

Optimális befektetések a várható hasznosságon innen és túl

(Optimal investment: expected utility and beyond)

Az “MTA doktora” címért benyújtott értekezés tézisei

Rásonyi Miklós

Gödöllő, 2015

Bevezetés

Tegyük fel, hogy egy befektető két kockázatos befektetés közül választhat, amelyeken X , illetve Y véletlen összeget nyerhet. Hogyan döntsön?

A legegyszerűbb megoldás összehasonlítani a várható értékeiket, EX -et és EY -t, ez azonban a tapasztalatok szerint nagyon kockázatos döntésekhez vezet. Daniel Bernoulli [4]-ban javasolta, hogy inkább $Eu(X)$ -et és $Eu(Y)$ -t kellene összehasonlítani, ahol $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adott, a befektetőre jellemző függvény. Az u -t *hasznossági függvénynek* szokás nevezni, $Eu(X)$ -et pedig az X várható hasznosságának.

Óriási irodalom foglalkozik az optimális befektetések ilyen megközelítésével, mi csak a klasszikus [12, 22, 3, 13, 19] munkákra utalunk. Általában u -ról felteszik, hogy monoton növekvő (azaz több pénznek nagyobb a hasznossága), illetve hogy konkáv (ezt a befektető kockázatkérülését hozható kapcsolatba). Sajnos ezeket a feltevéseket a valós személyeken végzett kísérletek nem erősítették meg, [1, 10, 21]. Más feltevéseket javasolt például [10, 21], melyek szerint $u(x)$ -nek $x < w$ -re konvexnek kellene lennie, $x \geq w$ -re pedig konkávnak, itt $w \in \mathbb{R}$ a befektető *viszonyítási pontja*.

Egy adott pénzügyi piacon alapvető feladat optimális befektetések vizsgálata. Milyen feltételek mellett léteznek? Hogyan lehet őket kiszámolni? Ebben az értekezésben az első kérdéssel foglalkozunk.

Ha u nem konkáv, a szokványos módszerek (konvex dualitás illetve a Banach-Saks tétel különböző változatai) nem működnek. További nehézségek lépnek fel ha [10, 21]-t követve feltételezzük, hogy a befektetők *torzított valószínűségekkel* dolgoznak. Ilyenkor a dinamikus programozás is csődöt mond.

E disszertációban optimális befektetések létezését látjuk be a szokványostól eltérő feltételek mellett. Nem-konkáv u függvényeket illetve torzított valószínűségeket tekintünk, valamint olyan piacmodelleket vizsgálunk, ahol a likviditási nehézségeket is tekintetbe vesszük.

Az eredmények kimondásánál zárójelben jelzem, hogy az adott eredmény hol található a disszertációban.

Diszkrét idejű piacmodell

Ha $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok (valamely n -re), akkor xy jelöli skaláris szorzatukat, $|x|$ pedig az euklideszi normát. Mindvégig egy rögzített $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn dolgozunk és a tekintett szigma-algebrákról feltesszük, hogy minden P -nulla halmazt tartalmaznak. Rögzítsük a $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ időhorizontot, valamint az $\mathcal{F}_t$, $t = 0, \dots, T$ filtrációt. Alkalmazzuk majd az $x^+ := \max\{x, 0\}$ és $x^- := \max\{-x, 0\}$ jelöléseket $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Rögzítve $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ -t, legyen S_t , $t = 0, \dots, T$ egy d -dimenziós adaptált véletlen folyamat, mely d részvény árát írja le. Feltételezzük, hogy létezik olyan kockázatmentes pénzügyi eszköz, melynek ára mindig 1 ("bankszámla"). Jelölje $\phi_t \in \mathbb{R}^d$, $t = 1, \dots, T$ a befektető pozíciója a t időpontban az adott d részvényben:

ez a folyamat a befektető stratégiája. Feltesszük, hogy ϕ_t mindig jósolható, azaz $\mathcal{F}_{t-1}$ -mérhető. Az összes stratégia halmazát Φ jelöli. Legyen $z \in \mathbb{R}$ a befektető kezdeti tőkéje. Ekkor portfóliójának értéke a t időpontban

$$X_t^{z,\phi} = z + \sum_{j=1}^t \phi_j (S_j - S_{j-1}).$$

Feltesszük, hogy a befektető viselkedését jellemző $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton nem csökkenő és folytonos. Legyen továbbá B egy valós értékű $\mathcal{F}_T$ -mérhető valószínűségi változó: a befektető *viszonyítási pontja*. Ez lehet pl. valamely más befektető portfóliójának vagy egy tőzsdeindexnek az értéke T -ben.

