

Michaletzky György

ELTE TTK

Valószínűségelméleti és

Statisztika Tanszék

H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.

Opponensi vélemény

Rásonyi Miklós

Optimal investment: expected utility and beyond

c. MTA doktori disszertációjáról

Cox, Ross és Rubinstein diszkrét idejű-diszkrét értékű illetve Black, Scholes illetve Merton folytonos idejű és értékű modelljei mutattak rá arra, hogy bizonyos termékek árazásakor nem a valódi sztochasztikus viszonyokat leíró mértéket kell figyelembe venni, hanem önfinanszírozó, replikáló portfóliókat, amelyek ugyanakkor – bizonyos feltételek mellett – valamely mesterségesen gyártott sztochasztika szerinti várható értékre vezetnek. Harrison és Pliska illetve majd egy évtizeddel később Dalang, Morton és Willinger eredményei mutatták meg, hogy nemcsak ezekre a speciális modellekre teljesül ez a tulajdonság, hanem sokkal általánosabb keretek között. Mindez gyönyörű szép elméleti matematikai eredmények kifejlesztéséhez vezetett, melyeknek elméleti szépségük mellett még az a csábító különlegességük is megvolt, hogy praktikusan is alkalmazhatóak voltak, illetve annak látszottak. Az egyre bonyolultabb matematikai modellek alkalmazhatóságának feltételeit a gyakorlatban igen ritkán ellenőrzik csak, ezért megvan a veszélye annak, hogy téves következtetésekre vezetnek. A konkrét alkalmazás során kapott nem várt eredményt ugyanakkor az alkalmazott modell kritikája helyett könnyű azzal meg- illetve kimagyarázni, hogy valamilyen kis valószínűségű esemény következett be.

Ebből a szempontból tartom Rásonyi Miklós disszertációjában szereplő matematikai módszereket, eredményeket igen jelentősnek, mert a portfólió optimalizálás problémakörében amennyire lehet igyekszik eltérni a szokásos feltevésektől, például többek között attól, hogy a hasznosságfüggvény a pozitív tartományon konkáv.

A disszertáció 7 fejezetből áll, melyek közül a 2-5. fejezetek tartalmazzák Rásonyi Miklós eredményeinek kifejtését. Az első fejezet az alapvető fogalmakat, illetve a problémákat vázolja fel, a 6. fejezet a korábbi fejezetekben felhasznált általánosabb segédteteleket sorolja fel, végül az utolsó, 7. fejezet lehetséges további kutatások irányait taglalja.

A 2. fejezet nem-konkáv hasznosság függvények esetére, több-periódusú, diszkrét idejű piac esetére – feltételezve az arbitrázsmentességet – bizonyítja optimális stratégia létezését. A szokásos irodalom a több-periódusú esetben a hasznosság-függvény konkávitásának feltételezése mellett, a Bellmann-elv kihasználásával bizonyítja ezt. Nem-konkáv esetre csak az egy-periódusú piac elemzése volt ismert korábban. Rásonyi megmutatja, hogy a nem-konkáv esetben is alkalmazható a dinamikus programozás gondolatmenete, azonban ehhez

sokkal finomabb becslésekre van szükség. Ezek a finomabb becslések egyben sokkal bonyolultabb számolásokra vezetnek. Ezért Rásonyi igyekszik elemeire bontani a bizonyítás gondolatmenetét, először a felülről korlátos hasznosságfüggvény esetét vizsgálva – külön tekintve az egy-periódusú, illetve több-periódusú esetet. A 2.4 alfejezetben tér át a nem-korlátos hasznosságfüggvények esetére – konkávitás feltételezését lecserélve a legfeljebb hatványrendben (a pontos definíciót a 2.13 feltétel adja meg) növekvő függvényekre. Innentől kezdve azonban elengedi az olvasó kezét. A bizonyítás felépítésének struktúrája az olvasótól maximális bizalmat követel. Bízni abban, hogy például a 18. oldalon sorakozó feltevések – amelyek szükségessége egyáltalán nem látszik az őket megelőző szövegből –, előbb-utóbb értelmet nyernek. A kitartó olvasó el is nyeri a jutalmát, a 15. oldalon bejelentett 2.18. Tételhez tartozóan a 27. oldalon valóban megjelenik a 2.18. Tétel bizonyítása bevezető mondat. Hangsúlyozom, a bizonyítás igen finom analízist igényel, komplikált becslésekkel, és végeredményképpen kiderül, hogy milyen szerepet játszanak az első olvasatra önkényesnek tűnő feltevések.

