VÁLASZOK IVANYOS GÁBOR KÉRDÉSEIRE

Első kérdés: Mi vezetett a Lie-nilpotens determinánselméletben az általam a kulcsfontosságúként említett meglátásra?

Válasz:
Egy tetszőleges gyűrű feletti 2×2-es A mátrixot az A^* közönséges adjungáltjával (ez a 2×2-es estben szimmetrikus adjungált is) jobbról szorozva rögtön kapjuk, hogy

$$AA^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -a \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & -ba+ab \\ cd-dc & -cb+da \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & [a,b] \\ [c,d] & (ad-bc)+[b,c]+[d,a] \end{bmatrix}.$$

Ha az $ad-bc$, $[a,b]$, $[c,d]$, $[b,c]$, $[d,a]$ elemek páronként felcserélhetőek (ami másodrendben Lie nilpotens alap gyűrű esetén nyilvánvalóan teljesül), akkor az AA^* szorzat mátrix tekinthető egy kommutatív gyűrű feletti mátrixnak és felírhatjuk a jól ismert mátrix és adjungáltja közötti viszonyt: $AA^*\mathrm{adj}(AA^*) = \det(AA^*)I_2$. További finomítással adódik, hogy

$$2AA^* = (ad+da-bc-cb)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [a,d]+[c,b] & 2[a,b] \\ 2[c,d] & -[a,d]-[c,b] \end{bmatrix}.$$

Az egész determináns elméletnek és a kérdésben említett kulcsfontosságú meglátásnak a fenti egyszerű számolás volt az alapja.

Második kérdés: Tud-e a jelölt egy egyszerű példát mutatni arra, amikor egy ferdetest feletti nilpotens endomorfizmus kettős centralizátora nem polinomja az endomorfizmusnak?

Válasz:
Közvetlenül is látható (az értekezés 8. oldalán idézett Bergman tételből egyszerűen következik), hogy a nem kommutatív x és y változókkal a K test feletti $K < x, y >$ (szabad asszociatív) polinomalgebrában $\mathrm{Cen}(x^2) = K[x]$ és $\mathrm{Cen}(\mathrm{Cen}(x^2)) = \mathrm{Cen}(K[x]) = \mathrm{Cen}(x) = K[x]$ teljesül. Tehát ebben az esetben a kettős centralizátor nem csak az adott x^2 elem polinomjaiból áll. További, a kérdéshez gyengébben kapcsolódó észrevétel az, hogy az $E_{1,2}$ és $E_{3,2}$ felcserélhető $\mathrm{M}_3(K)$-beli mátrixokhoz ($E_{1,2}E_{3,2} = E_{3,2}E_{1,2} = 0$) nem lehet olyan $C \in \mathrm{M}_3(K)$ mátrixot találni, amelynek mindkét eredeti mátrix a polinomja, azaz amelyre $E_{1,2} = u(C)$ és $E_{3,2} = v(C)$ teljesül valamilyen $u(z), v(z) \in K[z]$ polinomokra. Mivel $u(C)v(C) = v(C)u(C)$ minden $C \in \mathrm{M}_3(K)$ mátrixra teljesül, ezért az $E_{1,2}$ és $E_{3,2}$ mátrixok felcserélhetősége nem következménye egy ilyen „közös C-vel való felírhatóságuknak”.
Az értekezés 4.4.3. tétele szerint egy lokális R gyűrű feletti végesen generált féligegyszerű ${}_RM$ bal R-modulusnak az n-ed rendben nilpotens $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ endomorfizmusára és egy tetszőleges $\sigma \in \mathrm{End}_R(M)$ endomorfizmusra a $\sigma \in \mathrm{Cen}(\mathrm{Cen}(\varphi))$ ($\Longleftrightarrow \mathrm{Cen}(\varphi) \subseteq \mathrm{Cen}(\sigma)$) tartalmazás olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ együtthatók és egy olyan R feletti véges $Y \subseteq M$ generátor rendszer létezését garantálja, hogy

$$a_1\psi(y) + a_2\varphi(\psi(y)) + \cdots + a_n\varphi^{n-1}(\psi(y)) = \sigma(\psi(y))$$

teljesül minden $y \in Y$ elemre és tetszőleges $\psi \in \mathrm{Cen}(\varphi)$ endomorfizmusra. Az

