

Válasz Hajdú András bírálataira

Mindenekelőtt köszönöm a bírálatot.

1. Kérdéscsoport

“A 2. fejezethez kötődően, a kiinduló trigonometrikus függvények bázisával kapcsolatban felmerülhetnek-e hatékonysággal kapcsolatos problémák? Például, a fokszámnövelés vonatkozó konvergenciaeredményben (2.8. tétel) a konvergenciasebességet milyen mértékben befolyásolja az n volumene, találkozhatunk-e számítási nehézségekkel ha ez túl nagy, szükség lehet-e numerikus módszerekre? Hasonlóan, az eredeti bázisfüggvények helyett más, polinom-alapú bázisoknak lehet-e létjogosultsága, illetve lehet-e értelme (például hatékonysági szempontból) a bázisfüggvények approximálásának, illetve ennek milyen hatása lehet az elméleti eredményekre?”

Válasz

i) A 2.8. tételbeli konvergencia sebessége logaritmikus, ugyanis az

$$a_z = \frac{\binom{2(n+z)}{n+z}}{\binom{2(n+z)}{z+k}}$$

sorozatra $\lim_{z \rightarrow \infty} a_z = 1$ teljesül, továbbá $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|a_{z+1}-1|}{|a_z-1|} = 1$ és $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|a_{z+2}-a_{z+1}|}{|a_{z+1}-a_z|} = 1$.

Számítási nehézséget, numerikus pontatlanságot nem tapasztaltunk az implementáció és a tesztelések során még $n = 10^4$ esetén sem. A görbe pontjainak kiszámításakor a számítási sebességet és pontosságot leginkább a normalizáló együttható kiértékelése befolyásolja, aminek célszerű a rekurziós alakját használni a binomiális helyett (dolgozat 2.1. következmény). A rendszámnövelés, a bázistranszformáció és az egzakt kontrollpont-alapú leírás esetén nem tudjuk kiváltani a binomiális együtthatókat, ekkor a binomiális együtthatók előzetes kiértékelésével és keresőtáblákban való eltárolásával gyorsíthatjuk a számítást.

Nem említ számítási nehézséget a Gu K., Pati D., Dunson D.B., Bayesian Multiscale Modeling of Closed Curves in Point Clouds, *Journal of the American Statistical Association* **109**(508):1481–1494 (2014) képfeldolgozási alkalmazás sem, amelyben egyszeresen összefüggő síkbeli tartományok határát közelítik ciklikus görbével. Az eljárás fontos eleme a ciklikus görbe rendszámnövelése.

ii) A bázisfüggvények polinommal való approximálására nem merült fel igény, másrészt nem is lenne szerencsés, ugyanis ezzel elveszítenénk a ciklikus görbék olyan, fontos tulajdonságait, mint a tetszőleges simaság és a hagyományos trigonometrikus görbék megadott

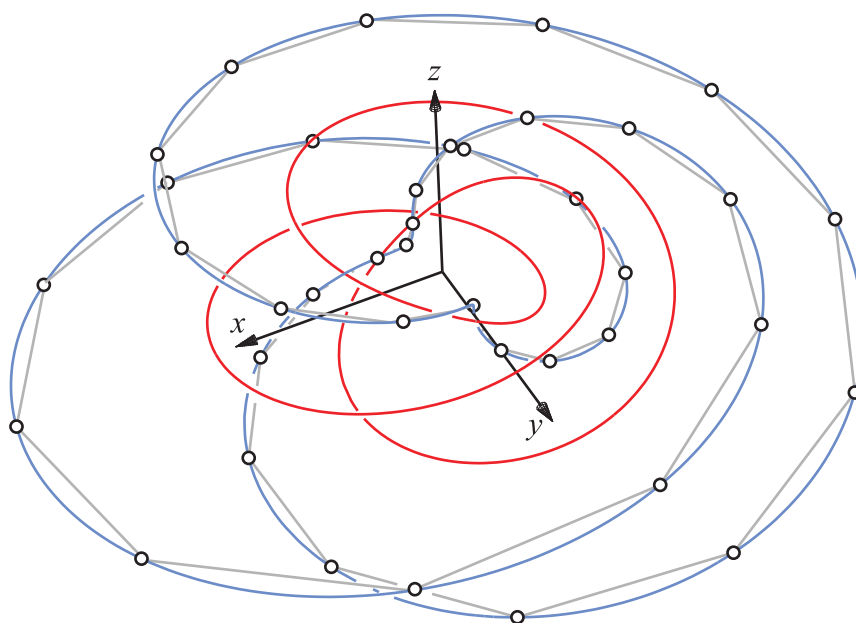
osztályának egzakt reprezentálása. Ha ezeket a görbéket polinomiális görbével akarnánk közelíteni, akkor rendelkezésre állnak közelítő konverziós módszerek, lásd pl. Hoschek, J., D. Lasser, D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A. K. Peters, 1993 könyv 10.2.1. szakaszát. A nemlineáris bázisfüggvények kiértékelésének elkerülésére ad egy olyan numerikus (elsőrendű differenciálegyenlet-rendszereket megoldó) módszert a Xunnian Yang and Jialin Hong, *Dynamic evaluation of free-form curves and surfaces*, *SIAM Journal On Scientific Computing*, in press. cikk, amely csak elemi aritmetikai műveleteket tartalmaz, ha a bázisfüggvények által felfeszített tér a deriválásra nézve zárt. A módszer alkalmazható lenne a ciklikus függvényekre is a 2.5. tétel következtében.

