

Kontrollponttal adott görbék leírása, alakmódosítása és szingularitásának vizsgálata

MTA doktori értekezés tézisei

Juhász Imre

Miskolci Egyetem
2015.

1. Bevezetés

A számítógéppel segített geometriai tervezés (Computer Aided Geometric Design – CAGD) viszonylag fiatal tudományterület. Kialakulása az 1960-as évekre tehető, amikor járműtervezést – elsősorban autó- és repülőgép-tervezést – segítő számítógépes rendszerek fejlesztésébe fogtak. Első folyóiratát 1984-ben adták ki Computer Aided Geometric Design néven.

A CAGD görbék és felületek számítógép segítségével való modellezésének (leírásának, vizsgálatának, módosításának) matematikai és informatikai vonatkozásaival foglalkozik. Görbék leírására leggyakrabban a

$$\mathbf{g}(u) = \sum_{j=0}^n F_j(u) \mathbf{d}_j, \quad F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2 \quad (1)$$

alakot használjuk, ahol a $\mathbf{d}_j$ pontokat kontrollpontnak, az őket összekötő töröttvonalat kontrollpoligonnak nevezzük. Tetszőleges, folytonos F_j függvények esetén folytonos vonalat kapunk, ahhoz azonban, hogy a gyakorlatban – geometriai tervezésben – használható görbét kapjunk, az F_j függvényekre további feltételeket kell kiróni. Az $\{F_j\}_{j=0}^n$ függvényrendszerrel szembeni legfontosabb követelmények a nemnegativitás, az egységfelbontás ($\sum_{j=0}^n F_j(u) = 1, \forall u \in [a, b]$), a lineáris függetlenség, továbbá az, hogy biztosítsák a görbe hullámzáscsökkentő tulajdonságát. A hullámzáscsökkentő tulajdonság azt jelenti, hogy bármely hipersík legfeljebb annyi pontban metszi a görbét, mint a kontrollpoligonját. A kontrollpont-alapú görbeleírás támogatja a tervezői intuitivitást, valamint előnyös adattárolási és adatátviteli szempontból is.

A leggyakrabban használt függvényrendszerek a (racionális) Bernstein-polinomok, a normalizált (racionális) B-szplájn alapfüggvények, melyekkel rendre a (racionális) Bézier-görbe, a B-szplájn-görbe ill. a racionális B-szplájn- (más néven NURBS) görbék írhatók le. Görbék kontrollpontokkal való megadását egymástól függetlenül Bézier (Bézier, 1966) és de Casteljau (de Casteljau, 1959) honosította meg a geometriai tervezésben. Napjainkra ez a görbemekadás elsődleges szerepet játszik mind az elméleti kutatásokban, mind a kereskedelemben kapható tervezőrendszerekben. A kutatásban a polinomiális és racionális görbék hegemoniája a 90-es években megtört, azóta számos más típusú bázist adtak meg a geometriai modellezés számára, mint pl. trigonometrikus, hiperbolikus, exponenciális, valamint ezek kombinálása a polinomokkal.

A görbék leírása mellett alakmódosítási lehetőségeik feltárása, adott kényszereket kielégítő módosítási eljárások kidolgozása, valamint geometriai tulajdonságaik vizsgálata is intenzíven kutatott témák. A gyakorlati alkalmazhatóság érdekében olyan eljárások kidolgozására kell törekedni, melyek a mélyebb geometriai ismeretekkel nem rendelkező, átlagos felkészültségű tervezők számára is érthetőek és használhatóak.

Az értekezés a kontrollpont-alapú görbeleírás, valamint az így leírt görbék vizsgálatának és alakmódosításának terén elért eredmények alábbi három csoportját tárgyalja.

1. Új bázis szerkesztése a legfeljebb n -edrendű ($2n$ -edfokú) trigonometrikus polinomok terében, melyek segítségével zárt görbék modellezhetők (1) alakban.
2. Racionális B-szplájn-görbék fokszámanak, súlyainak és csomóértékeinek változtatásakor fellépő alakváltozások vizsgálata és adott geometriai feltételeket teljesítő alakmódosítási eljárások kidolgozása.
3. Új módszer megadása az (1) alakban adott globálisan változtatható görbék szingularitásainak (csúcs-, önmetszés-, eltűnő görbületű és torziójú pontjainak) és konvexitásának meghatározására.

A legfeljebb n -edrendű trigonometrikus polinomok terében definiált ún. ciklikus bázis elméleti érdekessége, hogy bár a függvényrendszer nem teljesen pozitív, mégis rendelkezik a B-bázisok legtöbb kedvező tulajdonságával. Ezek felhasználásával redundáns kontrollpontok megadása nélkül, szingularitásmentes paraméterezésű, C^∞ -osztályú zárt görbéket modellezhetünk (1) alakban. Ezt orvosi képfeldolgozásban alkalmazta (Gu, Pati & Dunson, 2014).

A racionális B-szplájn-görbék súllyal történő alakmódosítására kidolgozott eljárás előnye a meglévőkhöz képest az, hogy több súly változtatására épül, ami pozicionális és érintési feltételek egyidejű kielégítését teszi lehetővé. Ezt az eljárást több cikk idézi, pl. (Hu, F.Li, Ju & Zhu, 2001), (Yin, 2004), (Pourazady & Xu, 2006).

A csomóértékek változtatásával fellépő alakváltozás geometriai tulajdonságait, valamint az ezek segítségével elérhető alakmódosításokat mi vizsgáltuk először. A kapott eredmények geometriai kényszereket kielégítő alakmódosítást tesznek lehetővé. Ezeket az eredményeket több publikációban felhasználták, vagy ismertették, hivatkozták a terület lényeges eredményei között, pl. (Tuli, Reddy & Saxena, 2006), (Li & Wang, 2006), (Sóbestor & Forrester, 2014).

Korábban az (1) alakban adott globálisan változtatható görbeosztálynak csak egyes elemeit (főleg a Bézier-görbét) vizsgálták szingularitás szempontjából. Mi a teljes osztály vizsgálatát végeztük el, erre adtunk módszert. Ezt más, nempolinomiális görbék vizsgálatakor is használták vagy ismertették, pl. (Zhao & Wang, 2007), (Cao & Wang, 2007), (Karousos, Ginnis & Kaklis, 2009).

2. Új tudományos eredmények

2.1. Ciklikus görbék

Görbék (1) alakban való leírására kezdetben kizárólag polinomiális bázisfüggvényeket használtak. A hetvenes évek második felétől teret nyertek a racionális függvények, elsősorban a racionális B-szplájn-bázis. A gyakorlati alkalmazások olyan tervezőrendszereket igényelnek, amelyek használatával a felhasználó minél egyszerűbb módon hozhat létre változatos alakú görbéket. A racionális bázisokkal szemben több jogos kritika fogalmazható meg. Néhány ilyen észrevétel (teljesebb lista a (Farin, 1989), (Piegl, 1991), (Pottmann & Wagner, 1994) cikkekben található):

- a polinomiális görbék alakjának módosítása csak a kontrollpontokkal lehetséges; a racionális görbéknél újabb eszköz a kontrollponthoz társított súly, aminek a közvetlen használata azonban egy átlagos tervező számára megoldhatatlan feladat;
- az n -edfokú polinomiális görbe deriváltja $(n - 1)$ -edfokú, az n -edfokú racionális görbének azonban $2n$, ezért a magasabb rendű deriváltak nagyon magas fokszámot eredményeznek;
- nem lehet velük transzcendens görbéket (pl. csavarvonalat, láncgörbét, cikloist) egzaktul leírni, melyek azonban a műszaki alkalmazásoknál gyakran előfordulnak.

A 90-es évek második felétől intenzív kutatások folynak más bázisok alkalmazására. A Bézier-görbék általánosításaként született a C-Bézier-görbe (Zhang, 1996), (Chen & Wang, 2003) és a H-Bézier-görbe (Huang & Wang, 2007), melyek bázisfüggvényei rendre a trigonometrikus, illetve a hiperbolikus függvényeket is magukba foglalják. Természetesen szplájn bázisfüggvények esetén is kombinálták a polinomiális és trigonometrikus (Zhang, 1997), (Wang & Chen, 2004), (Wang & Li, 2006), vagy hiperbolikus (Lü, Wang & Yang, 2002) függvényeket, illetve mindkettőt (Zhang, Krause & Zhang, 2005). Ezen kiterjesztések közös jellemzője, hogy alapvetően nyílt görbék modellezésére készültek, mivel a végpontokban interpolálnak (az első és utolsó kontrollponton átmennek).

