

Opponensi vélemény Szentmiklóssy Zoltán “On the structure of compact topological spaces” című doktori értekezéséről

Az értekezés topológikus terek struktúráját vizsgálja halmazelméleti eszközökkel. Az általános topológia halmazelméleti topológia nevű ágához tartozik, mely számosságfüggvények segítségével vizsgálja a topológikus terek szerkezetét.

Az értekezés nagy számú érdekes és jelentős tételt tartalmaz. Ezek mind valamilyen formában mások által felvetett problémát oldanak meg teljesen vagy részben, de a tételek önmagukban is érdekesek. Bizonyításuk ötletes, nehéz, mind a topológia mind a halmazelmélet technikáinak biztos kézzel való használatát mutatják.

Az értekezés négy fejezetből áll. Mind a négy fejezetben egy-egy jellegzetes topológiai számosságfüggvénnyel kapcsolatos problémakörrel foglalkozik a szerző. Ahelyett, hogy felsorolnám az összes fontos tételét az értekezésnek, mind a négy fejezetből kiragadok 1-2 eredményt.

Az első fejezet fő eredménye a következő. Legyen κ nem megszámlálható reguláris számosság. Ha az X kompakt T_2 térben van κ hosszú szabad sorozat, akkor van ugyanilyen hosszú konvergens sorozat is. (1.2 Tétel). Egy sorozatot szabadnak nevezünk, ha tetszőleges kezdőszeletének lezárásában nincs benne nemcsak a sorozat innen vett végének egyik tagja sem, hanem semmi olyan pont sem ami a sorozat végének lezárásában van. E tétel egyik következménye Hušek problémáját oldja meg: ZFC-ben a kontinuum hipotézisből levezethető a következő topológiai állítás: Az X kompakt T_2 tér metrizable minden olyan esetben, amikor nincs olyan nem-megszámlálható H része a ko-diagonálisnak, amely csak a diagonális közelében nem-megszámlálható (azaz a diagonális minden környezetén kívül H megszámlálható). Itt

a diagonális az $X \times X$ tér $\Delta = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ része, és a ko-diagonális ennek komplemente. Sőt, ennél erősebb tételt bizonyít (1.5. Következmény): a fenti állítás igaz ZFC minden olyan modelljében, amit egy kontinuumhipotézist kielégítő modelltől Cohen-valóság hozzáadásával kapunk. Egy másik alkalmazása a fő tételnek Juhász István következő tételére ad rövid bizonyítást: ZFC-ben abból, hogy $2^{2^\kappa} = \kappa^{++}$ levezethető az a topológiai állítás, hogy minden κ^{++} -nál nagyobb számosságú kompakt tér tartalmaz vagy κ^+ vagy pedig κ^{++} számosságú zárt alteret. (1.7 Következmény) Ez a fejezet tartalmaz még új bizonyítást A. Dow tételére, továbbá tartalmazza Tkačenko számos eredményének és Arhangelszkij egy tételének élesítését, valamint egy Čech-Pospíšil tétel általánosítását.

A rövidebb második fejezetből a következő tételt emelem ki. Tegyük fel, hogy κ olyan végtelen számosság, hogy X -ben bármely κ nyílt halmazból kiválasztható ugyanennyi, úgy hogy a kiválasztottak metszete nemüres (azaz κ kalibere az X térnek). Továbbá tegyük fel, hogy az X tér κ darab olyan kompakt térnek az únioja, hogy egyikben sincs κ hosszú szabad sorozat. Ekkor van κ -nál kisebb számosságú halmaz aminek lezártja a tér maga (azaz a tér $d(X)$ sűrűsége kisebb mint κ). (2.8 Tétel).

A harmadik fejezet egyik fő eredménye azt bizonyítja, hogy egy Tyihonov tér π -szeparáló súlya kisebb-egyenlő a projektív π -karakterénél. Ez Shapirovskij egy hasonló eredményének általánosítása. A fejezet több példát tartalmaz, és egy konstrukciót, melynek segítségével ω részhalmazából különböző tulajdonságú topológikus tereket állíthatunk elő. Ennek a konstrukciónak a használatával Tkačuk több kérdését válaszolja meg a szerző.

A negyedik fejezetből a 4.55 Tételt emelem ki, ami ahhoz a sokak által vizsgált kérdéshez kapcsolódik, hogy két topológikus tér közötti $f : X \rightarrow Y$ függvény ha kompakt halmazokat kompaktba visz és összefüggő halmazokat összefüggőbe, akkor milyen esetekben következik hogy a függvény folytonos. Ismert, hogy a valósakból a valóság topológiájába menő függvényekre ez igaz, és ismertek ellenpéldák is. A továbbiakban tegyük fel, hogy az f függvény kompaktságot és összefüggőséget őriz. A 4.55 tétel azt állítja, hogy ha a két topológikus tér teljesít bizonyos feltételeket, akkor a függvény vagy folytonos vagy pedig sok szakadási pontja van. Pontosabban, a tétel a következőt állítja. Ha az X topológikus tér lokálisan összefüggő és a topológiáját meghatározzák a megszámlálhatóan kompakt alterei (azaz, minden nem zárt A részhalmazhoz van olyan megszámlálhatóan kompakt C altér,

hogy $A \cap C$ sem zárt C -ben), az Y tér pedig reguláris, akkor f vagy folytonos vagy több mint egy szakadási pontja van. Ha X -ről azt is feltesszük, hogy T_3 tér, akkor a szakadási pontok halmaza önmagában sűrű.

Összefoglalva: Az értekezés sok érdekes, jelentős új tételt tartalmaz, melyeknek bizonyítása nehéz. Ezek a tételek megválaszolnak mások által felvetett problémákat, élesítik mások eredményeit, illetve egyszerű bizonyítást adnak rájuk. Az eredmények tehát jól illeszkednek mások munkájához, előreviszik a tudományt. A doktori értekezésben felsorolt tudományos eredményeket alkalmasnak tartom az MTA doktori cím odaítéléséhez. A munka a doktori értekezésekkel szemben támasztott mind tartalmi mind formai követelményeket teljesíti. A nyilvános védés kitűzését javaslom.

Budapest, 2016. december 19

Andréka Hajnal
a matematikai tudományok doktora
Rényi Alfréd Matematikai Intézet
Magyar Tudományos Akadémia