

# Kontrollponttal adott görbék leírása, alakmódosítása és szingularitásának vizsgálata

MTA doktori értekezés

Juhász Imre

Miskolci Egyetem  
Miskolc, 2015. június

# Tartalomjegyzék

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                                                  | <b>1</b>  |
| 1.1. Görbék leírása . . . . .                                                        | 1         |
| 1.2. Alakmódosítás . . . . .                                                         | 8         |
| <b>2. Zárt görbék leírása ciklikus bázisban</b>                                      | <b>13</b> |
| 2.1. Trigonometrikus polinomok . . . . .                                             | 14        |
| 2.2. Ciklikus bázisfüggvények . . . . .                                              | 15        |
| 2.3. Ciklikus görbék . . . . .                                                       | 20        |
| 2.3.1. Zárt görbék egy osztályának egzakt leírása . . . . .                          | 23        |
| 2.4. Rendszámnövelés . . . . .                                                       | 32        |
| 2.5. Hullámzáscsökkentés . . . . .                                                   | 33        |
| 2.6. Interpoláció . . . . .                                                          | 37        |
| 2.7. Nevezetes zárt görbék leírása a ciklikus bázisban . . . . .                     | 38        |
| 2.7.1. Ellipszisek és körök . . . . .                                                | 38        |
| 2.7.2. Zárt epi- és hipocikloisok . . . . .                                          | 40        |
| 2.8. Racionális trigonometrikus görbék . . . . .                                     | 42        |
| 2.8.1. Bernoulli-féle lemniszkáta . . . . .                                          | 43        |
| 2.8.2. Zsukovszkij-féle szárnyprofil . . . . .                                       | 44        |
| <b>3. B-szplájn-görbék alakjának módosítása</b>                                      | <b>47</b> |
| 3.1. Fokszám változtatása . . . . .                                                  | 48        |
| 3.2. Súly módosítása . . . . .                                                       | 51        |
| 3.3. Csomóérték módosítása . . . . .                                                 | 56        |
| 3.3.1. Egyszeres csomóérték változtatása . . . . .                                   | 56        |
| 3.3.2. Többszörös csomóérték változtatása . . . . .                                  | 62        |
| 3.3.3. Racionális eset . . . . .                                                     | 64        |
| 3.3.4. Két csomóérték együttes változtatása . . . . .                                | 64        |
| 3.3.4.1. A $k = 3$ eset . . . . .                                                    | 65        |
| 3.3.4.2. A $k = 4$ eset . . . . .                                                    | 66        |
| 3.3.5. Harmadfokú B-szplájn-görbe előírt alakmódosítása<br>csomóértékekkel . . . . . | 67        |
| 3.3.5.1. A módosított görbe adott ponton menjen át . . . . .                         | 67        |
| 3.3.5.2. A módosított görbe adott egyenest érintsen . . . . .                        | 70        |
| 3.3.5.3. A görbe adott pontja adott helyre kerüljön . . . . .                        | 72        |
| <b>4. Kontrollponttal adott görbék szingularitása, konvexitása</b>                   | <b>77</b> |
| 4.1. Csúcspont . . . . .                                                             | 77        |
| 4.2. Eltűnő görbület . . . . .                                                       | 79        |
| 4.3. Önmetszés pont . . . . .                                                        | 80        |

|           |                                         |           |
|-----------|-----------------------------------------|-----------|
| 4.4.      | Eltűnő torzió . . . . .                 | 81        |
| 4.5.      | Konvexitás . . . . .                    | 82        |
| 4.5.1.    | 1. eset . . . . .                       | 83        |
| 4.5.2.    | 2. eset . . . . .                       | 84        |
| 4.5.3.    | Konvexitási vizsgálat . . . . .         | 84        |
| 4.6.      | Speciális eset . . . . .                | 85        |
| 4.6.1.    | Bézier-görbe . . . . .                  | 87        |
| 4.7.      | Normalizált bázisfüggvények . . . . .   | 87        |
| 4.8.      | Alkalmazás . . . . .                    | 88        |
| 4.8.1.    | Bézier-görbék szingularitásai . . . . . | 88        |
| 4.8.2.    | Ciklikus görbe diszkriminánsa . . . . . | 90        |
| <b>5.</b> | <b>Összefoglalás</b>                    | <b>93</b> |
| 5.1.      | Ciklikus görbék . . . . .               | 93        |
| 5.2.      | NURBS görbék alakmódosítása . . . . .   | 94        |
| 5.3.      | Szingularitásvizsgálat . . . . .        | 95        |
|           | <b>Hivatkozások</b>                     | <b>96</b> |

# 1. fejezet

## Bevezetés

A számítógéppel segített geometriai tervezés (Computer Aided Geometric Design – CAGD) elsősorban görbék és felületek leírásának, vizsgálatának matematikai és informatikai vonatkozásaival foglalkozik. A szóban forgó görbéket és felületeket, nagyfokú alakbeli változatosságot kifejezendő, a „szabadformájú” (free form) jelzővel is szokták illetni.

A vizsgálatok kezdete az 1960-as évek elejére tehető, a helyszínük pedig autós és repülőgépgyárak, mint pl. Citroën, Renault, Boeing, General Motors. Ezekben a gyárakban döntés született arról, hogy a termékek tervezéséhez számítógépet kell használni. Ez a munka problémák tömkelegét vetette fel, amit a tervezőmérnökök a geometria és az approximációelmélet területeit művelő matematikusokkal karöltve igyekeztek megoldani. Az elszigetelten folyó kutatások összehangolása, a kérdéskör tudományterületté formálása iránti igény a 70-es évek elején fogalmazódott meg. 1972-ben rendezték az első konferenciáját ennek a kutatási területnek, és 1984-ben adták ki az első folyóiratát Computer Aided Geometric Design címmel.

Az idők során a kutatások intenzitása fokozódott, egyre több elméleti és gyakorlati szakember foglalkozik vele, ami valószínűleg az elmélet és a mindennapi gyakorlat szoros kapcsolatának is köszönhető. Az új eredmények viszonylag gyorsan beépülnek a kereskedelmi CAD/CAM (Computer Aided Design/Computer Aided Manufacturing) szoftverekbe.

A CAGD központi problémája a görbék és felületek modellezése, mely az alakzatok leírásán túl magába foglalja azok alakjának módosítását, tulajdonságainak feltárását is.

### 1.1. Görbék leírása

Görbék leírására alapvetően három lehetőség van: az  $y = f(x)$  explicit, az  $F(x, y) = 0$  implicit és az  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  paraméteres leírási mód.

Ezek közül az első két leírási mód csak síkgörbék, a harmadik tetszőleges véges dimenziós térbeli görbék leírására alkalmas. Az explicit leírás ezen felül koordináta-rendszer függő is, ezért gyakorlatilag nem használjuk a CAGD-ben. Az implicit leírás hasznosabb, pl. könnyű eldönteni, hogy egy pont illeszkedik-e a görbére, de nehéz bejárni (pl. megrajzolni). A számítógéppel segített geometriai tervezésben egyértelműen a paraméteres leírást használjuk leggyakrabban, pontosabban a paraméteres leírás egy speciális formáját.

