egy topologikus tér és ϱ egy számosság úgy, hogy $T(X) \leq \varrho$ és valamely $n > 0$ természetes számra $X = \bigcup \mathcal{C}$, ahol $|\mathcal{C}| \leq \varrho^{(+n)}$ és minden $C \in \mathcal{C}$ kompakt. Tegyük fel még azt is, hogy $0 < i \leq n$ esetén $\varrho^{(+i)} \in \text{Cal}(X)$. Ekkor $d(X) \leq \varrho$.*

Végül egy példa mutatja, hogy ennek a fejezetnek az eredményei nem erősíthetők oly módon, ahogy a 2.8 következményben, azaz nem helyettesíthetjük $d(X)$ -et $\pi(X)$ -el. Jelölje

$$\delta(X) = \sup\{d(Y) : \overline{Y} = X\},$$

akkor nyilvánvaló, hogy tetszőleges X tér esetén

$$d(X) \leq \delta(X) \leq \pi(X).$$

2.10. Példa. [disz. 2.17] *Van olyan X tér amelyik megszámlálható sok kompakt és megszámlálhatóan szűk altér uniója továbbá a tér szeparábilis és ezért minden $\text{cf}(\kappa) > \omega$ esetén $\kappa \in \text{Cal}(X)$, de X tartalmaz egy egy sűrű Y alteret amelyre $d(Y) = \delta(X) = \mathfrak{c} = 2^\omega$.*

3. π -bázisok rendje

3.1. A projektív π -karakter, π -bázisok rendje

A "lokálisan kicsi" illetve "pontonként kicsi" halmazrendszerek fogalma sokféle topológiai tulajdonság vizsgálatánál előfordul. Mi most egy topologikus tér π -bázisának a rendjével foglalkozunk. Általában az X halmaz részhalmazainak egy tetszőleges $\mathcal{A}$ rendszerének esetén $\mathcal{A}$ rendje, $\text{ord}(\mathcal{A})$ jelöli azt a legkisebb κ számosságot, amelyre minden $x \in X$ legfeljebb κ darab $\mathcal{A}$ -beli halmaznak eleme. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszert *pont-megszámlálhatónak* nevezünk, ha $\text{ord}(\mathcal{A}) \leq \omega$. Sapirovskij bizonyította be, hogy ha X kompakt, akkor X -nek van olyan π -bázisa, amelynek a rendje legfeljebb $t(X)$ (lásd [56] és [58]). Egy nagyon rövid és elegáns bizonyítás található Todorcsevic cikkében (ld. [67]). E tétel egy triviális következménye, hogy ha a kompakt X térnek $t(X)^+$ kalibere, akkor $\pi(X) \leq t(X)$.

Arhangelszkij vezette be (ld. [6]) a *megszámlálható projektív π -karakter* fogalmát: az X tér *projektív π -karaktere megszámálható*, ha X minden folytonos képének a π -karaktere megszámálható. Megmutatta, hogy ha egy megszámálható projektív π -karakterű kompakt térnek az ω_1 kalibere akkor a tér szeparábilis vagy ami ugyanaz, a térnek van megszámálható π -bázisa.

Jelölje $p\pi\chi(X) = \min\{\pi\chi(Y) : Y \text{ Tyihonov és folytonos képe } X\text{-nek}\}$. Ezt a számosságot az X tér *projektív π -karakterének* nevezzük.

Mivel Sapirovskij egy tétele szerint kompakt X tér esetén $\pi\chi(X) \leq t(X)$ (lásd [53] illetve [5]-ben és [25]-ben) és mert kompakt tér folytonos képében a szükség nem nő, ezért ha X kompakt, akkor $p\pi\chi(X) \leq t(X)$. Így tehát Arhangelszkij fenti tétele erősíti az előző Sapirovskij tétel következményét a $t(X) = \omega$ esetben.

Jelölje $\pi sw(X)$ (π -szeparáló súly, ld. [25, 74. oldal]) azt a legkisebb számosságot, amelyre X -nek van ilyen rendű π -bázisa.

Ezeket a fogalmakat használva, minden kompaktsági feltevés nélkül kapjuk a következő tételt:

3.1. Tétel. [disz. 3.2] *Bármely X Tyihonov tér esetén $\pi sw(X) \leq p\pi\chi(X)$. Speciálisan, minden megszámálható projektív π -karakterű Tyihonov térnek van pont-megszámlálható π -bázisa.*

Egy $f : X \rightarrow Y$ folytonos ráképezést *irreducibilisnek* nevezünk, ha minden $F \subsetneq X$ zárt halmaz esetén $f(F) \neq Y$. Tetszőleges $\lambda < \kappa$ számosságok esetén jelölje

$$\Sigma_\lambda(I, \kappa) = \{g \in I^\kappa : |\text{supp } g| \leq \lambda\},$$

azaz az I^κ Tyihonov kocka legfeljebb λ tartójú elemeinek a halmazát. A $\lambda = \omega$ esetben egyszerűen $\Sigma(I, \kappa)$ -t írunk. Itt $g \in I^\kappa$ esetén g *tartója*, $\text{supp } g = \{\xi < \kappa : g(\xi) \neq 0\}$. Az eredeti, kompakt terekről szóló Sapirovskij-tétel bizonyítása azon alapult, hogy bármely X kompakt tér $\pi(X) = \kappa$ esetén irreducibilisen beleképezhető $\Sigma_{t(X)}(I, \kappa)$ -ba. A 3.1 tétel bizonyítása az irreducibilis leképezés fogalmának egy önmagában is érdekes általánosításán alapul.

Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy folytonos szürjektív függvény az X térből Y -ra. Azt mondjuk, hogy f *π -irreducibilis*, ha X minden valódi zárt F alterének $f[F]$ képe *nem sűrű* Y -ban. Egy folytonos f ráképezés pontosan akkor π -irreducibilis ha bármely nem-sűrű halmaz f szerinti képe nem-sűrű. Az is világos, hogy egy zárt leképezés akkor és csak akkor π -irreducibilis, ha irreducibilis. Ezért kompakt Hausdorff terek esetén a két fogalom egybeesik.