2. Kérdéscsoport

“A 3. fejezethez kötődően merültek fel bennem a lehetséges 3D-s kiterjesztések, mely területtel kapcsolatos kérdéseimet az egész dolgozatra nézve fogalmazom meg. A 3D-s tervezésnél milyen további szempontok vannak, amiket figyelembe kell venni és ez várhatóan milyen módon befolyásolná az elméleti eredményeket? Például, milyen elem hova menjen át, milyen további szingularitások lehetségesek (4. fejezet)?”

Válasz

A dolgozatban szereplő eredmények mind sík- mind térgörbére érvényesek, a kontrollpontokat tartalmazó tér dimenziójára a $d > 1$ feltételnek kell teljesülni. (Kivétel természetesen az inflexiós pont meghatározása és a konvexitásvizsgálat, melyek csak síkgörbére értelmezettek.) Kétségtelen, hogy az ábrák túlnyomó többsége síkbeli példákat szemléltet. A mellékelt ábrán egy tóruszcsoport láthatunk (piros görbe) kontrollpolicsonjával és a kontrollpontok mértani helyével (kék görbe).



A harmadfokú B-szplajn-görbék csomóértékekkel való kényszeres alakmódosításánál annyi megszorítás van térgörbe esetén, hogy a geometriai kényszereknek (pont, érintő) a burkoló parabolaív síkjában kell lenni.

3. Kérdéscsoport

“A 4. fejezethez kötődően felmerülhet, hogy a tárgyalt (természetes és precízen megfogható) esetek mellet vizsgálhatók lennének-e más jellegű, alaktani szempontból gyakorlatban vélhetőleg hasznos egyéb szingularitások? Például, elnyúltságra, túl kis/nagy görbületre/torzióra vonatkozó elvárások/elkerülési kényszerek. Speciálisan, milyen feltételek mellet milyen energiafüggvények lehetnek alkalmasak, például az ívhossz + görbület alapú görbementi integrálokra alapuló energiafüggvények mintájára?”

Válasz

A dolgozatban a mozgó kontrollpontra alapozva a görbék (sík- és térgörbék) speciális tulajdonságú pontjait vizsgáltuk. A kérdés tehát az, hogy ezzel a módszerrel lehet-e a göbe valamely globális tulajdonságát előírt módon változtatni? Az egzakt görbület- vagy torziószámításra alapozva ez nem tűnik kivitelezhetőnek, ha a mozgó kontrollpontra egzakt mértani helyet szeretnénk meghatározni. (Görbék globális optimalizálása az egzakt görbület- vagy torziószámításra alapozva heurisztikus keresőalgoritmusokkal, vagy nemlineáris egyenletrendszerek numerikus megoldásával lehetséges.) Ezek a mennyiségek azonban a görbe különböző rendű deriváltjai határozzák meg, melyekre alapozva megadható olyan funkcionál, aminek a használata ígéretesnek látszik.

A

$$\mathbf{g}(u) = \sum_{j=0}^n F_j(u) \mathbf{d}_j, \quad u \in [a, b]$$

görbe $\mathbf{d}_k$ kontrollpontját mozgatjuk. A változó és állandó részeket szétválasztva a görbe

$$\mathbf{g}(u) = F_k(u) \mathbf{d}_k + \mathbf{r}_k(u), \quad \mathbf{r}_k(u) = \sum_{j=0, j \neq k}^n F_j(u) \mathbf{d}_j, \quad u \in [a, b] \quad (1)$$

alakban írható fel.

Bevezetjük az

$$\int_a^b \sum_{r=1}^{\rho} w_r \|\mathbf{g}^{(r)}(u)\|^2 du \quad (2)$$

funkcionált, ahol a $\mathbf{g}^{(r)}(u)$ a görbe u szerinti r -edrendű deriváltját jelöli, $\rho \geq 1$ és w_r , $(\sum_{r=1}^{\rho} w_r \neq 0)$ nemnegatív súlyok. Az ilyen leegyszerűsítés és maga a funkcionál nem szokatlan, pl. ennek $\rho = 2$ esetét használták a Wallner, J., Pottmann, H., Hofer, M., Fair Webs, *The Visual Computer*, **23**(1):83–94 (2007) cikkben.

