

Bírálóí vélemény

Szigeti Jenő

Identities, determinants and centralizers in matrix algebras

(Azonosságok, determinánsok és centralizátorok mátrixalgebrákban)

című akadémiai doktori értekezéséről

A nem-kommutatív gyűrűk elméletében kiemelkedő szerepet játszanak a mátrixok. Számos mátrixokkal kapcsolatos problémakör – mint például a determinánsfogalom kiterjeszthetősége nem-kommutatív gyűrűk feletti mátrixokra, vagy a teljes mátrixgyűrű polinomazonosságai – foglalkoztatja nagyon vagy meglehetősen régóta a matematikusokat. Értekezésében Szigeti Jenő ezekben és hozzájuk szorosan kapcsolódó területeken elért, esetenként egészen különleges eredményeiről számol be.

A dolgozat egy magyar nyelvű összefoglalót követő négy, angolul írt fejezetből áll, amelyekben a szerző a nagyobb elkülöníthető, de egymással összefüggésben álló részmakörökben elért eredményeiről számol be. Szinte mindegyik fejezet Szigeti Jenő több dolgozatára épül, bőségesen gazdagítva az általam legfontosabbnak tartott eredményeket kiegészítő, vagy alkalmazó egyéb eredményekkel. Az alábbi tartalmi ismertetőben terjedelmi okokból törekszem az informális bemutatásra még a legfontosabb eredmények tekintetében is. A többi eredmény nagy részét csak röviden említem, sőt lesznek olyanok is, amelyekre egyáltalán nem térek ki.

Az első fejezet tesztek (illetve kommutatív gyűrűk) feletti teljes mátrixalgebrák azonosságaival foglalkozik. A PI-algebrák elméletének klasszikus eredményei alapján ezek ismerete algebrák meglehetősen széles körének azonosságainak megértéséhez jelentené a kulcsot. A fejezet fő eredménye a nevezetes Amitsur–Levitzki-tételnek a szerző és munkatársai által felfedezett messzemenő általánosítása egy tágas, a klasszikusan ismert azonosságok jó részét speciális esetként tartalmazó azonosság-osztályról, az úgynevezett Euler-féle polinomazonosságokról szól. Az azonosságokban szereplő polinomok többszörös és hurokéleket is tartalmazó irányított gráfok irányított Euler-bejárásaihoz tartozó monomok megfelelően előjelezett összegei. A szerző bebizonyítja, hogy egy irányított gráfhoz tartozó Euler-féle azonosság teljesül az $m \times m$ -es mátrixok körében, amennyiben az élek száma kellően nagy m -hez és a gráf egyéb paramétereire is képest. A felfedezés és a bizonyítás az Amitsur–Levitzki-tételre adott Swan-féle kombinatorikai alapú bizonyítás szellemének mély megértéséről és számottevő kreativitásról tanúskodnak. Egyben jelentős hozzájárulás is a polinomazonosságok elméletéhez: Domokos Mátyás később igazolta, hogy már a 3×3 -as mátrixok körében is teljesülnek olyan Euler-féle azonosságok, amely nem következnek a korábban ismertekből.

A fejezetben további számottevő eredmények találhatók. A fejezet első eredménye egy frappáns tétel, amely a Swan-féle kombinatorikai összefüggést, illetve az Amitsur–Levitzki-tétel Rosset-féle bizonyítását transzparens módon, gráfok Grassmann-algebra feletti feletti adjacencia-mátrixának nilpotenciájára vonatkozó megállapításként fogal-

mazza meg. A fő eredményt tartalmazó rész után bemutatásra kerülnek az Euler-féle azonosságok pozitív karakterisztikában teljesülő előjelezetlen változatairól szóló igen értékes eredmények. A fejezetet az involúciót is műveletként magában foglaló úgynevezett *-azonosságról szóló, szintén említésre méltó tételek bemutatásával zárul.