Végpontbeli interpolációt biztosító görbékkel (pl. Bézier-görbével) zárt alakot akkor kapunk, ha a kontrollpoligon első és utolsó csúcsára teljesül a $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_n$ egyenlőség. Ez a feltétel olyan zárt görbét eredményez, amely keresztülmegy a $\mathbf{d}_0$ kontrollponton, azonban általában csak C^0 -osztályú ebben a pontban. Magasabb folytonossági osztályú zárt görbék leírásához a kontrollpontokra további (a folytonossági rend növelésével egyre bonyolultabb) geometriai feltételeket kell előírni. Szplájn-görbével nagyobb simaságú zárt görbe is leírható. Ha a k -adrendű B-szplájn-görbe $\{\mathbf{a}_j\}_{j=0}^{n+k-1}$ kontrollpontjaira az $\mathbf{a}_j = \mathbf{d}_{j \bmod (n+1)}$, $(j = 0, 1, \dots, n + k - 1)$ feltételek teljesülnek, valamint az egyszeres multiplicitású csomóértékeket úgy adjuk meg, hogy megismételjük az első $k - 1$ db. csomóérték-intervallum hosszát is, akkor C^{k-2} -osztályú zárt görbét modellezhetünk. Tehát a végpontokban interpoláló görbékkel csak úgy tudunk magasabb simaságú zárt görbét modellezni, ha redundáns adatokat is megadunk.

A zárt görbék modellezésének fenti problémái motiválták, hogy a legfeljebb n -edrendű ($2n$ -edfokú) trigonometrikus polinomok

$$\mathcal{V}_n = \langle V_n \rangle = \langle 1, \cos(u), \sin(u), \dots, \cos(nu), \sin(nu) : u \in [0, 2\pi] \rangle, 0 < n \in \mathbb{N}$$

terében az ún. *ciklikus függvényrendszert* definiáljuk, amely segítségével redundáns kontrollpontok megadása nélkül, szingularitásmentes paraméterezésű, C^∞ -osztályú zárt görbéket modellezhetünk (1) alakban. A ciklikus bázis elméleti érdekessége, hogy bár a függvényrendszer nem teljesen pozitív, mégis rendelkezik a B-bázisok (lásd (Carnicer & Peña, 1994)) legtöbb kedvező tulajdonságával, továbbá segítségével sok nevezetes görbét egzaktul le tudunk írni kontrollpontok segítségével. Az

eredményeket a (Róth, Juhász, Schicho & Hoffmann, 2009), (Róth & Juhász, 2010) és (Juhász & Róth, 2010) cikkekben publikáltuk.

1. Definíció (Ciklikus függvényrendszer (Róth, Juhász et al., 2009)).

$$\mathcal{C}_n = \left\{ C_{i,n}(u) := \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \right\}_{i=0}^{2n}, u \in [0, 2\pi] \quad (2)$$

kifejezéssel adott függvényeket ciklikus függvényeknek nevezzük, ahol

$$c_n = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}}, \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{2n+1}$$

és a c_n normalizáló konstansra a

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{ha } n = 1, \\ \frac{2n}{2n+1} c_{n-1}, & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

rekurzió is teljesül.

1. Tétel (Lineáris függetlenség (Róth, Juhász et al., 2009)).

Ezen nemnegatív, normalizált, lineárisan független függvényrendszerrel definiáljuk a ciklikus görbét.

2. Definíció (Ciklikus görbe (Róth, Juhász et al., 2009)).

$$\mathbf{a}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \mathbf{d}_i, \quad u \in [0, 2\pi], \quad n \geq 1 \quad (3)$$

görbét értjük, ahol $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d, d > 1$.

A ciklikus elnevezést az indokolja, hogy a görbék kontrollpontjaik ciklikus permutációjával szemben invariánsak, azaz ugyanazt az alakot írják le, természetesen más-más paraméterezéssel. Mivel a bázisfüggvények 2π -szerint periodikusak, a görbe értelmezési tartománya tetszőleges 2π -hosszúságú intervallum lehet.

A $\mathcal{C}_n$ függvényrendszer nemnegatív és egységfelbontást alkot, ezért a görbe kontrollpontjainak konvex burkában van. A $C_{i,n}$ alapfüggvény egyértelmű maximuma az $u = i\lambda_n$ helyen van, ezért a $\mathbf{d}_i$ kontrollpontnak az $\mathbf{a}_n(i\lambda_n)$ görbepont környezetében van legnagyobb hatása a görbe alakjára. $C_{i,n}$ az $u = \pi + i\lambda_n$ helyen eltűnik, ezért a $\mathbf{d}_i$ kontrollpontnak nincs hatása az ehhez tartozó görbepontra, azaz ez a görbepont invariáns a $\mathbf{d}_i$ kontrollpont változtatásával szemben, azonban ezen pont kivételével $\mathbf{d}_i$ hatással van a görbe minden pontjára, vagyis a ciklikus görbe globálisan módosítható. Bár a kontrollpontoknak globális hatása van a görbe alakjára, ez a hatás azonban drasztikusan csökken – különösen magas rend esetén – a maximálisan befolyásolt ponttól távolodva.

Geometriai modellezés során – pl. a hatékonyabb alakmódosítás érdekében – gyakran szükséges ugyanazt az alakot több kontrollponttal leírni. Ez esetünkben a rend növelését jelenti, azaz adott n -edrendű ciklikus görbéhez meg kell határozunkunk annak az $(n+z)$ -edrendű ($z \geq 1$) ciklikus görbének a kontrollpontjait, mely az eredetivel megegyező alakot ír le. A rendszámnövelésre sikerült zárt formulát adnunk, valamint megmutattuk, hogy a rendszámnövelés során a kontrollpoligon egyre közelebb kerül a görbéhez.

2. Tétel (Rendszámnövelés (Róth, Juhász et al., 2009)). Az $(n+z)$ -edrendű ($z \geq 1$)

$$\mathbf{a}_{n+z}(u) = \sum_{j=0}^{2(n+z)} C_{j,n+z}(u) \mathbf{d}_j^z, \quad u \in [0, 2\pi]$$

ciklikus görbe pontonként megegyezik az n -edrendű (3) görbével, ha a kontrollpoligonját

$$\mathbf{D}_{n+z} = [\mathbf{d}_j^z]_{j=0}^{2(n+z)} = [\mathbf{x}_z(j\lambda_{n+z})]_{j=0}^{2(n+z)}$$

módon választjuk meg, ahol $\mathbf{x}_z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_z(u) = & \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i + \\ & + \frac{2 \binom{2(n+z)}{n+z}}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2(n+z)}{z+k}} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \mathbf{d}_i. \end{aligned}$$

3. Tétel (Konvergencia (Róth, Juhász et al., 2009)). A rendszámnövelt görbe $\mathbf{D}_{n+z} = [\mathbf{d}_j^z]_{j=0}^{2(n+z)}$ kontrollpoligonja az $\mathbf{a}_n(u)$ görbéhez konvergál, azaz a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{x}_z(u) = \mathbf{a}_n(u), \quad \forall u \in [0, 2\pi]$$

egyenlőség teljesül.

Görbék modellezése során elvárás, hogy a görbe ne csak kövesse a kontrollpoligon alakját, hanem bizonyos jellemzőit csökkentse is. Az egyik legfontosabb ilyen jellegű tulajdonság a hullámszácsökkentés (variation diminishing). A hullámszácsökkentés bizonyítása az egyik legnehezebb feladat egy új függvényrendszer bevezetésekor, esetünkben is így volt.

3. Definíció (pl. (Farin, 1988)). Akkor mondjuk, hogy az (1) görbe hullámszácsökkentő, ha a görbét bármely hipersík legfeljebb annyi pontban metszi, mint a kontrollpoligonját.

4. Tétel (Hullámszácsökkentés (Róth, Juhász et al., 2009)). A (3) ciklikus görbe rendelkezik a hullámszácsökkentő tulajdonsággal.

Ennek gyakorlati szempontból fontos következménye a síkbeli kontrollpoligonok konvexitásának megőrzése.

1. Következmény (Konvexitás-megőrzés (Róth, Juhász et al., 2009)). Ha a (3) ciklikus síkgörbe kontrollpoligonja konvex, akkor maga a görbe is az.

A $\mathcal{V}_n$ térnek a természetes bázisa a

$$\mathcal{T}_n = \{T_i(u)\}_{i=0}^{2n} = \{1, \cos u, \sin u, \dots, \cos(nu), \sin(nu), u \in [0, 2\pi]\}$$

függvényrendszer. (Pl. a nevezetes görbék többségének leírását általában ebben ismerjük.) Megadtuk a $\mathcal{T}_n$ és $\mathcal{C}_n$ bázisok közötti transzformáció mátrixát.