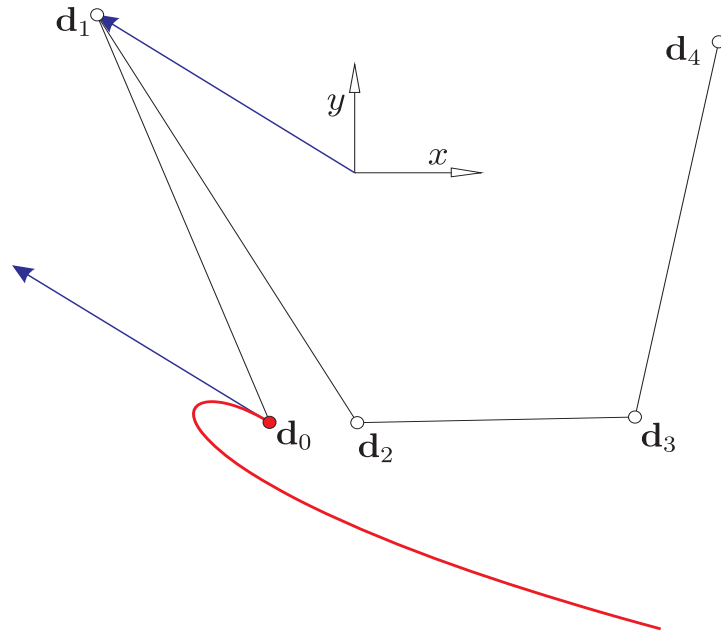
A CAGD-ben manapság a sík- és térgörbékét legtöbbször

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(u) &= \sum_{j=0}^n F_j(u) \mathbf{d}_j \\ F_j : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

alakban szokás leírni, ahol a  $\mathbf{d}_j$  pontokat kontrollpontnak, az őket összekötő törött-vonalat kontrollpoligonnak nevezzük. Tetszőleges, folytonos  $F_j$  függvények esetén folytonos vonalat kapunk. Ahhoz azonban, hogy a gyakorlatban – geometriai tervezésben – használható görbét kapjunk, az  $F_j$  függvényekre további feltételeket kell kiróni. Görbék kontrollpontokkal való megadásában úttörő szerepet játszott Bézier [3], [4], [5] és de Casteljau [13].

Eddig csak azt feltételeztük, hogy  $F_j \in C_{[a,b]}$ , azaz a függvények az  $[a, b]$  intervallumon folytonosak. Mint tudjuk, az  $[a, b]$  intervallumon folytonos függvények vektorteret alkotnak. Ez érvényes az  $[a, b]$ -n értelmezett folytonosan differenciálható függvényekre is. A folytonos differenciálhatóságot a görbe érintőjének létezése érdekében kell megkövetelni.

A CAGD-ben görbék leírására használt függvények ennek a térnek valamely jól meghatározott alteréből kerülnek ki. A leggyakrabban használt altér a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok és a racionális függvények tere, de más függvényterek is használatosak, így a legfeljebb  $2n$ -edfokú trigonometrikus polinomok tere, valamint olyan terek, melyek polinomokat és trigonometrikus, vagy hiperbolikus függvényeket is magukba foglalnak.



1.1. ábra. Hatványbázisban kontrollpontokkal adott negyedfokú görbe

Az  $F_j$  függvények tehát valamely folytonosan differenciálható függvénytérnek az elemei. Az is kíváncsú azonban, hogy az  $\mathcal{F} := \{F_j\}_{j=0}^n$  rendszer a tér bázisát alkossa. Ez a tulajdonság pl. (1.1) alakú interpoláló görbék előállításához fontos. Az interpolációs feladat ugyanis a következő: adottak a  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) pontok és a hozzájuk rendelt, egymástól különböző  $u_i \in [a, b]$  paraméterértékek, és keressük azokat a  $\mathbf{d}_j$  kontrollpontokat, melyek a  $\mathbf{g}(u_i) = \mathbf{p}_i$  feltételeket kielégítő (1.1) alakú

görbét határozzák meg. Ez a feladat az

$$\begin{bmatrix} F_0(u_0) & F_1(u_0) & \cdots & F_n(u_0) \\ F_0(u_1) & F_1(u_1) & \cdots & F_n(u_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_0(u_n) & F_1(u_n) & \cdots & F_n(u_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, amelynek mindig van egyértelmű megoldása, ha az  $\mathcal{F}$  függvényrendszer lineárisan független és az  $u_i$  paraméterértékek különbözőek.

Az  $\{F_j(u) = u^j\}_{j=0}^n$ ,  $u \in [0, 1]$  függvényrendszer az eddigi feltételeknek eleget tesz, hiszen ez a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok terének ún. hatványbázisa. A vele létrehozott

$$\mathbf{g}(u) = \mathbf{d}_0 + u\mathbf{d}_1 + \cdots + u^n\mathbf{d}_n \quad (1.3)$$

görbe  $n = 3$  esetére mutat példát az 1.1. ábra. Az (1.3) görbeleírással az a gond, hogy a  $\mathbf{d}_0$  és  $\mathbf{d}_1$  kontrollpontok kivételével ( $\mathbf{g}(0) = \mathbf{d}_0$ ,  $\dot{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{d}_1$ ) a kontrollpontoknak nincs közvetlen geometriai jelentése (már a  $\mathbf{d}_1$  ponté sem szemléletes) és a kontrollpontok helyzetéből nem tudunk következtetni a görbe alakjára és elhelyezkedésére. Ezért további feltételt célszerű kiróni a bázisfüggvényekre.

**1.1. Definíció** (Normalizált rendszer). Az  $\{F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^n$  függvényrendszert *normalizáltnak* nevezzük, ha

$$\sum_{j=0}^n F_j(u) = 1, \quad \forall u \in [a, b].$$

Az  $\mathcal{F}$  normalizált függvényrendszerrel képzett (1.1) görbe kontrollpontjainak affin transzformációjára nézve zárt, ami azt jelenti, hogy a transzformált kontrollpontok által meghatározott görbe pontonként megegyezik a görbe transzformáltjával, azaz

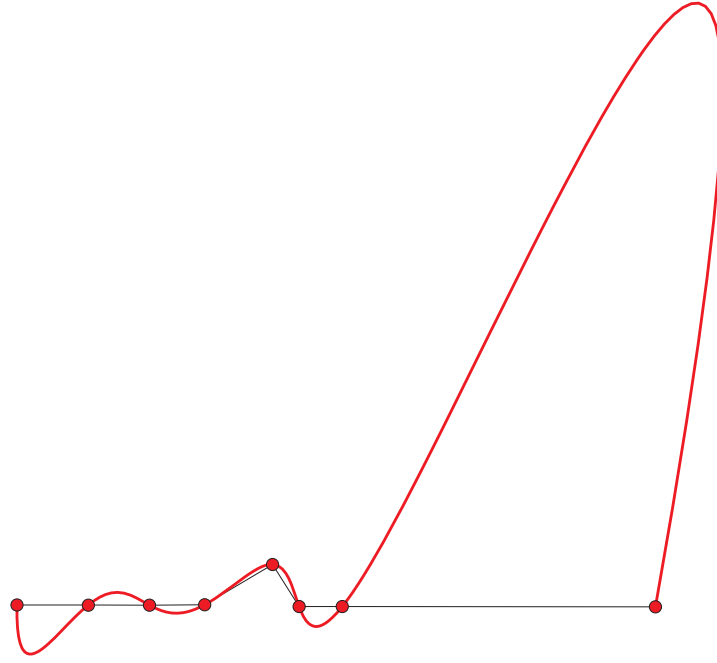
$$T\mathbf{g}(u) = \sum_{j=0}^n F_j(u) T\mathbf{d}_j,$$

ahol  $T$  a transzformációt leíró  $(d+1) \times (d+1)$ -es mátrix, a kontrollpontok pedig homogén koordinátákkal adóttak.

A páronként különböző  $\{u_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$  paraméterértékekkel létrehozott  $\left\{ F_j(u) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{u - u_i}{u_j - u_i} : u \in [a, b] \right\}_{j=0}^n$  Lagrange-féle függvényrendszer lineárisan független és normalizált, segítségével az adott  $\{\mathbf{d}_j\}_{j=0}^n$  pontokat interpoláló görbét tudunk (1.1) alakban előállítani, mivel

$$F_j(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az 1.2. ábrán is jól látható, hogy bár a kontrollpontoknak van szemléletes geometriai jelentése (a görbe interpolálja azokat), az eredmény nem kielégítő, mivel az interpoláló görbe nem várt kiugrásokat tartalmaz és a kontrollpontok alapján nem tudható előre, hogy a görbe hol fog haladni annak ellenére, hogy a függvényrendszer normalizált.



1.2. ábra. Langrange-féle interpoláló görbe

A bázisfüggvényekről azt is megkövetelhetjük, hogy nemnegatívak legyenek, azaz

$$F_j(u) \geq 0, \forall u \in [a, b], j = 0, 1, \dots, n.$$

A nemnegatív, normalizált függvényrendszerrel képzett (1.1) görbe pontjai a kontrollpontok konvex kombinációi, ezért maga a görbe a kontrollpontok konvex burkában helyezkedik el. Ezt nevezzük a görbe *konvex burkok tulajdonságának*.

