Válasz Michaletzky György opponensi véleményére

Köszönöm Michaletzky Györgynek támogató véleményét, a disszertáció figyelmes és elmélyült olvasását, valamint gondolatébresztő kérdéseit. Ez utóbbiakat az alábbiakban egyenként, részletesen tárgyalom.

1.kérdés: *A 2.18 illetve 2.49 Tételben mennyire szükséges a B referenciafüggvény korlátossága ? (Illetve általánosabban, hogy B szub-replikálható legyen önfinanszírozó portfólióval ?)*

Bizonyos u függvényekre a nem korlátos B esete is tárgyalható. Konkrétan, legyen $u(x) = x^\alpha$, $x \geq 0$ és $u(x) = x^\beta$, $x < 0$, ahol $0 < \alpha < \beta < 1$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor

$$|u(x) - u(y)| \leq 2 + 2|x - y|^\beta \tag{e1}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$-re.

Legyen érvényben (28), a 2.19 Feltevés, valamint tegyük fel, hogy $B \in \mathcal{W}$ (viszont nem kell sem alulról, sem felülről korlátosnak lennie). Ezen feltételek mellett a 2.20 Következmény állítása érvényben marad.

Fáradságos munkával ellenőrizhető, hogy a 2.20 Következmény bizonyítása alkalmazható. A leglényegesebb változtatás az, hogy a (70) és (71) egyenlőtlenségeket konstans C helyett véletlen, $\mathcal{F}_t$-mérhető $\bar{C}_t \in \mathcal{W}$ konstansokra kell belátni, $0 \leq t \leq T$ esetén (feltehető, hogy $g = 0$), azaz

$$U_t(\lambda x) \leq \lambda^\alpha U_t(x) + \lambda^\alpha \bar{C}_t,\ U_t(\lambda x) \leq \lambda^\beta U_t(x) + \lambda^\beta \bar{C}_t \tag{e2}$$

igazolandó minden t-re, x-re és $\lambda \geq 1$-re.

Ez utóbbit megmutatjuk $t = T$-re, amikor $U_T(x) = u(x - B)$. A 2.40 Állítást és (e1)-et felhasználva,

$$\begin{aligned} U_T(\lambda x) &= \\ u(\lambda x - B) \leq u(\lambda x) + 2|B|^\beta + 2 &\leq \\ \lambda^\alpha u(x) + C\lambda^\alpha + 2|B|^\beta + 2 &\leq \\ \lambda^\alpha U_T(x) + C\lambda^\alpha + (\lambda^\alpha + 1)[2|B|^\beta + 2] &\leq \\ \lambda^\alpha U_T(x) + \lambda^\alpha[C + 4|B|^\beta + 4]. & \end{aligned}$$

Itt $\bar{C}_T := C + 4|B|^\beta + 4 \in \mathcal{W}$ véletlen konstans. Ugyanez a gondolatmenet működik λ^α helyett λ^β-ra is, tehát (e2) adódik $t = T$-re.

Vegyük észre, hogy $0 \leq t \leq T - 1$-re a disszertációban szereplő indukciós lépés már alkalmazható (27. oldal 8. sor), tehát (e2) adódik minden t-re, $\mathcal{F}_t$-mérhető $\bar{C}_t := E[\bar{C}_{t+1}|\mathcal{F}_t] \in \mathcal{W}$ véletlen konstansokkal.

A másik lényeges változtatás az egy lépéses esetben szükséges: azt kell ellenőrizni, hogy $V = U_t$, $\mathcal{H} := \mathcal{F}_{t-1}$ választásnál a 2.31 Lemma érvényben marad úgy, hogy (38)-ban és (44)-ben C helyett $E[\bar{C}_t|\mathcal{H}]$-t kell írni. A részletek hosszadalmasak, de nem igényelnek új ötletet. Módosítást igényel a 29. oldal tetején szereplő érvelés is.

Konkáv u esetén a fenti módszer nem működik, hiszen (e1) nem áll fenn. A konkavitást kihasználva, más ötletekkel lehetséges nem-korlátos B tárgyalása, folytonos idejű modellekben is, lásd a [68] dolgozatot illetve az "On utility maximization without passing by the dual problem" c. kéziratom 4.5 Tételét (arXiv:1702.00982v1).

2. kérdés: *A 2.49 Tételben az S folyamat korlátossága gyengíthető-e ?*

A bizonyításban kulcsfontosságú, hogy "minden" korlátos. Nem korlátos esetben a $\Delta S_t, 1/\kappa_t, 1/\alpha_t, B \in \mathcal{W}$ feltételek mellett ez a tétel várhatóan igaz marad olyan konkáv $u_n(x)$-ekre, melyeknek n-ben egyenletes, x-ben polinomiális korlátja van midőn $x \to -\infty$. Az érvelések azonban elbonyolódnak, anélkül, hogy az eredmény közgazdaságtani jelentősége nőne, ezért nem folytattuk kutatásainkat ilyen irányba.

