

Első kérdés: Honnan jött a jelöltnek az az ötlete, hogy a Jordan-féle normálalakot hálóelméleti eszközökkel ragadja meg?

Válasz: Adott algebrai struktúrában a különböző részstruktúrák a tartalmazásra nézve általában bizonyos tulajdonságokkal rendelkező hálót alkotnak (pl. moduláris). Az ilyen hálók vizsgálata az algebra klasszikus területei közé tartozik, ahogyan ez Márki László bírálataiban is említésre kerül (Jordan-Hölder). Természetes ötlet, hogy az adott struktúra egy endomorfizmusának a hatását is tanulmányozzuk a részstruktúrákból álló hálón. Vektorterek esetében ez a lineáris transzformációk hatását jelenti az altereken. Az alterek metszetét egy lineáris leképezés nem őrzi meg, de azok összegét igen. Így ha egy vektortér alterei helyett egy megfelelő tulajdonságokkal rendelkező hálót tanulmányozunk, akkor egy lineáris transzformáció helyett a hálónak egy (teljes) egyesítés endomorfizmusát kell tekinteni. Fokozatosan sikerült az egyesítés endomorfizmusoknak azokat a tulajdonságait megtalálni, amelyek lehetővé tették lineáris algebra „kiépítését” hálókban. A sajátértékeket és az ezekhez tartozó sajátaltereket nyilván nem lehet egy hálóban interpretálni, viszont a nilpotens esetben sikerült tovább lépni. Egy nilpotens lineáris transzformáció hatása a neki megfelelő Jordan bázison teljesen kombinatorikus jellegű, ezért sikerült a nilpotens egyesítés endomorfizmusokra a Jordan bázis megadása, ami a hálónak bizonyos atomjaiból áll, amelyek az egyesítés endomorfizmus „Jordan féle módon” hat. A (nem feltétlenül véges) bázis létezését a nilpotencia indexre vonatkozó teljes indukcióval sikerült bizonyítani, amihez segítséget nyújtott Hannu Väliaho [*An elementary approach to the Jordan normal form of a matrix*, Amer. Math. Monthly Vol. 93 (1986), 711-714.] és Mark Wildon munkája [<http://www.ma.rhul.ac.uk/~uvah099/Maths/JNF.pdf>].

Második kérdés: Ismeretes-e példa valamely ferdetest feletti modulus olyan nilpotens endomorfizmusára, amelynek a kettős centralizátora nem csak az adott endomorfizmus polinomjaiból áll?

Válasz:

Közvetlenül is látható (az értekezés 8. oldalán idézett Bergman tételből egyszerűen következik), hogy a nem kommutatív x és y változókkal a K test feletti $K \langle x, y \rangle$ (szabad asszociatív) polinomalgebrában $\text{Cen}(x^2) = K[x]$ és $\text{Cen}(\text{Cen}(x^2)) = \text{Cen}(K[x]) = \text{Cen}(x) = K[x]$ teljesül. Tehát ebben az esetben a kettős centralizátor nem csak az adott x^2 elem polinomjaiból áll. További, a kérdéshez gyengébben kapcsolódó észrevétel az, hogy az $E_{1,2}$ és $E_{3,2}$ felcserélhető $M_3(K)$ -beli mátrixokhoz ($E_{1,2}E_{3,2} = E_{3,2}E_{1,2} = 0$) nem lehet olyan $C \in M_3(K)$ mátrixot találni, amelynek mindkét eredeti mátrix a polinomja, azaz amelyre $E_{1,2} = u(C)$ és $E_{3,2} = v(C)$ teljesül valamilyen $u(z), v(z) \in K[z]$ polinomokra. Mivel $u(C)v(C) = v(C)u(C)$ minden $C \in M_3(K)$ mátrixra teljesül, ezért az $E_{1,2}$ és $E_{3,2}$ mátrixok felcserélhetősége nem következménye egy ilyen „közös C -vel való felírhatóságuknak”.

Az értekezés 4.4.3. tétele szerint egy lokális R gyűrű feletti végesen generált féligegyszerű ${}_R M$ bal R -modulusnak az n -ed rendben nilpotens $\varphi \in \text{End}_R(M)$ endomorfizmusára és egy tetszőleges $\sigma \in \text{End}_R(M)$ endomorfizmusra a $\sigma \in \text{Cen}(\text{Cen}(\varphi))$ ($\iff \text{Cen}(\varphi) \subseteq \text{Cen}(\sigma)$) tartalmazás olyan $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ együtthatók és egy olyan R feletti véges $Y \subseteq M$ generátor rendszer létezését garantálja, hogy

$$a_1\psi(y) + a_2\varphi(\psi(y)) + \dots + a_n\varphi^{n-1}(\psi(y)) = \sigma(\psi(y))$$

teljesül minden $y \in Y$ elemre és tetszőleges $\psi \in \text{Cen}(\varphi)$ endomorfizmusra. Az

$$N = \{z \in M \mid a_1 z + a_2 \varphi(z) + \cdots + a_n \varphi^{n-1}(z) = \sigma(z)\} \subseteq M$$

részhalmoz a nem feltétlenül centrális a_i elemek jelenléte miatt csak $Z(R)$ (és nem R szerinti) részmodulusa M -nek, de zárt a $\text{Cen}(\varphi)$ -beli endomorfizmusokra nézve: $z \in N$ és $\psi \in \text{Cen}(\varphi)$ esetén $\psi(z) \in N$.

Mivel $RY = M$ és $Y \subseteq N$, ezért nagy a valószínűsége annak, hogy a fenti tulajdonságú z elemek az M modulus összes elemét jelentik nagyon sok φ esetén (különösen akkor ha $Z(R)$ és $\text{Cen}(\varphi)$ "nagyok"). Sajnos nem sikerült a fenti feltételek mellett olyan példát megadni, amelynél $R = D$ ferdetest és nem léteznek olyan $b_1, b_2, \dots, b_n \in D$ együttthatók, amelyekre $b_1 z + b_2 \varphi(z) + \cdots + b_n \varphi^{n-1}(z) = \sigma(z)$ teljesülne minden $z \in M$ elemre.

Szigeti Jenő, Miskolc 2016 november 4.