A befektető célja, hogy olyan ϕ^* stratégiát találjon, melyre

$$Eu(X_T^{z,\phi^*} - B) = \bar{u}(z) := \sup_{\phi \in \Phi(u,z)} Eu(X_T^{z,\phi} - B) \quad (1)$$

ahol $\Phi(u, z) := \{\phi \in \Phi : Eu^-(X_T^{z,\phi} - B) < \infty\}$. Az (1) probléma *jól kitűzött*, ha $\bar{u}(z) < \infty$.

Most az elméleti közgazdaságtan egyik központi fogalmáról kell szót ejtenünk, az arbitrázsról (azaz kockázatmentes haszonnál). Hatékonyan működő piacon ilyen nem létezhet, ezért természetes bevezetni az alábbi (NA) feltételt.

Definíció. A piacon teljesül az arbitrázsmentesség feltétele (ennek jelölése (NA)) ha bármely $\phi \in \Phi$ -re, $X_T^{0,\phi} \geq 0$ m.m.-ből következik, hogy $X_T^{0,\phi} = 0$ m.m.

Az általunk tekintett (1) problémában (NA) teljesülése szükséges az optimális stratégiák létezéséhez:

A. Állítás. (Proposition 1.5) *Ha u szigorúan monoton növekvő és létezik ϕ^* mely eleget tesz (1)-nek, akkor (NA) teljesül.* $\square$

Szükségünk lesz az (NA) feltételnek egyfajta "kvantitatív" jellemzésére. Ehhez jelölje $D_t(\omega)$ a $P(\Delta S_t \in \cdot | \mathcal{F}_{t-1})(\omega)$ mérték tartójának affin burkát.

B. Állítás. (Proposition 1.6) *(NA) pontosan akkor teljesül, ha $t = 0, \dots, T-1$ -re léteznek olyan $\mathcal{F}_t$ -mérhető $\nu_t, \kappa_t > 0$ valószínűségi változók, melyekre igaz, hogy*

$$P(\xi \Delta S_{t+1} \leq -\nu_t | \xi | \mathcal{F}_t) \geq \kappa_t$$

minden $\mathcal{F}_t$ -mérhető ξ valószínűségi változóra, melyre $\xi(\omega) \in D(\omega)$ m.m. $\square$

Optimális stratégiák létezése: diszkrét idejű piacok

A jelen értekezés fő eredményei optimális befektetések létezését igazolják számos modellosztályban és különböző befektetői kritériumok szerint. Ezen eredmények – a kapcsolódó ellenpéldákkal együtt – rávilágítanak arra, hogy milyen paraméterek vezetnek értelmes feladatokhoz, melyeket aztán a gyakorlatban használni lehet.

Elsőként a várható hasznosságot maximalizáljuk felülről korlátos u esetében.

C. Tétel.(Theorem 2.1) *Tegyük fel, hogy (NA) teljesül, u pedig felülről korlátos és fennáll*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty.$$

Tegyük fel továbbá, hogy

$$Eu(z - B) > -\infty \text{ minden } z \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

Akkor minden } z \in \mathbb{R} \text{ esetén létezik } \phi^ = \phi^*(z) \in \Phi \text{ melyre (1) teljesül.}* $\square$

Most megnézzük, mi történik, ha u nem korlátos felülről.