A 2.18. illetve 2.49. Tételben mennyire szükséges a B referenciafüggvény korlátossága? (Illetve általánosabban, hogy B szub-replikálható legyen önfinszírozó portfólióval?)

Továbbá a – disszertációban csak megemlített, de helyszűke miatt nem bizonyított – 2.49. Tételben az S folyamat korlátossága gyengíthető-e?

A 3. Fejezet több-periódusú, diszkrét idejű, de nem feltétlen arbitrázsmentes piacon tárgyalja dinamikus optimális portfólió létezését olyan feltételezés mellett, hogy az esetleges veszteségek nagyobb súllyal számítanak, mint az adódó nyereségek, és az optimalizáló hajlamos a kis-valószínűségű események bekövetkezési esélyét felnagyítani. Fontos feltételezés, hogy a piacról nyerhető információt független vektorváltozók generálják, melyekben több “zaj” van, mint a figyelembe vett kockázatos termékek és esetlegesen további közgazdasági mennyiségek. Az optimális stratégia létezésének bizonyításához itt egészen más technikát kell alkalmazni, mint az előző fejezetben. Itt bizonyos stratégiák által meghatározott együttes eloszlások feszességének igazolása adja a kulcslépést. A terjedelmes számolások itt sem kerülhetők el. Ezért igen zavaróak a pontatlan utalások. A 44. oldalon szerepel, hogy “az U_t függvény definíciója megtalálható a 2.20. Következmény bizonyításában”. Ez a bizonyítás a 28. oldalon kezdődik, maga a következmény a 16. oldalon van megfogalmazva, az U_t függvények definícióját pedig az ezeket megelőző 14. oldalon lehet megtalálni.

Ugyanakkor Rásonyi Miklós gondosan körbejárja a feladatot, példák segítségével mutatja be, hogy miért van szükség az egyes feltételekre, illetve rámutat arra, hogy a fent megfogalmazott, a generált szigma-algebra vonatkozó feltevés számos “természetes” esetben automatikusan teljesül.

A 3.20. Példában, amely lényegében a mintavételezett diffúziós folyamat esete, mennyire lényeges a drift-et meghatározó μ függvény korlátossága? A lineáris drift illetve diffúziós együttható esetére igaz marad-e az állítás?

A 4. Fejezet folytonos paraméterű modellekkel foglalkozik – amennyire lehet, eltekintve az olyan szokásos feltételektől, mint például a hasznosságfüggvény konkávitása, a piac teljessége. Ezzel jelentősen általánosítva, kibővítve az iro-

dalomban található, korábbi eredményeket. A fejezet fő tételek megfogalmazása előtt példák segítségével mutatja be a szerző, hogy miért van szükség a hasznosságfüggvényekre végtelenben való viselkedését megadó feltételekre – egyébként ugyanis a feladat nem lesz korlátos. A fejezetben szereplő bizonyítások lelke – amint azt a korábbi fejezetekben Rásonyitól már megszokhattuk –, a hasznosságfüggvény várható értékére – pontosabban: módosított valószínűségek szerint vett várható értékére, ahol a kis valószínűségű események bekövetkezési esélye a ténylegesnél nagyobb súlyt kap – vonatkozó igen finom becslések sorozata. Meglepő, hogy alkalmas martingálmértékhez tartozó Radon-Nikodym-deriváltra vonatkozó enyhe feltételek is biztosítják, hogy ha adott portfóliósorozat esetén a hasznosság (módosított) várható értéke a lehetséges szuprémumhoz tart, akkor ezen portfóliók eloszlásának halmaza feszes. Fontos megjegyezni, hogy a piacon lévő kockázatos termékek sztochasztikus folyamatának struktúrájára ehhez lényegében semmilyen explicit feltételre nincs szükség. (Eltekintve attól, hogy léteznek alkalmas kockázatmentes mérték.)