Azt, hogy miért is szerepel a " π " a fogalom nevében, a következő tétel világítja meg:

3.2. Tétel. [disz. 3.4] Legyen f folytonos ráképezése az X térnek Y -ra. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (1) f π -irreducibilis;
- (2) az X tér bármely $\mathcal{B}$ π -bázisa és bármely $B \in \mathcal{B}$ esetén $f[X \setminus B]$ nem sűrű Y -ban;
- (3) X -nek van olyan $\mathcal{B}$ π -bázisa, hogy bármely $B \in \mathcal{B}$ esetén $f[X \setminus B]$ nem sűrű Y -ban;
- (4) az Y tér bármely $\mathcal{C}$ π -bázisának "ősképe", az $\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ halmazrendszer, π -bázisa X -nek;
- (5) az Y térnek van olyan $\mathcal{C}$ π -bázisa, hogy $\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ π -bázisa X -nek.

3.3. Következmény. [disz. 3.5] Ha az $f : X \rightarrow Y$ leképezés π -irreducibilis, akkor $\pi(X) = \pi(Y)$

Azt mondjuk, hogy az $Y \subset I^\kappa$ halmaz 0-beágyazott az I^κ Tyihonov kockába, ha minden $\alpha < \kappa$ esetén az

$$\{y \upharpoonright \alpha : y \in Y \text{ és } y(\alpha) = 0\}$$

halmaz sűrű az Y tér $Y \upharpoonright \alpha = \{y \upharpoonright \alpha : y \in Y\} \subset I^\alpha$ vetületében.

3.4. Tétel. [disz. 3.7] Tegyük fel, hogy Y 0-beágyazott az I^κ Tyihonov kockába és κ reguláris. Ha $y \in Y$ egy olyan pont, amelyre minden $\alpha < \kappa$ esetén $y(\alpha) > 0$, akkor $\pi\chi(y, Y) = \kappa$.

3.5. Következmény. [disz. 3.8] Ha Y 0-beágyazott az I^κ Tyihonov kockába, akkor bármely nem izolált $y \in Y$ pont esetén

$$p\pi\chi(y, Y) \geq |\{\alpha : y(\alpha) > 0\}|,$$

ha pedig $y \in Y$ izolált Y -ban, akkor $\{\alpha : y(\alpha) > 0\}$ véges halmaz. Ezért $Y \subset \Sigma_{p\pi\chi(Y)}(I, \kappa)$, mivel végtelen Y esetén $p\pi\chi(Y) \geq \omega$.

3.6. Tétel. [disz. 3.9] Legyen X tetszőleges Tyihonov tér, $\pi(X) = \kappa$. Ekkor megadható egy π -irreducibilis leképezés X -ről az I^κ Tyihonov kocka egy 0-beágyazott Y alterére.

Így a 3.5 és 3.6-ból következik:

3.7. Következmény. [disz. 3.10] Ha X egy Tyihonov tér, $\pi(X) = \kappa$ és $p\pi\chi(X) = \lambda$, akkor X -nek van olyan π -irreducibilis Y képe, amelyik $\Sigma_\lambda(I, \kappa)$ altere.

Ez az állítás Sapirovszkij egy tételét erősíti (ld. [56] ill. [25, 3.22]), miszerint ha X egy kompakt T_2 tér, akkor egy irreducibilis képe beágyazható az I intervallum $\Sigma_{t(X)}$ hatványába.

A 3.1 tétel bizonyításához szükségünk van Sapirovszkij következő tételére (ld. [56] illetve [25, 3.24]):

Tétel (Sapirovszkij). Ha az $Y \subset \Sigma_\lambda(I, \kappa)$, akkor $\pi sw(Y) \leq \lambda$.

3.8. Következmény. [disz. 3.11] Ha X Tyihonov tér és $\kappa > p\pi\chi(X) \in \text{Cal}(X)$, akkor $\pi(X) < \kappa$.

Mivel kompakt T_2 X tér esetén $t(X) \geq p\pi\chi(X)$, az állításból következik Sapirovszkij azon tétele, hogy ha egy kompakt térben $t(X)^+$ kaliber, akkor $\pi(X) \leq t(X)$. Az is látható, hogy az állítás erősíti Arhangelszkij azon tételét is (ld. [6]), kompakt helyett Tyihonov terekre, miszerint ha egy kompakt tér projektív π -karaktere ω és a térnek ω_1 kalibere, akkor a tér szeparábilis.

Az ebben a részben szereplő tételekben a projektív π -karakter nem helyettesíthető egyszerűen a π -karakterrel, erre vonatkozó példák a következő részben kerülnek sorra (lásd [35]).

3.2. M_1 tér, amelynek nincs pont-megszámlálható π -bázisa

Kompakt terek helyett Lindelöf tereket vizsgálva, V.Tkacsuk a [65] cikkében bizonyította, hogy feltéve a kontinuum hipotézist, KH-t, minden első megszámlálható Hausdorff térnek van pont-megszámlálható π -bázisa ha a tér Lindelöf vagy a cellularitása megszámlálható. (A [65] cikkben minden térről fel volt téve, hogy Tyihonov, de a bizonyítás csak a Hausdorff tulajdonságot használja.) Ezt a tételt Sapirovszkij azon tétele motiválta, miszerint egy kompakt megszámlálható szükségű térnek van pont-megszámlálható π -bázisa. Ugyanis a megszámlálható szükség helyett az erősebb M_1 tulajdonságot feltéve gyengíthette a kompaktsági feltételt. Természetes kérdés, hogy Tkacsuk tételében a KH szükséges-e, illetve az, hogy van-e konzisztens ellenpélda M_1 térre. Habár V.Tkacsuk említett cikke 27 évvel a későbbi mint a Sapirovszkij-tétel megjelenése, a cikkben nyitott kérdés maradt egy konzisztens ellenpélda létezése.

Ebben a részben olyan ZFC (és más konzisztens) példákat konstruálunk, amelyek első megszámlálhatóak és nincs pont-megszámlálható π -bázisuk. Azt is megmutatjuk, hogy Tkacsuk említett, a kontinuum hipotézist használó eredményét nem lehet pusztán ZFC-ben bizonyítani.