Példa. Legyen

$$u(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -|x|^\beta, & x < 0, \end{cases}$$

ahol $\alpha, \beta > 0$. Tegyük fel, hogy $S_0 = 0$, $\Delta S_1 = \pm 1$ p illetve $1-p$ valószínűséggel, valamely $0 < p < 1$ -re. Ekkor

$$Eu(n\Delta S_1) = pn^\alpha - (1-p)n^\beta.$$

Ha $\alpha \geq \beta$ és $p > 1/2$ akkor $E(u(n\Delta S_1)) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Tehát ahhoz, hogy az optimális befektetési probléma jól kitűzött legyen, szükséges, hogy $\alpha < \beta$ fennálljon. Alább látni fogjuk, hogy ez elégséges is, alkalmas feltételek mellett.

Az alábbi tulajdonságokat követeljük meg u -ról:

1. Feltevés. Tegyük fel, hogy létezik $c \geq 0$, $\underline{x} > 0$, $\bar{x} > 0$, $0 < \alpha < \beta$ melyekre minden $\lambda \geq 1$ esetén fennáll

$$\begin{aligned} u(\lambda x) &\leq \lambda^\alpha u(x) + c \text{ ha } x \geq \bar{x}, \\ u(\lambda x) &\leq \lambda^\beta u(x) \text{ ha } x \leq -\underline{x}, \end{aligned}$$

valamint teljesül

$$u(-\underline{x}) < 0, u(\bar{x}) \geq 0.$$

Jelölje $\mathcal{W}$ azon véges dimenziós Y valószínűségi változók halmazát, melyekre $E|Y|^p < \infty$ teljesül minden $p > 0$ -ra.

D. Tétel.(Corollary 2.20) *Tegyük fel, hogy*

$$u(x) \geq -m(|x|^p + 1), \quad x \in \mathbb{R},$$

valamely } m, p > 0\text{-re. Legyen } B \in \mathcal{W} \text{ alulról korlátos, } S_t - S_{t-1} \in \mathcal{W}, 1 \leq t \leq T \text{ és (NA) teljesüljön úgy, hogy az A. Állításban szereplő mennyiségekre } 1/\nu_t, 1/\kappa_t \in \mathcal{W}, 0 \leq t \leq T-1. \text{ Akkor létezik olyan } \phi^ \in \Phi(z), \text{ mely eleget tesz (1)-nek, valamint } \phi_t^* \in \mathcal{W}, 1 \leq t \leq T. \square*

E. Tétel.(Corollary 2.22) *Az 1. Feltevés mellett legyen továbbá } S_t, 1 \leq t \leq T \text{ korlátos folyamat. Teljesüljön (NA) úgy, hogy az A. Állításban szereplő } \nu_t, \kappa_t*

konstansok, $1 \leq t \leq T-1$. Akkor létezik olyan $\phi^* \in \Phi(z)$, mely eleget tesz (1)-nek, valamint ϕ_t^* , $1 \leq t \leq T$ korlátos folyamat. $\square$

Megemlíjtük az előbbi két tétel egy érdekes következményét.

F. Következmény.(Corollary 2.47) Legyen $S_t - S_{t-1} \in \mathcal{W}$, $1 \leq t \leq T$ és (NA) teljesüljön úgy, hogy az A . Állításban szereplő mennyiségekre $1/\nu_t$, $1/\kappa_t \in \mathcal{W}$, $0 \leq t \leq T-1$. Akkor létezik olyan $Q_1 \sim P$ mérték melyre dQ_1/dP korlátos, $dP/dQ_1 \in \mathcal{W}$ és S egy Q_1 -martingál. Létezik olyan $Q_2 \sim P$ is, melyre dP/dQ_2 korlátos, $dQ_2/dP \in \mathcal{W}$ és S egy Q_2 -martingál. Ha pedig S_t , $1 \leq t \leq T$ korlátos folyamat és (NA) teljesül ν_t, κ_t konstansokkal, $1 \leq t \leq T-1$, akkor van olyan $Q_3 \sim P$, melyre $dQ_3/dP, dP/dQ_3$ egyaránt korlátosak és S egy Q_3 -martingál. $\square$

