

Opponensi vélemény
Szentmiklóssy Zoltán
“Kompakt topologikus terek struktúrájáról”
(On the structure of compact topological spaces)
című doktori értekezéséről

A dolgozat kompakt topologikus terekkel kapcsolatos kérdéseket vizsgál, a halmazelméleti topológia módszereivel. A vizsgálat módszereiben központi szerepet kap a terekhez rendelt számosságainvariánsok közötti kapcsolatok tanulmányozása. Ilyen számosságainvariánsok például a súly, $w(X)$, vagy sűrűség, $d(X)$. Az alábbiakban röviden ismertetem a dolgozat fontosabb eredményeit.

Az 1. fejezet fő eredménye az 1.2 Tétel, mely szerint ha egy kompakt Hausdorff tér tartalmaz κ hosszú szabad sorozatot, ahol κ egy nem megszámlálható reguláris számosság, akkor a tér tartalmaz ugyanilyen hosszú konvergens szabad sorozatot is. Ennek az erős tételnek számos következménye van.

Ezek egyike a Hušek egyik kérdését megválaszoló 1.5 Következmény. Hušek azt kérdezte, hogy a kontinuum hipotézisből levezethető-e, hogy minden kompakt T_2 tér, melynek kis diagonálisa van, metrizable. ($\Delta = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ kis diagonális, ha bármely nem megszámlálható $A \subset X^2 - \Delta$ esetén Δ -nak van olyan környezete, amelyik nem megszámlálható pontot kihagy A -ból). Az 1.5 Következmény erősebb állítást igazol: Ha V -ben igaz a kontinuum hipotézis és W ennek Cohen-valósakkal való bővítése, akkor W -ben minden kis diagonálisú kompakt T_2 tér metrizable. Az 1.2-es tétel segítségével Juhász egyik 1977-es tételére, mely szerint ha $2^{2^\kappa} = \kappa^{++}$, akkor minden κ^{++} -nál nagyobb számosságú kompakt tér tartalmaz κ^+ vagy κ^{++} számosságú zárt alteret, egyszerűbb bizonyítás adható (1.7. Következmény).

Egy másik fontos alkalmazás az 1.8-as tétel: ha teljesül a $\clubsuit$ kombinatorikus elv, és X megszámlálhatóan kompakt T_2 tér, amiben nincs nemtriviális konvergens ω hosszú sorozat, akkor van ω_1 számosságú altér amiben minden

relatív nyílt halmaz megszámlálható vagy ko-megszámlálható. Speciálisan, $\clubsuit$ -et feltéve minden iniciálisan ω_1 -kompakt T_2 tér tartalmaz konvergens ω - vagy ω_1 -sorozatot (1.9. Következmény).

A megszámlálhatóan szűk kompakt terek diszkrét altereivel foglalkozó 1.2-es alfejezetben a szerző megválaszolja Arhangelszkij 2003-as kérdését egy speciális esetben. Legyen $\bar{g}(X)$ a következő számosságfüggvény:

$$\bar{g}(X) = \min \{ \kappa : \forall D \subset X (D \text{ diszkrét} \Leftrightarrow |\bar{D}| < \kappa) \}$$

Arhangelszkij azt kérdezte, hogy igaz-e $\bar{g}(X) = |X|^+$ minden kompakt X térre. Az 1.13 Tétel szerint ha minden κ számosságra feltesszük a $2^\kappa < \kappa^{+\omega}$ egyenlőtlenséget, akkor minden ω -szűk, kompakt, T_2 tér esetén $\bar{g}(X) = |X|^+$. A bizonyítás során A. Dow egy tételére is új bizonyítást ad.

Az 1.3-as alfejezetben Tkacszenko eredményeit megjavítva a szerző igazolja, hogy végtelen κ -ra, ha egy iniciálisan κ -kompakt teret κ D -altér lefedi, akkor X kompakt is (1.14. Tétel). Az 1.17. Tétel szerint, ha az X kompakt T_2 tér κ balszeparált halmaz uniója, és ennyi első kategóriájú halmaz uniója nem adja ki a valós számegyeneset, akkor X szétszórt. E két tétel egy fontos következménye, mely erősíti Tkacszenko 1979-es tételét az 1.18. Következmény: Ha X megszámlálhatóan kompakt, T_2 tér legfeljebb ω balszeparált halmaz uniója, akkor X kompakt, diszpergált és szekvenciális. (Tkacszenko eredeti tétele ugyanezt mondta, csak a T_2 helyett az erősebb T_3 feltevessel).

