

Bírálóí vélemény Szigeti Jenő
Identities, determinants and centralizers in matrix algebras
című MTA doktori disszertációjáról

A disszertáció a szerző 14 folyóiratcikke és egy könyvfejezete alapján készült, amelyek közül 7 cikk és a könyvfejezet egyszerűs. A többszerzős cikkekben a leggyakoribb társzerző Leon van Wyk. A cikkek közül négy a Journal of Algebrában jelent meg, három a Communications in Algebrában, a többi is rangos folyóiratokban, pl. Israel Journal of Mathematics, Proceedings of the AMS stb.

A dolgozat egy magyar nyelvű összefoglalásból, négy fejezetből és négyoldalnyi irodalomjegyzékből áll. Az összefoglalás nem csak a disszertáció legfontosabb eredményeit, hanem azok történeti kontextusát is kiválóan bemutatja, így többek között a polinomazonosságok elméletének releváns részeit, nemkommutatív gyűrű feletti determináns-variációkat, Bergman és Schur centralizátorokra vonatkozó klasszikus eredményeit.

Az első fejezet egy klasszikus témakörhöz, a polinomazonosságos (PI) algebrák elméletéhez járul hozzá, méghozzá alighanem a legtöbbet vizsgált algebrák, a mátrixalgebrák vonatkozásában. A kiindulópont Swan gráfelméleti tétele, amely ekvivalens a kommutatív gyűrű feletti teljes mátrixalgebrára vonatkozó minimális standard azonosságot megállapító, nevezetes Amitsur–Levitzki-tétellel. A fejezet legérdekesebb eredménye az 1.3.1 Tétel, amely a doktorjelöltnek Tuza Zsolttal és Révész Gáborral közös cikkéből való, és arra mutat rá, hogy Swan tételéből további, a standardtól különböző, ún. Euler-féle polinomazonosságok is következnek kommutatív gyűrű feletti teljes mátrixalgebrákra. A bizonyítás nem nehéz, de ötletes, és magának az állításnak a megtalálása is jelentős érdem, az ember nem várna ilyet. Domokos Mátyás egy későbbi eredménye mutat rá a Szigeti–Tuza–Révész-féle eredmény igazi jelentőségére: a szóbanforgó Euler-azonosságok általában nem következnek a korábban ismert azonosságokból, már 3×3 -as mátrixok esetén sem. Még az is elképzelhető, hogy az Euler-azonosságok adják majd a kulcsot a nullkarakterisztikájú test feletti teljes mátrixalgebrák összes azonosságának megértéséhez.

Az első fejezetben szerepelnek az Euler-azonosságok permanentális (előjelek nélküli) változatára vonatkozó eredmények is, de ezeknél fel kell tenni, hogy az alapgyűrű egységelemének additív rendje véges. Bizonyításuk az irányított Euler-vonalak számára vonatkozó Aardenne-Ehrenfest–de Bruijn-formulán alapul. Szerepelnek továbbá *-polinom-azonosságok is, azaz olyanok, amelyekben a gyűrűműveleteken kívül a transzponálás is megengedett. Ezek is értékes eredmények.

A második fejezet megítélésem szerint a disszertáció legértékesebb része. A szerző itt egy nemkommutatív gyűrű feletti mátrixokra vonatkozó determinánselméletet dolgoz ki. A fejezet csúcspontja a 2.4.5 tétel, amely a klasszikus, kommutatív gyűrű felett érvényes Cayley–Hamilton-tétel általánosítása Lie-nilpotens gyűrű feletti mátrixra. A kapott azonosság foka n^k , ahol n a mátrix mérete és k a Lie-nilpotencia rendje; fel kell tenni, hogy n invertálható az alapgyűrűben. Itt még inkább igaz, hogy maga az állítás is váratlan. Meglepő, hogy létezik ilyen általánosítás, és messze nem triviális, hogy a benne szereplő féloldali karakterisztikus polinomot hogyan kell definiálni. Pontosabban szólva, a féloldali determináns fogalma a probléma, abból a karakterisztikus polinom már kézenfekvő. A féloldali determinánshoz viszont korántsem maguktól értetődő lépésekben jutunk el a szimmetrikus determinánson, szimmetrikus adjugálton és féloldali adjugált-sorozaton keresztül.

Az említett 2.4.5 tétel bizonyítása a kulcsfontosságú 2.3.3 tételen alapul, amely szerint egy k -adrendben Lie-nilpotens gyűrű feletti mátrixot a k -adik jobboldali adjugáltjával jobbról szorozva az egységmátrixnak a k -adik jobboldali determináns-szorosát kapjuk. Ennek bizonyítása pedig a 2.1.10 és 2.2.7 tételeken alapul. Az előbbi egy gyűrű Lie-centrum-sorozatának egy fontos tulajdonságát mondja ki, az utóbbi pedig egy mátrix szimmetrikus adjugáltja és szimmetrikus determinánsa között teremt kapcsolatot. Ezek a tételek mind a jelölt egyszerűs

eredményei, és külön-külön is nemtriviális, értékes eredmények. A Lie-nilpotens Cayley–Hamilton-tétel ezekből összeálló bizonyítását kiemelkedő teljesítménynek tartom.