Most [10, 21]-t követve olyan befektetőket vizsgálunk, akik torzított valószínűségekkel számolnak. E célból bevezetjük az $u_+, u_- : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ és $w_+, w_- : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvényeket, melyeket folytonosnak tételezünk fel, valamint megköveteljük, hogy $u_\pm(0) = 0$, $w_\pm(0) = 0$ és $w_\pm(1) = 1$. Ebben a modellben a befektető külön tekint nyereségére illetve veszteségére: $u_+(x)$ kifejezi az x nyereség által keltett elégedettséget, $u_-(x)$ pedig az x veszteség által keltett csalódást. Természetesen lehetséges lenne az $u_\pm$ függvényekből egy u hasznossági függvényt gyúrni a

$$u(x) := u_+(x), x \geq 0, u(x) := -u_-(-x), x < 0 \quad (2)$$

definíciókkal, de célszerűbb $u_\pm$ -al dolgozni.

Minden $\theta \in \Phi$ -re definiáljuk a

$$V_+(\theta, z) := \int_0^\infty w_+ \left(P \left(u_+ \left(\left[X_T^{\theta, z} - B \right]^+ \right) \geq y \right) \right) dy, \quad (3)$$

és

$$V_-(\theta, z) := \int_0^\infty w_- \left(P \left(u_- \left(\left[X_T^{\theta, z} - B \right]^- \right) \geq y \right) \right) dy \quad (4)$$

mennyiségeket. Jelölje $\mathcal{A}(z)$ azon θ -k halmazát, melyekre $V_-(\theta, z) < \infty$. Legyen

$$V(\theta, z) := V_+(\theta, z) - V_-(\theta, z),$$

ha $\theta \in \mathcal{A}(z)$. Vegyük észre, hogy ha $w_\pm(x) = x$, azaz nincsen torzítás, akkor az (2)-ban szereplő u függvénnyel $\mathcal{A}(z) = \Phi(u, z)$ és $V(\theta, z) = Eu(X_T^{z, \theta} - B)$.

Célunk olyan $\theta^* \in \mathcal{A}(z)$ -t találni, melyre

$$V(\theta^*, z) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}(z)} V(\theta, z). \quad (5)$$

2. Feltevés Legyen $\mathcal{F}_t$ a $\sigma(Z_1, \dots, Z_t)$ teljessé tétele (P szerint), $t = 1, \dots, T$, ahol Z_i , $i = 1, \dots, T$ független, $\mathbb{R}^N$ -értékű valószínűségi változó valamely $N \in \mathbb{N}$ -re. $Y_0 \in \mathbb{R}^L$ konstans, $Y_1 = f_1(Z_1)$, $Y_t = f_t(Y_1, \dots, Y_{t-1}, Z_t)$, $t = 2, \dots, T$

alkalmas $f_t : \mathbb{R}^{N+(t-1)L} \rightarrow \mathbb{R}^L$ folytonos függvényekkel, valamely $L \in \mathbb{N}$ -re. Tegyük fel továbbá, hogy $B = g(Y_1, \dots, Y_T)$ valamely folytonos g -re és az árfolyamatra $S_t^i = Y_t^i$, $i = 1, \dots, d$ teljesül $t = 0, \dots, T$ -re, ahol $1 \leq d \leq L$. Továbbá minden $t = 1, \dots, T$ -re létezik $\mathcal{F}_t$ -mérhető egyenletes eloszlású U_t ami független $\mathcal{F}_{t-1} \vee \sigma(Y_t)$ -től.

A fenti feltevésben szereplő Y folyamat az adott gazdaságot leíró tényezőket modellezi. Az első d koordinátája adja meg a tekintett részvények árait, a többi koordináta pedig esetleges más tényezőket (infláció, munkanélküliség). Megjegyezzük, hogy a 2. Feltevésre azért van szükség, mert biztosít egy bizonyos zártsági tulajdonságot a $Law(X_T^{z,\phi})$, $\phi \in \Phi$ halmazra (a precíz megfogalmazásért lásd az értekezés 3.3 szakaszát, ahonnan az is kiderül, hogy ez a zártsági tulajdonság könnyen sérülhet).

Elsőként most is azt az esetet nézzük, amikor u_+ felülről korlátos.