5. Tétel (Bázistranszformáció (Róth & Juhász, 2010)). A $\mathcal{V}_n$ tér $\mathcal{C}_n = \{C_{i,n}(u)\}_{i=0}^{2n}$ bázisa a $\mathcal{T}_n = \{T_i(u)\}_{i=0}^{2n}$ bázisból a

$$\begin{bmatrix} C_{0,n}(u) \\ C_{1,n}(u) \\ C_{2,n}(u) \\ \vdots \\ C_{2n-1,n}(u) \\ C_{2n,n}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_{0,0}}{2} & e_{0,1} & f_{0,1} & \cdots & e_{0,n} & f_{0,n} \\ \frac{e_{1,0}}{2} & e_{1,1} & f_{1,1} & \cdots & e_{1,n} & f_{1,n} \\ \frac{e_{2,0}}{2} & e_{2,1} & f_{2,1} & \cdots & e_{2,n} & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{e_{2n-1,0}}{2} & e_{2n-1,1} & f_{2n-1,1} & \cdots & e_{2n-1,n} & f_{2n-1,n} \\ \frac{e_{2n,0}}{2} & e_{2n,1} & f_{2n,1} & \cdots & e_{2n,n} & f_{2n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(u) \\ T_1(u) \\ T_2(u) \\ \vdots \\ T_{2n-1}(u) \\ T_{2n}(u) \end{bmatrix} \quad (4)$$

transzformációval állítható elő, ahol

$$e_{i,k} = \frac{2}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \cos(ki\lambda_n), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

és

$$f_{i,k} = \frac{2}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \sin(ki\lambda_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Az inverz transzformáció alakja

$$\begin{bmatrix} T_0(u) \\ T_1(u) \\ T_2(u) \\ \vdots \\ T_{2n-1}(u) \\ T_{2n}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{0,0} & \xi_{0,1} & \xi_{0,2} & \cdots & \xi_{0,2n-1} & \xi_{0,2n} \\ \xi_{1,0} & \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,2n-1} & \xi_{1,2n} \\ \xi_{2,0} & \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \cdots & \xi_{2,2n-1} & \xi_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_{n,0} & \xi_{n,1} & \xi_{n,2} & \cdots & \xi_{n,2n-1} & \xi_{n,2n} \\ \zeta_{n,0} & \zeta_{n,1} & \zeta_{n,2} & \cdots & \zeta_{n,2n-1} & \zeta_{n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{0,n}(u) \\ C_{1,n}(u) \\ C_{2,n}(u) \\ \vdots \\ C_{2n-1,n}(u) \\ C_{2n,n}(u) \end{bmatrix},$$

ahol

$$\xi_{k,i} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-k}} \cos(ki\lambda_n)$$

és

$$\zeta_{k,i} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-k}} \sin(ki\lambda_n).$$

Az ellipszisek (körök), zárt epi- és hipocikloisok, Lissajous-görbék, tóruszcsonók, fólumok a zárt görbék azon osztályához tartoznak, amelyek

$$\begin{cases} \mathbf{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2, \\ \mathbf{x}(u) = [x_1(u) \quad x_2(u) \quad \cdots \quad x_d(u)]^T \end{cases} \quad (5)$$

alakban írhatók le, ahol

$$\begin{aligned} x_l(u) &\doteq x_l\left(u, \{(\alpha_p^l, \psi_p^l)\}_{p \in P_l}, \{(\beta_q^l, \varphi_q^l)\}_{q \in Q_l}\right) = \\ &= \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \cos(pu + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \sin(qu + \varphi_q^l), \quad (l = 1, 2, \dots, d), \end{aligned}$$

és $P_l, Q_l \subset \mathbb{N}$, $\alpha_p^l, \beta_q^l, \psi_p^l, \varphi_q^l \in \mathbb{R}$. Ez a görbecsalád egzaktul leírható ciklikus görbével.

1. Lemma ((Róth & Juhász, 2010)). *Tekintsük az (5) zárt görbéket és legyen*

$$n \geq n_{\min} := \max \{e \mid e \in \cup_{l=1}^d (P_l \cup Q_l)\}!$$

Vezessük be a

$$\mathbf{d}_i = [x_1(i\lambda_n) \quad x_2(i\lambda_n) \quad \cdots \quad x_d(i\lambda_n)]^T, \quad i = 0, 1, \dots, 2n, \quad (6)$$

kontrollpontokat és az általuk meghatározott

$$\mathbf{a}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \mathbf{d}_i = [a_1(u) \quad a_2(u) \quad \cdots \quad a_d(u)]^T, \quad u \in [0, 2\pi]$$

ciklikus görbét! Ekkor az $\mathbf{a}_n$ görbe l -edik ($l = 1, 2, \dots, d$) koordinátafüggvénye

$$a_l(u) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left(\sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \binom{2n}{n-p} \cos(pu + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \binom{2n}{n-q} \sin(qu + \varphi_q^l) \right) \quad (7)$$

alakban fejezhető ki.

Megfordítva, ha egy ciklikus görbe koordinátafüggvényei (7) alakúak, akkor annak kontrollpontjai pontosan a (6) pontok.

6. Tétel (Egzakt leírás (Róth & Juhász, 2010)). *Tekintsük az*

$$\tilde{\mathbf{x}}(u) = [\tilde{x}_1(u) \quad \tilde{x}_2(u) \quad \cdots \quad \tilde{x}_d(u)]^T, \quad u \in [0, 2\pi],$$

zárt görbét, mely koordinátafüggvényei

$$\tilde{x}_l(u) = \sum_{p \in P_l} \tilde{\alpha}_p^l \cos(pu + \tilde{\psi}_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \tilde{\beta}_q^l \sin(qu + \tilde{\varphi}_q^l), \quad l = 1, 2, \dots, d, \quad (8)$$

alakúak, ahol $P_l, Q_l \subset \mathbb{N}$ és $\tilde{\alpha}_p^l, \tilde{\beta}_q^l, \tilde{\psi}_p^l, \tilde{\varphi}_q^l \in \mathbb{R}$! Legyen

$$n \geq n_{\min} := \max \{e \mid e \in \cup_{l=1}^d (P_l \cup Q_l)\}$$

és $r \in \mathbb{N}$! Ha az 1. segédteétel $\mathbf{x}$ görbájében szereplő konstansokat

$$\alpha_p^l(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-p}} p^r \tilde{\alpha}_p^l, \quad \psi_p^l(n) \equiv \tilde{\psi}_p^l + \frac{r\pi}{2}, \quad p \in P_l, \quad (9)$$

$$\beta_q^l(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-q}} q^r \tilde{\beta}_q^l, \quad \varphi_q^l(n) \equiv \tilde{\varphi}_q^l + \frac{r\pi}{2}, \quad q \in Q_l, \quad (10)$$

módon adjuk meg, akkor a (6) kontrollpontok által meghatározott ciklikus görbe pontosan az $\tilde{\mathbf{x}}$ görbe r -edik deriváltját ($r \geq 0$) írja le bármely $n \geq n_{\min}$ esetén, vagyis az $\mathbf{a}_n$ ciklikus görbe l -edik koordinátafüggvényére az

$$a_l(u) = \frac{d^r}{du^r} \tilde{x}^l(u) = \sum_{p \in P_l} p^r \tilde{\alpha}_p^l \cos\left(pu + \tilde{\psi}_p^l + \frac{r\pi}{2}\right) + \sum_{q \in Q_l} q^r \tilde{\beta}_q^l \sin\left(qu + \tilde{\varphi}_q^l + \frac{r\pi}{2}\right),$$

$$\forall u \in [0, 2\pi], \quad l = 1, 2, \dots, d$$

egyenlőség teljesül.

A Bézier-görbékhez hasonlóan, a ciklikus görbék is zártak a deriválásra nézve, vagyis a derivált görbe ciklikus reprezentációjára explicit formulát tudunk adni.

7. Tétel (Zártság deriválásra (Róth & Juhász, 2010)). A (3) ciklikus görbe r -edrendű ($r \geq 1$) deriváltja azt az m -edrendű ($m \geq n$) ciklikus görbét határozza meg, melynek kontrollpoligonja

$$\mathbf{D}_m = [\mathbf{x}(j\lambda_m)]_{j=0}^{2m},$$

ahol a kontrollpontok $\mathbf{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{x}(u) = \frac{2\binom{2m}{m}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2n}{k} (n-k)^r}{\binom{2m}{m-n+k}} \cos\left((n-k)(u - i\lambda_n) + \frac{r\pi}{2}\right) \mathbf{d}_i$$

mértani helyét a 6. tételt az $\tilde{\mathbf{x}}(u) = \frac{d^r}{du^r} \mathbf{a}_n(u)$ helyettesítéssel alkalmazva kapjuk meg.

