

Opponensi vélemény

Szigeti Jenő: Identities, determinants and centralizers in matrix algebras

című MTA doktori értekezéséről

Szigeti Jenő értekezésében mátrixalgebrákkal kapcsolatos eredményeiből mutat be egy válogatást. A bíráló abban a szerencsés helyzetben van, hogy a téma fontosságát nem szükséges ecsetelnie, hiszen az jószerint minden matematikus számára nyilvánvaló.

Az értekezés I. fejezete mátrixalgebrák Euler-azonosságairól szól. Amitsur és Levitzki nevezetes tétele a kommutatív gyűrűk feletti teljes mátrixalgebrák minimális standard azonosságát adja meg; ezzel ekvivalens Swan egy gráfelméleti tétele. Az Amitsur–Levitzki-tétel ezen Swan-féle bizonyításának jelentős általánosításával adódik a fejezet fő eredménye, az 1.3.1.Tétel. Itt az alapvető észrevétel az, hogy a Swannál is szereplő Euler-pályák segítségével nemcsak a standard azonosság adható meg; többszörös és hurokéleket is tartalmazó irányított gráfok Euler-pályáihoz tartozó monomok előjeles összegeiként kapott polinomok eltűnésével igen sok azonosság definiálható – ezek az Euler-azonosságok. A tétel azt mondja ki, hogy adott Euler-gráf esetén elég nagy m -re a gráfhoz tartozó Euler-azonosság teljesül az $m \times m$ -es mátrixokra. Ez olyan átütő eredmény, amelynek a jelentőségét még nem tudjuk felmérni. A standard polinom a legegyszerűbb Euler-polinom, így az Amitsur–Levitzki-tétel az 1.3.1.Tétel legegyszerűbb speciális esete. A Chang és Giambruno–Sehgal által bizonyított dupla Capelli-azonosság is egyszerű következményként adódik (1.3.3.Megjegyzés). Tudomásom szerint nem ismeretes olyan, mátrixalgebrákban teljesülő azonosság, amely ne lenne levezethető Euler-azonosságokból. 2×2 -es mátrixokra ilyen azonosság nem létezik – ez Domokos Mátyás eredménye. Ellenkező irányban viszont szintén Domokos konstruált 3×3 -as mátrixokra olyan Euler-azonosságokat, amelyek nem vezethetők le korábban ismert azonosságokból.

A fejezetben számos további érdekes eredmény van, például pozitív karakterisztikában az Euler-azonosságok előjelek nélküli változatairól, valamint az involúciós algebrák Euler-féle $*$ -azonosságairól. Ezekre és másokra itt nem térek ki részletesen.

A II. fejezet egy Lie-nilpotens determinánselmélet kezdetének tekinthető, jelentős és mély eredményekkel. A Lie-nilpotens gyűrűk a kommutatív gyűrűknek természetes általánosításai, ennek ellenére korábban senki sem próbálta a determinánselméletet ebben az irányban kiterjeszteni. A szerző munkássága ezen a téren teljesen újszerű. Először bevezeti egy tetszőleges gyűrű feletti $n \times n$ -es mátrix szimmetrikus adjungáltját. A hagyományos adjungált nem kommutatív alapgyűrű esetén csak úgy definiálható, hogy abban egy elemnek a kifejezésében (ez egy bizonyos minor közönséges determinánsa) megadjuk minden szorzatban a tényezők valamilyen sorrendjét. Ezt sokféleképpen lehet megtenni, és egyik választás sem tűnik jobbnak, mint bármely másik. Az alapgondolat az, hogy ne egy kitüntetett sorrendjét vegyük az