E tételből egy szellemes trükkel azt is levezeti a szerző, hogy a Grassmann-algebra feletti bármely $n \times n$ -es mátrix legfeljebb $2n^2$ fokszámmal algebrai egész a Grassmann-algebra tisztán páros fokú része felett. Ez a 2.5.1 tétel. Ebből adódik a $2n^2$ fokú algebraicitási azonosság a Grassmann-algebra feletti $n \times n$ -es mátrixokra (2.5.2 következmény). Azt is kimutatja a szerző, hogy a fokszám n^2 -re csökkenthető abban az esetben, ha csak olyan mátrixokat tekintünk, amelyek valamely d mellett egy $d \times d$ és egy $(n-d) \times (n-d)$ méretű, tisztán páros fokú átlós blokkra és két tisztán páratlan fokú nem-átlós blokkra bonthatók (ún. szupermátrixok, 2.5.3 tétel és 2.5.4 következmény).

Ugyancsak a 2.4.5 tételből egy Galois-elméleti ihletésű érdekes következményt is levezet a jelölt: nullkarakterisztikájú test feletti, k -adrendben Lie-nilpotens algebra n^k fokszámmal jobbról egész bármely rajta automorfizmusokkal ható n -edrendű csoport fixpontjainak algebrája felett. Ez a 2.7.5 tétel.

Az említett kulcsfontosságú 2.3.3 tétel másra is jó: a szerző levezeti belőle, hogy ha egy nullkarakterisztikájú test feletti, k -adrendben Lie-nilpotens algebra egy idempotens kétoldali ideálja jobbideálként végesen generált, akkor van egy idempotens elem, amely bal- és jobbideálként is generálja. Ez a 2.3.5 tétel.

A jelölt bebizonyítja egy olyan általánosítást is a Cayley–Hamilton-tételnek, amely tetszőleges (nem feltétlenül Lie-nilpotens) gyűrű feletti mátrixokra érvényes, hátránya azonban, hogy nem skalár, hanem mátrix együtthatók szerepelnek benne. Ez a 2.4.3 tétel.

A harmadik fejezet a disszertáció legabsztraktabb része. A lineáris algebra egyes eredményeinek általánosítását adja bizonyos, kissé technikai feltételeket kielégítő hálókban. Vektortér altérhálója esetén kapjuk vissza a klasszikus eredményeket. A lineáris transzformációknak az általánosításban bizonyos feltételeket kielégítő teljes egyesítés-homomorfizmusok felelnek meg. A dimenziótételnek és a Fitting-lemmának az általánosítása után jön a fő eredmény: ha egy ilyen homomorfizmus nilpotens, akkor van Jordan-féle normálbázisa. Ez a 3.2.2 tétel. A fejezet végén, a 3.3 alfejezetben a hálóelméleti eredményeket modulusok részmodulushálójára alkalmazza a szerző. A fő eredmény itt a 3.3.1 tétel: féligegyszerű modulus nilpotens endomorfizmusának van Jordan-féle normálbázisa. Ezt számtalanszor használja a szerző a disszertáció hátralévő részében. Megjegyzem, hogy ez az eredmény közvetlenül, elemi moduluselméleti eszközökkel is igazolható. A 3.3.2 állítás pedig azt mondja ki, hogy ha a modulus végesen generált, akkor a Jordan-alak a megfelelő értelemben egyértelmű. Ez Vesselin Drenskyvel és Leon van Wykkal közös, míg a fejezet többi eredménye egyszerűs.

A negyedik fejezet modulusok — elsősorban nilpotens — endomorfizmusainak centralizátoráról és kétoldali annullátoráról szól. A centralizátorra vonatkozó eredmények jó része adott nilpotens Jordan-normálbázis függvényében írja le annak szerkezetét. A 4.4 alfejezetben szerepelnek a legérdekesebb, bázisfüggetlen eredmények, amelyek ismét Drenskyvel és van Wykkal közősek. Az utolsó, a 4.4.4 következmény Schur kettőscentralizátor-tételének kommutatív lokális gyűrű feletti modulus nilpotens endomorfizmusára vonatkozó változata.

Az utolsó két, 4.5 és 4.6 alfejezet kétoldali annullátorokról szól, van Wykkal közös. A kétoldali annullátor sokkal könnyebben kezelhető, mint a centralizátor. A szerző a bizonyításokban ismét nilpotens Jordan-normálbázisokat használ, de enélkül is egyszerűen bizonyítható lenne minden, beleértve a 4.6.3 kettős-kétoldaliannullátor-tételt is.

Új tudományos eredményként fogadom el a tézisfüzetben szereplő összes eredményt, bár az 1.2.1 tétel Rossetnek az Amitsur–Levitzki tételre adott bizonyításában implicite benne van, a 4.5.2. következmény pedig a dolgozatbeli előzményei nélkül is triviális.

A disszertáció fő vonzerejét számomra az adja, hogy a jelölt klasszikus, látszólag lezárt területeken ér el meglepő új eredményeket, jelentős fogalmi innovációval és ötletes bizonyításokkal. A dolgozat nagyon jól van megírva, a megfogalmazások világosak és érthetők, a felépítés

logikus, az összefüggések jól követhetők. A dolgozat teljesíti a doktori disszertációkkal szemben általában támasztott követelményeket. Ennek alapján javaslom a nyilvános vita kitűzését.

Kérdéseim a jelölthöz:

1. Javítható-e a 2.5.1 tételben szereplő $2n^2$ fokszámkorlát? Ha $n = 1$, akkor nyilván nem. Ha viszont $n = 2$, akkor 8 helyett 6 is jó: minden mátrix kielégíti a saját tisztán páros fokú része karakterisztikus polinomjának köbét. Ez a 6 már minimális? Mi a helyzet nagyobb n esetén?

2. A klasszikus Cayley–Hamilton-azonosság minimális abban az értelemben, hogy tipikus mátrix minimál- és karakterisztikus polinomja megegyezik. Állíthatunk-e ilyesmit Lie-nilpotens gyűrű felett?

Budapest, 2016. szeptember 27.

Frenkel Péter