A  $[0, 1]$  intervallumon értelmezett

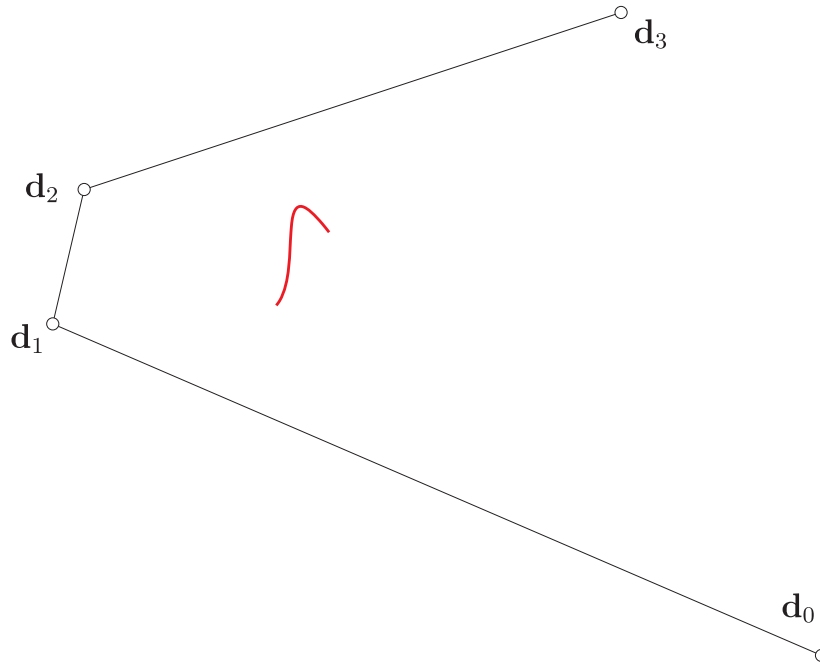
$$\begin{aligned} F_0(u) &= 0.2 - 0.1u - 0.5u^2 + 0.5u^3, \\ F_1(u) &= 0.3 + 0.4u^2 - 0.2u^3, \\ F_2(u) &= 0.4 - 0.2u - 0.3u^2 + 0.1u^3, \\ F_3(u) &= 0.1 + 0.3u + 0.4u^2 - 0.4u^3 \end{aligned}$$

függvényrendszer a legfeljebb harmadfokú polinomok terének olyan bázisát alkotja, mely az eddigi kívánalmaknak eleget tesz, tehát lineárisan független, nemnegatív és normalizált. Ennek következtében a görbe kontrollpontjai konvex burkában van, azonban az 1.3. ábrán jól látható, hogy a görbe alakja nem követi a kontrollpoligonét, azaz a kontrollpoligon alakjából nem tudunk következtetni a görbe formájára. Görbék modellezése során elvárás, hogy a görbe ne csak kövesse a kontrollpoligon alakját, hanem bizonyos jellemzőit csökkentsen is.

Az egyik legfontosabb ilyen jellegű tulajdonság a hullámzáscsökkentés (variation diminishing).

**1.2. Definíció** (Hullámzáscsökkentés). *Akkor mondjuk, hogy az (1.1) görbe hullámzáscsökkentő, ha a görbét bármely hipersík legfeljebb annyi pontban metszi, mint a kontrollpoligonját.*

Látható, hogy az 1.3. ábrán lévő példánk ezt nem teljesíti.



1.3. ábra. A konvex burok tulajdonsággal rendelkező, de nem hullámszáscsökkentő harmadfokú görbe

**1.3. Definíció** (Konvexitás). Egy síkgörbét konvexnek nevezünk, ha az valamely síkbeli konvex tartomány határának része.

**1.4. Definíció** (Konvexitás-megőrzés). Akkor mondjuk, hogy az (1.1) alakban felírt síkgörbe konvexitás-megőrző, ha a kontrollpoligon konvexitása maga után vonja a görbe konvexitását.

Fontos megjegyezni, hogy a konvex síkgörbék kontrollpoligonja nem feltétlenül konvex. A fenti definíciók alapján nyilvánvaló, hogy a hullámszáscsökkentő tulajdonságú síkgörbék egyben a konvexitást is megőrzik. Hullámszáscsökkentő tulajdonságú görbét eredményező függvényrendszerekre ismerünk feltételeket.

**1.5. Definíció** (Teljes pozitivitás). Az  $\{F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^n$  függvényrendszert teljesen pozitívnak nevezzük, ha bármely  $a \leq u_0 < u_1 < \dots < u_n \leq b$  értékekkel képzett

$$\begin{bmatrix} F_0(u_0) & F_1(u_0) & \dots & F_n(u_0) \\ F_0(u_1) & F_1(u_1) & \dots & F_n(u_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_0(u_n) & F_1(u_n) & \dots & F_n(u_n) \end{bmatrix}$$

kollokációs mátrix determinánsa és annak minden aldeterminánsa is nemnegatív.

**1.1. Tétel** (Elégséges feltétel hullámszáscsökkentésre). A normalizált, teljesen pozitív függvényrendszerrel képzett (1.1) alakú görbék hullámszáscsökkentők.

**Bizonyítás.** Lásd [24], vagy [10].  $\square$

**1.6. Definíció** (Descartes-féle függvényrendszer). Az  $\{F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^n$  függvényrendszert Descartes-féle függvényrendszernek nevezzük, ha bármely

$c_j \in \mathbb{R}, (j = 0, 1, \dots, n)$  esetén a  $\sum_{j=0}^n c_j F_j(u)$  összegfüggvény előjelváltásainak száma nem nagyobb, mint a  $\{c_j\}_{j=0}^n$  sorozat tagjai előjelváltásainak száma.

**1.2. Tétel** (Kritérium hullámzáscsökkentésre). Az  $\{F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^n$  normalizált függvényrendszerrel előállított (1.1) görbe akkor és csak akkor hullámzáscsökkentő, ha a függvényrendszer Descartes-féle.

**Bizonyítás.** Lásd [9].  $\square$

Nyílt görbék modellezésekor hasznos, ha az (1.1) görbe kezdőpontja a  $\mathbf{d}_0$ , a végpontja pedig a  $\mathbf{d}_n$  kontrollpont. Ez a végpontbeli interpoláció akkor teljesül, ha

$$F_j(a) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = 0, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (1.4)$$

illetve

$$F_j(b) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (1.5)$$

**1.3. Tétel** (Kritérium hullámzáscsökkentésre). Az  $\{F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^n$  normalizált, az (1.4) és (1.5) feltételeket teljesítő, lineárisan független függvényrendszerrel előállított (1.1) görbe akkor és csak akkor hullámzáscsökkentő, ha a függvényrendszer teljesen pozitív.

**Bizonyítás.** Lásd [9].  $\square$

Carnicer és Peña [11] bevezette a (normalizált)  $B$ -bázis fogalmát.

**1.7. Definíció** ( $B$ -bázis). Egy függvénytér  $B$ -bázisán olyan teljesen pozitív bázist értünk, amelyből a tér bármely más teljesen pozitív bázisa előállítható egy nonszinguláris teljesen pozitív mátrixszal való szorzással.

Ha a függvénytérnek van legalább egy teljesen pozitív bázisa, akkor van  $B$ -bázisa is, továbbá pontosan egy normalizált  $B$ -bázisa van, amennyiben a függvénytér tartalmazza a konstansokat is. A normalizált  $B$ -bázisbeli reprezentációnak optimális alakmegőrző tulajdonsága van ([11], [12], [51]). Ez a következőképp értendő: tegyük fel, hogy a  $\mathbf{g}$  görbe kontrollpoligonja az  $\mathcal{F}$  teljesen pozitív bázisban  $\mathbf{D}$ , az  $\mathcal{F}^*$  normalizált  $B$ -bázisban pedig  $\mathbf{D}^*$ ; ekkor  $\mathbf{D}^*$  hossza a  $\mathbf{g}$  ívhossza és a  $\mathbf{D}$  poligon hossza között van, továbbá, ha a kontrollpoligonok konvexek, akkor a  $\mathbf{D}^*$  poligon a  $\mathbf{g}$  görbe és a  $\mathbf{D}$  poligon között helyezkedik el. Hasonló egyenlőtlenségek teljesülnek a görbe érintői és az egyes kontrollpoligonok oldalai által bezárt szögek változására is.