G. Tétel. (Theorem 3.4) *Legyen u_+ felülről korlátos, $u_-(\infty) = \infty$, u_- , w_- monoton növekvő és $w_-(x) > 0$, $x > 0$, valamint tegyük fel, hogy*

$$V_-(0, z) < \infty. \quad (6)$$

Ha (NA) és a 2. Feltevés igazak, akkor

$$V(\theta^*, z) = \sup_{\theta \in \Phi} V(\theta, z).$$

valamely $\theta^ = \theta^*(z) \in \Phi$ -ra.* □

Láthatóan nem követeltük meg $u_{\pm}$ monotonitását vagy konvex/konkavitását. Ezért a nagyfokú általánosságért azzal fizetünk, hogy a piacmodellről kell erős feltevéssel élnünk (2. Feltevés).

Most arra az esetre térünk át, ha u_+ nem feltétlenül felülről korlátos.

3. Feltevés Legyen

$$\begin{aligned} u_+(x) &\leq k_+(x^\alpha + 1), \\ k_-(x^\beta - 1) &\leq u_-(x), \\ w_+(p) &\leq g_+ p^\gamma, \\ w_-(p) &\geq g_- p^\delta, \end{aligned}$$

valamely $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k_{\pm}, g_{\pm} > 0$ konstansokkal. Tegyük fel, hogy az alábbi három feltevés (legalább) egyike fennáll:

$$\gamma, \delta \leq 1, \quad \frac{\alpha}{\gamma} < \beta$$

vagy

$$\gamma > 1, \delta \leq 1, \quad \alpha < \beta,$$

vagy

$$\alpha < \beta, \quad \frac{\alpha}{\gamma} < 1 < \frac{\beta}{\delta}, \quad u_-, w_- \text{ monoton növő.}$$

Fő eredményünk a következő:

H. Tétel.(Theorems 3.16, 4.16) *Legyen érvényben a 2. és 3. Feltevés. Legyen $B \in \mathcal{W}$ alulról korlátos, $V_-(z - B) < \infty$ minden $z \in \mathbb{R}$ -re, $S_t - S_{t-1} \in \mathcal{W}$, $1 \leq t \leq T$ és (NA) teljesüljön úgy, hogy az A. Állításban szereplő mennyiségekre $1/\nu_t, 1/\kappa_t \in \mathcal{W}$, $0 \leq t \leq T - 1$. Ekkor minden $z \in \mathbb{R}$ -re*

$$\sup_{\theta \in \mathcal{A}(z)} V(\theta, z) < \infty, \quad (7)$$

és létezik $\theta^* = \theta^*(z) \in \mathcal{A}(z)$ amelyre (5) teljesül. $\square$

Megjegyezzük, hogy $\alpha < \beta$ és $\alpha/\gamma \leq \beta/\delta$ szükséges feltételei (7)-nak, lásd az értekezés 3.4 szakaszát. A G. és H. Tételek alkalmazhatók például bizonyos nem teljes diffúziós piacmodellek diszkretizáltjaira, lásd az értekezés 3.6 szakaszát.

Optimális stratégiák létezése: folytonos idejű piacok

Mostantól feltételezzük, hogy a kereskedés folytonosan történik a $[0, T]$ intervallumon. Legyen $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$ egy jobbról folytonos és P -teljes filtráció. Legyen az S_t , $t \in [0, T]$ árfolyamat $\mathbb{R}^d$ -értékű és adaptált, melynek majdnem minden trajektóriája jobbról folytonos és baloldali határértékkel rendelkezik. Legyen φ_t , $t \in [0, T]$ szintén $\mathbb{R}^d$ -értékű, jósolható folyamat mely leírja a d részvény portfólióban lévő mennyiségét a t időpontban. Feltesszük, hogy S szemimartingál, φ pedig S -integrálható.

A portfólió értéke a t időpontban

$$X_t^{z, \varphi} := z + \int_0^t \varphi_u dS_u, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

ahol z a kezdeti tőke.