Az egyes kontrollpontok befolyásának változtathatósága érdekében a kontrollpontokhoz súlyokat rendelhetünk, amivel egyenértékű, hogy a súlyok felhasználásával a kombináló függvényekből hányadosfüggvényt hozunk létre. A ciklikus bázisfüggvényekből is előállíthatunk hányadosfüggvény-bázist a nemnegatív, nem azonosan nulla $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal

$$R_{i,n}(u) = \frac{w_i C_{i,n}(u)}{\sum_{j=0}^n w_j C_{j,n}(u)}, \quad u \in [0, 2\pi] \quad (11)$$

alakban. Ezek a függvények is nemnegatívak, normáltak és lineárisan függetlenek.

4. Definíció (Racionális ciklikus görbe (Juhász & Róth, 2010)). A (11)
függvények segítségével

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) \mathbf{d}_i, \quad u \in [0, 2\pi]$$

alakban adott görbét racionális ciklikus görbének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a súlyok különbözőek lehetnek, ezért a racionális ciklikus görbe már általában nem lesz invariáns a kontrollpontok ciklikus permutációjával szemben, az elnevezésben a ciklikus szó csak az eredetre utal. A racionális ciklikus görbékkel olyan ismert zárt racionális trigonometrikus görbét tudunk egzaktul leírni, mint a Bernoulli-féle lemniszkáta és a Zsukovszkij-féle szárnyprofil (lásd az 1. ábrát).

Az racionális ciklikus görbe úgy is felfogható, hogy az $\mathbb{R}^{d+1}$ térben a $\begin{bmatrix} w_j \mathbf{d}_j & w_j \end{bmatrix}^T$ kontrollpontokkal adott

$$\mathbf{r}^w(u) = \sum_{j=0}^n C_{i,n}(u) \begin{bmatrix} w_j \mathbf{d}_j \\ w_j \end{bmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi]$$

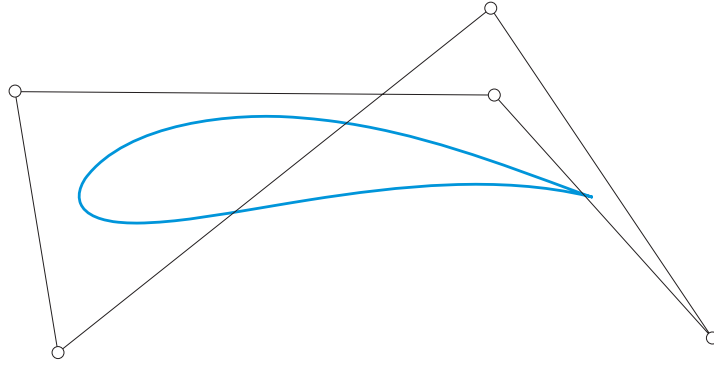
görbét az origóból a $w = 1$ egyenletű d -dimenziós hipersíkra vetítjük (feltételezve, hogy az $\mathbb{R}^{d+1}$ tér utolsó koordinátáját w -vel jelöljük). Az $\mathbf{r}^w$ görbét az $\mathbf{r}$ görbe ősképeként nevezzük. Az $\mathbf{r}$ görbe örökli az $\mathbf{r}^w$ ősképet minden, centrális vetítéssel szemben invariáns tulajdonságát. Ezek alapján az alábbiakban ismertetett algoritmus alapján tudunk racionális trigonometrikus görbét egzaktul modellezni racionális ciklikus görbével.

1. Algoritmus (Racionális görbék egzakt modellezése (Juhász & Róth, 2010)).

A modellezendő racionális trigonometrikus görbe hagyományos paraméteres formájából indulunk ki, és a következő lépéseket tesszük meg:

1. a koordinátafüggvények számlálójából és közös nevezőjéből olyan görbét szerkesztünk az ősképet terében, amelyre a 6. tétel már alkalmazható;
2. az ősképet terében kiszámítjuk az ősképet ciklikus reprezentációjához szükséges kontrollpontokat;
3. a kontrollpontokat a $w = 1$ hipersíkra vetítjük, amivel megkapjuk a racionális reprezentáció kontrollpontjait és súlyait.

A fenti algoritmussal nyilván csak olyan görbék modellezhetők, melyekre az 1. lépés elvégezhető. Az eljárás nem garantálja a súlyok pozitivitását, mivel az ősképet terében valamely kontrollpont utolsó koordinátája negatív is lehet. A modellezendő görbénk azonban egyetlen zárt görbe, ezért az ősképe nem metszheti az eltűnési síkot ($w = 0$), azaz a görbepontok w koordinátájának ugyanaz az előjele (ez nem feltétlenül teljesül a kontrollpontokra). A rend növelésekor a kontrollpoligon a görbéhez konvergál (lásd a 3. tételt), ezért mindig létezik olyan minimális rendszám, melyre (és a nála nagyobbakra) már minden súly pozitív lesz.



1. ábra. Zsukovszkij-féle szárnyprofil egzakt modellezése másodrendű racionális ciklikus görbével

2.2. B-szplájn-görbék alakjának módosítása

A számítógéppel segített geometriai tervezésben kiemelt szerepet játszanak a B-szplájn-görbék, melyeket úgy kapunk meg, hogy az (1) formulában az F_j függvényeket a normalizált B-szplájn alapfüggvényekkel helyettesítjük.

5. Definíció (B-szplájn alapfüggvény pl. (Hoschek & Lasser, 1993)). Az

$$N_j^1(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha } u \in [u_j, u_{j+1}), \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$N_j^k(u) = \frac{u - u_j}{u_{j+k-1} - u_j} N_j^{k-1}(u) + \frac{u_{j+k} - u}{u_{j+k} - u_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(u)$$

rekurzióval adott függvényt $(k-1)$ -edfokú $(k\text{-adrendű}, k \geq 2)$, normalizált B-szplájn alapfüggvénynek nevezzük, az $u_j \leq u_{j+1} \in \mathbb{R}$ skalárokat pedig csomóértékeknek. Az esetlegesen előforduló nullával való osztás eredményét definíció szerint nullának tekintjük.

A normalizált B-szplájn alapfüggvényekkel hozzuk létre a B-szplájn-görbét.

6. Definíció (B-szplájn-görbe pl. (Hoschek & Lasser, 1993)). Az

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{j=0}^n N_j^k(u) \mathbf{d}_j, u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

kifejezéssel adott görbét $k\text{-adrendű}$ (vagy $(k-1)\text{-edfokú}$), $(1 < k \leq n+1)$ B-szplájn-görbének nevezzük, a $\mathbf{d}_j$ pontokat pedig kontroll-, vagy de Boor-pontoknak. $N_j^k(u)$ a j -edik $(k-1)$ -edfokú normalizált B-szplájn alapfüggvényt jelöli, melyek kiértékeléséhez az $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+k}$ csomóértékek szükségesek.

Annak érdekében, hogy az egyes kontrollpontok hatását befolyásoljuk (növeljük vagy csökkentjük), a kontrollpontokhoz (vagy az őket szorzó függvényekhez) súlyokat rendelünk. Így hozzuk létre a racionális B-szplájn-görbét, melyeket NURBS (Non-uniform Rational B-spline) görbének is neveznek.

7. Definíció (NURBS görbe pl. (Hoschek & Lasser, 1993)). Az $\mathbb{R}^d$ térben az

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i \frac{w_i N_i^k(u)}{\sum_{j=0}^n w_j N_j^k(u)}, u \in [u_{k-1}, u_{n+1}] \quad (12)$$

kifejezéssel adott görbét $(k-1)$ -edfokú (k -adrendű), $(1 < k \leq n+1)$ racionális B-szplájn-, vagy NURBS görbének nevezzük, ahol $N_i^k(u)$ az i -edik $(k-1)$ -edfokú normalizált B-szplájn alapfüggvényt jelöli, mely értelmezéséhez a monoton növekvő $\{u_r\}_{r=0}^{n+k}$ csomóértékek szükségesek. A $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d$ pontokat kontroll- vagy de Boor-pontoknak, a $w_0, w_1, \dots, w_n$ ($w_j \geq 0, \sum_{j=0}^n w_j \neq 0$) skalárokat pedig súlyoknak nevezzük.

A racionális B-szplájn-görbék napjainkban a CAD rendszerek geometriai modellező magjának de facto szabványává váltak. A (12) görbével nyílt görbék modellezhetők, zárt görbék modellezésére az ún. periodikus B-szplájn-görbét használjuk, amit úgy kapunk, hogy a foksám értékének megfelelően periodikusan ismételjük a kontrollpontokat és a szomszédos csomóértékek közötti távolságot.