A polinomiális görbék leírására igen gyakran a Bernstein-polinomokból álló bázist használjuk.

**1.8. Definíció** (Bernstein-polinom). A

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad u \in [0, 1]$$

kifejezéssel adott polinomot  $i$ -edik  $n$ -edfokú Bernstein-polinomnak nevezzük, a vele képzett (1.1) görbét pedig Bézier-görbének.

A Bézier-görbe a korábbiakban tárgyalt – konvex burok, végpontbeli interpoláció, hullámszűkítés – tulajdonságokkal rendelkezik. A Bernstein-polinomok a  $[0, 1]$  intervallum fölötti legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok terének a normalizált B-bázisát alkotják [11], ezért optimális tulajdonságokkal rendelkeznek [10]. Bézier-görbék részletes tárgyalását a [31], [19], [62], [21] könyvekben találhatjuk.

Az (1.1) görbék igen fontos osztályát képezik az ún. szplájn-görbék. Ebben az esetben az értelmezési tartományt részintervallumokra bontjuk és a bázisfüggvényeket ezen részintervallumok fölött értelmezzük. A szplájn-bázisfüggvények közös jellemzője, hogy a görbe értelmezési tartományának csak valamely részintervalluma fölött különböznek nullától, aminek az a következménye, hogy egy-egy kontrollpont csak lokális hatással van a görbe alakjára. A legismertebb szplájn-bázisfüggvény a polinomiális normalizált B-szplájn alapfüggvény.

**1.9. Definíció** (B-szplájn alapfüggvény). Az

$$N_j^1(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha } u \in [u_j, u_{j+1}), \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$N_j^k(u) = \frac{u - u_j}{u_{j+k-1} - u_j} N_j^{k-1}(u) + \frac{u_{j+k} - u}{u_{j+k} - u_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(u)$$

rekurzióval adott függvényt  $(k-1)$ -edfokú ( $k$ -adrendű,  $k \geq 2$ ), normalizált B-szplájn alapfüggvénynek nevezzük, az  $u_j \leq u_{j+1} \in \mathbb{R}$  skalárokat pedig csomóértékeknek. Az esetlegesen előforduló nullával való osztás eredményét definíció szerint nullának tekintjük.

**1.10. Definíció** (B-szplájn-görbe). Az

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{j=0}^n N_j^k(u) \mathbf{d}_j, u \in [u_{k-1}, u_{n+1}] \quad (1.6)$$

kifejezéssel adott görbét  $k$ -adrendű (vagy  $(k-1)$ -edfokú),  $(1 < k \leq n+1)$  B-szplájn-görbének nevezzük, a  $\mathbf{d}_j$  pontokat pedig kontrollpontoknak vagy de Boor-pontoknak.  $N_j^k(u)$  a  $j$ -edik  $(k-1)$ -edfokú normalizált B-szplájn alapfüggvényt jelöli, melyek kiértékeléséhez az  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+k}$  csomóértékek szükségesek.

A B-szplájn-görbék kitüntetett szerepet játszanak a polinomiális szplájn-görbék között, ugyanis a normalizált B-szplájn alapfüggvények a polinomiális szplájn-függvények terének a normalizált B-bázisát alkotják [11], ezért a velük képzett görbe optimális tulajdonságokkal rendelkezik.

Tekintsük az  $\{F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^n$  függvényrendszert és tegyük fel, hogy ezek a függvények lineárisan függetlenek, nemnegatívak és normáltak! A nemnegatív, 1-rangú (nem azonosan nulla)  $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$  skalárokkal képzett

$$R_j(u) = \frac{w_j F_j(u)}{\sum_{i=0}^n w_i F_i(u)}, u \in [a, b], j = 0, 1, \dots, n \quad (1.7)$$

függvények is teljesítik az  $\{F_j\}_{j=0}^n$  rendszer fenti tulajdonságai, azaz nemnegatívak, normáltak és lineárisan függetlenek.

Ezekkel a hányadosfüggvényekkel is tudunk (1.1) típusú görbét előállítani

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{j=0}^n R_j(u) \mathbf{d}_j = \quad (1.8)$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{w_j F_j(u)}{\sum_{i=0}^n w_i F_i(u)} \mathbf{d}_j, \quad u \in [a, b], \quad \mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2$$

alakban, ahol a  $w_i$  skalárokat súlyoknak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a súlyok arányosság erejéig meghatározottak, azaz a  $\{w_j\}_{j=0}^n$  és  $\{\lambda w_j\}_{j=0}^n$  súlyokkal képzett görbék megegyeznek bármely  $0 < \lambda \in \mathbb{R}$  esetén.

Az (1.8) görbe úgy is felfogható, hogy az  $\mathbb{R}^{d+1}$  térben a  $\begin{bmatrix} w_j \mathbf{d}_j & w_j \end{bmatrix}^T$  kontrollpontokkal adott

$$\mathbf{r}^w(u) = \sum_{j=0}^n F_j(u) \begin{bmatrix} w_j \mathbf{d}_j \\ w_j \end{bmatrix}, \quad u \in [a, b]$$

görbét az origóból vetítjük a  $w = 1$  egyenletű  $d$ -dimenziós hipersíkra (feltételezve, hogy az  $\mathbb{R}^{d+1}$  tér utolsó koordinátáját  $w$ -vel jelöljük). Az  $\mathbf{r}^w$  görbét az  $\mathbf{r}$  görbe ösképeként nevezzük.

Ez a centrális vetítéssel való származtatás az  $\mathbf{r}$  görbe tulajdonságainak vizsgálatát könnyíti meg. Az  $\mathbf{r}$  görbe örökli az  $\mathbf{r}^w$  görbe minden, centrális vetítéssel szemben invariáns tulajdonságát, mint pl. a folytonosságot, az illeszkedés- és egyenestartást. Ezen megközelítés alapján nyilvánvaló, hogy az (1.8) görbének végtelen sok reprezentációja van a súlyokat illetően, azaz gyakran a triviális  $\{\lambda w_j\}_{j=0}^n$ ,  $\lambda > 0$  súlyok mellett is végtelen sok olyan  $\{w_j\}_{j=0}^n$  skaláregyüttes van, amellyel (1.8) ugyanazt az alakot írja le. Az (1.8) görbe kontrollpontjainak nemcsak az affin, hanem a projektív transzformációjára nézve is zárt. A transzformációt az öskép terében kell végrehajtani, ezért nemcsak a kontrollpontok, hanem a súlyok is megváltoznak.

A legismertebb (1.7) alakú bázisok a racionális Bernstein és B-szplájn függvények. A velük képzett (1.1) görbék széles körben elterjedtek, és a racionális B-szplájn-görbék napjainkban a CAD rendszerek geometriai modellező magjának de facto szabványává váltak. A racionális B-szplájn-görbéket NURBS (Non-uniform Rational B-spline) görbének is nevezik. A racionális görbék és felületek alkalmazásában úttörő szerepet játszottak Coons [15], [16], Forrest [22] és Versprille [73] korai munkái. A racionális Bézier- és B-szplájn-görbék és felületek tulajdonságainak tárgyalását megtaláljuk a [31], [17], [19], [58] könyvekben, valamint az összefoglaló [21] kézikönyvben.

## 1.2. Alakmódosítás

Ha az (1.1) görbét meghatározó adatok közül valamelyiket megváltoztatjuk, akkor természetesen megváltozik a görbe alakja is. A görbe alakját megváltoztathatjuk valamilyen esztétikai igény, vagy geometriai feltétel (kényszer) kielégítése érdekében. Bármelyik is a célunk, ismernünk kell a görbe alakváltozásának természetét. Alapvető kérdés, hogy a görbe tetszőleges pontja milyen pályán mozog, miközben a görbe valamely meghatározó adatát változtatjuk. A vizsgált pont által leírt görbét a továbbiakban *pályagörbének* nevezzük.

