

Opponensi vélemény

Szentmiklóssy Zoltán

“On the structure of compact topological spaces”

című doktori értekezéséről

A dolgozat halmazelméleti topológiai kérdéseket vizsgál, azaz topologikus terek különböző számosságinvariánsai közötti összefüggéseket. Ezek az invariánsok természetesen nőnek ki a klasszikus általános topológia fogalmaiból, mint például az első megszámlálhatóságból a karakter, a szeparabilitásból a sűrűség ($d(X)$, a legkisebb X -ben sűrű halmaz számossága), stb. Így adódnak különböző számosságok, amelyek tanulmányozásához, egyenlőtlen-ségek igazolásához a halmazelméleti és topológiai módszerek egyaránt szükségesek. Egy tipikus invariáns a szűk-ség (tightness): egy X topologikus tér $h(X)$ szűk-sége a legkisebb κ számosság amire igaz, hogy ha $A \subseteq X$ és $x \in \overline{A}$, akkor van legfeljebb κ számosságú $B \subseteq A$, amire $x \in \overline{B}$ teljesül.

A következőkben ismertetem a dolgozat fontosabb eredményeit.

Az 1. fejezet főeredménye a következő: ha $\kappa > \omega$ reguláris számosság, X kompakt T_2 tér, amiben van κ hosszú szabad sorozat, akkor X -ben van κ hosszú konvergens sorozat is (1.2. Tétel). (Egy $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ sorozat *szabad*, ha $\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \{x_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa\} = \emptyset$ teljesül minden $\alpha < \kappa$ -ra.) E nehéz tétel nemcsak önmagában érdekes, de fontos eredmények vezethetők le belőle.

Ezek egyike a Hušek egyik problémáját megoldó 1.5. Következmény: ha V egy, a kontinuumhipotézist kielégítő ZFC-modell és W belőle Cohen-valóságok hozzáadásával keletkezik, akkor W -ben teljesül a következő állítás: ha X kompakt T_2 tér, amire igaz, hogy ha $H \subseteq X^2 - \Delta$, $|H| > \aleph_0$, akkor van Δ -nak U környezete, hogy $|H - U| > \aleph_0$, akkor X metrizálható. Itt Δ az $X \times X$ tér $\{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ diagonálisát jelöli.

Egy másik érdekes alkalmazás rövid bizonyítást ad Juhász következő tételére: ha $2^{2^\kappa} = \kappa^{++}$ (azaz $2^\kappa = \kappa^+$ és $2^{\kappa^+} = \kappa^{++}$), akkor minden κ^{++} -nál nagyobb számosságú kompakt tér tartalmaz κ^+ vagy κ^{++} számosságú zárt alteret (1.7. Következmény).

Az 1.8. Tétel szerint, ha teljesül a $\clubsuit$ halmazelméleti elv és X megszámlálhatóan kompakt, végtelen T_2 tér, amiben nincs nemtriviális konvergens

ω -sorozat, akkor van $\aleph_1$ számosságú altér, amiben minden (relatív) nyílt halmaz megszámlálható vagy ko-megszámlálható.

Legyen $g(X)$ a következő számosságfüggvény:

$$g(X) = \sup \{ |\overline{Y}| : Y \subseteq X \text{ diszkrét} \}.$$

A szerző új bizonyítást ad A. Dow következő tételére: ha X megszámlálható szűk-ségű kompaktum, akkor $|X| \leq g(X)^{\aleph_0}$ (1.10.(i) Állítás). Továbbá belátja, hogy ha $2^\kappa < \kappa^{+\omega}$ teljesül minden κ végtelen számosságra és X megszámlálható szűk-ségű kompaktum, akkor van benne D diszkrét altér, amire $|\overline{D}| = |X|$ (1.13. Tétel).

Tkačenko eredményeit megjavítva, a szerző a következőket igazolja: ha az X topologikus tér iniciálisan κ -kompakt és κ D -altér lefedi, akkor X kompakt (1.14. Tétel). (Egy X tér D -tér, ha bárhogy választunk ki minden $x \in X$ ponthoz egy $U_x \ni x$ környezetet, van D diszkrét, zárt altér, amire $X = \bigcup \{U_x : x \in D\}$.) Továbbá, ha az X kompakt T_2 tér κ balszeparált halmaz uniója, ahol κ első kategóriájú halmaz uniója sosem adja ki a valós egyenest, akkor X szétszórt (1.17. Tétel).

Vezessük be a következő számosságfüggvényt:

$$\text{dis}(X) = \min \{ \kappa : X \text{ } \kappa \text{ diszkrét altér uniója} \}.$$

Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer λ -elágazónak nevezzük, ha $\mathcal{F}$ -nek van λ különböző részcsaládja, diszjunkt metszetekkel. A szerző belátja, hogy ha X kompakt tér, amiben van zárt halmazoknak egy λ -elágazó családja, akkor $\text{dis}(X) \geq \lambda$ (1.31. Tétel). Ennek következménye a Čech-Pospíšil tétel következő általánosítása: ha X kompakt Hausdorff tér, amiben minden pont karaktere legalább κ , akkor $\text{dis}(X) \geq 2^\kappa$ (1.32. Következmény).