8. Definíció (Periodikus B-szplájn-görbe (Hoschek & Lasser, 1993)). A $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ kontrollpontokkal adott

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{l=0}^{n+k-1} \mathbf{d}_{l \bmod(n+1)} N_l^k(u), u \in [u_{k-1}, u_{n+k})$$

görbét $(k-1)$ -edfokú (k -adrendű) periodikus (vagy zárt) B-szplájn-görbének nevezzük. A hozzá szükséges csomóértékeket az

$$u_j = u_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_{i \bmod(n+1)}, j > 0 \quad (13)$$

összefüggéssel adjuk meg, ahol $u_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

A kontrollpontokhoz rendelt súlyok segítségével racionális periodikus B-szplájn-görbéket is értelmezhetjük.

A B-szplájn-görbék és felületek, valamint racionális változatuk átfogó tárgyalását megtalálhatjuk pl. a (Hoschek & Lasser, 1993), (Farin, 1995) és (Piegl & Tiller, 1995) könyvekben.

A fenti definíciókból látható, hogy a racionális B-szplájn-görbéket kontrollpontjai, súlyai, csomóértékei és fokszáma határozzák meg. Ha ezek közül bármelyiket megváltoztatjuk, a görbe alakja is megváltozik. A racionális B-szplájn-görbe pontjai által, a görbét meghatározó kontrollpontok, súlyok vagy csomóértékek folytonos változtatása során leírt görbéket a továbbiakban *pályagörbéknek* nevezzük.

Geometriai modellezés során adott – többnyire geometriai – feltételeket kielégítő alakváltozások végrehajtására van szükség. Ilyen például, hogy úgy változtassuk meg a görbe valamelyik (esetleg több) meghatározó adatát, hogy a módosított görbe adott ponton menjen át, vagy adott egyenest érintsen. Az ilyen feltételeket

geometriai kényszereknek is szokták nevezni, az ezeket kielégítő alakváltozást pedig kényszeres alakváltoztatásnak.

Az alakváltoztatás leghatékonyabb eszköze a kontrollpont eltolása, ezzel érhető el a legdrasztikusabb változás. Ezeket (Piegl, 1989) kimerítően tárgyalja. A súly és a csomóérték segítségével kisebb mértékű, finomabb módosítások érhetők el, azaz az előnnyel, hogy a változtatott görbe mindig az eredeti kontrollpontok konvex burkában marad.

2.2.1. Fokszámnövelés

A definícióból látható, hogy a zárt görbe rendje tetszőlegesen növelhető újabb kontrollpontok vagy csomóértékek megadása nélkül (a meglévők ismételt megadásával). Ezzel folytonos alakváltoztatás nem érhető el, azonban a fokszámnöveléssel kapott görbék sorozatáról bebizonyítottuk (Juhász & Bancsik, 2003), hogy a kontrollpontok számtani közepéhez (racionális esetben a súlyozott számtani közepéhez) tart.

8. Tétel (Konvergencia (Juhász & Bancsik, 2003)). *A $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ kontrollpontokkal és $w_0, w_1, \dots, w_n$ ($w_i \geq 0$ $\sum_{i=0}^n w_i \neq 0$) súlyokkal adott*

$$\sum_{l=0}^{n+k-1} w_m \mathbf{d}_m \frac{N_l^k(u)}{\sum_{i=0}^{n+k-1} w_{i \bmod (n+1)} N_i^k(u)}, \quad m = l \bmod (n+1)$$

zárt racionalis B-szplájn-görbéből a k rend növelésével kapott görbék sorozata a kontrollpontok súlyozott számtani közepéhez tart.

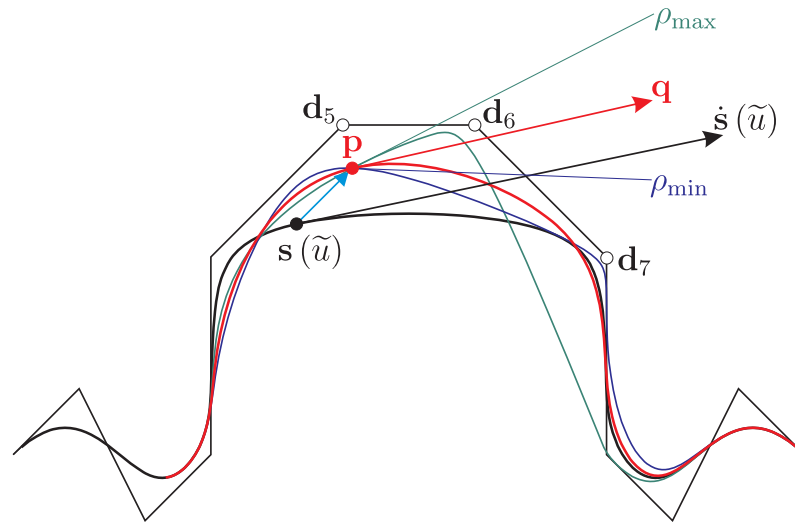
2.2.2. Súly módosítása

Ismert, hogy a NURBS görbe valamely súlyának növelése a hozzá tartozó kontrollpont felé húzza a görbét, mely során a pályagörbék egyenes szakaszok lesznek. A (Piegl, 1989) cikk egy és két kontrollpont súlyának változtatásával elérhető kényszeres alakmódosításokra ad módszereket, (Au & Yuen, 1995) és (Sánchez-Reyes, 1997) pedig kontrollpontok és súlyok egyidejű változtatásával megvalósítható alakmódosításokat tárgyal.

Mi egy ezektől eltérő megközelítést alkalmazunk, azt használjuk ki, hogy a d -dimenziós térbeli racionalis NURBS görbe előállítható $(d+1)$ -dimenziós térbeli polinomiális B-szplájn-görbe (őskép) centrális vetületeként. Kivisszük a problémát az őskép terébe, ott oldjuk meg, majd az eredményt visszavetítjük (Juhász, 1999). Az alakmódosítás célja az, hogy a (12) előállítású $\mathbf{s}$ racionalis B-szplájn-görbe alakját úgy módosítsuk több súly egyidejű változtatásával, hogy a görbe kiválasztott $\mathbf{s}(\tilde{u})$ pontja egy adott $\mathbf{p}$ pontba kerüljön. A $\mathbf{p}$ pont természetesen csak az $\mathbf{s}(\tilde{u})$ pontot tartalmazó ívet meghatározó kontrollpontok konvex burkában lehet. Ennek az eljárásnak az az előnye az eddigiekkel szemben, hogy a három (ill. térgörbék esetén négy) súly egyidejű változtatása egy új szabad paramétert eredményez, ami további (pl. érintési) feltétel kielégítését, ezáltal változatosabb alakmódosítást tesz lehetővé (lásd a 2. ábrát). Ennek az alakmódosítási eljárásnak tervezőrendszerbe való integrálását írja le a következő algoritmus.

2. Algoritmus (Alakmódosítás három súllyal (Juhász, 1999)). A tervezőrendszer és a felhasználó közötti interakció a NURBS síkgörbe alakjának módosításakor:

1. a felhasználó kiválasztja a görbe elmozdítandó pontját;
2. a rendszer jelzi, hogy mely kontrollpontok játszanak szerepet ennek a pontnak a kiszámításakor;
3. a felhasználó ezek közül kiválasztja azt a hármat, amelyek súlyának módosításával akarja elérni a kívánt hatást;
4. a rendszer megjeleníti azt a területet, melyen belül megadható az új pozíció;
5. a felhasználó a ezen területen belül megadja az elmozdítandó pont új helyzetét (a 2. ábrán a $\mathbf{p}$ pont);
6. a rendszer megjeleníti az ebben a pontban lehetséges érintők szélső helyzeteit (a 2. ábrán a $\rho_{\min}, \rho_{\max}$ egyenesek);
7. a felhasználó megadja a kívánt érintőt ezen határok között (a 2. ábrán a $\mathbf{q}$ vektor).



2. ábra. A $\mathbf{d}_5$, $\mathbf{d}_6$ és $\mathbf{d}_7$ kontrollpontok súlyával elért olyan alakmódosítás, amikor a kiválasztott $\mathbf{s}(\tilde{u})$ pont új $\mathbf{p}$ helye mellett az érintő $\mathbf{q}$ iránya is előírt ($\mathbf{q}$ a $\rho_{\min}$ és $\rho_{\max}$ között lehet)

2.2.3. Csomóérték módosítása

A csomóértékek módosításával fellépő alakváltozást korábban nem vizsgálták, ennek geometriai tulajdonságát mi írtuk le. Előbb egyszeres, majd többszörös multiplícitású csomóértékek, ezt követően két csomóérték együttes változtatásának hatását vizsgáltuk, végül az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazására adtunk eljárást. A (Juhász & Hoffmann, 2001), (Juhász & Hoffmann, 2003), (Juhász & Hoffmann, 2004), (Juhász, 2001) cikkekben publikált eredményeket foglaljuk össze.