Az (1.1) görbe alakmódosításának legkézenfekvőbb, egyben leghatékonyabb módja a kontrollpontok eltolása. Ha a görbe  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontját a  $\mathbf{v}$  vektorral eltoljuk, akkor a

$$\sum_{j=0}^n F_j(u) \mathbf{d}_j + F_i(u) \mathbf{v} = \mathbf{g}(u) + F_i(u) \mathbf{v}$$

görbét kapjuk, tehát az (1.1) görbe pontjainak pályagörbéi az eltolásvektorral párhuzamos egyenesek lesznek.

A pályagörbe ismeretében, adott geometriai feltételt kielégítő alakmódosításra van lehetőségünk. Gyakori alakmódosítási feladat, hogy a görbe kiválasztott pontja adott helyre kerüljön a módosítás után. Tehát az a célunk, hogy a görbe  $\mathbf{g}(\hat{u})$ ,  $\hat{u} \in [a, b]$  pontja a módosítás után a tetszőlegesen adott  $\mathbf{p}$  pont legyen, és ezt a görbe valamely  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontjának eltolásával akarjuk elérni. Gyakorlatilag bármely olyan  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont megfelel, amelynek hatása van a görbe alakjára a  $\mathbf{g}(\hat{u})$  pontban, azaz ha  $F_i(\hat{u}) \neq 0$ . Az ismeretlen  $\mathbf{v}$  eltolásvektort úgy kell meghatározni, hogy

$$\mathbf{g}(\hat{u}) + F_i(\hat{u}) \mathbf{v} = \mathbf{p}$$

teljesüljön, vagyis

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{g}(\hat{u})}{F_i(\hat{u})}.$$

Az alakmódosítási kényszert enyhíthetjük azzal, hogy nem írjuk elő, hogy a görbe mely pontja kerüljön  $\mathbf{p}$ -be, tehát  $\hat{u}$ -t nem rögzítjük. Ezzel egy szabad paramétert nyerünk, amely lehetőséget ad további feltétel kielégítésére, amihez azonban az  $F_i(u)$  függvényt ismernünk kell.

Ha a bázisfüggvények az (1.7) típusú hányadosfüggvények, akkor a súlyok további alakmódosításra adnak lehetőséget. Ehhez először meg kell vizsgálni, hogy a súlyok változtatása hogyan hat a görbe alakjára. Nyilvánvaló, hogy valamely súly növelésével a hozzátartozó kontrollpont hatása nő. A következő tételek pontosabb képet adnak erről a hatásról, lásd a [45] cikkben közölt eredményeinket, melyek NURBS görbékre vonatkozó speciális esete a [56], valamint [58] publikációkban is megtalálható.

**1.4. Tétel.** *Az (1.8) görbe valamely  $w_i$  súlyának módosításakor a görbe pontjai a  $\mathbf{d}_i$  kontrollponton áthaladó egyenesek mentén mozdulnak el.*

**1.5. Tétel.** *Az (1.8) görbe  $w_i$  és  $w_k$  súlyainak együttes módosításakor a görbe pontjai az őket a  $\mathbf{d}_i$  és  $\mathbf{d}_k$  kontrollpontokkal összekötő síkban mozdulnak el.*

A súlyok csak a  $[0, \infty)$  intervallumon változhatnak a konvex burok tulajdonság megőrzése és a szingularitások elkerülése érdekében. A súly változtatásának egy érdekes és hasznos projektív tulajdonságát mutatjuk meg. A továbbiakban a  $w_k$  súly változtatásával kapott görbesereg elemeit  $\mathbf{r}(u, w_k)$ -val jelöljük.

**1.6. Tétel.** *A  $w_k$  súly változtatása során a kollineáris  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{g}(u, 0)$ ,  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}(u, 1)$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(u, w_k)$ ,  $\mathbf{d}_k$  pontok kettősviszonya*

$$(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}, \mathbf{d}_k) = w_k.$$

**Bizonyítás.** A  $w_k = 0$  és  $w_k = 1$  súlyokhoz tartozó pontok rendre

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= \frac{\sum_{j=0, j \neq k}^n w_j F_j(u) \mathbf{d}_j}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u)}, \\ \mathbf{q}_1 &= \frac{\sum_{j=0, j \neq k}^n w_j F_j(u) \mathbf{d}_j}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u) + F_k(u)} + \frac{F_k(u) \mathbf{d}_k}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u) + F_k(u)} \end{aligned}$$

alakban írhatók fel.  $\mathbf{q}_1$  előállítható a  $\mathbf{q}_0$  és  $\mathbf{d}_k$  pontok konvex kombinációjaként, mivel a  $\mathbf{q}_0\mathbf{d}_k$  szakasz belső pontja. A kombináló tényező

$$\alpha = \frac{F_k(u)}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u) + F_k(u)}$$

alakban írható fel, ugyanis az  $\{F_j\}_{j=0}^n$  függvényrendszer normalizáltsága miatt

$$(1 - \alpha) \mathbf{q}_0 + \alpha \mathbf{d}_k = \frac{\sum_{j=0, j \neq k}^n w_j F_j(u)}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u) + F_k(u)} \frac{\sum_{j=0, j \neq k}^n w_j F_j(u) \mathbf{d}_j}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u)} + \frac{F_k(u) \mathbf{d}_k}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u) + F_k(u)} = \mathbf{q}_1.$$

A tetszőleges  $w_k$  súlyhoz tartozó  $\mathbf{q} = \mathbf{g}(u, w_k)$  pont pedig

$$\mathbf{q} = \frac{\sum_{j=0, j \neq k}^n w_j F_j(u) \mathbf{d}_j}{\sum_{i=0}^n w_i F_i(u)} + \frac{w_k F_k(u) \mathbf{d}_k}{\sum_{i=0}^n w_i F_i(u)}.$$

Ez a pont is felírható a  $\mathbf{q}_0$  és  $\mathbf{d}_k$  pontok konvex kombinációjaként, mégpedig a

$$\beta = \frac{w_k F_k(u)}{\sum_{i=0}^n w_i F_i(u)} \quad (1.9)$$

együtthatóval, mivel

$$(1 - \beta) \mathbf{q}_0 + \beta \mathbf{d}_k = \frac{\sum_{j=0, j \neq k}^n w_j F_j(u)}{\sum_{i=0}^n w_i F_i(u)} \frac{\sum_{j=0, j \neq k}^n w_j F_j(u) \mathbf{d}_j}{\sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(u)} + \frac{w_k F_k(u) \mathbf{d}_k}{\sum_{i=0}^n w_i F_i(u)} = \mathbf{q}.$$

A  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}, \mathbf{d}_p$  pontok kettősvizonya tehát

$$(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}, \mathbf{d}_p) = \frac{(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{d}_p)}{(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}, \mathbf{d}_p)} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\beta}{1 - \beta} = w_k. \quad \square$$

**1.1. Következmény.** Az 1.6. tétel segítségével az  $\mathbf{r}$  görbe kijelölt  $\mathbf{g}(\hat{u})$  pontját a  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{r}(\hat{u}, 0)$ ,  $\mathbf{d}_k$  szakasz  $\mathbf{d}_k$ -től különböző tetszőleges pontjába átvihetjük a  $w_k$  súly változtatásával. A  $\mathbf{q}_0\mathbf{d}_k$  szakaszon adott tetszőleges  $\mathbf{p} \neq \mathbf{d}_k$  pont felírható a  $\mathbf{q}_0$  és  $\mathbf{d}_k$  végpontok

$$\mathbf{p} = (1 - \beta) \mathbf{q}_0 + \beta \mathbf{d}_k$$

alakú konvex kombinációjaként, amiből (1.9) alapján

$$w_k = \frac{\beta \sum_{i=0, i \neq k}^n w_i F_i(\hat{u})}{(1 - \beta) F_k(\hat{u})}. \quad (1.10)$$

A számítógéppel segített geometriai tervezés gyakorlati vonatkozása olyan eljárások kidolgozása, melyek segítik a tervező munkáját. Ez érvényes a görbék és felületek megadására és alakmódosítására is. A kontrollpontok kiváló eszköznek bizonyultak az alakzatok megadására és az alakjuk módosítására is. Természetesen a görbét meghatározó többi adat megváltoztatásával is elérhetünk kívánt alakmódosítást (pl. a fenti súlymódosítással), azonban ehhez olyan felhasználói felületet kell létrehozni, amely az átlagos CAD rendszer felhasználója számára is érthető, könnyen használható. Az alakváltoztatási kényszereket a

felhasználó szemléletes geometriai adatokkal, jellemzőkkel adja meg, mint pl. a módosított görbe menjen át adott ponton, a koordinátafüggvényeket, súlyokat, csomóértékeket vagy egyéb paramétereket el kell „rejteni” előle. Ezek ugyanis nem annyira könnyen érthető és használható eszközök, mint a kontrollpontok. Ez illusztrálható az 1.1. következménnyel, ahol a felhasználónak ki kell jelölnie a görbén az  $\mathbf{r}(\hat{u})$  pontot, majd a rendszer által megjelenített  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{r}(\hat{u}, 0) \mathbf{d}_k$  szakaszon meg kell adnia a  $\mathbf{p}$  pontot, amiből a rendszer kiszámolja a  $w_k$  súly (1.10) módosított értékét.