3.2.1. ZFC példák

Tkacsuk [65] cikkében szerepel az az eredmény, [65, Theorem 3.1.], hogy ha egy X tér szükségű és π -karaktere megszámlálható és $d(X) \leq \omega_1$, akkor $\pi sw(X) \leq \omega$. A cikkben szereplő problémák egyikében [65, Problem 4.11] Tkacsuk azt kérdezte, hogy a megszámlálható szükség feltétele elhagyható-e. A válasz igenlő:

3.9. Tétel. [disz. 3.13] *Legyen X topologikus tér, melyre $d(X) \leq \pi\chi(X)^+$. Ekkor $\pi sw(X) \leq \pi\chi(X)$.*

3.10. Tétel. [disz. 3.14] *Van olyan X első megszámlálható 0-dimenziós Hausdorff (és így Tyihonov) tér, amelyre $|X| = \aleph_{\omega+1}$ és $\pi sw(X) \geq \aleph_\omega$, és így X -nek nincs pont-megszámlálható π -bázisa.*

Az így kapott tér számossága, $\aleph_{\omega+1}$ jóval nagyobb mint a 3.9 tétel szerint lehetséges legkisebb számosság, tudniillik $\aleph_2$. De ennél kisebb példát, például $\aleph_\omega$ számosságút nem sikerült konstruálni. A sejtésünk az, hogy ha van ekkora tér, akkor van kisebb is. Ezt a $2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$ feltétel mellett be is tudtuk bizonyítani.

3.11. Tétel. [disz. 3.17] *Tegyük fel, hogy $2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$ és X első megszámlálható tér, amelynek számossága $\aleph_\omega$. Ha X minden $\aleph_\omega$ -nál kisebb számosságú alterének van pont-megszámlálható π -bázisa, akkor X -nek is van.*

3.2.2. Példák "hosszú" Szuszlin-egyenesekből

A következő részben olyan példákat adunk, amelyeknek csak a sűrűségnél kisebb diszkrét alterei vannak. Hogy miért, az kiderül a következő tételből.

3.12. Tétel. [disz. 3.18] *Tegyük fel, hogy az X topologikus térnek van olyan $\mathcal{B}$ π -bázisa, amelyre $\text{ord}(\mathcal{B})^+ < d(X)$. Akkor X -nek van olyan D diszkrét altere, amelyre $|D| \geq d(X)$.*

Meg kell jegyeznünk, hogy ez az állítás egyszerű következménye Sapirovskij egy eredményének (ld. [25, 3.26]): Ha $\mathcal{B}$ az X topologikus tér nem-üres nyílt halmazainak egy rendszere, amelynek rendje legfeljebb κ , akkor megadható diszkrét alterek egy $\{D_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ rendszere úgy, hogy minden $B \in \mathcal{B}$ esetén $\bigcup \{D_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \cap B \neq \emptyset$. A 3.12 tétel bizonyítása mindenesetre teljesen más és jóval rövidebb, mint Sapirovskij tételének a bizonyítása.

Az előző tétel következménye, hogy ha egy X tér sűrűsége $\geq \omega_2$ és $\widehat{s}(X) \leq d(X)$, akkor X -nek nincs pont-megszámlálható π -bázisa. Nem tudjuk, hogy van-e ilyen első megszámlálható Tyihonov tér ZFC-ben. Viszont $\mathfrak{c}$ számosságú (és sűrűségű) Hausdorff példa ismert, lásd [23], és ez mutatja, legalább is Hausdorff terekre, hogy a 3.2 fejezet alején szereplő, Tkacsuktól származó állítása hamis a kontinuum hipotézis feltevése nélkül.

Tehát olyan M_1 tereket keresünk, amelyekre $\widehat{s}(X) \leq d(X)$. Ilyen térre klasszikus (konzisztens) példa a Szuszlin egyenes. De ennek sűrűsége csak ω_1 , így céljainknak csak ennél "hosszabb" Szuszlin egyenes felel meg.

Legyen κ egy végtelen számosság. Egy folytonos $\langle L, < \rangle$ rendezést rendezés-topológiával κ -Szuszlin egyenesnek nevezünk, ha L -ben legfeljebb κ darab diszjunkt nyílt intervallum van (azaz $c(L) \leq \kappa$) de a sűrűsége, $d(L)$, nagyobb mint κ . Így tehát a közönséges Szuszlin egyenes ugyanaz, mint a ω -Szuszlin egyenes.

3.13. Tétel. [disz. 3.19] *Ha L κ -Szuszlin egyenes, akkor létezik olyan X első megszámlálható altér, melyre $|X| = \kappa^+$ és $\pi sw(X) = \kappa$.*

Így tehát ha létezik ω_1 -Szuszlin egyenes, akkor van ω_2 számosságú első megszámlálható tér (GO tér), amelynek nincs pont-megszámlálható π -bázisa. Pillanatnyilag nem ismeretes olyan modellje ZFC-nek amelyben semmilyen $\kappa > \omega$ -ra sincs κ -Szuszlin egyenes. Így aztán lehet, hogy az előző tétel valójában egy ZFC példát szolgáltat olyan M_1 (GO) térre, amelyre $\pi sw(X) > \omega$.

3.2.3. Példák $\mathcal{P}(\omega)$ részhalmazaiából

Legyen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ és jelölje $\mathcal{U}$ az ω ko-véges részhalmazainak a rendszerét. Ha $I \in \mathcal{I}$ és $U \in \mathcal{U}$, akkor legyen

$$[I, U]_{\mathcal{I}} = \{J \in \mathcal{I} : I \subset J \subset U\}.$$

Ha $\mathcal{I} = \mathcal{P}(\omega)$, akkor egyszerűen $[I, U]$ -t írunk $[I, U]_{\mathcal{P}(\omega)}$ helyett.

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ halmazrendszer *stabil*, ha valahányszor $I \in \mathcal{I}$, $I =^* J$, azaz I és J szimmetrikus differenciája véges, akkor $J \in \mathcal{I}$.

Ha $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$, akkor $\tau_{\mathcal{I}}$ jelöli azt a topológiát az $\mathcal{I}$ -n, amit az $[I, U]_{\mathcal{I}}$ alakú halmazok generálnak, $X_{\mathcal{I}}$ pedig az $\langle \mathcal{I}, \tau_{\mathcal{I}} \rangle$ topologikus teret.

3.14. Tétel. [disz. 3.21] $X_{\mathcal{I}}$ első megszámlálható és 0-dimenziós Hausdorff tér.

Tetszőleges $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ esetén jelölje $\text{cof}(\mathcal{I})$ az $\langle \mathcal{I}, \subset \rangle$ parciális rendezés kofinalitását. Azt mondjuk, hogy a κ számosság *halmazkalibere* $\mathcal{I}$ -nek, ha minden $\mathcal{J} \in [\mathcal{I}]^\kappa$ részrendszerhez található $\mathcal{K} \in [\mathcal{J}]^\kappa$ és $I \in \mathcal{I}$ úgy, hogy $\bigcup \mathcal{K} \subset I$. Kevésbé formálisan ez azt jelenti, hogy bármely κ darab $\mathcal{I}$ -beli halmaz közül kiválasztható κ darab, amelyeknek van $\mathcal{I}$ -beli felső korlátjuk.