A második fejezet alapvető tárgya Lie-nilpotens gyűrűk feletti mátrixok egy szép keret determináns-elmélete. A hagyományos determináns kiterjesztése a nem-kommutatív esetre több mint másfél évszázada foglalkoztatja a matematikusokat. A klasszikusan ismert próbálkozások túlnyomó része tárgyalhatónak bizonyult a Gelfand és Retakh által az 1990-es években bevezetett kvázideterminánsok keretében. Egy $m \times m$ -es mátrixhoz generikus esetben m^2 kvázidetermináns tartozik. Ezek (kicsit leegyszerűsítve) az m^2 szabad változóból felépített mátrix, mint a szabad ferdetest feletti mátrix inverzének az elemeinek az inverzei nyerhetők és az invertálás miatt eredendően nem polinomjai az m^2 változónak. (Sőt, rekurzióval való kiszámolásokhoz több invertálás szükséges.) Szigeti Jenő egy klasszikusabb úton indul el, talán a Grassmann-algebra feletti mátrixalgebrák polinomazonosságai iránti érdeklődésétől motiválva. Az általa bevezetett determinánsok (nem-kommutatív) polinomjai a változóknak. Cserébe viszont a konstrukció valamilyen értelemben kommutatívhoz közeli, nevezetesen Lie-nilpotens gyűrűk felett mutatja meg teljes erejét. (Szemben a Gelfand–Retakh-féle kvázideterminánsokkal, amelyek a lehető legkevésbé kommutatív objektumokból, a szabad ferdetestekből erednek.)

A kiindulást a szerző által szimmetrikus determinánsnak elnevezett (nem-kommutatív) polinom illetve szimmetrikus adjungáltnak nevezett pilonom-elemű mátrix jelentik. Ezek a hagyományos determináns-polinom illetve az adjungált mátrix elég természetes nem-kommutatív megfelelői. Kulcsfontosságú az a döbbenetes meglátás, hogy egy tetszőleges gyűrű feletti $m \times m$ -es egy mátrixnak és a szimmetrikus adjungáltjának a szorzata (m -nel felszorozva) az egységmátrixnak a szimmetrikus determináns-szorosának és egy olyan nulla nyomú mátrixnak az összege, amelynek elemei az alapgyűrűből vett additív kommutátorok összegei. (Vajon hogy lehet erre rájönni?) Durván szólva ez azt jelenti, hogy ha a szimmetrikus determináns egység, és amennyiben az alapgyűrű kommutátorai egy valódi részgyűrűbe esnek (mint például a Lie-nilpotens gyűrűk esetén), akkor a szimmetrikus adjungált egy, a részgyűrűből vett korrekciós mátrix erejéig lényegében a mátrix inverzét adja. Ebből kiindulva alkalmas iterációval definiálható a mátrix k -adik egyoldali (bal- vagy jobboldali) determinánsa illetve adjungáltja. Megjegyzendő, hogy kommutatív esetben a k -adik determináns a hagyományos determináns m^{k-1} -edik hatványnak egy skalárszorosa. Az egyik fő eredmény az a szép tétel, amely szerint egy ℓ lépésben Lie-nilpotens gyűrű esetén a mátrix ℓ -edik adjungáltjával vett szorzata (a megfelelő oldalról) az egységmátrix az ℓ -edik determinánsszorosora. Más szóval a korrekciós mátrixtól iterációval Lie-nilpotens gyűrűk esetén végül "meg lehet szabadulni". Ennek megfelelően ilyen gyűrűk esetén a megfelelően sokadik adjungált és determináns használhatók az alapgyűrű feletti lineáris egyenletrendszerek explicit megoldására - amennyiben az utolsó determináns nem nulla. Ez történik például az értékezés nulla karakterisztikájú alaptestek feletti Lie-nilpotens algebrák idempotens ideáljairól szóló tételének bizonyításában.

A k -adik determináns segítségével a hagyományos karakterisztikus polinom konstrukciójának mintájára definiálható a k -adik (egyoldali) karakterisztikus polinom. A mátrixot "behelyettesítve" a klasszikus Hamilton–Cayley-tételnek egyfajta általánosítását bizonyítja a szerző. Itt általában a mátrixnak és adjungáltjának szorzatára vonatkozó megállapításra nagy mértékben hasonlító korrekciós mátrixokat kell tagonként alkalmazni,

amelyek Lie-nilpotens esetben végül "elfogynak", és "valódi" (egyoldali) nem-kommutatív Hamilton–Cayley-tétel jön ki.