A dolgozat további fejezeteiben a görbék leírása, alakmódosítása és szingularitásának vizsgálata témakörben az utóbbi időben megjelent néhány eredményünket foglaltuk össze. A 2. fejezetben a trigonometrikus polinomok terében egy új, ún. ciklikus bázist adunk meg, mellyel zárt görbék modellezhetők (1.1) alakban. Ennek a bázisnak elméleti érdekessége, hogy bár nem teljesen pozitív, mégis rendelkezik a B-bázisok legtöbb kedvező tulajdonságával. Ezen új bázis segítségével előállított ciklikus görbékkel tetszőleges hagyományos paraméteres alakban adott, zárt, véges rendű (fokszámú) trigonometrikus görbét tudunk (1.1) alakban egzaktul leírni. A 3. fejezetben B-szplájn- és racionális B-szplájn-görbék alakjának módosításával foglalkozunk. A fokszámnövelés, a súlymódosítás és a csomóérték-változtatás segítségével elérhető alakmódosításokat vizsgáljuk, és azokra könnyen alkalmazható eljárásokat adunk. Végül a 4. fejezetben a kontrollpontok helyzetén alapuló eljárást adunk az (1.1) előállítású görbék szingularitásainak (eltűnő görbületű és torziójú pontjainak, csúcs- és önmetszéspontjainak) detektálására, valamint síkgörbék konvexitásának meghatározására.



## 2. fejezet

# Zárt görbék leírása ciklikus bázisban

Görbék (1.1) alakban való leírására kezdetben kizárólag polinomiális bázisfüggvényeket használtak. A hetvenes évek második felétől tért nyertek a racionális függvények, elsősorban a racionális B-szplájn-bázis. A gyakorlati alkalmazások olyan tervezőrendszereket igényelnek, amelyek használatával a felhasználó minél egyszerűbb módon hozhat létre változatos alakú görbéket. A racionális bázisokkal szemben több jogos kritika fogalmazható meg. Néhány ilyen észrevétel (teljesebb lista a [18], [57] és [61] cikkekben található):

- a polinomiális görbék alakjának módosítása csak a kontrollpontokkal lehetséges; a racionális görbéknél újabb eszköz a kontrollponthoz társított súly, aminek a közvetlen használata azonban egy átlagos tervező számára megoldhatatlan feladat;
- az  $n$ -edfokú polinomiális görbe deriváltja  $(n - 1)$ -edfokú, az  $n$ -edfokú racionális görbének azonban  $2n$ , ezért a magasabb rendű deriváltak nagyon magas fokszámot eredményeznek;
- nem lehet velük transzcendens görbéket egzaktul leírni, amik azonban a műszaki alkalmazásoknál gyakran előfordulnak.

A 90-es évek második felétől intenzív kutatások folynak más bázisok alkalmazására. A Bézier-görbék általánosításaként született a C-Bézier-görbe [79], [14] és a H-Bézier-görbe [32], melyek bázisfüggvényei rendre a trigonometrikus, illetve a hiperbolikus függvényeket is magukba foglalják. Természetesen szplájn bázisfüggvények esetén is kombinálták a polinomiális és trigonometrikus [80], [75], [76] vagy hiperbolikus [49] függvényeket, illetve mindkettőt [81]. Ezen kiterjesztések közös jellemzője, hogy alapvetően nyílt görbék modellezésére készültek, a végpontokban interpolálnak és a bázisok teljesen pozitívak.

Speciális igényeket kielégítő görbeleírásokra is szükség van, ilyenek pl. a zárt görbék. Magas rendű folytonossággal rendelkező zárt görbéket (felületeket) több műszaki alkalmazás igényel. Gépjárművek reflektorának, szabadformájú lencséknek, ultrapontosságú optikai alkatrészeknek a tervezéséhez magas folytonossági rendű, szingularitásmentes leírás szükséges [70], [7], [54].

Végpontbeli interpolációt biztosító polinomiális görbékkel (pl. Bézier-görbével) zárt alakot akkor kapunk, ha a kontrollpoligon első és utolsó csúcsára teljesül a

$\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_n$  egyenlőség. Ez a feltétel olyan zárt görbét eredményez, amely keresztülmegy a  $\mathbf{d}_0$  kontrollponton és csak  $C^0$ -osztályú ebben a pontban. Magasabb folytonossági osztályú zárt görbék leírásához a kontrollpontokra további (a folytonossági rend növelésével egyre bonyolultabb) geometriai feltételeket kell előírni. Szplájn-görbével nagyobb simaságú zárt görbe is leírható. Ha a  $k$ -adrendű B-szplájn-görbe  $\mathbf{a}_j$  kontrollpontjaira az  $\mathbf{a}_j = \mathbf{d}_{j \bmod (n+1)}$ ,  $(j = 0, 1, \dots, n+k-1)$  feltételek teljesülnek, valamint a csomóértékeket úgy adjuk meg, hogy megismételjük az első  $k-1$  db. csomóérték-intervallumot (ez részletesen a 3.1. szakaszban található), akkor  $C^{k-2}$ -osztályú zárt görbét modellezhetünk.

Ebben a fejezetben olyan ciklikus bázist definiálunk a legfeljebb  $n$ -edrendű ( $n \geq 1$ ) trigonometrikus polinomok terében, amely szingularitásmentes paraméterezésű  $C^\infty$ -osztályú zárt görbék leírására alkalmas redundáns kontrollpontok megadása nélkül. Megmutatjuk, hogy ezzel a bázissal leírt görbék rendelkeznek a modellezéshez szükséges legfontosabb tulajdonságokkal. Az itt leírt eredményeket a [64], [63] és [45] cikkekben publikáltuk. Ezek természetes módon kiterjeszthetők zárt felületek leírására is (az idézett cikkek tartalmazzák is), azonban ez nem tárgya ennek a dolgozatnak.

## 2.1. Trigonometrikus polinomok

Tekintsük a legfeljebb  $2n$ -edfokú trigonometrikus polinomok által felfeszített

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(u), \sin(u), \dots, \cos(nu), \sin(nu) \rangle, 0 < n \in \mathbb{N}$$

vektorteret! Ezen függvényekkel leírható paraméteres görbék osztályát trigonometrikus görbéknek nevezzük. Ez a görbecsalád számos, műszaki alkalmazásban is megjelenő nevezetes görbét foglal magába, mint pl. a Pascal-csiga (limaçon), trifólium, epi- és hipociklois, Lissajous-görbe. A trigonometrikus görbéket egyes publikációkban olykor más névvel is illetik, pl. felsőbb cikloisok (lásd [77], [78]) vagy felsőbb bolygómozgások (lásd [60]). A [69] cikkben trigonometrikus paraméterezésű, zárt algebrai görbékkel interpolál páratlan számú adott pontot. Végpontokban interpoláló görbék modellezését a  $\mathcal{V}_n$  tér függvényeivel többen vizsgálták. Az [55] cikkben bizonyították, hogy a  $\mathcal{V}_n$  térnek nincs B-bázisa a  $[0, \pi]$  tartományon, azonban van bármely  $\pi$ -nél kisebb hosszúságú intervallumon, lásd [68].