3.15. Tétel. [disz. 3.22] Legyen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ tetszőleges. Ekkor

- (i) $d(X_{\mathcal{I}}) = \text{cof}(\mathcal{I}) \cdot \omega$;
- (ii) ha $\mathcal{I}$ stabil és κ egy számosság, melyre $\text{cf}(\kappa) > \omega$, akkor κ pontosan akkor kalibere az $X_{\mathcal{I}}$ térnek, ha κ halmazkalibere $\mathcal{I}$ -nek.

Egy alkalmas $\mathcal{I}$ segítségével kapunk olyan $X_{\mathcal{I}}$, és így első megszámlálható teret, amelynek nincs pont-megszámlálható π -bázisa.

3.16. Tétel. [disz. 3.23] Tegyük fel, hogy $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ stabil, $\text{cof}(\mathcal{I}) > \omega$ és ω_1 halmazkalibere $\mathcal{I}$ -nek. Ekkor $\pi \text{sw}(X_{\mathcal{I}}) > \omega$.

A $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{P}(\omega)$ egy κ hosszú mod véges erősen növekvő sorozat, ha minden $\alpha < \beta < \kappa$ esetén $A_\alpha \setminus A_\beta$ véges és $A_\beta \setminus A_\alpha$ végtelen.

3.17. Következmény. [disz. 3.24] Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}(\omega)$ -ban van mod véges erősen növekvő ω_2 hosszú sorozat. Akkor létezik egy első megszámlálható 0-dimenziós Hausdorff amelynek számossága ω_2 és ω_1 kalibere. Speciálisan MA_{ω_1} esetén van ilyen tér.

Ez az eredmény megoldja a [65] cikkbeli 4.6 és 4.7 problémákat, megmutatva, hogy konzisztens olyan első megszámlálható Tyihonov tér létezése melynek ω_1 kalibere (és így Szuszlin tulajdonságú), de nincs pont-megszámlálható π -bázisa.

3.18. Tétel. [disz. 3.25] Tegyük fel, hogy az $\{A_\alpha : \alpha < \omega_2\} \subset \mathcal{P}(\omega)$ mod véges erősen növekvő sorozat teljesíti a következő feltételt:

(*) Bármely $C \in [\omega_2]^{\omega_1}$ esetén van olyan $\{\alpha, \beta\} \in C^2$, hogy $A_\alpha \subset A_\beta$, (azaz közöttük a tartalmazás valódi, nem csak mod véges).

Ekkor a 3.17 következményben megkonstruált $X_{\mathcal{I}}$ tér öröklődően Lindelöf.

Az így kapott tér egy első megszámlálható L -tér, ezért egy ilyen tér már nem létezik MA_{ω_1} feltevés mellett, lásd [61]. Viszont egy "természetes" CCC forszolással kaphatunk ilyen sorozatot.

3.19. Tétel. [disz. 3.26] Van olyan CCC kényszerképzet, amellyel forszolva az új modellben már van a 3.18 tételben szereplő, a (*) feltételnek eleget tevő mod véges erősen növekvő $\{A_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ sorozat.

3.20. Következmény. [disz. 3.27] Konzisztens, hogy létezik egy első megszámlálható, öröklődően Lindelöf 0-dimenziós X tér amelynek számossága ω_2 , az ω_1 kalibere X -nek és X -nek nincs pont-megszámlálható π -bázisa.

Ez a konstrukció megoldást szolgáltat az előbb említett [65] cikkben szereplő 4.3 problémára.

Jegyezzük meg végül, hogy önmagában a kontinuum hipotézis tagadása nem elég ahhoz, hogy találjunk egy mod véges erősen növő ω_2 hosszú sorozatot $\mathcal{P}(\omega)$ -ban. Kunen bizonyította (lásd [34]), hogy ω_2 Cohen-valóst adva egy KH modellhez, nincs ilyen sorozatot $\mathcal{P}(\omega)$ -ban. Így tehát ez a módszer sem alkalmas arra, hogy pusztán a kontinuum hipotézis tagadásával kapjunk az itt szereplő terekhez hasonló topologikus tereket.

4. Őrző függvények

Egy tetszőleges $f : X \rightarrow Y$ függvényt *őrző függvénynek* nevezünk, ha minden kompakt altér f szerinti képe kompakt és minden összefüggő altér képe összefüggő.

Jól ismert, hogy minden folytonos függvény őrző. Egymástól függetlenül, többen megjegezték, hogy X , Y -ra tett bizonyos feltételek esetén a megfordítás is igaz: minden $f : X \rightarrow Y$ őrző függvény folytonos. Az általunk ismert első ilyen eredmény még 1926-ból való (ld. [51]). Eszerint minden $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ őrző függvény folytonos.

Ahhoz, hogy ezt a klasszikus eredményt általánosítani lehessen más terekre is, érthető módon az kell, hogy az összefüggő halmazok illetve a kompakt halmazok meghatározzák a tér topológiáját. Például lokálisan összefüggő terekre, azaz olyan terekre, amelyeknek van összefüggő halmazokból álló bázisa, az összefüggő (nyílt) halmazok meghatározzák a topológiát. Másrészt például a Frèchet terekben, azaz olyan terekben, amelyekben ha egy A halmaz torlódik egy p ponthoz, akkor A -ból lehet p -hez konvergálni, a kompakt halmazok (speciálisan a konvergens sorozatok a limesszel) meghatározzák a topológiát.

Egy ideig sokat és sokan vizsgálták azt kérdést, hogy milyen feltételek mellett folytonos minden őrző függvény, de az általunk ismert eredmények közül a legfrissebb is még 1970-71-ből való: Evelyn R. McMillan [46] mutatta meg, hogy ha X Hausdorff, lokálisan összefüggő és Frèchet, valamint Y Hausdorff, akkor minden $f : X \rightarrow Y$ őrző függvény folytonos.

Jelölje $Pr(X, T_i)$ ($i = 1, 2, 3$ vagy $3\frac{1}{2}$) a következő állítást: Minden őrző függvény az X térből egy tetszőleges T_i térbe folytonos.

McMillan eredeti tételét egy kicsit általánosabban is bizonyítottuk, elhagyva az X térre megkövetelt Hausdorff tulajdonságot.