Ebbe a görbe (1) alakját behelyettesítve

$$\begin{aligned} & \int_a^b \sum_{r=1}^{\rho} w_r \langle \mathbf{g}^{(r)}(u), \mathbf{g}^{(r)}(u) \rangle du \\ &= \sum_{r=1}^{\rho} w_r \left(\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{d}_k \rangle \int_a^b \left(F_k^{(r)}(u) \right)^2 du + 2 \left\langle \int_a^b F_k^{(r)}(u) \mathbf{r}_k^{(r)}(u) du, \mathbf{d}_k \right\rangle \right. \\ & \quad \left. + \int_a^b \langle \mathbf{r}_k^{(r)}(u), \mathbf{r}_k^{(r)}(u) \rangle du \right) \end{aligned}$$

ami

$$\alpha_k \langle \mathbf{d}_k, \mathbf{d}_k \rangle + 2 \langle \mathbf{d}_k, \boldsymbol{\beta}_k \rangle + \gamma_k \quad (3)$$

alakban írható fel az

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{r=1}^{\rho} w_r \int_a^b \left(F_k^{(r)}(u) \right)^2 du \\ \boldsymbol{\beta}_k &= \sum_{r=1}^{\rho} w_r \int_a^b F_k^{(r)}(u) \mathbf{r}_k^{(r)}(u) du = \sum_{r=1}^{\rho} w_r \sum_{j=0, j \neq k}^n \mathbf{d}_j \int_a^b F_k^{(r)}(u) F_j^{(r)}(u) du \\ \gamma_k &= \sum_{r=1}^{\rho} w_r \int_a^b \langle \mathbf{r}_k^{(r)}(u), \mathbf{r}_k^{(r)}(u) \rangle du = \sum_{r=1}^{\rho} w_r \sum_{i=0, i \neq k}^n \sum_{j=0, j \neq k}^n \langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \rangle \int_a^b F_i^{(r)}(u) F_j^{(r)}(u) du \end{aligned}$$

jelölések bevezetésével, ahol a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ operátor a skaláris szorzatot jelöli.

A mozgó $\mathbf{d}_k$ kontrollpontnak a (2) funkcionált minimalizáló helyzete

$$\mathbf{d}_k = -\frac{\boldsymbol{\beta}_k}{\alpha_k},$$

ha $\alpha_k \neq 0$.

Ha a $\mathbf{d}_k$ kontrollpont azon helyzetait keressük, amire a (2) a κ értéket veszi fel, akkor γ_k helyett $\gamma_k - \kappa$ szerepel a (3) kifejezésben.

Az

$$\alpha_k \langle \mathbf{d}_k, \mathbf{d}_k \rangle + 2 \langle \mathbf{d}_k, \boldsymbol{\beta}_k \rangle + \gamma_k - \kappa$$

kifejezés az ismeretlen $x_1, \dots, x_{\delta+1}$ ($\delta = 2, 3$) homogén koordinátájú $\mathbf{d}_k$ kontrollpontra nézve egy kvadratikus forma és

$$\left\langle \mathbf{d}_k - \frac{-\boldsymbol{\beta}_k}{\alpha_k}, \mathbf{d}_k - \frac{-\boldsymbol{\beta}_k}{\alpha_k} \right\rangle + \frac{1}{\alpha_k} (\gamma_k - \kappa - \langle \boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{\beta}_k \rangle)$$

alakban írható fel, vagyis az általa meghatározott másodrendű alakzat gömb az $\mathbb{R}^\delta$ térben. A κ változtatásával kapott gömbök koncentrikusak, közös középpontjuk $-\boldsymbol{\beta}_k/\alpha_k$, ami a mozgatott kontrollpontnak a funkcionált minimalizáló helyzete. Ahhoz, hogy a gömb valós legyen az

$$\frac{1}{\alpha_k} (\gamma_k - \kappa - \langle \boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{\beta}_k \rangle) < 0$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülni.

Annak érdekében, hogy a funkcionál értéke $\kappa_1 < \kappa_2$ között legyen, a $\mathbf{d}_k$ kontrollpontnak a κ_1 és κ_2 által meghatározott gömbök közötti tartományban kell lenni.

Az alkalmazásról

Az eredmények alkalmazását illetően előre kell bocsátanom, hogy konkrét ipari alkalmazásról nem tudok, azonban görbemodellezéssel foglalkozó matematikai és műszaki témájú publikációkban felhasználták, hivatkozták az eredményeket.