összeszorzendő tényezőknek, hanem vegyük az összes sorrendet és a kapott szorzatoknak az összegét (azaz szimmetrizáljuk a hagyományos adjungáltat, amit persze fel kell írni direkt módon, közvetlen képlettel) megfelelő előjelekkel. A szimmetrikus adjungált mátrix egy eleme így elég bonyolult, rengeteg összeadandót tartalmazó kifejezése lesz az eredeti mátrix elemeinek. Egy mátrix baloldali (és jobboldali) adjungált sorozatát olyan rekurzióval lehet értelmezni, amelynél a rekurzió minden lépésében újra alkalmazzuk egy bizonyos szorzatmátrixra a szimmetrikus adjungált képzését. Az így keletkező mátrixsorozat elemei egyre bonyolultabb mátrixok lesznek. Ha az alapgyűrű k -ad rendben Lie-nilpotens, akkor a fenti rekurzív mátrixsorozat k -edik eleme és a vele természetes módon értelmezhető k -edik baloldali determináns a hagyományos determinánselmélethez hasonló elmélethez vezet, ami a k -adrendben Lie-nilpotens Cayley–Hamilton tételt is szolgáltatja skalár együtthatókkal (2.4.5. Tétel – ez a fejezet fő eredménye). Ehhez előkészületként meglehetősen bonyolult számításokra van szükség, kihasználva a k -adrendben Lie-nilpotens gyűrűk bizonyos algebrai tulajdonságait; ezeknek kulcseredménye a 2.3.3. Tétel. Ez azt mondja ki, hogy ha egy k -adrendben Lie-nilpotens gyűrű feletti mátrixot jobbról megszorunk a k -edik jobboldali adjungáltjával, akkor az egységmátrix egy skalárszorosát kapjuk (a szorzó a mátrixunk k -edik jobboldali determinánsa). Ez az eredmény önmagában is meglepő és jelentős.

A $k=2$ eset nagy jelentőségű, mert a T-ideálok Kemer-féle elméletében fontos szerepet játszó végtelen dimenziós Grassmann-algebra másodrendben Lie-nilpotens, és a felette vett $n \times n$ -es mátrixok azonosságai a prím T-ideálok leírásában alapvetőek. 2.5.1. Tételben jelzett módon (a második baloldali karakterisztikus polinomnak a 2.4.5. Tétel szerint megengedett „alkalmas felszorozásával”) egy $2n^2$ fokszámú centrális együtthatókkal rendelkező algebraicitást (ami szintén nevezhető Cayley–Hamilton jellegűnek) és abból közönséges azonosságokat is kapunk. Mivel a hagyományos Cayley–Hamilton tétel a test feletti mátrixok azonosságainak a bizonyításánál alapvető szerepet játszik (és az ún. nyomazonosságok Razmiszlov–Procesi-féle elméletében is), azért az új, másodrendben Lie-nilpotens Cayley–Hamilton azonosság (ami n^2 fokszámú) és annak a 2.5.1. szerinti változata is hasonló jelentőséggel bírhat a Grassmann-algebra feletti mátrixok vizsgálatában. (Sajnos minden további lépés nagyon bonyolult számításokat igényelhet – ez már egy Domokostól származó hivatkozásban is látható.)

Már az elsőrendű baloldali adjungált (ami a szimmetrikussal azonos) is felhasználható Cayley–Hamilton azonosság származtatásához, és itt még a Lie-nilpotencia sem szükséges. Viszont ebben a Cayley–Hamilton azonosságban nem skalár, hanem speciális mátrix együtthatók jelennek meg. Ezt használva a Cayley–Hamilton tételnek a lehető legmesszebb menő, valódi általánosítását kapjuk, tetszőleges gyűrű feletti $n \times n$ -es mátrixokra (2.4.3. Tétel). Ennek az azonosságnak a kiaknázása szintén bonyolultnak tűnik, vélhetően nagyon sok számítással.

A fejezet utolsó két része ferde polinomgyűrűkre és ferdén centralizált mátrixokra vonatkozó eredményeket tartalmaz. Közülük a legérdekesebbnek a 2.7.5. Tétel tűnik, amely azt mondja ki, hogy ha egy nullkarakterisztikájú test felett k -ad rendben Lie-nilpotens algebrán

automorfizmusokkal hat egy n -edrendű csoport, akkor az algebra n^k fokban jobbról egész a csoport fixpontjainak az algebrája fölött.