4.1. Tétel. [disz. 4.8] *Ha X lokálisan összefüggő Frèchet tér, akkor $Pr(X, T_2)$ teljesül.*

Ennek a tételnek a következő szemi-lokális verzióját is bizonyítjuk. Az X tér egy p pontját *Frèchet pontnak* nevezünk, ha bármely $A \subset X$, $p \in \overline{A}$ esetén megadható egy $\{p_n : n \in \omega\} \subset A$ sorozat úgy, hogy $p_n \rightarrow p$.

4.2. Tétel. [disz. 4.9] *Ha X lokálisan összefüggő Hausdorff tér, p Frèchet pont X -ben és $f : X \rightarrow Y$ őrző függvény egy Y $T_{3\frac{1}{2}}$ térbe, akkor f folytonos p -ben.*

Ez a tétel nem teljesen lokalizált változata a MacMillan tételnek, ugyanis a lokális összefüggőség globális feltétel, nem csak p -nek van összefüggő nyílt halmazokból álló környezet bázisa, hanem minden pontnak. Ez a következő természetes és részben nyitott kérdést veti fel:

4.3. Probléma. [disz. 4.10] *Az előző tételben elég-e feltenni, hogy X csak a p pontban lokálisan összefüggő?*

Erre a problémára részleges pozitív válaszokat sikerült adni úgy, hogy erősítettük a p pontbeli Frèchet tulajdonságot, illetve úgy, hogy 2^ω -val korlátoztuk a pont karakterét. 4.2-ben az Y térre vonatkozó $T_{3\frac{1}{2}}$ feltételt T_3 -ra lehet gyengíteni, ha a p pont karakterét 2^ω helyett ω_1 -el korlátozzuk (ld. [disz. 4.12 - 4.15]).

Az X tér egy x pontját *szekvenciálisan összeköthetőnek* (röviden *SC pontnak*) nevezzük, ha minden $x_n \rightarrow x$ sorozatnak megadható egy $\langle x_{n_k} : k < \omega \rangle$ részsorozata és összefüggő halmazoknak egy $\langle C_k : k < \omega \rangle$ sorozata úgy, hogy minden k -ra $\{x_{n_k}, x\} \subset C_k$ (azaz C_k összeköti az x_{n_k} pontot x -el), továbbá $C_k \rightarrow x$, azaz x minden környezete véges kivétellel az összes C_k -t tartalmazza. Az X tér *SC tér*, ha minden pontja SC pont. Például bármely lokálisan összefüggő M_1 tér vagy bármely összefüggő lineárisan rendezett tér SC tér.

4.4. Tétel. [disz. 4.21] *Egy Hausdorff térbe képező őrző függvény minden SC pontban szekvenciálisan folytonos.*

Mivel egy Fréchet pontban a folytonosság és a szekvenciális folytonosság egybeesik, ezért

4.5. Következmény. [disz. 4.22] *Egy Hausdorff térbe képező őrző függvény minden olyan pontban folytonos, amelyik egyszerre SC pont és Fréchet pont.*

Példák nem folytonos őrző függvényekre:

4.6. Példa. [disz. 4.23] *E.R. McMillan mutatott példát olyan lokálisan kompakt SC térre, amelyen létezik nem folytonos őrző függvény. Ez a függvény persze szekvenciálisan folytonos (4.4) szerint.*

4.7. Példa. [disz. 4.24] *Ebben a példában a szekvenciális folytonosság sem marad igaz, Ez a példa lokálisan összefüggő öröklődően Lindelöf és így T_6 tér amelynek a szükségse ω . Persze ez a tér nem SC tér.*

A szekvenciális folytonosság és folytonosság kapcsolatának vizsgálatával további lokálisan összefüggő terek osztályaira sikerült bizonyítani, hogy a T_3 terekbe képező őrző függvények folytonosak.

Egy X topologikus teret *monoton normálisnak* nevezzük, ha minden $A \subset X$ zárt és minden A -et tartalmazó U nyílt halmazhoz megadható egy $H(A, U)$ nyílt halmaz (az U "fele") úgy, hogy

- 1) $A \subset H(A, U) \subset \overline{H(A, U)} \subset U$;
- 2) ha $A \subset B$ és $U \subset V$ akkor $H(A, U) \subset H(B, V)$.

Minden monoton normális T_3 tér normális, és ellentétben a normalitással, a monoton normalitás öröklődik minden altérre. Például minden lineárisan rendezett tér és ezek alterei (a GO terek) monoton normálisak. Az is igaz, hogy a metrikus terek is monoton normálisak.

4.8. Tétel. [disz. 4.33] *Ha X lokálisan kompakt, lokálisan összefüggő és monoton normális, akkor $Pr(X, T_3)$ teljesül.*

A következőkben szorzattereken értelmezett őrző függvények folytonosságát vizsgáljuk. Ehhez egy topologikus játék vizsgálata ad lehetőséget.

Legyen X topologikus tér és $p \in X$. A $G(X, p)$ játékot ketten játsszák, **I** és **II**, ω fordulóban. Az n -edik lépésben **I** választ egy $p \in U_n$ nyílt halmazt majd **II** választ egy $x_n \in U_n$

pontot. **I** nyer, ha a létrejövő $\{x_n : n < \omega\}$ sorozat tartalmaz konvergens (nem feltétlen p -hez konvergáló) részsorozatot, egyébként **II** nyer.

Azt mondjuk, hogy a p pont *nyerhető*, ha **I**-nek van nyerő stratégiája a $G(X, p)$ játékban. X *nyerhető*, ha minden pontban nyerhető. Például minden megszámlálható karakterű pont nyerhető, és így minden M_1 tér nyerhető. Bármely összefüggő rendezett tér is nyerhető. Természetesen a szekvenciálisan kompakt terek is nyerhetőek.

4.9. Tétel. [disz. 4.44] Legyen $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ összefüggő és lokálisan összefüggő SC terek szorzata, $f : X \rightarrow Y$ pedig egy őrző függvény a reguláris Y térbe. Ha a $p \in X$ és minden $s \in S$ -re a $G(X_s, p(s))$ játék nyerhető, akkor f folytonos a p pontban.

4.10. Következmény. [disz. 4.45] $Pr(X, T_3)$ teljesül, ha X összefüggő és lokálisan összefüggő nyerhető SC terek szorzata. Így például ha X összefüggő rendezett terek szorzata, vagy X összefüggő és lokálisan összefüggő első megszámlálható terek szorzata, akkor $Pr(X, T_3)$ teljesül.