Sajnos nem dolgozhatunk az összes S -integrálható stratégiával, mert akkor arbitrázs lépne fel. Ezért egy némileg önkényes, de jól működő osztályt jelölünk ki. Feltesszük, hogy van olyan $Q \sim P$, amelyre nézve S martingál. Egy piacot teljesnek mondunk, ha csak egyetlen ilyen Q létezik. Rögzítünk egy ilyen Q -t és legyen

$$\Phi_a := \Phi_a(Q) := \{\varphi : X^{0, \varphi} \text{ } Q\text{-martingál}\}.$$

Teljes piacokon a Φ_a osztály természetes választás és minden $\mathcal{F}_T$ -mérhető $H \in L^1(Q)$ esetén van olyan $z \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \Phi_a$ melyre $H = X_T^{z, \varphi}$ (azaz H előállítható az adott részvényekkel). Mint az előző szakaszban, most is rögzítjük $u_{\pm}$ -et és $w_{\pm}$ -et, valamint egy $\mathcal{F}_T$ -mérhető $\mathbb{R}$ -értékű valószínűségi változót, B -t.

4. Feltevés. Legyen $dQ/dP, dP/dQ \in \mathcal{W}$. Legyen a dQ/dP valószínűségi változó Q alatti eloszlásfüggvénye folytonos, $B \in L^1(Q)$. Végül létezzen egyenletes eloszlású (P alatt), $\mathcal{F}_T$ -mérhető U , mely független dQ/dP -től (P alatt).

5. Feltevés Ha $X = B$ vagy $X \in L^1(Q)$ mérhető $\sigma(dQ/dP, U_*)$ -ra, akkor létezik olyan $\varphi \in \Phi_a$, hogy $X = X_T^{z, \varphi}$.

Jelölje, csakúgy, mint (3)-ban és (4)-ben,

$$V_+(\varphi, z) := \int_0^\infty w_+ \left(P \left(u_+ \left([X_T^{\varphi, z} - B]^+ \right) \geq y \right) \right) dy,$$

és

$$V_-(\varphi, z) := \int_0^\infty w_- \left(P \left(u_- \left([X_T^{\varphi, z} - B]^- \right) \geq y \right) \right) dy.$$

Legyen most

$$\mathcal{A}(z) := \{\phi \in \Phi_a : V_-(\phi, z) < \infty\}$$

és definiáljuk minden $\varphi \in \mathcal{A}(z)$ -re az alábbi mennyiséget:

$$V(\varphi, z) := V_+(\varphi, z) - V_-(\varphi, z).$$

Arra keresünk feltételeket, hogy

$$\sup_{\phi \in \mathcal{A}(z)} V(\phi, z) < \infty \quad (9)$$

legyen, illetve, hogy

$$\sup_{\phi \in \mathcal{A}(z)} V(\phi, z) = V(\varphi^*, z) \quad (10)$$

teljesüljön valamely $\varphi^* \in \mathcal{A}(z)$ -re.

I. Állítás.(Propositions 4.5, 4.8, 4.9) *A 4. Feltevés mellett, ha (9) teljesül, akkor szükségképpen*

$$\alpha \leq \beta \quad \text{és} \quad \frac{\alpha}{\gamma} \leq 1 \leq \frac{\beta}{\gamma}$$

igaz. □

J. Tétel.(Theorems 4.15, 4.18) *Teljesüljön a 4. Feltevés, valamint $V_-(0, z) < \infty$ minden $z \in \mathbb{R}$ -re. Ha*

$$\alpha < \beta \quad \text{és} \quad \frac{\alpha}{\gamma} < 1 < \frac{\beta}{\gamma}, \quad (11)$$

akkor (9) igaz. Ha az 5. Feltevés is fennáll, akkor létezik $\varphi^ = \varphi^*(z)$, melyre (10) igaz.* □

A 4. és 5. feltevések teljesülnek a jól ismert Black-Scholes modellben.

Piacok likviditási megkötésekkel

Az előző szakasz modelljében maradunk, azzal a különbséggel, hogy most tekintetbe vesszük a piacon jelen lévő likviditási nehézségeket: nagy mennyiségű részvényt csak kedvezőtlenebb áron lehet adni-venni. Nagyon sok, a miénkhez hasonló modellről írtak, lásd például [11, 5, 2, 20, 18, 8], mégis az alábbi K. Tétel az első általános eredmény optimális stratégiák egzisztenciájáról.