Az 1.13 Tételben igazolja, hogy X kompakt T_2 tér esetén X^2 tartalmaz $d(X)$ számosságú diszkrét alteret ($d(X)$ jelöli az X tér sűrűségét, vagyis a legkisebb számosságú sűrű altér számosságát). Ez a tétel önmagában is érdekes, ám segítségével, az 1.27. Tétellel negatív választ ad Tkacsuk egy problémájának egyik részére: igaz-e, hogy ha egy X tér valamely végtelen X^κ hatványa d -szeparábilis, akkor már X^ω is d -szeparábilis?

Jelölje $\text{dis}(X)$ azt a legkisebb κ számosságot, amelyre X előáll κ darab diszkrét altér uniójaként. Az 1.5. alfejezetben a szerző új megoldást ad Juhász–van Mill (2007) egyik problémájára, amely egyben a klasszikus Čech–

Pospíšil tétel erősítése is: ha X kompakt T_2 tér, amiben minden pont karaktere legalább κ , akkor $dis(X) \geq 2^\kappa$ (1.32. Következmény).

A szerző az 1.6. szakaszban a κ -kompaktság egy interpolációs tulajdonságát bizonyítja: ha X egyszerre μ - és λ -kompakt, és $\mu < \kappa < \lambda$, ahol κ egy tetszőleges szinguláris számosság, akkor X κ -kompakt is. Az 1.42. Tétel Arhangelszkij egy eredményét erősíti: minden nem-megszámlálhatóan kompakt wD tulajdonságú X T_1 tér $\aleph_\omega$ -koncentrált egy kompakt altér körül, azaz van olyan kompakt $C \subset X$, hogy minden nyílt $U \supseteq C$ halmazra $|X - U| < \aleph_\omega$.

A rövidebb, második fejezetben a szerző T_3 terekkel és azok kaliberével, sűrűségével foglalkozik. Ha X topologikus tér és κ végtelen számosság, akkor κ kaliber ($\kappa \in Cal(X)$) ha κ nyílt halmaz között mindig található κ , aminek metszete nemüres. A pár-kaliber és a hármas-kaliber hasonlóképp definiált: $(\lambda, \kappa) \in Cal_2(X)$, ha κ nemüres nyílt halmaz között valamely λ metszete nemüres, illetve $\mu \leq \lambda \leq \kappa$ esetén $(\mu, \lambda, \kappa) \in Cal_3(X)$, ha κ nemüres nyílt halmaz között mindig van λ , melyek között bármely μ -nél kevesebb metszete nemüres.

A λ hosszú szabad sorozatok és a kaliber kapcsolatát tárgyalja a 2.2. Tétel: ha X -ben nincs λ hosszú szabad sorozat, és $(\lambda, \lambda, \kappa)$ hármas-kaliber, akkor van $\mu < \kappa$, hogy X -ben van $\mu^{<\lambda}$ számosságú sűrű halmaz. A tételnek 4 következményét bizonyítja a szerző, melyek közül az egyik, az önmagában is érdekes 2.6. Következmény: ha $\aleph_\omega$ erős limesz, és az X tér zárt halmazainak növény ω sorozatainak uniója is zárt, valamint $\aleph_n \in Cal(X)$ minden természetes n számra, akkor X szeparábilis.

A 2.2. szakasz fő tétele a 2.8. Tétel, melynek következményeképp megkapható Sapirovszkij egy tételének erősítése (2.13 Következmény). A tétel egy érdekes esete a következő: ha X előáll legfeljebb ω_1 darab kompakt, megszámlálható szükségű altér uniójaként, és ω_1 kaliber, akkor X szeparábilis.