1. Ciklikus görbék

A végpontban interpoláló görbeleírási módszerekkel, vagy a (racionális) B-szplájn görbével is lehet zárt görbét modellezni. Ez azonban periodikus B-szplájn-görbével csak redundáns adatok megadásával lehetséges, végpontban interpoláló görbék esetén pedig a kontrollpontoknak geometriai kényszereket kell kielégíteniük (a folytonosság rendjének növelésével egyre bonyolultabbat), és az egybeeső kezdő- és végpontban a folytonosság rendje korlátozott, nem biztosítható a tetszőleges simaság. Ebben a javasolt ciklikus görbe mindenképpen jobb, bármely korábbi módszereknél. A ciklikus bázis legfontosabb elméleti érdekessége, hogy bár nem teljesen pozitív, mégis rendelkezik a B-bázisok legtöbb kedvező tulajdonságával, köztük a hullámzáscsökkentéssel.

Természetesen a ciklikus görbe nem lehet vetélytársa a leggyakrabban alkalmazott approximáló vagy interpoláló görbeleírási módszereknek, nem lehetne egy általános célú geometriai modellező rendszer magját képező görbeleírás. Inkább rétegigény kielégítésére alkalmas, ahol szingularitásmentes paraméterezésű, magas folytonossági rendű görbeleírás szükséges.

A ciklikus görbék egy képfeldolgozásbeli alkalmazását mutatja a Gu, K., Pati, D., Dunson, D.B., Bayesian Multiscale Modeling of Closed Curves in Point Clouds, *Journal of the American Statistical Association* **109**(508):1481–1494 (2014) hivatkozás, melyben orvosi képalkotó eljárásokkal kapott egyszeresen összefüggő síkbeli pontthalmaz határának zárt görbével való modellezésére dolgoztak ki új módszert. Ehhez a ciklikus görbét használták, és a rendszert agytumor, valamint fogak kontúrjának (a fogsor panorámaképén) detektálásával tesztelték.

2. B-szplájn-görbék alakmódosítása

A kontrollpontok segítségével leírt görbék leghatékonyabb alakmódosítása a kontrollpontok elmozgatása. Más eljárások akkor kerülnek előtérbe, ha a kontrollpontok helyzetét nem akarjuk megváltoztatni, és azt szeretnénk, hogy a módosított görbe az eredeti kontrollpontok konvex burkán belül maradjon. Vagyis nem drasztikus változtatást, hanem egyfajta finomhangolást akarunk végrehajtani. A dolgozatnak a NURBS görbék súlyának

és csomóértékeinek változtatására szolgáló eljárásai is az utóbbi csoportba tartoznak. Az elméleti eredményekre épülő alakmódosítási eljárások kidolgozásánál interaktív tervezői környezetet feltételeztünk. A hivatkozó cikkek között különböző műszaki területekhez tartozók is vannak, pl.

- Hu, S. M., Li, Y. F., Ju, T., Zhu, X.: Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric onstraints, *Computer-Aided Design*, **33**(12):903–912 (2001)
- Li, K., Tan, H.-S., Misener, J.A., Hedrick, J.K., Digital map as a virtual sensor - Dynamic road curve reconstruction for a curve speed assistant, *Vehicle System Dynamics*, **46**(12): 1141–1158 (2008)
- Yang, Z., Wong, P.-K., Vong, C.-M., Lo, K.-M., Constraint-based adaptive shape deformation technology for customised product development, *International Journal of Materials and Product Technology*, **44**(1-2):1–16 (2012)
- Pérez-Arribas, F., Castañeda-Sabadell, I., Automatic modelling of airfoil data points, *Aerospace Science and Technology*, **55**(1): 449-457 (2016)

3. Szingularitásvizsgálat

Az eredmények alkalmasak interaktív tervezői környezetben szingularitások (csúcspont, eltűnő görbületű pont, önmetszéspon) detektálására, elkerülésére vagy biztosítására. A hivatkozó cikkekben elsősorban újabb bázisfüggvényekkel előállított görbék szingularitásainak vizsgálatára használták, pl.

- Zhao, H., Wang, G., Shape control of cubic H-Bézier curve by moving control point, *Journal of Information and Computational Science*, **4** (2):871–878 (2007)
- Cao, J. Wang, G., Relation among C-curve characterization diagrams, *Journal of Zhejiang University-Science A* **8**(10):1663-1670 (2007)
- Han, X.A., Huang, X.L., Ma, Y.C., Shape analysis of cubic trigonometric Bézier curves with a shape parameter, *Applied Mathematics and Computation*, **217**(6):2390–2404 (2010)

Miskolc, 2017. április 24.

Juhász Imre