A csomóértékek monotonitásának megőrzése érdekében a belső u_i csomóérték csak az $[u_{i-1}, u_{i+1}]$ intervallumon változhat. Ha a B-szplájn-görbe u_i csomóértékét változtatjuk, akkor egy egyparaméteres görbesereget kapunk. Másodfokú B-szplájn görbe esetén ($k = 3$) azt tapasztaljuk, hogy az egymáshoz kapcsolódó parabolaíveknek a kapcsolódási pontban a kontrollpoligon megfelelő oldala az érintője, vagyis a harmadrendű B-szplájn-görbét az ugyanazokkal a kontrollpontokkal adott elsőfokú B-szplájn-görbe érinti. Tehát az u_i változtatásával kapott görbesereg burkolója a kontrollpoligon. Ennek a tulajdonságnak egy általánosítása a következő tétel.

9. Tétel (Burkológörbe₁ (Juhász & Hoffmann, 2001)). *Az egyszeres multiplícitású u_i csomóérték változtatásával kapott*

$$\mathbf{g}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}], \quad k > 2$$

görbesereg elemeire és a

$$\mathbf{h}(v) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-1}(v), \quad v \in [v_{i-1}, v_i]$$

görbére

$$\left. \frac{d^r}{d v^r} \mathbf{h}(v) \right|_{v=u_i} = \frac{k-1-r}{k-1} \left. \frac{d^r}{d u^r} \mathbf{g}(u, u_i) \right|_{u=u_i}, \quad r \geq 0$$

teljesül, ahol

$$v_j = \begin{cases} u_j, & \text{ha } j < i \\ u_{j+1}, & \text{ha } j \geq i, \end{cases}$$

vagyis az u_j csomóértékek közül kihagyjuk az i -ediket.

Ez általánosítható egynél magasabb multiplícitású csomóértékre is. Sikerült bebizonyítani, hogy a k -adrendű B-szplájn-görbe m multiplícitású u_i csomóértékének változtatásakor kapott görbesereg burkolója az a $(k-m)$ -adrendű B-szplájn-görbe, mely kontrollpontjai megegyeznek az eredeti görbe kontrollpontjaival, csomóértékeit pedig úgy kapjuk meg, hogy az eredeti csomóértékek közül kihagyjuk u_i -t.

10. Tétel (Burkológörbe_m (Juhász & Hoffmann, 2003)). *Az m multiplícitású u_i csomóérték változtatásával kapott*

$$\mathbf{g}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+m}], \quad 0 < m < k, \quad k > 2$$

görbesereg elemeire és a

$$\mathbf{h}(v) = \sum_{l=i-k+m}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-m}(v), \quad v \in [v_{i-1}, v_i]$$

görbére

$$\left. \frac{d^r}{dv^r} \mathbf{h}(v) \right|_{v=u_i} = \left. \frac{d^r}{du^r} \mathbf{g}(u, u_i) \right|_{u=u_i} \prod_{j=1}^m \frac{k-j-r}{k-j}, \quad r \geq 0$$

teljesül, ahol

$$v_j = \begin{cases} u_j, & \text{ha } j < i, \\ u_{j+m}, & \text{ha } j \geq i, \end{cases}$$

vagyis az m -szeres u_i csomóértéket kihagyjuk.

A fenti eredmények racionális B-szplájn-görbékre is kiterjeszthetők, felhasználva, hogy a racionális B-szplájn-görbék centrális vetítéssel származtathatók nemracionális B-szplájn-görbékből.

A B-szplájn-görbe valamely csomóértékének változtatásakor a görbe pontjainak pályagörbéi általában racionális görbék, melyek sajátos esetben egyenes szakasszá válhatnak. Ezek a sajátos esetek gyakorlati szempontból érdekesek, mert ez egyszerűbb kényszeres alakváltoztatást tesz lehetővé.

11. Tétel (Pályagörbe ($\tilde{u} < u_i$) (Juhász & Hoffmann, 2001)). *Az u_i csomóérték változtatásakor a*

$$\mathbf{g}_{i-z}(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=i-z-k+1}^{i-z} N_l^k(\tilde{u}, u_i) \mathbf{d}_l, \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

pályagörbe u_i -ben $(k-z)$ -edfokú racionális görbe $\forall \tilde{u} \in [u_{i-z}, u_{i-z+1})$, $z = 1, \dots, k-1$ esetén.

Ez tehát azt jelenti, hogy az $\mathbf{s}_{i-1}$ ív pontjainak pályagörbéi $(k-1)$ -edfokú, az $\mathbf{s}_{i-2}(u)$ ív pontjaié $(k-2)$ -edfokú racionális görbék, az $\mathbf{s}_{i-k+1}$ ív pontjainak pályagörbéi pedig már egyenes szakaszok, melyek a $\mathbf{d}_{i-k}, \mathbf{d}_{i-k+1}$ kontrollpontokat összekötő egyenessel párhuzamosak.

12. Tétel (Pályagörbe ($\tilde{u} > u_i$) (Juhász & Hoffmann, 2001)). *Az u_i csomóérték változtatásakor a*

$$\mathbf{g}_{i+z}(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=i+z-k+1}^{i+z} N_l^k(\tilde{u}, u_i) \mathbf{d}_l, \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

pályagörbe u_i -ben $(k-z-1)$ -edfokú racionális görbe $\forall \tilde{u} \in [u_{i+z}, u_{i+z+1})$, $z = 0, \dots, k-2$ esetén.

Tehát az $\mathbf{s}_{i+k-2}$ ív pontjainak pályagörbéi a $\mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{d}_i$ kontrollpontokat összekötő egyenessel párhuzamos szakaszok.

Vizsgálatunk kiterjedt az u_i és u_{i+2k-3} egyszeres csomóértékek szimmetrikus változtatásakor kapott pályagörbékre is. Az u_i és u_j ($i < j$) csomóértékek szimmetrikus elmozdításán az $u_i + \lambda$, $u_j - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, típusú változtatást értjük. A csomóértékek monotonitásának megőrzése érdekében $\lambda \in [-c, c]$, $c = \min\{u_i - u_{i-1}, u_{i+1} - u_i, u_j - u_{j-1}, u_{j+1} - u_j\}$.

A görbe $\mathbf{s}_{i+k-2}(u)$ íve az, amelyre mind u_i , mind u_{i+2k-3} hatással van,

13. Tétel (Szimmetrikus változtatás (Juhász, 2001)). *A $\mathbf{g}_{i+k-2}(u, \lambda)$, $\lambda \in [-c, c]$ pályagörbék akkor és csak akkor egyenes szakaszok, ha $u_{i+k-1} - u_i = u_{i+2k-3} - u_{i+k-2}$ teljesül.*

A (Juhász, 2001) cikkünkben ennek $k = 3, 4$ eseteit vizsgáltuk részletesen.

A csomóérték változtatásakor a módosított görbeív mindig az eredeti ív konvex burkán belül marad, ami biztosítja, hogy a módosítás során a görbe elég jól megőrzi alapvető jellegét. A csomóértékekkel való alakmódosítás legnagyobb nehézsége, hogy a tervezőrendszerek felhasználói nem sokat tudnak a csomóértékekről, azok szerepéről. Ezért olyan módosítási eljárásokat kell kidolgozni, melyek használata nem igényli a csomóértékek alaposabb ismeretét. Az a legjobb, ha szemléletes geometriai feltételekkel adható meg az alakmódosítás. További probléma, hogy egyetlen csomóérték megváltoztatása általában csekély mértékben módosítja a görbe alakját. Több csomóérték egyidejű változtatása azonban már jelentősebb alakváltozást idéz elő. Harmadfokú nemracionális B-szplajn-görbéknek három szomszédos csomóérték módosításán alapuló, adott geometriai feltételeket kielégítő alakmódosításaira dolgoztunk ki eljárásokat. A módszer lényege, hogy a harmadfokú görbével kapcsolatos illeszkedési és érintési problémát a burkológörbe segítségével a sokkal hatékonyabban kezelhető parabolával kapcsolatos másodfokú feladatra vezetjük vissza. Ez lehetővé teszi olyan felhasználói felület kialakítását, amely nem igényli a felhasználtól a csomóértékek beható ismeretét (lásd (Juhász & Hoffmann, 2004)).