Ha A végtelen részhalmaza az X térnek, nevezzük $x \in X$ -et A teljes *akkumulációs pontjának*, ha minden $U \ni x$ környezetére $|U \cap A| = |A|$. Az X tér κ -kompakt, ha minden $A \subseteq X$, $|A| = \kappa$ halmaznak van teljes akkumulációs pontja.

Ha $\mu < \kappa < \lambda$ számosságok, λ reguláris, akkor $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ jelöli a következő kombinatorikus állítást: van $\{S_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq [\kappa]^\mu$ család, hogy minden $A \in [\kappa]^{<\kappa}$ -ra $|\{\xi : |S_\xi \cap A| = \mu\}| < \lambda$. Ezután a szerző a következő interpolációs tételt igazolja: ha $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ teljesül, az X tér μ -kompakt és λ -kompakt, akkor κ -kompakt is (1.36. Tétel). Shelah pcf-elméletének egyik eredménye segítségével igazolható $\Phi(\text{cf}(\kappa), \kappa, \kappa^+)$ minden szinguláris κ -ra (1.38. Tétel). Ebből viszont a következő állítás vezethető le: ha X κ -kompakt minden

$\kappa > \aleph_0$ reguláris számosságra és $\kappa = \aleph_\omega$ -ra, akkor minden $\kappa > \aleph_0$ -ra κ -kompakt (1.40. Tétel). Az 1.42. Tétel Arhangelszkij egy meglepő tételét erősíti: ha X T_1 tér, ami κ -kompakt minden $\aleph_0$ -nál nagyobb κ számosságra és rendelkezik a wD tulajdonsággal, akkor van kompakt $C \subseteq X$ halmaz, hogy minden nyílt $U \supseteq C$ halmazra $|X - U| < \aleph_\omega$.

Kaliberekre vonatkozó tételeket találunk a második részben. Ha X tér, akkor a κ végtelen számosság kaliber (jelben $\kappa \in \text{Cal}(X)$), ha κ nyílt halmaz között mindig található κ nemüres metszettel. Ennél finomabb fogalom a pár-kaliber: ha $\lambda \leq \kappa$, akkor $(\lambda, \kappa) \in \text{Cal}_2(X)$, ha κ nemüres, nyílt halmaz között valamelyik λ metszete nemüres, illetve a hármas kaliber: ha $\mu \leq \lambda \leq \kappa$, akkor $(\mu, \lambda, \kappa) \in \text{Cal}_3(X)$, ha κ nemüres nyílt halmaz között mindig akad λ , melyek között bármely $< \mu$ metszete nemüres.

A 2.2. Tétel szerint, ha X -ben nincs λ hosszú szabad sorozat és $(\lambda, \lambda, \kappa) \in \text{Cal}_3(X)$, akkor van $\mu < \kappa$, hogy X -ben van $\mu^{<\lambda}$ számosságú sűrű halmaz.

A számos következmény közül talán a legérdekesebb, hogy ha $\aleph_\omega$ erős limesz, az X tér olyan, hogy benne zárt halmazok ω hosszú növvő sorozatának uniója is mindig zárt, minden $\aleph_n$ kaliber ($1 \leq n < \omega$), akkor X szeparábilis (2.6. Következmény).

A 2.2 szekció a következő két érdekes és nehéz tétel bizonyítását tartalmazza: Ha $X = \bigcup \{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$, ahol minden C_α kompakt és nincs benne κ hosszú szabad sorozat, $\kappa \in \text{Cal}(X)$, akkor $d(X) < \kappa$ (2.8. Tétel). Tegyük fel, hogy $\mu \leq \kappa$ megszámlálhatónál nagyobb számosságok, X κ -nál kevesebb olyan kompakt altér uniója, amiben nincs μ hosszú szabad sorozat, $(\mu, \kappa) \in \text{Cal}_2(X)$, akkor $d(X) < \kappa$ (2.9. Tétel).