3. kérdés: *A 3.20 Példában (...) mennyire lényeges a driftet meghatározó μ függvény korlátossága ? A lineáris drift illetve diffúzió esetére igaz marad-e az állítás ?*

Legyenek μ, ρ lineáris növekményűek. Az egyszerűség kedvéért legyen $N = 2$, $L = d = 1$. Először rámutatok, hogy a 4. fejezetben $\Delta S_t, 1/\kappa_t, 1/\nu_t \in \mathcal{W}$ helyett csak azt kell feltenni, hogy $\Delta S_t, 1/\kappa_t, 1/\nu_t \in L^\xi$ elég nagy ξ-re (ennek nagysága T-től és $u_\pm, w_\pm$-tól függ). Tegyük fel továbbá, hogy valamely $\psi > 0$-ra

$$P(Z > x) \geq c/(x+1)^\psi, \quad P(Z < -x) \geq c/(x+1)^\psi, \tag{e3}$$

minden $x \geq 0$-ra. Világos, hogy ha ψ elég nagy (az, hogy milyen nagynak kell lennie, T-től, ρ-tól és μ-től függ), akkor $\Delta S_t \in L^\xi$ teljesül, sőt, a 48. oldal gondolatmenetéhez hasonlóan megmutatható az is, hogy (elég nagy ψ esetén) $1/\kappa_t, 1/\nu_t \in L^\xi$.

Összefoglalva, lineáris μ, ρ esetén igaz marad az állítás amennyiben a Z eloszlásának farka nem túl vastag (azaz ψ elég nagy), de nem is túl vékony (azaz létezik (e3)-nak eleget tevő ψ). Ez rámutat arra is, hogy a ΔS_t illetve az $1/\kappa_t, 1/\nu_t$ folyamatok integrálhatóságára vonatkozó feltételek "egymás rovására" javíthatók ebben a modellosztályban.

4. kérdés: *Alkalmazható lenne-e az itt megmutatott technika nem feltétlen a szuprémumhoz tartó várható hasznossággal rendelkező portfóliósorozat – természetesen esetleges további megkötések mellett ?*

A gondolatmenet alkalmazható valahányszor ϕ_n olyan sorozat, hogy

$$\inf_n V(X_T^{z,\phi_n} - B) > -\infty, \tag{e4}$$

csak ennyit használunk, lásd a 4.15 Tétel bizonyítását. Az (e4) feltétel teljesül a szuprémumhoz tartó ϕ_n sorozatokra, de általában természetesen nem igaz.

5. kérdés: *Sikerült-e időközben a bizonyítások esetleges további finomításával megkonstruálni – például 1 valószínűségű határértékként előállítani – az optimális portfólió stratégiát ?*

Nem konkáv célfüggvénynél a szokványos eljárások (pl. a Komlós tétel) nem működnek, ezért kicsi az esély 1 valószínűségű konvergenciára. Ésszerű tehát az általunk is használt "gyenge" megoldások alkalmazása (melyek lényegében annak felelnek meg, hogy a befektető véletlenített stratégiákat használhat). További érv a véletlenített stratégiák mellett, hogy torzított valószínűségek esetén ezekkel jobb eredmény érhető el, mint nélkülük, lásd a 3.23 Példát, illetve a [22] cikk 5.2 Állítását.

6. kérdés: *Mind a kereskedés intenzitását megadó folyamatról, mind pedig az ehhez kapcsolódó tranzakciós költséget leíró folyamatról feltételezi, hogy az opcionális σ-algebrára mérhető. Mennyire jogos – illetve praktikus – ez a feltevés, a jósolható σ-algebrára feltevés helyett ?*

A részvények száma t időpontban $\Phi_t = \int_0^t \phi_s \, ds$, ahol ϕ-ről feltesszük, hogy opcionális. Mivel Φ folytonos, automatikusan jósolható. Tehát a részvények mennyisége jósolható folyamat lesz, összhangban a klasszikus, likvid piacmodellekben megszokott feltevéssel.

Feltehetnénk azt is, hogy maga ϕ jósolható folyamat, illetve G egy jósolható mező. A bizonyítások változatlanul érvényesek erre az esetre. Azért nem ezt a feltevést választottuk, mert a [47] dolgozatban (ahonnan ez a fejezet származnak) további, a disszertációban nem tárgyalt eredményeket is bizonyítottunk, és ezek egyikének (3.7 Tétel a [47]-ben) bizonyítása csak opcionális σ-algebrával működik, jósolhatóval nem (mivel maga S illetve az ott felmerülő Z martingálok általában nem jósolható folyamatok).

7. kérdés: *Lát-e esélyt arra, hogy – a korábbi fejezetekben bemutatott eredményekhez hasonlóan – itt is gyengíthető legyen a hasznosságfüggvényre tett ezen feltétel?*

Lehetséges nem konkáv esetben is hasonló egzisztencia-tételt bizonyítani, ez a "Skorohod's representation theorem and optimal strategies in markets with frictions" című, Ngoc Huy Chau-val közös kézirat témája (arXiv:1606.07311). Akárcsak a 3. fejezetben (lásd különösen a 3.23 Példát), itt is "gyenge" megoldást találunk, azaz a befektetőnek megengedjük a véletlenített stratégiák használatát. A kapcsolódó eredmények a Skorohod reprezentációs tétel egy – Adam Jakubowski-tól származó – jelentős általánosításán múlnak. Erre azért van szükség, mert a stratégiák tere $L^\beta([0,T], \mathcal{B}([0,T]), Leb)$ a gyenge topológiával, ami nem lengyel tér. A bizonyítás távolról emlékeztet a sztochasztikus differenciálegyenletek gyenge megoldásának konstrukciójára, csak most nem megoldást, hanem optimális stratégiát konstruálunk ilyen módon.

Rásonyi Miklós

Gödöllő, 2017. június 12.