A harmadik fejezet fő eredménye a 3.2. Tétel, melyben a szerző igazolja, hogy egy X Tyhonov tér esetén $\pi sw(X) \leq p\pi\chi(X)$. Itt $\pi sw(X)$

a tér π -szeparáló súlya, $p\pi\chi(X)$ pedig a projektív π -karaktere (a technikás definíciókat itt nem idézzük fel). A bizonyítás számos lemmát használ, és hasonló utakat jár, mint Shapirovszkij kompakt terekre vonatkozó $\pi sw(X) \leq t(X)$ tételének bizonyítása. Ez utóbbi bizonyítás azon alapult, hogy bármely X kompakt tér irreducibilisen beleképezhető az egységintervallum $\Sigma_{t(X)}$ -hatványába. A 3.2. tétel bizonyításában az irreducibilis leképezések szerepét a dolgozatban bevezetett π -irreducibilis leképezések veszik át.

A 3.2. alfejezetben először bizonyítja, hogy ha egy X térre $d(X) \leq \pi\chi(X)^+$, akkor $\pi sw(X) \leq \pi\chi(X)$, megválaszolva ezzel Tkacsuk 2005-ből származó egyik nyitott problémáját (3.13. Tétel), majd példákat tárgyal a Szuszlin-egyenes és $\mathcal{P}(\omega)$ terekkel kapcsolatosan.

Egy $f : X \rightarrow Y$ függvényt őrzőnek nevezünk, ha minden kompakt altér f szerint vett képe kompakt és minden összefüggő altér képe összefüggő. Egyszerűen igazolható, hogy a folytonos függvények őrzők és minden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ őrző függvény folytonos. McMillan (1970) megmutatta, hogy ha X T_2 , lokálisan összefüggő és Frèchet, valamint Y T_2 , akkor minden $X \rightarrow Y$ folytonos függvény őrző. Jelölje $Pr(X, T_i)$ azt az állítást, hogy ha Y egy T_i tér ($i = 1, 2, 3, 3.5$) és $f : X \rightarrow Y$ őrző, akkor f folytonos. A 4.8. Tétel McMillan eredményét általánosabban bizonyítja, elhagyva az X térre tett T_2 -ség követelményét: Ha X lokálisan összefüggő, Frèchet tér, akkor $Pr(X, T_2)$. Ezután a tétel lokális változataival foglalkozik. Ezzel kapcsolatban a főbb tétel a 4.21. Tétel: egy T_2 térbe képző őrző függvény minden szekvenciálisan összeköthető pontban szekvenciálisan folytonos. A 4.33. Következmény szerint, ha X lokálisan kompakt, lokálisan összefüggő és monoton normális, akkor $Pr(X, T_3)$ teljesül. A szerző felveti azt a problémát, hogy igaz-e az analóg állítás, ha X lokálisan kompakt, lokálisan összefüggő, monoton normális terek szorzata (4.48. Probléma). Erre a 4.49. Következmény ad (részleges) választ.

A fejezet további részében, a kiinduló X térre tett további technikai feltételekkel mutatja meg a szerző a $Pr(X, T_2)$ tulajdonságot (lásd 4.58, 4.59

tételek). A fejezet utolsó részében pedig azt igazolja, hogy reguláris terek esetén csak a diszkrét X terek rendelkeznek a $Pr(X, T_1)$ tulajdonsággal (4.63. Tétel). Ez a tétel következik az önmagában is érdekes 4.64. Tételből: Ha az $X \ T_3$ térben minden regulárisan zárt altér lokálisan összefüggő, akkor X diszkrét.

A dolgozat törzsét 14, jelentős, nemzetközi lapokban publikált, referált cikk alkotja. A dolgozat központi témája kompakt topologikus terek vizsgálata; számos tételt soroltat fel az ilyen terek struktúrájáról. A tételek érdekesek és technikásak, számos más, neves kutató által felvetett kérdést válaszolnak meg, illetve általánosította a korábbi eredményeket. Ezek alapján a doktori munka tudományos eredményeit megfelelőnek és elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez. A nyilvános védelem kitűzését javaslom.

.....
Gyenis Zsolt