Alkalmazható lenne-e az itt megmutatott technika nem feltétlen a szuprémumhoz tartó várható hasznossággal rendelkező portfóliósorozat esetén – természetesen esetleges további megkötések mellett?

Az optimális portfólió létezését Rásonyi a piac teljességére tett feltétel alkalmas gyengítése mellett bizonyítja. A bizonyítás lényege, hogy a feszes felhasználásával elő tud állítani olyan valószínűségi változót, amely valamely szűkebb σ -algebrára mérhető, mint a végső időponthoz tartozó teljes algebra, és amelyhez tartozó funkcionálérték megegyezik a optimummal. Az extra feltevés szerint ez replikálható önfinanszírozó portfólióval, és ez adja az optimális stratégiát. Eredményével Rásonyi lényegesen túllép a irodalomban megtalálható korábbi eredményeken. Ugyanakkor a disszertációban bizonyított eredmény az optimális stratégia létezését igazolja, valódi konstrukciót nem ad annak megszerkesztésére. (Ugyanez vonatkozik a 3. Fejezet eredményére is.) Sikerkült-e időközben a bizonyítások esetleges további finomításával megkonstruálni – például 1 valószínűségű határértékként előállítani – az optimális portfólió stratégiát?

Az 5. Fejezet tranzakciós költségekkel terhelt, folytonos paraméterű piacok esetére vizsgálja optimális portfólió létezését. Ezzel ismét olyan témakörben ér el eredményeket, melyek messze túlmutatnak az irodalomban korábban megjelenteken. A modell feltevése szerint a tranzakciós költségek konvex, illetve szuperlineáris módon függenek a kereskedés intenzitásától. Röviden utal arra, hogy a konvexitási feltétel azonnali következménye, hogy rövidebb idő alatt kereskedni ugyanazzal a összmennyiséggel drágább. Mivel azonban a szóbanforgó függvény egyben függ az időtől is, az okfejtést nem érzem teljesen precíznek. Mind a kereskedés intenzitását megadó folyamatról, mind pedig az ehhez kapcsolódó tranzakciós költséget leíró folyamatról feltételezi, hogy az opcionális σ -algebrára mérhető. Mennyire jogos – illetve praktikus – ez a feltevés, a jósolható σ -algebrára feltevés helyett? Az előző fejezetektől eltérően, a portfóliókat összehasonlító mennyiség definíciójában felteszi, hogy az alkalmazott hasznosságfüggvény konkáv. Lát-e esélyt arra, hogy – a korábbi fejezetekben bemutatott eredményekhez hasonlóan – itt is gyengíthető legyen a hasznosságfüggvényre

tett ezen feltétel? Külön érdekessége a fejezetnek az 5.18. Tétel, amely Davis-tételét általánosítja tranzakciós költségekkel terhelt piacra, megmutatva, hogy az optimális portfóliók karakterizálhatóak martingálmértékek Radon-Nikodym deriváltjai segítségével.

A disszertáció 88 oldalt tartalmaz, melyből az utolsó 6 oldal a 105 tételből álló irodalomjegyzék. A disszertáció ezek jelentős részére ténylegesen utal, mutatva Rásonyi Miklós szerteágazó tájékozottságát a témakörben. Ezek közül 15 tétel szerzője – esetleg társszerzőkkel – Rásonyi Miklós. A disszertációban elírási hiba csak elvétve fordul elő.

Összefoglalva, véleményem szerint a dolgozat jelentős – mind elméleti matematikai, mint alkalmazott pénzügyi matematikai – eredményeket tartalmaz, melyek számos fontos alkalmazott kérdésben lépnek túl az irodalom szokásos kérdésfelvetésén, és ennek megfelelően eredményein. A disszertációban leírt eredmények színvonala messze meghaladja az MTA doktori disszertációkban elvártat, ezért melegen javaslom a disszertáció nyilvános vitára bocsátását, és a doktori cím odaítélését.

Budapest, 2017. február 26.



Michaletzky György