

Válasz Nagy Péter bírálataira

Mindenekelőtt köszönöm a bírálatot.

Kérdés: „A zárt görbék ciklikus görbékkel való modellezésének módszere továbbfejleszthető-e gömbfelülettel diffeomorf felületek modellezésére a görbére transzverzális síkokban megadható ciklikus görbesereg segítségével?”

Válasz:

A feladat úgy is megfogalmazható, hogy adottak a körrel diffeomorf ciklikus síkgörbék, melyek síkjai merőlegesek egy adott síkra. Keresünk olyan ciklikus felületet, amely diffeomorf a gömbbel és interpolálja az adott görbéket.

A görbék kontrollpontok és bázisfüggvények kombinációjával való leírásának természetes általánosítása a felületek leírása görbék tenzori szorzataként (tensor product surface). Ezek a felületek a mozgó görbe által súrolt felületek osztályának részhalmazát képezik. (A mozgás szó itt nem mozgási transzformációt jelent, hanem olyan helyváltoztatást, mely során a görbe alakjának változását is megengedjük.)

A $\mathbf{c}_i$ kontrollpontjaival és $F_i(u)$ bázisfüggvényeivel adott

$$\mathbf{g}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i F_i(u), u \in [a, b]$$

görbének a $\mathbf{c}_i$ kontrollpontjai mozogjanak az $\mathbf{a}_{ij}$, ($j = 0, 1, \dots, m$; $\mathbf{a}_{i0} = \mathbf{c}_i$) kontrollpontjaival és $G_j(v)$ bázisfüggvényeivel adott

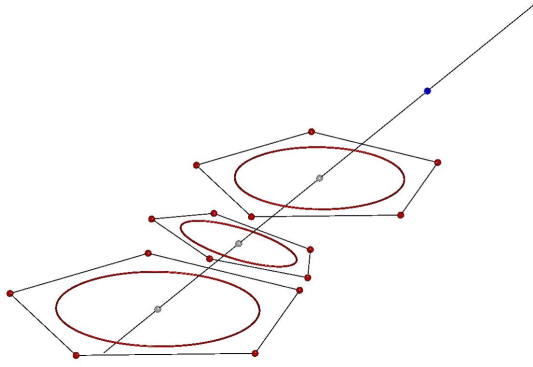
$$\mathbf{c}_i(v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{a}_{ij} G_j(v), v \in [c, d]$$

görbe mentén. A mozgó, és közben alakját is változtató $\mathbf{g}(u)$ görbe az

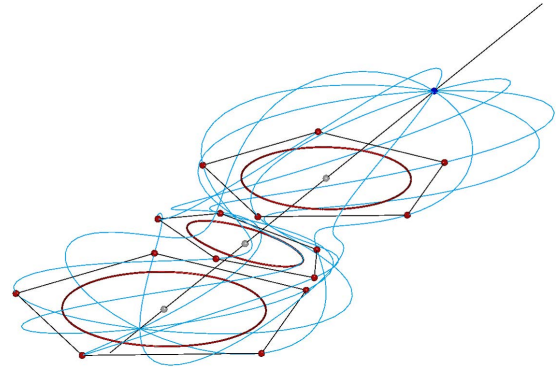
$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{a}_{ij} F_i(u) G_j(v)$$

felületet súrolja. (Az F_i és G_j bázisfüggvények lehetnek különbözőek, de a gyakorlatban ezek szinte mindig megegyeznek.)

A ciklikus bázisfüggvényekkel is lehet a fenti alakban bizonyos típusú zárt felületek modellezni, a dolgozat hivatkozási listája szerinti [63], [64] és [45] cikkekben ez szerepel is. Ciklikus felületekkel le lehet írni pl. olyan forgásfelületeket, melyek ciklikus görbék tengely körüli forgatásából származnak. Ennek egy igen speciális esete a gömb, amikor a ciklikus görbéként leírt (teljes) kört a középpontján áthaladó egyenes körül forgatjuk. Ami azt



1. ábra. Az interpolálandó ellipszisek



2. ábra. A pályagörbék

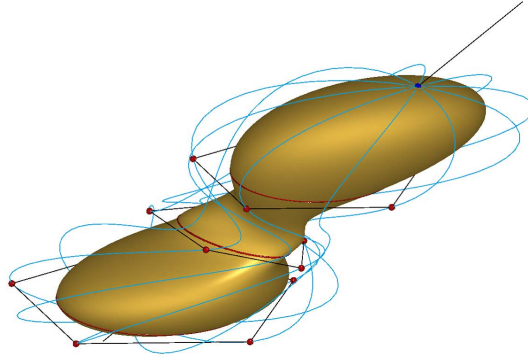
jelenti, hogy ezzel az eljárással a gömb minden pontját kétszer állítjuk elő. Ugyanilyen szerkezetű felületet kapunk pl., ha tengelyesen szimmetrikus ciklikus görbét forgatunk meg a szimmetriatengelye körül.

Ez a struktúra nem sérül, ha ezen ciklikus felületek kortollpontjait affin transzformációnak vetjük alá, mivel ez a felületeírás a kontrollpontok affin transzformációjára nézve zárt. Ha azonban tetszőlegesen változtatjuk a kontrollpontok helyzetét, ez a kettős héjszerkezet megbomlik és önmetsző, vagy a tórusszal homeomorf felületet kapunk.