Jelölje $\mathcal{O}$ az opcionális szigma-algebrát (melyet az adaptált, jobbról folytonos folyamatok generálnak $\Omega \times \mathbb{R}$ -en).

A stratégiák alábbi osztályával dolgozunk majd:

$$\mathcal{A} := \left\{ \phi : \phi \text{ } \mathbb{R}^d\text{-értékű, } \mathcal{O}\text{-mérhető folyamat, } \int_0^T |\phi_u| du < \infty \text{ m.m.} \right\},$$

itt ϕ_t^i a kereskedés sebességét adja meg az i . részvényre a t időpontban, mely negatív, ha a befektető elad és pozitív, ha vásárol. Pozícióink a d részvényben a t időpontban ekkor $\varphi_t = \varphi_0 + \int_0^t \phi_u du$ (az integrál koordinátánként értendő).

Tegyük fel, hogy 0 kezdőtőkével indulunk és $\phi \in \mathcal{A}$. Ekkor portfólióink értékét (8) adja meg, így a bankszámlán lévő pénz mennyisége

$$\int_0^T \varphi_t dS_t - \varphi_T S_T = - \int_0^T \phi_t S_t dt, \quad (12)$$

feltéve, hogy a kezdeti pozíciónk $\varphi_0 = 0$ a részvényekben. Ez utóbbi kifejezés azonban akkor is értelmezhető, ha S nem szemimartingál.

Ezen felbátorodva feltesszük, hogy (12) adja meg pozícióinkat a kockázatmentes termékben (= bankszámla), ha nincsenek likviditási nehézségek. Ez utóbbiakat viszont egy G függvénnyel jellemezzük.

6. Feltézés. Legyen $G : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy $\mathcal{O} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mérhető függvény, melyre $G_t(\cdot)$ konvex és $G_t(x) \geq G_t(0)$ minden ω, t, x -re. Valamely $\alpha > 1$ -re létezik olyan opcionális $H_t, t \in [0, T]$ folyamat melyre $\inf_{t \in [0, T]} H_t > 0$ valószínűségi változó és

$$G_t(x) \geq H_t |x|^\alpha, \quad \text{minden } \omega, t, x\text{-re,}$$

$$\int_0^T \left(\sup_{|x| \leq N} G_t(x) \right) dt < \infty \quad \text{m.m. minden } N > 0\text{-ra.}$$

Tipikus választás $d = 1$ esetén $G_t(x) := H_t x^2$ valamely alkalmas H folyamattal. Defináljuk G Fenchel-Legendre konjugáltját is:

$$G_t^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (xy - G_t(x)), \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

Legyen $z \in \mathbb{R}^{d+1}$ a kezdeti pozíciónk: z^0 a pénz a bankszámlán, z^i az i . részvény mennyisége, $i = 1, \dots, d$. Tekintetbe véve a likviditási problémákat,

feltesszük, hogy pozícióinkat $\phi \in \mathcal{A}$ esetén a bankszámlán

$$X_t^0(z, \phi) := z^0 - \int_0^t \phi_u S_u du - \int_0^t G_u(\phi_u) du,$$

az i . részvényben pedig

$$X_t^i(z, \phi) := \varphi_t^i = z^i + \int_0^t \phi_u^i du \quad 1 \leq i \leq d$$

adja meg. Ha $c \in \mathbb{R}$, akkor jelölje $\check{c}$ azt a $(d+1)$ -dimenziós vektort, melynek 0. koordinátája c , a többi pedig 0.