2.3. Kontrollponttal adott görbék szingularitása, konvexitása

A geometriai modellezés során gyakran van szükség a görbék szinguláris pontjainak (csúcs-, önmetszés-, nulla görbületű vagy eltűnő torziójú pontjainak) megtalálására, konvexitásuk eldöntésére. A tervezők általában szeretnék elkerülni a szingularitásokat, azonban speciális alkalmazásoknál előfordulhat, hogy kifejezetten szingularitásra törekednek. Harmadfokú paraméteres görbék esetére számos publikációt találhatunk ebben a témában, lásd pl. (Su & Liu, 1983), (Wang, 1981), (Stone & de Rose, 1989), (Meek & Walton, 1990), (Kim, 1993), (Sakai, 1999). A problémát tetszőleges fokszámú polinomiális és racionális paraméteres görbékre vizsgálta (Manocha & Canny, 1992), racionális Bézier-görbékre (Monterde, 2001), általános racionális görbékre pedig (Li & Cripps, 1997).

Az előbbieken felsoroltakhoz képest a paraméteres görbék szélesebb osztályára, az (1) alakban felírható görbékre vizsgáltuk a problémát, mely valódi részhalmazként

tartalmazza a fent idézett munkákban tanulmányozott görbéket is. Ez lehet sík- vagy térgörbe, attól függően, hogy a $\mathbf{d}_j$ kontrollpontok sík- vagy térbeliek. Az F_j kombináló függvényekre két megszorítást teszünk: legyenek elegendően sokszor folytonosan differenciálhatóak és legyen hatásuk a görbe alakjára a teljes értelmezési tartományon, azaz a görbe legyen globálisan változtatható.

Az általunk javasolt módszer lényege, hogy a tetszőlegesen kiválasztott $\mathbf{d}_i$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ kontrollpont helyét változtatjuk, miközben a többi rögzítjük, és keressük a mozgatható $\mathbf{d}_i$ kontrollpont azon helyzetét, melyek az (1) görbén szingularitást eredményeznek. A vizsgálat a csúcspont ($\dot{\mathbf{g}}(u) = \mathbf{0}$), a nullagörbületű pont, az önmetszéspon és nulla torziójú pont detektálására terjedt ki, továbbá a módszer alkalmas a görbe globális konvexitásának eldöntésére is. Az eredmények a (Juhász, 2006), (Juhász, 2007) és (Juhász, 2011) cikkekben jelentek meg.

A görbék szingularitásainak vizsgálatakor használatos diszkriminánst adaptáljuk az (1) görbékre.

9. Definíció (Diszkriminánsgörbe (Juhász, 2006)). Az (1) görbe i -edik diszkriminánsgörbén a

$$\mathbf{c}_i(u) = -\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(u)}{\dot{F}_i(u)}, \quad u \in [a, b], i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

görbét értjük, ahol

$$\mathbf{r}_i(u) = \sum_{j=0, j \neq i}^n F_j(u) \mathbf{d}_j$$

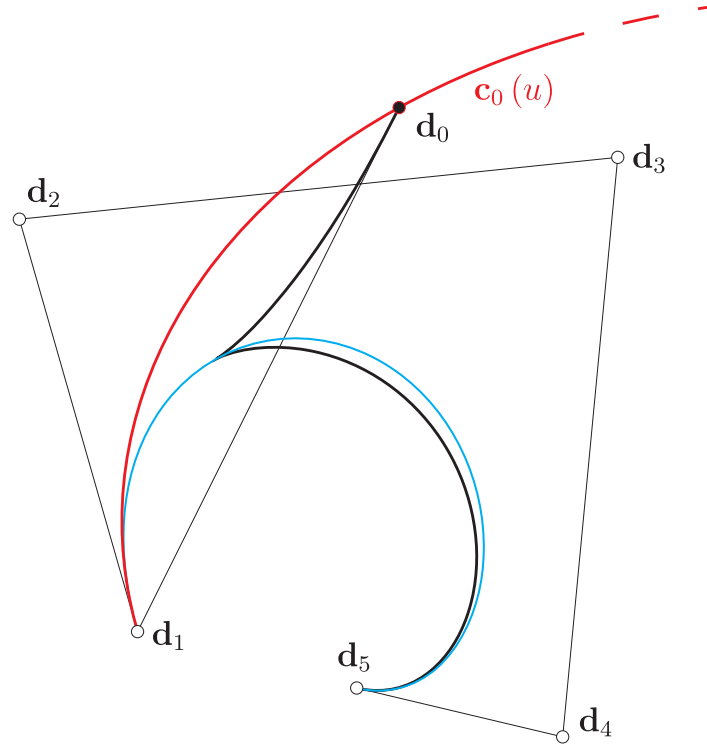
és feltételezzük, hogy a nevező nem tűnik el.

Módszerünkben ez a diszkriminánsgörbe központi szerepet játszik, segítségével jól jellemezhetők a görbe szingularitásai. Az alábbiakban a kapott eredményeket foglaljuk össze.

14. Tétel (Csúcspont (Juhász, 2006)). Az (1) görbe $\mathbf{g}(\bar{u})$, $\bar{u} \in [a, b]$ pontja akkor és csak akkor csúcspont, ha a $\mathbf{d}_i$ kontrollpont a diszkriminánsgörbe $\mathbf{c}_i(\bar{u})$ pontján van.

Vagyis a $\mathbf{d}_i$ kontrollpont azon helyzetei, melyek a görbén csúcspontot eredményeznek, maga a $\mathbf{c}_i$ diszkrimináns. Ezt szemlélteti a 3. ábra egy ötödfokú Bézier-görbével. Az ábrán a $\mathbf{c}_0$ diszkrimináns mellett a csúcspontok mértani helye (kék görbe) is látható.

15. Tétel (Eltűnő görbület (Juhász, 2006)). Az (1) görbe $\mathbf{g}(\bar{u})$, $\bar{u} \in [a, b]$ pontbeli görbület $\dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0$ esetén akkor és csak akkor tűnik el, ha a $\mathbf{d}_i$ kontrollpont a $\mathbf{c}_i$ diszkrimináns $\mathbf{c}_i(\bar{u})$ pontbeli érintő egyenesén van, de nem esik egybe a $\mathbf{c}_i(\bar{u})$ ponttal. A $\mathbf{d}_i$ kontrollpont azon helyzeteinek mértani helye, melyek az (1) görbén nullagörbületű pontot eredményeznek, a $\mathbf{c}_i$ diszkrimináns érintő felülete.



3. ábra. Ötödfokú Bézier-görbe (fekete), c_0 diszkriminánsa (piros) és a csúcsponatok által leírt görbe (kék)

16. Tétel (Önmetszéspon (Juhász, 2006)). A d_i kontrollpont azon helyzeteinek mértani helye, melyek önmetszésponatot eredményeznek az (1) görbén, az

$$l_i(u, \delta) = -\frac{\mathbf{r}_i(u + \delta) - \mathbf{r}_i(u)}{F_i(u + \delta) - F_i(u)}, \quad u \in [a, b], \quad \delta \in (0, b - u] \quad (14)$$

felület.

17. Tétel (Eltűnő torzió (Juhász, 2007)). Az (1) görbe $\mathbf{g}(\bar{u})$, $\bar{u} \in [a, b]$ pontbeli torziója $\dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0$ esetén akkor és csak akkor tűnik el, ha a d_i kontrollpont a c_i diszkrimináns $c_i(\bar{u})$ pontbeli simulósíkján van.

Ha az (1) görbe kombináló függvényeinek összege 1 (azaz a függvényrendszer normalizált, ami a leggyakrabban használt görbeleírásoknál teljesül), akkor további információkat is tudunk mondani a szingularitásokról.

18. Tétel ((Juhász, 2007)). Ha az (1) görbe a kontrollpontjainak baricentrikus kombinációja, akkor a c_i diszkrimináns a $\{d_0, d_1, \dots, d_n\} \setminus \{d_i\}$ kontrollpontok baricentrikus kombinációja.

Ennek két fontos következménye van.

2. Következmény ((Juhász, 2007)). Ha a kombináló függvények normalizáltak, akkor $n = 3$ esetén a diszkrimináns mindig síkgörbe és az önmetszésponatok felülete síktartománnyá degenerálódik, tehát $n = 3$ esetén csak síkbeli (1) alakban adott görbének lehet csúcspontja, önmetszésponata vagy nullagörbületű pontja.

3. Következmény ((Juhász, 2007)). Ha a kombináló függvények normalizáltak, akkor $n = 3$ esetén az (1) görbének a torziója vagy a görbe minden pontjában eltűnik, vagy sehol sem.

A módszer lehetőséget ad a szingularitások vizsgálatán túl, síkgörbék globális konvexitásának vizsgálatára is.