A harmadik rész eredményeinek megfogalmazásához először is emlékeztetünk arra, hogy egy X tér π -*bázisa* nemüres, nyílt halmazok olyan $\mathcal{B}$ rendszere, hogy minden nemüres halmaznak részhalmaza $\mathcal{B}$ valamelyik eleme. $\mathcal{B}_p$ *lokális* π -*bázis*, ha ugyanezt a p -t tartalmazó nyílt halmazokra tesszük fel. Ezután p π -*karaktere*, $\pi\chi(p, X)$, a legkisebb ilyen $\mathcal{B}_p$ számossága és

$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\}.$$

Jelölje $p\pi\chi(X)$ a $\sup \pi\chi(Y)$ mennyiséget, ahol a szuprémumot X folytonos Y képeire képezzük. Legyen továbbá

$$\pi sw(X) = \min_B \sup_{p \in X} |\{B \in \mathcal{B} : p \in B\}|$$

ahol $\mathcal{B}$ X π -bázisain fut végig. A rész első főeredménye Sapirovskij egy eredményének következő általánosítása: ha X Tyihonov-tér, akkor $\pi sw(X) \leq p\pi\chi(X)$ (3.2. Tétel).

A 3.13. Tétel a következő implikációt igazolja: ha az X topologikus térre $d(X) \leq \pi\chi(X)^+$ teljesül, akkor $\pi sw(X) \leq \pi\chi(X)$ is igaz.

Ami $\pi sw(X)$ konkrétabb értékeit illeti, van első megszámlálható, nulldimenziós $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ számosságú X T_2 tér, amire $\pi sw(X) \geq \aleph_\omega$ (3.14. Tétel). A módszer apró javításával $\aleph_{\omega+1}$ számosságú példa adható. Kérdés, megadható-e $\aleph_\omega$ számosságú vagy $\aleph_\omega$ -nál kisebb ilyen tér. A szerző rámutat arra, hogy a két kérdés ekvivalens, legalábbis, ha $2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$ (3.17. Tétel).

A harmadik rész befejezése egy olyan módszert ír le, amelynek segítségével $\mathcal{P}(\omega)$ alkalmas részcsaládjából első megszámlálható, nulldimenziós Hausdorff-teret konstruálhatunk (3.21. Tétel). A halmazcsalád megfelelő tulajdonsága esetén e tér $\aleph_2$ számosságú, öröklődően Lindelöf, $\aleph_1$ kaliberű és nincs pont-megszámlálható π -bázisa, továbbá a szükséges tulajdonságú halmazcsalád létezése kiforszolható (3.26. Tétel). E konstrukció Tkacsuk számos kérdését válaszolja meg.

Egyszerűen igazolható állítás, hogy ha X, Y topologikus terek és $f : X \rightarrow Y$ folytonos függvény, akkor f kompakt halmazt kompaktra és összefüggő halmazt összefüggőre képez. A negyedik fejezet azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy mikor fordítható ez meg, azaz, mikor következik a kompaktság és összefüggőség megmaradásából a folytonosság. Nevezzük ezeket a függvényeket *megőrzőknek* (preserving) és jelöljük $\text{Pr}(X, T_i)$ -vel azt az állítást, hogy ha Y T_i tér, $f : X \rightarrow Y$ megőrző, akkor f folytonos.

E. R. McMillan korábban belátta $\text{Pr}(X, T_2)$ -t, ha X Hausdorff, lokálisan összefüggő, Fréchet tér.

A szerző először is megjegyzi, hogy bizonyos esetekben elég az $f : X \rightarrow I = [0, 1]$ függvényeket vizsgálni: ha $f : X \rightarrow Y$ megőrző függvény, ahol Y $T_{3\frac{1}{2}}$ és f nem folytonos $p \in X$ -ben, akkor van I -be képező ilyen függvény.

Ezután a McMillan tétel egy részben lokális változatát adja: ha X lokálisan összefüggő Hausdorff-tér, p Fréchet-pont X -ben, Y $T_{3\frac{1}{2}}$ és $f : X \rightarrow Y$ megőrző függvény, akkor f folytonos p -ben (4.9. Tétel). A szerző felveti a kérdést, hogy ez igaz marad-e, ha a lokális összefüggőséget csak p -ben követeljük meg (4.10. Probléma). Kimutatja, hogy a válasz „igen”, ha p -ről még megköveteljük, hogy (α_4) -pont, azaz ha $\{A_n : n < \omega\}$ megszámlálhatóan végtelen, p -hez konvergáló halmazok, akkor van olyan B , szintén megszámlálhatóan végtelen, p -hez konvergáló halmaz, ami végtelen sok A_n -be metsz

(4.12. Tétel).

Egy másik részeredmény (4.13. Tétel) azzal a pluszfeltétellel adja meg az „igen” választ, hogy p karaktere legfeljebb kontinuum. Ha p karaktere legfeljebb $\aleph_1$, akkor elég Y -ről annyit feltenni, hogy T_3 (4.15. Tétel).

Egy X tér egy x pontját szekvenciálisan összeköthetőnek (SC) nevezzük, ha $x_n \rightarrow x$ esetén van $\{x_{n_k} : k < \omega\}$ végtelen részsorozat, hogy minden x_{n_k} összeköthető x -szel egy összefüggő halmazzal. X SC, ha minden pontja az. A 4.21. Tétel szerint, ha $f : X \rightarrow Y$ megőrző függvény, Y T_2 , akkor f szekvenciálisan folytonos X minden SC pontjában.