K. Tétel(Theorem 5.12) *A 6. Feltevés mellett legyen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konkáv és nem csökkenő, melyre $Eu(c - B + W) < \infty$ teljesül, ahol $W = \int_0^T G_t^*(-S_t)dt$. Létezik olyan $\phi^* \in \mathcal{A}'(u, c)$ melyre*

$$Eu(X_T^0(\check{c}, \phi^*) - B) = \sup_{\phi \in \mathcal{A}'(u, c)} Eu(X_T^0(\check{c}, \phi) - B) < \infty,$$

feltéve, hogy

$$\mathcal{A}'(u, c) := \{\phi \in \mathcal{A} : X_T^i(\check{c}, \phi) = 0, 1 \leq i \leq d, Eu^-(X_T^0(\check{c}, \phi) - B) < \infty\}$$

nem üres. □

A fenti tétel alkalmazható például abban az esetben, amikor u , B felülről korlátosak és $G_t(0) \equiv 0$.

A felsorolt eredmények forrásai

A C. és G. Tételek [14]-ből származnak, a D. és E. Tételek [7]-ből, a H. Tétel pedig [6]-ból és [16]-ból. Az A. és B. Állítások, valamint az F. Következmény ismertek [17]-ből. Végül az I. Állítás és a J. Tétel forrása [15], a K. Tétel pedig [9]. Megjegyzem, hogy az értekezésben helyenként az eredeti cikkeknel kissé erősebb vagy gyengébb eredményeket közöltem és bizonyítottam.

Hivatkozások

- [1] M. Allais. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica*, 21:503–546, 1953.
- [2] R. Almgren and N. Chriss. Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, 3:5–40, 2001.
- [3] K. J. Arrow and G. Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22:265–290, 1954.

- [4] D. Bernoulli. Theoriae Novae de Mensura Sortis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Volume V.*, 1738. Translated by L. Sommer as “Exposition of a new theory on the measurement of risk”, *Econometrica*, 1954, 22:23–36.
- [5] D. Bertsimas and A. Lo. Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets*, 1:1–50, 1998.
- [6] L. Carassus and M. Rásonyi. On Optimal Investment for a Behavioural Investor in Multiperiod Incomplete Market Models. *Math. Finance*, 25:115–153, 2015.
- [7] L. Carassus and M. Rásonyi. Maximization for non-concave utility functions in discrete-time financial market models. *Published online by Math. Oper. Res.*, 2015.
<http://dx.doi.org/10.1287/moor.2015.0720>
- [8] N. Garleanu and L. Pedersen. Dynamic trading with predictable returns and transaction costs. *Journal of Finance*, 68:2309–2340, 2013.
- [9] P. Guasoni and M. Rásonyi. Hedging, arbitrage and optimality under super-linear friction. *Ann. Appl. Probab.*, 25:2066–2095, 2015.
- [10] D. Kahneman and A. Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47:263–291, 1979.
- [11] A. Kyle. Continuous auctions and insider trading. *Econometrica*, 29:1315–1335, 1985.
- [12] K. Menger. Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 5:459–485, 1934.
- [13] R. C. Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time model. *Rev. Econom. Statist.*, 51:247–257, 1969.
- [14] M. Rásonyi. Optimal investment with nonconcave utilities in discrete-time markets. *SIAM J. Finan. Math.*, 6:517–529, 2015.
- [15] M. Rásonyi, A. M. Rodrigues. Optimal portfolio choice for a behavioural investor in continuous time. *Ann. Finance*, 9:291–318, 2013.
- [16] M. Rásonyi and J. G. Rodríguez-Villarreal. Optimal investment under behavioural criteria – a dual approach. In: *Advances in Mathematics of Finance*, eds. A. Palczewski and L. Stettner, Banach Center Publications, 104:167–180, 2015.
- [17] M. Rásonyi and L. Stettner. On the utility maximization problem in discrete-time financial market models. *Ann. Appl. Probab.*, 15:1367–1395, 2005.

- [18] L. C. G. Rogers and S. Singh. The cost of illiquidity and its effects on hedging. *Math. Finance*, 20:597–615, 2010.
- [19] P. A. Samuelson. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Rev. Econom. Statist.*, 51:239–246, 1969.
- [20] A. Schied and T. Schöneborn. Risk aversion and the dynamics of optimal liquidation strategies in illiquid markets. *Finance Stoch.*, 13:181–204, 2009.
- [21] A. Tversky and D. Kahneman. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *J. Risk & Uncertainty*, 5:297–323, 1992.
- [22] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.