$$N = \{z \in M \mid a_1z + a_2\varphi(z) + \cdots + a_n\varphi^{n-1}(z) = \sigma(z)\} \subseteq M$$

részhalmaz a nem feltétlenül centrális a_i elemek jelenléte miatt csak $\mathrm{Z}(R)$ (és nem R szerinti) részmodulusa M-nek, de zárt a $\mathrm{Cen}(\varphi)$-beli endomorfizmusokra nézve: $z \in N$ és $\psi \in \mathrm{Cen}(\varphi)$ esetén $\psi(z) \in N$.
Mivel $RY = M$ és $Y \subseteq N$, ezért nagy a valószínűsége annak, hogy a fenti tulajdonságú z elemek az M modulus összes elemét jelentik nagyon sok φ esetén (különösen akkor ha $\mathrm{Z}(R)$ és $\mathrm{Cen}(\varphi)$ "nagyok"). Sajnos nem sikerült a fenti feltételek mellett olyan példát megadni, amelynél $R = D$ ferdetest és nem léteznek olyan $b_1, b_2, \ldots, b_n \in D$ együtthatók, amelyekre $b_1 z + b_2\varphi(z) + \cdots + b_n\varphi^{n-1}(z) = \sigma(z)$ teljesülne minden $z \in M$ elemre.

Harmadik kérdés: Ha jól látom, hogy a közelmúltban sikerült igazolni az adott lépésben Lie-nilpotens mátrixalgebra dimenziójára a sejtett felső korlátot. Mi alapozta meg a sejtést?

Válasz:
A sejtés megszületését elsősorban olyan szándék motiválta, hogy adjuk meg Schur klasszikus tételének a Lie nilpotens általánosítását. A kommutatívitásról a Lie nilpotens esetre való áttérés már a Lie nilpotens determinánsok bevezetésénél is nagyon fontos szempont volt. További ösztönzést jelentett a Grassmann algebra alapvető jelentősége az ún. PI-elméletben és az alábbi reprezentációkról szóló tétel.
Az [MMSzvW: Márki, L., Meyer, J., Szigeti, J., van Wyk, L.: Matrix representations of finitely generated Grassmann algebras and some consequences, Israel J. Math. 208 (2015), 373–384.] dolgozatban az m generátorral megadott E^m Grassmann algebrának az alaptest feletti $n \times n$-es teljes mátrixalgebrába történő beágyazásáról az alábbi eredményt találjuk.
(3.9.Theorem) *If* $\lambda : E^m \longrightarrow \mathrm{M}_n(K)$ *is an embedding of* K*-algebras, then* $3 \cdot 2^{m-2} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$.
A fenti tétel bizonyításában az E^m egy maximális dimenziójú kommutatív részalgebrájának a (szintén kommutatív) λ szerinti képét vizsgáljuk és Schur klasszikus tételét használjuk az $\mathrm{M}_n(K)$-beli kommutatív részalgebrák dimenziójáról. Mivel E^m másodrendben Lie nilpotens, ezért felmerült, hogy a fenti tételben érdemes volna a teljes E^m algebrának a λ szerinti képét vizsgálni, ami az $\mathrm{M}_n(K)$-nak másodrendben Lie nilpotens részalgebrája. A sejtés bizonyításával a tételre is új bizonyítást kaptunk, az $\mathrm{M}_n(K)$ egy másodrendben Lie nilpotens részalgebrájának a dimenziójára az $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor + 1$ felső korlát adódik, aminek egyszerű következménye a tekintett 3.9 tételbelivel lényegében megegyező $2^m = \dim_K \lambda(E^m) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor + 1$ egyenlőtlenség. Időközben az említett $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor + 1$ felső korlátot szolgáltató új tételünknél erősebb sejtést sikerült megfogalmazni (aminek magasabb rendben való Lie nilpotencia esetén is megvan a megfelelője):
Egy (algebrailag zárt és zéró karakterisztikájú) K test feletti véges dimenziós másodrendben Lie nilpotens lokális R algebrának mindig létezik olyan $C \subseteq R$ kommutatív részalgebrája, amelynek a dimenziójára $\frac{3}{4} \dim_K R \leq \dim_K C$ teljesül.

Szigeti Jenő, Miskolc 2016 november 4.