Felhasználva Mary Ellen Rudin tételét (ld. [52]), miszerint minden kompakt monoton normális tér folytonos képe egy kompakt rendezett térnek:

4.11. Következmény. [disz. 4.47] Legyen $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ ahol minden X_s tényező kompakt, összefüggő, lokálisan összefüggő és monoton normális. Ekkor $Pr(X, T_3)$ (vagy ami a kompaktság miatt ugyanaz: $Pr(X, T_2)$) teljesül.

A (4.8) állítás szerint egy lokálisan kompakt, lokálisan összefüggő monoton normális tér esetén $Pr(X, T_3)$ teljesül. Felvetődik tehát a kérdés, hogy mit mondhatunk ilyen terek szorzatáról:

4.12. Probléma. [disz. 4.48] Legyen X lokálisan kompakt összefüggő és lokálisan összefüggő monoton normális terek szorzata. Igaz-e, hogy akkor $Pr(X, T_3)$ teljesül?

Ennél lényegesen kevesebbet nem lehet feltenni a szorzattér tényezőiről. Ugyanis az előző állításokat összevetve:

4.13. Következmény. [disz. 4.49] Legyen X olyan $T_{3\frac{1}{2}}$ terek szorzata, amelyek lineárisan rendezettek és/vagy első megszámlálhatóak. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- a) $Pr(X, T_3)$;
- b) X lokálisan összefüggő;
- c) a szorzat minden tényezője lokálisan összefüggő és véges sok kivétellel összefüggő.

A következő részben speciális térosztályokat vizsgálunk meg, a kompakt és szekvenciális tereket. Ez utóbbi tulajdonság definíciója megtalálható a 9. oldalon, eszerint az X tér *szekvenciális*, ha bármely $A \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt halmaz, ha nem lehet A -ból (ω típusban) kikonvergálni. A (4.6) alatt említett példákban vagy a szekvencialitás, a Fréchet tulajdonság egy gyengített változata, vagy a kompaktság nem teljesült. Így természetesen merül fel a következő kérdés, amelyet csak részlegesen sikerült megválaszolni.

4.14. Probléma. [disz. 4.51] *Tegyük fel, hogy a lokálisan összefüggő X tér*

(i) szekvenciális és/vagy

(ii) kompakt.

Igaz-e, hogy akkor $Pr(X, T_2)$ vagy akár $Pr(X, T_{3\frac{1}{2}})$ teljesül?

Az (i) alatti feltétel mellett a válasz pozitív, ha lokális összefüggés helyett az SC tulajdonságot követeljük meg. A következő tétel szerint ilyenkor az SC tulajdonság erősebb a lokális összefüggőségnél.

4.15. Tétel. [disz. 4.52 - 4.53] *Ha X szekvenciális és SC, akkor lokálisan összefüggő és X -re $Pr(X, T_2)$ teljesül.*

A következőkben belátjuk, hogy egy ellenpélda a 4.14 problémára nem lehet olyan mint a (4.6 és 4.7) alatti példák, amelyek csak egyetlen pontban nem folytonosak. Ehhez egy olyan tulajdonságot vezetünk be, amelyik általánosítja mind a szekvencialitást mind a kompaktságot.

Az X teret k -térnek nevezzük, ha a topológiát meghatározzák a kompakt alterek, pontosabban $A \subset X$ zárt akkor és csak akkor, ha minden kompakt $K \subset X$ -re $A \cap K$ zárt.

Az X teret megszámlálhatóan k -térnek nevezzük, ha bármely $A \subset X$ nem zárt részhalmazhoz megadható egy megszámlálhatóan kompakt C altere X -nek úgy, hogy $A \cap C$ sem zárt. Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy az X tér topológiáját meghatározzák a megszámlálhatóan kompakt alterei. Minden megszámlálhatóan kompakt és minden k -tér (és így minden szekvenciális tér) megszámlálhatóan k -tér. Könnyű látni, hogy ez a tulajdonság zárt alterekre és T_3 terek esetén nyílt alterekre is öröklődik.

4.16. Tétel. [disz. 4.55] *Legyen X lokálisan összefüggő megszámlálhatóan k -tér, Y reguláris, $f : X \rightarrow Y$ pedig egy nem folytonos őrző függvény. Ekkor f több mint egy pontban nem folytonos. Ha X is T_3 tér, akkor f szakadási pontjai egy zsúfolt (önmagában sűrű) alteret alkotnak.*

Mit tudunk mondani, ha a (4.14) probléma mindkét feltétele teljesül, azaz X kompakt és szekvenciális? Egy szekvenciális tér szüksége megszámlálható. Ezért erre a következő tétel szerint pozitív választ adhatunk, legalább is konzisztencia erejéig és azzal a plusz feltétellel, hogy X cellularitása "nem túl nagy".

Jelölje p azt a legkisebb számosságot, amelyhez megadható egy p számosságú $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ halmazrendszer úgy, hogy $\mathcal{A}$ erősen centrált (véges sok $\mathcal{A}$ -beli halmaz metszete végtelen) és minden $H \in [\omega]^\omega$ halmaz esetén van olyan $A \in \mathcal{A}$, amelyre $H \setminus A$ végtelen.

4.17. Tétel. [disz. 4.58] *Legyen X egy lokálisan összefüggő kompakt T_2 tér, amelyre $t(X) = \omega$. Tegyük fel még azt is, hogy $|X| < 2^p$ és $\hat{c}(X) \leq p$. Ekkor $Pr(X, T_2)$ teljesül.*

4.18. Tétel. [disz. 4.59] *Tegyük fel, hogy $2^\omega < 2^p$ és X lokálisan összefüggő, szekvenciálisan kompakt, T_2 tér, melyre $\hat{c}(X) \leq p$. Ekkor teljesül a $Pr(X, T_2)$ tulajdonság.*

A tétel kapcsán jegyezzük meg, hogy ha X kompakt és szekvenciális, akkor szekvenciálisan kompakt.

Eddig nem esett szó a $Pr(X, T_1)$ tulajdonságról, azaz arról, hogy milyen terek esetén igaz, hogy már a T_1 terekbe menő őrző függvények is folytonosak. Ennek a fejezetnek az utolsó

részében azt mutatjuk meg, hogy reguláris terek esetén csak a diszkrét X terek rendelkeznek a $Pr(X, T_1)$ tulajdonsággal.