Nevezzünk egy $f : X \rightarrow Y$ függvényt gyengén szekvenciálisan folytonosnak az $x \in X$ pontban, ha $x_n \rightarrow x$ esetén, ha f egyik x_n pontban sem lokálisan konstans, $f(x_n) \rightarrow f(x)$ teljesül. Az $x \in X$ pont felfújható (inflatable) ha $x_n \rightarrow x$, $x_n \neq x$ ($n < \omega$) esetén van $\{x_{n_k} : k < \omega\}$ részsorozat és $U_k \ni x_{n_k}$ környezetek, hogy $U_k \rightarrow x$ (azaz x minden környezete véges híján az összes U_k -t tartalmazza).

A 4.27. Tétel szerint, ha $f : X \rightarrow Y$ megőrző, X lokálisan összefüggő, Y T_2 , $x \in X$ felfújható, akkor f gyengén szekvenciálisan folytonos x -ben. Továbbá, ha $f : X \rightarrow [0, 1]$ megőrző függvény, X lokálisan összefüggő T_2 tér és $x \in X$ halmaz-Fréchet pont, akkor f gyengén szekvenciálisan folytonos x -ben (4.29. Tétel).

A 4.2. alfejezetben azt igazolja a szerző, hogy ha $f : X \rightarrow Y$ megőrző, akkor f folytonos X minden s -pontjában, feltéve, hogy

- (a) X lokálisan összefüggő SC-tér és Y reguláris (4.30. Tétel), vagy
- (b) X lokálisan összefüggő és felfújható T_3 tér és Y T_3 tér (4.32. Tétel), vagy
- (c) X lokálisan összefüggő, halmaz-Fréchet T_3 tér és Y $T_{3\frac{1}{2}}$ tér (4.34. Tétel).

A következő alfejezet hasonló tulajdonságot igazol arra az esetre, ha X összefüggő, lokálisan összefüggő terek szorzata és olyan pontbeli folytonosságról van szó, ami egy bizonyos játékbeli nyerő stratégia létezésével jellemezhető (4.44. Tétel).

A 4.4. alfejezetben a szerző azt a kérdést vizsgálja, hogy ha X lokálisan összefüggő és szekvenciális vagy kompakt, akkor igaz-e $\text{Pr}(X, T_2)$, esetleg $\text{Pr}(X, T_{3\frac{1}{2}})$? Mindenesetre $\text{Pr}(X, T_2)$ teljesül, ha X szekvenciális SC tér (4.53. Tétel).

A dolgozat egyik legérdekesebb és legcsavarosabb bizonyítású tétele a következőt mondja ki: ha X lokálisan összefüggő tér, amiben minden nem zárt $A \subseteq X$ halmazhoz van olyan megszámlálhatóan kompakt $C \subseteq X$ altér, hogy $A \cap C$ nem relatíve zárt C -ben és $f : X \rightarrow Y$ megőrző függvény, akkor f nem szakadhat pontosan egy pontban. Ha még X T_3 is, akkor a szakadási pontok halmaza önmagában sűrű (4.55. Tétel).

Ezután a szerző igazolja, hogy ha X lokálisan összefüggő, kompakt T_2 tér megszámlálható szűk-séggel, amire $|X| < 2^{\mathfrak{p}}$ és nincs $\mathfrak{p}$ diszjunkt nemüres nyílt halmaz X -ben, akkor $\text{Pr}(X, T_2)$ teljesül. Itt $\mathfrak{p}$ egy jólismert számosság-invariáns: a legkisebb $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ számossága, ami véges metszet tulajdonságú, de nincs $H \in [\omega]^\omega$, hogy $H \subseteq^* A$ teljesül minden $A \in \mathcal{A}$ -ra.

A 4.5. zárószekció egyetlen tétel bizonyítását tartalmazza: ha X T_3 tér és $\text{Pr}(X, T_1)$ teljesül, akkor X diszkrét (4.63. Tétel). Azaz, mint oly sokszor, a T_1 eset jóval kevésbé érdekes.

A fenti áttekintésből feltehetően világosan látszik, hogy a gondosan, világosan megírt értekezés hatalmas mennyiségű eredményt mutat be a halmazelméleti topológia különböző területeiről. A bizonyítások a vizsgált topológiai struktúrák kombinatorikus halmazelméleti eszközökkel (például halmazrendszerek vizsgálatával) történő elemzésével történnek. A tételek érdekesek, nehezek és szépek. A szerző sikeresen oldott meg számos, mások által felvetett problémát, illetve általánosította mások eredményeit.

Ezek alapján a védés kitűzését és az MTA doktora cím megadását melegen javaslom.

Komjáth Péter
az MTA rendes tagja