A feladatnak arra az esetre sikerült megoldást adni, amikor kollineáris középpontú, egymással párhuzamos síkokban fekvő ellipszisekre akarunk a gömbbel diffeomorf ciklikus felületet interpolálni (lásd az 1. ábrát). Feltételezzük, hogy az ellipsziseket leíró ciklikus görbék fokszáma megegyezik, ami nem jelent megszorítást, mivel ez fokszámnöveléssel mindig elérhető. A különböző síkokban fekvő ellipszisek tengelyeinek nem kell párhuzamosnak lenni.

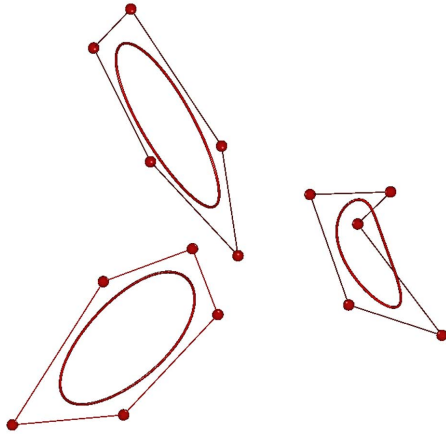
A megadott ellipszisek paramétervonalai lesznek a létrehozandó felületnek. Jelölje $\mathbf{d}_{ij}$ az i -edik ellipszis ciklikus reprezentációjának j -edik kontrollpontját, $i = 0, 1, \dots, \ell$, $j = 0, 1, \dots, m$. A j -edik kontrollpontok pályagörbéje olyan ciklikus görbe lesz, amelyik interpolálja a $\mathbf{d}_{ij}$ ($i = 0, 1, \dots, \ell$) kontrollpontokat, ezeknek a hozzájuk tartozó ellipszis középpontjára vonatkozó tükörképét, valamint az ellipszisek középpontjait összekötő egyenes egy kiválasztott $\mathbf{q}$ pontját. Az utóbbin minden pályagörbét átvezetünk (lásd a 2. ábrát). Az interpoláció során egyenközű paraméterezést kell használnunk, és minden pályagörbe fokszáma $n = 2(\ell + 1)$.

A pályagörbék kontrollpontjai lesznek a keresett interpoláló felület kontrollpontjai. A 3. ábrán a megoldást láthatjuk. Ezzel az eljárással olyan ciklikus felületet kapunk, amely kettős héjszerkezetet ír le, azonban előfordulhat, hogy önmetsző lesz. Két eszközünk van az interpoláló felület alakjának befolyásolására. Az egyik a $\mathbf{q}$ pont helyének megválasztása, a másik pedig a különböző szinteken lévő ellipszisek kontrollpontjainak átindexelése (a

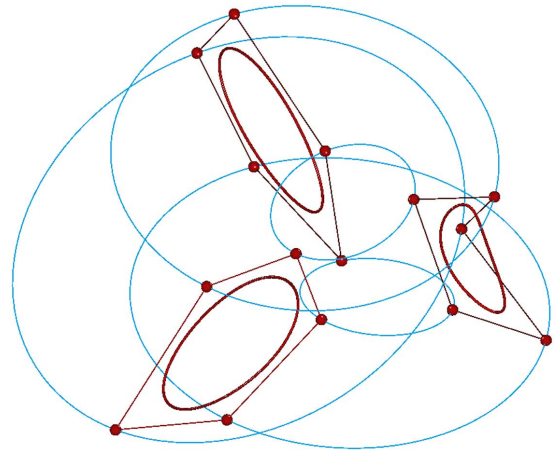


3. ábra. Gömbbel diffeomorf interpoláló ciklikus felület

ciklikus görbe invariáns a kontrollpontok ciklikus permutációjával szemben). A feladatnak nincs mindig megoldása, azonban, ha van akkor végtelen sok, ugyanis a $\mathbf{q}$ pont helye változtatható egy szakaszon.

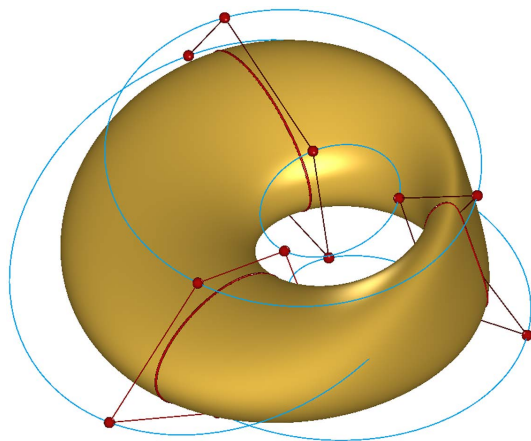


4. ábra. Az interpolálandó görbék



5. ábra. A kontrollpontok pályagörbéi

Ha gömb helyett tóruszal diffeomorf felületet szeretnénk előállítani, akkor kevesebb megszorítást kell tennünk. Például, ha egy síksorra illeszkedő, egynél több, páratlan számú, megegyező foksámú, a körrel diffeomorf ciklikus görbéből indulunk ki (lásd a 4. ábrát), akkor általában lesz a feladatnak megoldása. Ehhez az adott görbék megfelelő kontrollpontjainak pályagörbéit kell interpolációval előállítani (lásd az 5. ábrát), ezek kontrollpontjai alkotják az interpoláló ciklikus felület kontrollpontjait, az adott görbék pedig paramétervonalai lesznek a felületnek (lásd a 6. ábrát). Ha a feladatnak van megoldása, akkor végtelen sok van, mivel végtelen sok pályagörbe interpolálható a kontrollpontokra az interpolációnál alkalmazott paraméterezés változtatásával (itt nem szükséges egyenközü paraméterezést alkalmazni).



6. ábra. A görbékét interpoláló, a tóruszal diffeomorf ciklikus felület

Miskolc, 2017. április 24.

Juhász Imre