4.19. Tétel. [disz. 4.60] Legyen X egy T_1 tér. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- a) Ha Y egy T_1 tér és $f : X \rightarrow Y$ összefüggést őrző függvény, akkor az f függvény folytonos.
- b) Ha Y egy T_1 tér és $f : X \rightarrow Y$ őrző függvény, akkor az f függvény folytonos (azaz $Pr(X, T_1)$ teljesül).
- c) Ha Y topológiája a legdurvább T_1 topológia Y -on, az úgynevezett kovéges topológia, és $f : X \rightarrow Y$ őrző függvény, akkor az f függvény folytonos.
- d) Ha az $A \subset X$ altér nem zárt, akkor található egy $H \subset X$ összefüggő részhalmaz, amelyre $H \cap A \neq \emptyset \neq H \setminus A$ és $H \setminus A \neq \emptyset$ véges halmaz.

4.20. Következmény. [disz. 4.61] Ha az X T_1 térre teljesül a $Pr(X, T_1)$ tulajdonság, akkor X -ben minden zárt altér az X valahány komponensének topologikus összege.

4.21. Következmény. [disz. 4.62] Ha az X T_3 térre teljesül a $Pr(X, T_1)$ tulajdonság, akkor X -ben minden zárt altér lokálisan összefüggő.

És íme az ígért tétel:

4.22. Tétel. [disz. 4.63] Ha az X T_3 térre teljesül a $Pr(X, T_1)$ tulajdonság, akkor X diszkrét.

Az előző következmények miatt, elég bizonyítani a következő, önmagában is érdekes tételt:

4.23. Tétel. [disz. 4.64] Ha az X T_3 térben minden regulárisan zárt altér lokálisan összefüggő, akkor X diszkrét.

Hivatkozások

- [1] A. V. ARHANGEL'SKIĬ, *Frequency spectrum of a topological space and classification of spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **206** (1972), 265–268, English translation in Soviet Math. Dokl. 13 (1972), no. 5, 1185–1189.
- [2] A. V. ARHANGEL'SKIĬ, *An extremally disconnected bicomactum of weight $\mathfrak{c}$ is inhomogeneous*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 175 (1967), 751-754.
- [3] A. V. ARHANGEL'SKIĬ, *On d -separable spaces*, Proceedings of the Seminar in General Topology, P. S. Alexandrov ed., Mosk. Univ. P. H., 1981, 3–8.
- [4] A. V. ARHANGEL'SKIĬ, *Homogeneity and Complete Accumulation Points*, Topology Proceedings 32 (2008), pp. 239–243
- [5] A. V. ARHANGEL'SKIĬ, *Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants*, Russian Math. Surveys 33 (1978), pp. 33–96.
- [6] A. V. ARHANGEL'SKIĬ, *Precalibers, monolithic spaces, first countability, and homogeneity in the class of compact spaces*, Topology and its Appl., 155 (2008), no. 17-18, 2218-2136.
- [7] A.V. ARHANGEL'SKIĬ, *Projective σ -compactness, ω_1 -caliber, and C_p -spaces*, Topology Appl. 104 (2000) 13–16.
- [8] B. BALCAR, P. SIMON, AND P. VOJTAS, *Refinement properties and extensions of filters in Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 265-283.
- [9] H. R. BENNETT AND T. G. MCLAUGHLIN, *A selective survey of axiom-sensitive results in general topology*, Texas Tech University Mathematics Series, No. 12. Lubbock, Tex., 1976. iv+114 pp.
- [10] A. DOW, I. JUHÁSZ, L. SOUKUP, AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *More on sequentially compact implying pseudoradial*, Topology and its Applications, 73 (1996), pp. 191–195.
- [11] A. DOW, *Closures of discrete sets in compact spaces*, Studia Sci. Math. Hub. 42 (2005), 227-234.
- [12] A. DOW, *Compact spaces of countable tightness in the Cohen model*, Set Theory and its Appl. (J. Steprans and S. Watson, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1401, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 55-67.
- [13] A. DOW, *An introduction to applications of elementary submodels in topology*, Topology Proc. 13 (1988), 17-72.
- [14] R. DE LA VEGA AND K. KUNEN, *A Compact Homogeneous S -space*, Top. Appl. 136 (2004), 123 - 127.
- [15] R. ENGELKING, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

- [16] P. ERDŐS, A. HAJNAL, A. MÁTÉ, AND R. RADO, *Combinatorial Set Theory*, Akad. Kiadó, Budapest, 1984.
- [17] J. GERLITS AND I. JUHÁSZ, *On left-separated compact spaces*, CMUC 19 (1978), 53-62.
- [18] J. GERLITS, I. JUHÁSZ, L. SOUKUP, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Characterizing continuity by preserving compactness and connectedness*, Topology Appl. 138 (2004), no. 1-3, 21–44.
- [19] J. GERLITS, I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Two improvements on Tkaženko's addition theorem*, Comment. Math. Univ. Carolin. 46 (2005), no. 4, 705–710.
- [20] G. GRUENHAGE, *A note on D-spaces*, Topology Appl. 153 (2006), 2229–2240.
- [21] G. GRUENHAGE, *Covering compacta by discrete and other separated sets*, Topology Appl. 156 (2009), no. 7, 1355–1360.
- [22] A. HAJNAL, *Proof of a conjecture of S. Ruziewicz*, Fund. Math. 50 (1961/1962), pp. 123–128.
- [23] A. HAJNAL AND I. JUHÁSZ, *On hereditarily α -Lindelöf and hereditarily α -separable spaces*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. 11 (1968), pp. 115–124.
- [24] M. HUŠEK, *Topological spaces without K-accessible diagonal*, Comment. Math. Univ. Carolin. 18 (1977), 777-788.
- [25] I. JUHÁSZ, *Cardinal functions – ten years later*, Math. Center Tract no. 123, Amsterdam, 1980
- [26] I. JUHÁSZ, *Cardinal functions*, Recent Progress in General Topology, M. Hušek and J. van Mill, eds., North-Holland, 1992, 417–441.
- [27] I. JUHÁSZ, *HFD and HFC type spaces*, Top. Appl. 126 (2002), 217–262.
- [28] I. JUHÁSZ, *A weakening of club, with applications to topology*, Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), 767-773.
- [29] I. JUHÁSZ, *ON THE MINIMUM CHARACTER OF POINTS IN COMPACT SPACE*, Proc. 1989. Top. Conf. Pécs, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 55(1993), 365-371.
- [30] I. JUHÁSZ, *Two set-theoretic problems in topology*, Proc. Fourth Prague Sympos. on Gen. Topology Part A, Springer-Verlag, New York, 1977, pp. 115-123.
- [31] I. JUHÁSZ, *Variations on tightness*, Studia Sci. Math. 24 (1989), 179–186.
- [32] I. JUHÁSZ, *Cardinal functions II*, in: Handbook of Set Theoretic Topology, Eds: K. Kunen & J. E. Vaughan, Amsterdam, 1984, pp. 63–109.
- [33] I. JUHÁSZ AND S. SHELAH, $\pi(X) = \delta(X)$ for compact X , Top. Appl. 32 (1989), 289-294.