A  $\mathcal{V}_n$  tér a

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}, \quad (2.1)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha)}{2}, \quad (2.2)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{-2}$$

elemi trigonometrikus azonosságok miatt a szorzásra nézve zárt. Megfelelő súlymegválasztással és nemlineáris átparaméterezéssel a páros fokszámú racionális Bersntein-polinomok  $n$ -edrendű trigonometrikus normalizált B-bázisfüggvényekké transzformálhatóak, melyek ugyancsak a  $\mathcal{V}_n$  teret feszítik fel, amennyiben az értelmezési tartomány hossza kisebb, mint  $\pi$ . Ezeket a görbéket harmonikus racionális Bézier-görbéknek is nevezik, melyek részletes vizsgálatát a [23] és [68] cikkekben találhatjuk.

Az alább felsorolt trigonometrikus azonosságokat gyakran fogjuk használni a bizonyításokban:

$$1 + \cos(\alpha) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=0}^n \cos(\varphi + i\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right) \cos\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=0}^n \sin(\varphi + i\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad (2.5)$$

$$\cos^{2n}(\alpha) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)\alpha). \quad (2.6)$$

(A továbbiakban az egyenlőségjel fölött zárójelben megjelenő szám arra utal, hogy az adott számú trigonometrikus azonosságot alkalmazzuk az átalakítás során.) A formulák alakjának egyszerűsítése érdekében bevezetjük a

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{2n+1}$$

jelölést.

## 2.2. Ciklikus bázisfüggvények

Olyan bázisfüggvényeket akarunk létrehozni, amelyekkel az (1.1) alakban létrehozott zárt görbék a kontrollpontok ciklikus permutációjával szemben invariánsak, azaz ugyanazt az alakot írják le, természetesen más-más paraméterezéssel. A trigonometrikus görbék átparaméterezése mindig lineáris, azaz fáziseltolás (lásd [30]). Ebből következik, hogy az összes bázisfüggvényt ismerjük, ha egyet rögzítünk, mivel a

$$C_{i,n}(u) := C_{0,n}(u - i\lambda_n), \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

összefüggés érvényes. Tehát elegendő a  $C_{0,n}$  függvényt megadnunk.

Ha a  $C_{0,n}$  bázisfüggvényt az  $1, \cos(u), \dots, \cos(nu)$  függvények lineáris kombinációjaként adjuk meg, szimmetrikus függvényt kapunk. Ezért az ezekkel létrehozott görbe alakja nem változik, ha a kontrollpontokat fordított sorrendben adjuk meg.

Az  $1, \cos(u), \dots, \cos(nu)$  függvények lineáris kombinációjaként pontosan azok a trigonometrikus függvények állíthatók elő, amelyek  $\cos(u)$  legfeljebb  $n$ -edfokú polinomjaként írhatók fel, azaz

$$C_{0,n}(u) := P_n(\cos u)$$

valamely legfeljebb  $n$ -edfokú  $P_n$  polinomra. A  $P_n$  polinomnak a következő igényeket kell kielégítenie:

- annak érdekében, hogy  $C_{0,n}$  pozitív legyen minden  $u$ -ra, a  $P_n$  polinomnak nemnegatívnak kell lenni a  $[-1, 1]$  intervallumon;

- azt akarjuk, hogy  $C_{0,n}$ -nek az  $u = 0$  a periodicitás erejéig egyértelmű lokális maximuma legyen, ezért a  $P_n|_{[-1,1]}$  polinomnak az 1 helyen egyértelmű lokális maximum kell legyen;
- a  $C_{0,n}$  függvénynek a lokális maximumhelytől távolodva, a lehető legkisebbnek kell lennie, ezért a  $P_n|_{[-1,1]}$  polinomnak is teljesítenie kell ezt a feltételt.

A fentiek miatt legcélszerűbb választásnak a 0-adik  $n$ -edfokú Bernstein-polinom tűnik, amit természetesen a  $[-1, 1]$  intervallumra kell transzformálni és megfelelően skálázni, azaz

$$P_n := c_n \left( \frac{1+t}{2} \right)^n,$$

ahol a  $c_n$  konstans (skálázási tényezőt) még meg kell határozni.

**2.1. Tétel.** *A  $C_{i,n}, C_{0,n}, P_n$  függvények fenti definícióiból következik, hogy a  $\sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u)$  összeg konstans.*

**Bizonyítás.** A  $\sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u)$  összeg bármely  $u \in \mathbb{R}$  esetén a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} & \frac{c_n}{2^n} \sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n = \\ & \stackrel{(2.3)}{=} c_n \sum_{i=0}^{2n} \cos^{2n} \left( \frac{u}{2} - \frac{i\lambda_n}{2} \right) = \\ & \stackrel{(2.6)}{=} c_n \sum_{i=0}^{2n} \left( \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)u - (n-k)i\lambda_n) \right) = \\ & = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} c_n + \frac{c_n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-k)u - (n-k)i\lambda_n) = \\ & \stackrel{(2.4)}{=} \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} c_n + \\ & \quad + \frac{c_n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{\sin((n-k)\pi) \cos((n-k)u - (n-k)n\lambda_n)}{\sin((n-k)\frac{\lambda_n}{2})} = \\ & = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} c_n. \quad \square \end{aligned}$$

**2.1. Következmény** (Normalizáló konstans). *Annak érdekében, hogy a  $C_{i,n}$  függvények összege 1 legyen az értelmezési tartomány bármely helyén, a  $c_n$  konstans*

$$c_n = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \quad (2.7)$$

*módon kell megválasztani. Az így definiált  $c_n$  állandóra a*

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{ha } n = 1, \\ \frac{2n}{2n+1} c_{n-1}, & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

*rekurzió teljesül.*

A továbbiakban a

$$C_n = \left\{ C_{i,n}(u) := \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \right\}_{i=0}^{2n}$$

függvényrendszer tulajdonságait vizsgáljuk.

**2.2. Tétel** (Lineáris függetlenség). *A  $\mathcal{C}_n$  függvényrendszer a  $\mathcal{V}_n$  vektortér bázisa.*

**Bizonyítás.** Természetesen elegendő megmutatni, hogy az

$$(1 + \cos(u - i\lambda_n))^n, \quad i = 0, 1, \dots, 2n \quad (2.8)$$

függvények lineárisan függetlenek.

A (2.8) függvények  $2\pi$  szerint periodikusak, ezért a tulajdonságaikat vizsgálhatjuk a  $[0, 2\pi]$  intervallumon.

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy a (2.8) függvények lineárisan összefüggők! Ekkor  $\exists a_0, a_1, \dots, a_{2n} \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{2n}^2 \neq 0$  és

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n = 0, \quad \forall u \in [0, 2\pi]. \quad (2.9)$$

Behelyettesítve az  $u_k = k\lambda_n$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n$ ) értékeket a (2.9) egyenlőségbe, az ismeretlen  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$  együtthatókra egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk. Ennek a rendszernek a mátrix alakja

$$\Lambda_{2n+1} \cdot A = \mathbf{0}_{2n+1,1}, \quad (2.10)$$

ahol

$$\Lambda_{2n+1} = \begin{bmatrix} 2^n & (1 + \cos \lambda_n)^n & \cdots \\ (1 + \cos \lambda_n)^n & 2^n & \ddots \\ \vdots & (1 + \cos \lambda_n)^n & \ddots \\ (1 + \cos (2n-1)\lambda_n)^n & \vdots & \ddots \\ (1 + \cos 2n\lambda_n)^n & (1 + \cos (2n-1)\lambda_n)^n & \cdots \\ \cdots & (1 + \cos (2n-1)\lambda_n)^n & (1 + \cos 2n\lambda_n)^n \\ \ddots & \vdots & (1 + \cos (2n-1)\lambda_n)^n \\ \ddots & (1 + \cos \lambda_n)^n & \vdots \\ \ddots & 2^n & (1 + \cos \lambda_n)^n \\ \cdots & (1 + \cos \lambda_n)^n & 2^n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

szimmetrikus szalagmátrix és

$$A = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{2n-1} \ a_{2n}]^T.$$

Megmutatjuk, hogy a (2.10) homogén lineáris egyenletrendszernek csak az  $a_0 = a_1 = \dots = a_{2n} = 0$  triviális megoldása van, ami ellentmond a (2.8) függvényrendszer lineáris összefüggésének.