A fejezet a Lie-nilpotens gyűrűk szerkezetéről szóló alapvető megállapításokkal indít. Innen az új eredmények közül azt a tételt emelném ki, miszerint egy ilyen gyűrű prímradiálja a nilpotens elemek halmazával egyezik meg. Ezt követik a fentebb tárgyalt konstrukciókat és a fő eredményeket tárgyaló részek, amelyek még a 2×2 -es, illetve a 3×3 -as mátrixokra adnak a klasszikus Newton-formulát általánosító kifejezést. Aztán alkalmazásokat láthatunk a két lépésben nilpotens végtelen dimenziós Grassmann-algebra feletti mátrixok egy polinomazonosságának igazolására illetve bizonyos jól-strukturált szintén a Grassmann-algebra feletti mátrixok hasonló, de alacsonyabb fokú azonosságára. A bizonyított azonosságok jelentőségét az adja, hogy a testek feletti mátrixalgebrák mellett még ezek az algebrák bírnak meghatározó jelentőséggel a PI-algebrák elméletében.

A fejezet két záró része mátrixok egyfajta "csavart" centralizátoráról szól. Előbb megmutatja, hogy bizonyos ferde polinomgyűrűk beágyazhatók az "egyenes" polinomgyűrű feletti alkalmas mátrixok ilyen csavart centralizátoraiba, ahonnan a alkalmas alapgyűrűk esetén a csavart polinomgyűrű azonosságaival kapcsolatban von le érdekes következtetéseket. Végül számos értékes megállapítást igazol a ilyen ferdén centralizált mátrixok fenti értelemben vett determinánsaira, adjungáltjaira, illetve karakterisztikus polinomjaira vonatkozóan, majd alkalmazza a fenti Hamilton–Cayley-tétel tételt speciális ferde polinomgyűrűkre.

A harmadik fejezet néhány lineáris transzformációkra vonatkozó alapvető tételt általánosít hálóelméleti kontextusban. A terepet bizonyosfajta matroidokhoz, közelebbről (és egy kicsit más szemszögből) algebrai lezárási operációkhoz kapcsolódó geometriai hálók adják. (Egy algebrai lezárásnál egy halmaz lezártja a véges részhalmazainak lezártjával egyezik meg.) A lineáris transzformációk általánosításai bizonyos jól megválasztott kritériumoknak eleget tevő, a teljes egyesítés műveletét tartó leképezések. Ezekkel Szigeti Jenő ügyesen ragadta meg a lineáris transzformációknak az altérhálón indukált hatásának legfontosabb tulajdonságait. Az ilyen leképezéseknek például definiálható a magja és a képe, amelyek sok (talán szinte minden) tekintetben a lineáris algebrában megszokott módon viszonyulnak egymáshoz, például létezik egy két részre osztható bázis, amelynél az első rész képe egy bázisa a teljes képnek, míg a második része egy bázisa a magnak. Egy szép eredmény, hogy alkalmas végességi feltételek mellett igaz a Fitting-lemma egy általánosítása: egy leképezés egy alkalmas hatványának magja és képe mesztete 0, egyesítése 1 lesz. (Megjegyezném, hogy ezt, akárcsak számos más, inkább technikai jellegű eredményt a fentiek összességénél kevésbé szigorú feltételrendszer mellett, azaz általánosabb kontextusban mond ki és bizonyít a szerző). Ez a tulajdonság, akárcsak a fejezet legfontosabb eredménye, amely szerint (a feltételeket teljesítő) nilpotens leképezéshez létezik Jordan-féle bázis (olyan bázis, amelynek elemeit vagy 0-ba, vagy egy másik báziselemebe visz a leképezés) közvetlenül alkalmazható féligegyszerű modulusok endomorfizmusaira és fontos szerepet játszanak a dolgozat hátralevő részében.