A III. fejezetben bemutatott eredmények teljesen újszerűek és nagyon meglepőek. Dedekind vette észre és Garrett Birkhoff dolgozta ki később, hogy számos csoportelméleti tétel (például a Jordan–Hölder lánctétel) valójában hálóelméleti tételek. Senki sem gondolta volna, hogy lineáris algebrai eredmények, köztük a Jordan-normálbázis létezése is általánosíthatók hálóelméleti fogalmakkal – ezt teszi itt a szerző. A vizsgált hálók a vektorterek altérhálóinak általánosításaként olyan algebrai hálók, amelyekben teljesül két természetes, az atomokkal kapcsolatos feltétel. A lineáris transzformációk általánosításai olyan teljes egyesítés homomorfizmusok, amelyekre fennáll két alkalmas, távolról sem triviális módon megválasztott feltétel. A teljes egyesítés homomorfizmusok képe és magja természetes módon definiálható, és a szerző megmutatja, hogy az előírt két feltételt teljesítő λ teljes egyesítés homomorfizmusokra érvényes a lineáris transzformációk dimenziótételének az általánosítása (3.1.6.Tétel), ha pedig a hálóban teljesül mindkét láncfeltétel, akkor λ -ra a Fitting-lemma általánosítása is igaz: λ egy alkalmas hatványa magjának és képének egyesítése 1, metszete 0 (3.1.11.Tétel). A fejezet legfontosabb eredménye a 3.2.2.Tétel, amely azt mondja ki, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő nilpotens transzformációknak van Jordan normálbázisuk. Ezt az eredményt alkalmazva a 3.3.1.Tételben megmutatja, hogy féligegyszerű modulusok nilpotens endomorfizmusainak van Jordan normálbázisuk, a 3.3.2.Állítás szerint pedig végesen generált féligegyszerű modulusok esetén ez a Jordan-felbontás a szokásos értelemben egyértelmű. Meg kívánom jegyezni, hogy az értekezés IV. fejezete erősen támaszkodik a 3.3.1.Tételre.

A IV. fejezet modulusok (általában nilpotens) endomorfizmusainak centralizátorát és kétoldali annullátorát vizsgálja. Egy végesen generált, féligegyszerű R -modulus nilpotens endomorfizmusának a centralizátorát bizonyos $R[x]$ feletti mátrixokból álló gyűrű homomorf képeként állítja elő (4.1.4.Tétel). Lokális gyűrű esetében ezen centralizátort teljesen leírja (4.2.4.Tétel).

Egy endomorfizmus kettős centralizátorának a centralizátora centralizátorát nevezzük. Ezek vizsgálata fontos szerepet játszik a centrális egyszerű algebrák elméletében. Schur nevezetes tétele szerint egy mátrix kettős centralizátora a mátrix polinomjaiból áll. A 4.4.4.Következmény ezt viszi át kommutatív lokális gyűrű feletti modulusok nilpotens endomorfizmusaira – az ehhez vezető 4.4.3.Tételt tartom a fejezet legjelentősebb eredményének.

A fejezet utolsó két része a nem-nilpotens esetben a kétoldali annullátor (amely persze speciális centralizátor) alapos vizsgálatát adja. A 4.6.2.Tétel egy végesen generált féligegyszerű modulus tetszőleges endomorfizmusának a bi-annullátorát adja meg – ez a Schur-tétel annullátoros változatának tekinthető, a 4.6.3.Tétel pedig ezt test feletti mátrixokra specializálja.

Szigeti Jenő a disszertációban tárgyalt mindegyik területet számos eredeti ötleten alapuló, meglepő, jelentős és mély eredménnyel gazdagította, általában új fogalmak bevezetésével. A

benne lévő eredmények közül a legjelentősebbeknek az 1.3.1.Tételt, a 2.4.5.Tételt, 3.2.2.Tételt és a 4.4.3.Tételt tartom. Az értekezés nagy gonddal készült, világosan, érthetően van megírva, a szerkezete átgondolt.

Az értekezés valamennyi tézisét új tudományos eredményként fogadom el. A disszertációt nyilvános vitára alkalmasnak tartom, és javaslom a nyilvános vita kitűzését.

Kérdések:

1. Honnan jött a jelöltnak az az ötlete, hogy a Jordan-féle normálalakot hálóelméleti eszközökkel ragadja meg?
2. Ismeretes-e példa valamely ferdetest feletti modulus olyan nilpotens endomorfizmusára, amelynek a kettős centralizátora nem csak az adott endomorfizmus polinomjaiból áll?

Budapest, 2016. október 28.

Márki László
a matematikai tudomány doktora