10. Definíció (Konvex görbe (Pottmann & Wallner, 2001)). Egy síkgörbét konvexnek nevezünk, ha az valamely síkbeli konvex tartomány határán van.

19. Tétel (Konvexitásvizsgálat (Juhász, 2011)). Az (1) síkgörbe pontosan akkor konvex, ha az alábbi három feltétel teljesül:

- a görbének nincs csúcs- vagy inflexiós pontja;
- nem lehet érintőt húzni a $\mathbf{d}_i$ kontrollpontból az önmetszésponatok (14) felületének

$$\mathbf{l}_i(u, b - u) = -\frac{\mathbf{r}_i(b) - \mathbf{r}_i(u)}{F_i(b) - F_i(u)}, \quad u \in [a, b] \quad (15)$$

határgörbéjéhez;

- nincs olyan

$$\mathbf{q}_i(u) = (\mathbf{r}_i(u) - \mathbf{r}_i(b)) \dot{F}_i(b) + \dot{\mathbf{r}}_i(b) (F_i(b) - F_i(u))$$

irányú egyenes, mely áthalad a $\mathbf{d}_i$ kontrollponton és metszi a (15) görbét.

Hivatkozások

- Au, C. K., & Yuen, M. F. (1995). Unified approach to NURBS curve shape modification. *Computer-Aided Design*, 27(2), 85–93.
- Bézier, P. (1966). Definition numérique des courbes et surfaces i. *Automatisme*, 11, 625–632.
- Cao, J., & Wang, G. (2007). Relation among C-curve characterization diagrams. *Journal of Zhejiang University-Science A*, 8(10), 1663–1670.
- Carnicer, J. M., & Peña, J. M. (1994). Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of B-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 11(6), 635–656.
- de Casteljau, P. (1959). *Outillage méthodes calcul* (Tech. Rep.). Paris: André Citroën Automobiles S. A.
- Chen, Q., & Wang, G. (2003). A class of Bézier-like curves. *Computer Aided Geometric Design*, 20(1), 29–39.

- Farin, G. (1988). *Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical guide*. Academic Press.
- Farin, G. (1989). Rational curves and surfaces. In T. Lyche & L. L. Schumaker (Eds.), *Mathematical methods in Computer Aided Geometric Design* (pp. 195–206). Boston: Academic Press.
- Farin, G. (1995). *NURB curves and surfaces: from projective geometry to practical use*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters.
- Gu, K., Pati, D., & Dunson, D. B. (2014). Bayesian multiscale modeling of closed curves in point clouds. *Journal of the American Statistical Association*, 109(508), 1481–1494.
- Hoschek, J., & Lasser, D. (1993). *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters.
- Hu, S. M., F.Li, Y., Ju, T., & Zhu, X. (2001). Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints. *Computer-Aided Design*, 33(12), 903–912.
- Huang, Y., & Wang, G. (2007). An orthogonal basis for the hyperbolic hybrid polynomial space. *Science in China Series F: Information Sciences*, 50(1), 21–28.
- Juhász, I. (1999). Weight-based shape modification of NURBS curves. *Computer Aided Geometric Design*, 16(5), 377–383.
- Juhász, I. (2001). A shape modification of B-spline curves by symmetric translation of two knots. *Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae*, 28, 69–77.
- Juhász, I. (2006). On the singularity of a class of parametric curves. *Computer Aided Geometric Design*, 23(2), 146–156.
- Juhász, I. (2007). Vanishing torsion of parametric curves. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 8(4), 593–595.
- Juhász, I. (2011). A convexity test for control point based curves. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38, 37–44.
- Juhász, I., & Bancsik, Z. (2003). Increasing the degree of closed B-spline curves. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(7–9), 877–882.
- Juhász, I., & Hoffmann, M. (2001). The effect of knot modifications on the shape of B-spline curves. *Journal for Geometry and Graphics*, 5(2), 111–119.
- Juhász, I., & Hoffmann, M. (2003). Modifying a knot of B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 20(5), 243–245.
- Juhász, I., & Hoffmann, M. (2004). Constrained shape modification of cubic B-spline curves by means of knots. *Computer-Aided Design*, 36(5), 437–445.
- Juhász, I., & Róth, Á. (2010). Closed rational trigonometric curves and surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(8), 2390–2404.
- Karousos, E. I., Ginnis, A. I., & Kaklis, P. D. (2009). Controlling torsion sign. *Computer Aided Geometric Design*, 26(4), 396–411.
- Kim, D. K. (1993). Hodograph approach to geometric characterization of parametric cubic curves. *Computer-Aided Design*, 25(10), 644–654.
- Li, Y. J., & Wang, G. Z. (2006). Symmetric alteration of four knots of B-spline and NURBS surfaces. *Journal of Zhejiang University: Science A*, 7(6), 1084–1087.

- Li, Y. M., & Cripps, R. J. (1997). Identification of inflection points and cusps on rational curves. *Computer Aided Geometric Design*, 14(5), 491–497.
- Lü, Y., Wang, G., & Yang, X. (2002). Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 19(6), 379–393.
- Manocha, D., & Canny, J. F. (1992). Detecting cusps and inflection points in curves. *Computer Aided Geometric Design*, 9(1), 1–24.
- Meek, D. S., & Walton, D. J. (1990). Shape determination of planar uniform cubic B-spline segments. *Computer-Aided Design*, 22(7), 434–441.
- Monterde, J. (2001). Singularities of rational Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 18(8), 805–816.
- Piegl, L. (1989). Modifying the shape of rational B-splines. Part 1: curves. *Computer-Aided Design*, 21(8), 509–518.
- Piegl, L. (1991). On NURBS: A survey. *IEEE Computers Graphics and Applications*, 11(1), 55–71.
- Piegl, L., & Tiller, W. (1995). *The NURBS book*. Springer-Verlag.
- Pottmann, H., & Wagner, M. G. (1994). Helix splines as an example of affine tchebycheffian splines. *Advances in Computational Mathematics*, 2, 123–142.
- Pottmann, H., & Wallner, J. (2001). *Computational line geometry*. Berlin: Springer-Verlag.
- Pourazady, M., & Xu, X. (2006). Direct manipulations of NURBS surfaces subjected to geometric constraints. *Advances in Computational Mathematics*, 30(4), 598–609.
- Róth, Á., & Juhász, I. (2010). Control point based exact description of a class of closed curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 27(2), 179–201.
- Róth, Á., Juhász, I., Schicho, J., & Hoffmann, M. (2009). A cyclic basis for closed curve and surface modeling. *Computer Aided Geometric Design*, 25(5), 528–546.
- Sakai, M. (1999). Inflection points and singularities on planar rational cubic curve segments. *Computer Aided Geometric Design*, 13(3), 149–156.
- Sánchez-Reyes, J. (1997). A simple technique for NURBS shape modification. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 17(1), 52–59.
- Sóbester, A., & Forrester, A. I. J. (2014). *Aircraft aerodynamic design: Geometry and optimization*. Chichester, UK: Wiley Blackwell.
- Stone, M. C., & de Rose, T. D. (1989). A geometric characterization of parametric cubic curves. *ACM Transactions on Graphics*, 8(3), 147–163.
- Su, B., & Liu, D. (1983). An affine invariant and its application in computational geometry. *Scientia Sinica (series A)*, 24(3), 259–267.
- Tuli, M., Reddy, N. V., & Saxena, A. (2006). Constrained shape modification of B-spline curves. *Computer-Aided Design and Applications*, 3(14), 437–446.
- Wang, C. Y. (1981). Shape classification of the parametric cubic curve and parametric B-spline cubic curve. *Computer-Aided Design*, 13(4), 199–206.
- Wang, G., & Chen, Q. (2004). NUAT B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 21(2), 193–205.

- Wang, G., & Li, Y. (2006). Optimal properties of the uniform algebraic trigonometric B-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 23(2), 226–238.
- Yin, Z. W. (2004). Reverse engineering of a NURBS surface from digitized points subject to boundary conditions. *Computers & Graphics-UK*, 28(2), 207–212.
- Zhang, J. (1996). C-curves: An extension of cubic curves. *Computer Aided Geometric Design*, 13(3), 199–217.
- Zhang, J. (1997). Two different forms of C-B-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 14(1), 31–41.
- Zhang, J. W., Krause, F. L., & Zhang, H. (2005). Unifying C-curves and H-curves by extending the calculation to complex numbers. *Computer Aided Geometric Design*, 22(9), 865–883.
- Zhao, H., & Wang, G. (2007). Shape control of cubic H-Bézier curve by moving control point. *Journal of Information and Computational Science*, 4(2), 871–878.