A negyedik fejezet szerintem legjelentősebb eredménye Schur mátrixok kettős centralizátoráról (az illető mátrix centralizátorának a centrumáról) szóló tételének egy általánosítása nem-kommutatív lokális gyűrűk feletti végesen generált féligegyszerű modulusok nilpotens endomorfizmusainak kettős centralizátorára. Schur tétele szerint egy mátrix kettős centralizátora a mátrix polinomjaiból áll, az értekezésben szereplő nem-kommutatív

általánosítás szerint egy nilpotens endomorfizmus kettős centralizátorába tartozáshoz elegendő, ha a modulus elemeinek "kellően nagy" részén viselkedik úgy, mint a nilpotens endomorfizmus egy (rögzített, azaz csak a centralizáló endomorfizmustól függő) polinomja. A bizonyításban kulcsszerepet játszik a fejezetet indító érdekes eredmény, amely egy nilpotens endomorfizmus centralizátorát mint az alapgyűrű feletti egyváltozós polinomokból álló mátrixalgebrák bizonyos részalgebrájának homomorf képét állítja elő. Ennek az előállításnak további érdekes következményei is terítékre kerülnek, úgymint a centralizátor struktúrájának meglehetősen pontos leírása és egy szép észrevétel, mely szerint az alapgyűrű feletti alkalmas teljes blokk-felsőháromszög-mátrixalgebra előáll, mint a centralizátor faktora egy nilpotens ideál szerint. Ez utóbbiból következtetéseket lehet levonni a centralizátor polinomazonosságaira

A fejezetben szerepel még több érdekes, a zéró-centralizátorra (azaz a két-oldali anulátorra) vonatkozó analóg eredmény. A szerző megmutatja, hogy egy tetszőleges endomorfizmusnak a zéró-centralizátorát az endomorfizmus egyfajta Fitting-felbontás szerinti "nilpotens részének" a zéró-centralizátora határozza meg, így az érdemi munka elvégezhető a nilpotens endomorfizmusok esetének vizsgálatával. Kiemelném a (körültekintően értelmezendő) kettős zéró-centralizátor leírása szép, könnyen emészthető leírását.

Az értekezés igen gondosan, gördülékeny stílusban, kiváló nyelvezettel megírt munka. Az érvelések teljesen világosak. Kiemelném, hogy a szerző szemmel láthatóan különös gondot fordított a szerkesztésre, a különböző részek egymáshoz illesztésére. Így aztán egy messzemenően logikus felépítésű, szép ívű értekezést sikerült megalkotnia.

A dolgozatot olvasva úgy látom, hogy a szerző matematikájában az igen fegyelmezett, logikus gondolkodás, az akár nagyon bonyolult konstrukciókban való eligazodni tudás, kreativitással párosuló absztrakciós képesség mellett az a különleges, hogy keresi és sokszor sikeresen ragadja meg azokat a mélyebb összetevőket, amelyek a különféle matematikai fogalmakat, konstrukciókat és bizonyításokat működtetik.

Szigeti Jenőnek az értekezés alapját képező munkái közül kiemelkedőnek tartom az Euler-féle azonosságok felfedezését, amellyel jelentősen hozzájárult a polinomazonosságok elméletéhez, továbbá a Lie-nilpotens algebrák általa kidolgozott determináns-elméletét, mellyel a determináns nem-kommutatív gyűrűk feletti kiterjesztésére történő próbálkozások körét egy különleges ággal gazdagította. Ezek mellett értékes új eredménynek ismerem el a doktori mű összes tézisét. **Javaslom a disszertáció nyilvános vitára bocsátását és határozottan támogatom a doktori cím odaítélését.**

Kérdések

- Mi vezetett a Lie-nilpotens determinánselméletben az általam a kulcsfontosságúként említett meglátásra?
- Tud-e a jelölt egy egyszerű példát mutatni arra, amikor egy ferdetest feletti nilpotens endomorfizmus kettős centralizátora nem polinomja az endomorfizmusnak?
- Ha jól látom, hogy a közelmúltban sikerült igazolni az adott lépésben Lie-nilpotens mátrixalgebra dimenziójára a sejtett felső korlátot. Mi alapozta meg a sejtést?