- [34] I. JUHÁSZ, L. SOUKUP, AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Combinatorial principles from adding Cohen reals*, Logic Colloquium '95 (Haifa), Lecture Notes in Logic 11, Springer, Berlin, 1998, pp. 79–103.
- [35] I. JUHÁSZ, L. SOUKUP AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *First countable spaces without point-countable π -bases*, Fund. Math., 196 (2007), no. 2, 139–149.
- [36] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Convergent free sequences in compact spaces*, Proc. AMS., 116 (1992), pp. 1153–1160.
- [37] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Sequential compactness vs. pseudo-radiality in compact spaces*, Top. Appl., 50 (1993), pp. 47– 53.
- [38] I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Calibers, free sequences and density*, Topology Appl. 119 (2002), no. 3, 315–324.
- [39] I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Discrete subspaces of countably tight compacta*, Ann. Pure Appl. Logic 140 (2006), no. 1-3, 72–74.
- [40] I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *On d -separability of powers and $C_p(X)$* , Topology Appl. 155 (2008), no. 4, 277–281.
- [41] I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *A strengthening of the Čech-Pospišil theorem*, Topology Appl. 155 (2008), no. 17-18, 2102–2104.
- [42] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Projective π -character bounds the order of a π -base*, Proc. AMS, 136 (2008), 2979-2984.
- [43] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Interpolation of κ -compactness and PCF*, CMUC, 50, 2 (2009), 315–320.
- [44] I. JUHÁSZ AND J. VAN MILL, *Covering compacta by discrete subspaces*, Topology and its Applications, 154 (2007), pp. 283–286.
- [45] V. L. KLEE AND W. R. UTZ, *Some remarks on continuous transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 182–184.
- [46] EVELYN R. MCMILLAN, *On continuity conditions for functions*, Pacific J. Math. **32** (1970), 479–494.
- [47] S. NEGREPONTIS, *Banach spaces and topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds., North Holland, Amsterdam, 1984, 1045–1142.
- [48] JACEK NIKIEL, *Images of arcs—a nonseparable version of the Hahn-Mazurkiewicz theorem*, Fund. Math. **129** (1988), no. 2, 91–120.
- [49] A. OSTASZEWSKI, *On countably compact, perfectly normal spaces*, J. London Math. Soc. (2) **14** (1976), 505-516.

- [50] WILLIAM J. PERVIN AND NORMAN LEVINE, *Connected mappings of Hausdorff spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 488–496.
- [51] C. H. ROWE, *Note on a pair of properties which characterize continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), 285–287.
- [52] MARY ELLEN RUDIN, *Nikiel's conjecture*, Topology Appl. **116** (2001), no. 3, 305–331.
- [53] N.A. ŠANIN, *On the product of topological spaces*, Trudy Math. Inst. Steklova 24 (1948) (in Russian).
- [54] B.E. SHAPIROVSKIĬ, *On tightness, π -weight and related concepts*, Uč. Zap. Riga Univ. 3 (1976) 88–89.
- [55] B. SHAPIROVSKIĬ, *Ordering and cardinal invariants in compacta*, Abstracts of International Conference on Topology Varna (1990) 41–42.
- [56] B. E. Shapirovskii, *Special types of embeddings in Tychonoff cubes, subspaces of Σ -products and cardinal invariants*, in: Topology, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 23 (North-Holland, Amsterdam, 1980), pp. 1055–1086.
- [57] B. E. Shapirovskii, *Maps onto Tikhonov cubes*, Russian Math. Surveys 35 (1980), pp. 235–238.
- [58] B. E. Shapirovskii, *Cardinal invariants in compact Hausdorff spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. 134 (1987), pp. 93–118.
- [59] S. SHELAH, *Colouring and non-productivity of $\aleph_2$ -cc*, Ann. Pure Appl. Logic 84 (1997), 153–174.
- [60] P. SIMON, *Left-separated spaces: a comment to a paper of M. G. Tkačenko*, CMUC 20 (1979), 597–603.
- [61] Z. SZENTMIKLÓSSY, *S-spaces and L-spaces under Martin's axiom*, Topology, Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 23, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980, pp. 1139–1145.
- [62] M. G. TKAČENKO, *O bikompaktah predstavimyh ... I and II*, CMUC **20**(1979), 361–379 and 381–395.
- [63] V. V. TKAČUK, *Spaces that are projective with respect to classes of mappings*, Trudy Moskov. Mat. Obsč. 50 (1987), 138–155,
- [64] V. V. TKACHUKN, *Function spaces and d-separability*, Questiones Mathematicae 28 (2005), 409–424.
- [65] V. V. TKACHUK, *Point-countable π -bases in first countable and similar spaces*, Fund. Math. 186 (2005), pp. 55–69.

- [66] S. Todorčević, *Partition Problems in Topology*, Contemp. Math., AMS, vol. 84, (1989)
- [67] S. TODORČEVIĆ, *Free sequences*, Top. Appl. 35 (1990), pp. 235–238.
- [68] L. B. TREYBIG, *A characterization of spaces that are the continuous image of an arc*, Topology Appl. **24** (1986), no. 1-3, 229–239, Special volume in honor of R. H. Bing (1914–1986).
- [69] E. VAN DOUWEN, *The Integers and Topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan editors, Elsevier, 1984, pp. 111–167
- [70] E. VAN DOUWEN AND W. F. PFEFFER, *Some properties of the Sorgenfrey-line and related spaces*, Pacific J. of Math. **81** (1979), 371–377.
- [71] J. VAN MILL, *An introduction to $\aleph_w$* , Handbook of Set-Theoretic Topology, 1984, pp. 503–567.
- [72] J. H. WESTON AND J. SHILLETO, *Cardinalities of dense sets*, Gen. Top. Appl. 6 (1976), 227–240.
- [73] D. J. WHITE, *Functions preserving compactness and connectedness*, J. London Math. Soc. **3** (1971), 767–768.
- [74] G. T. WHYBURN, *Continuity of multifunctions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1494–1501.