A  $\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$  trigonometrikus azonosságot felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos((2n-i)\lambda_n) &= \cos\left(2\pi - \frac{2(2n-i)\pi}{2n+1}\right) = \cos\left((i+1)\frac{2\pi}{2n+1}\right) = \\ &= \cos((i+1)\lambda_n), \quad i = 0, \dots, 2n-1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bevezetjük az

$$x_0 = 2^n, x_i = x_{2n+1-i} = (1 + \cos i\lambda_n)^n, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

változókat és az

$$s_j^{\lambda_n} = x_0 + x_1 \omega_j + x_2 \omega_j^2 + \dots + x_{2n} \omega_j^{2n}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n,$$

jelölést, ahol

$$\omega_j = e^{ij\lambda_n}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n$$

a  $j$ -edik  $(2n+1)$ -edfokú egységgyököket jelöli ( $i = \sqrt{-1}$ ).

A (2.12) egyenlőségek és a (2.13) változók segítségével a  $\Lambda_{2n+1}$  mátrix

$$\Lambda_{2n+1} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2n} \\ x_{2n} & x_0 & \dots & x_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_0 \end{bmatrix}$$

ciklikus alakba írható, amelynek sajátértékei pontosan az  $s_j^{\lambda_n}$ , ( $j = 0, 1, \dots, 2n$ ) valós számok (lásd [65]). Ezért  $\Lambda_{2n+1}$  determinánsa

$$\det \Lambda_{2n+1} = \prod_{j=0}^{2n} s_j^{\lambda_n} \quad (2.14)$$

formára hozható.

A továbbiakban igazoljuk, hogy  $s_j^{\lambda_n} > 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2n$ . Az  $\{s_j^{\lambda_n}\}_{j=0}^{2n}$  sajátértékek

$$\begin{aligned} s_j^{\lambda_n} &= \sum_{k=0}^{2n} x_k \omega_j^k \stackrel{(2.3)}{=} 2^n + 2^n \sum_{k=1}^n (\omega_j^k + \omega_j^{2n+1-k}) \cos^{2n} \left( \frac{k}{2} \lambda_n \right) = \\ &= 2^n + 2^{n+1} \sum_{k=1}^n \cos(jk\lambda_n) \cos^{2n} \left( \frac{k}{2} \lambda_n \right) \end{aligned}$$

alakra hozhatók. Egyszerű átalakítások után a

$$\cos((2n+1-j)k\lambda_n) = \cos(jk\lambda_n), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

egyenlőséget kapjuk, tehát az

$$s_j^{\lambda_n} = s_{2n+1-j}^{\lambda_n}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

szimmetria teljesül. A következőkben a  $j$ -edik ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) sajátérték zárt alakját adjuk meg.

$j = 0$  esetén:

$$\begin{aligned} s_0^{\lambda_n} &= 2^n + 2^{n+1} \sum_{k=1}^n \cos^{2n} \left( \frac{k}{2} \lambda_n \right) = \\ &\stackrel{(2.6)}{=} 2^n + \frac{\binom{2n}{n} n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=1}^n \cos((n-l)k\lambda_n) = \\ &\stackrel{(2.4)}{=} 2^n + \frac{\binom{2n}{n} n}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)(n-l)}{2} \lambda_n\right) \cos\left(\frac{n(n-l)}{2} \lambda_n\right)}{\sin\left(\frac{(n-l)}{2n+1} \lambda_n\right)} = \\ &\stackrel{(2.2)}{=} 2^n + \frac{\binom{2n}{n} n}{2^{n-1}} - \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2^{n-1}} + \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2^n} = \\ &= \frac{\binom{2n}{n} (2n+1)}{2^n}. \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, n$  esetén:

$$\begin{aligned}
s_j^{\lambda_n} &= 2^n + 2^{n+1} \sum_{k=1}^n \cos^{2n} \left( \frac{k}{2} \lambda_n \right) \cos(kj\lambda_n) = \\
&\stackrel{(2.6)}{=} 2^n + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n \cos(kj\lambda_n) + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \cos((n-l)k\lambda_n) \cos(kj\lambda_n) = \\
&\stackrel{(2.4)}{=} 2^n + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{n-1}} \left( \frac{\sin\left(\frac{(n+1)j}{2}\lambda_n\right) \cos\left(\frac{nj}{2}\lambda_n\right)}{\sin\left(\frac{j}{2}\lambda_n\right)} - 1 \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \sum_{k=1}^n \cos((n-l)k\lambda_n) \cos(kj\lambda_n) = \\
&\stackrel{(2.1)}{=} 2^n + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{n-1}} \left( \frac{\sin\left(\frac{(n+1)j}{2}\lambda_n\right) \cos\left(\frac{nj}{2}\lambda_n\right)}{\sin\left(\frac{j}{2}\lambda_n\right)} - 1 \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \left( \sum_{k=1}^n \cos((n-l-j)k\lambda_n) + \sum_{k=1}^n \cos((n-l+j)k\lambda_n) \right) = \\
&\stackrel{(2.4)}{=} 2^n - \frac{\binom{2n}{n}}{2^{n-1}} + \frac{\binom{2n}{n-j}n}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0, l \neq n-j}^{n-1} \binom{2n}{l} - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} + \\
&\quad + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{n-1}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)j}{2}\lambda_n\right) \cos\left(\frac{nj}{2}\lambda_n\right)}{\sin\left(\frac{j}{2}\lambda_n\right)} + \\
&\quad + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0, l \neq n-j}^{n-1} \binom{2n}{l} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)(n-l-j)}{2}\lambda_n\right) \cos\left(\frac{n(n-l-j)}{2}\lambda_n\right)}{\sin\left(\frac{(n-l-j)}{2}\lambda_n\right)} + \\
&\quad + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)(n-l+j)}{2}\lambda_n\right) \cos\left(\frac{n(n-l+j)}{2}\lambda_n\right)}{\sin\left(\frac{(n-l+j)}{2}\lambda_n\right)} \\
&\stackrel{(2.2)}{=} 2^n - \frac{\binom{2n}{n}}{2^{n-1}} + \frac{\binom{2n}{n-j}n}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \left( \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2} - \binom{2n}{n-j} \right) - \frac{1}{2^{n-1}} \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2} + \\
&\quad + \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} + \frac{1}{2^n} \left( \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2} - \binom{2n}{n-j} \right) + \frac{1}{2^n} \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2} = \\
&= \frac{\binom{2n}{n-j} (2n+1)}{2^n} > 0.
\end{aligned}$$

Tehát a (2.14) determinánsra a

$$\det \Lambda_{2n+1} = s_0^{\lambda_n} \left( \prod_{j=1}^n s_j^{\lambda_n} \right)^2 > 0$$

egyenlőtlenség teljesül, ami azt jelenti, hogy a (2.10) rendszernek csak az  $a_0 = a_1 = \dots = a_{2n} = 0$  triviális megoldása van.  $\square$

**2.1. Megjegyzés** ( $C_n$  nem teljesen pozitív). *Könnyű belátni, hogy a  $\{C_{i,n}\}_{i=0}^{2n}$  bázis nem teljesen pozitív a tetszőleges  $[\mu, \mu + 2\pi]$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ) intervallumon. Például  $\mu = 0$ ,  $n = 2$ ,  $u_0 = 0 < u_1 = \lambda_2 < u_2 = 2\lambda_2 < u_3 = 3\lambda_2 < u_4 = 4\lambda_2$ ,  $\lambda_2 = 2\pi/5$  esetén*

$$\det M \begin{pmatrix} C_{0,2} & C_{1,2} & C_{2,2} & C_{3,2} & C_{4,2} \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} > 0,$$

azonban

$$\det \begin{bmatrix} C_{2,2}(u_1) & C_{3,2}(u_1) \\ C_{2,2}(u_2) & C_{3,2}(u_2) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{20} - \frac{5}{12} < 0$$

és

$$\det \begin{bmatrix} C_{1,2}(u_0) & C_{2,2}(u_0) & C_{3,2}(u_0) \\ C_{1,2}(u_2) & C_{2,2}(u_2) & C_{3,2}(u_2) \\ C_{1,2}(u_4) & C_{2,2}(u_4) & C_{3,2}(u_4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{40} > 0.$$

## 2.3. Ciklikus görbék

**2.1. Definíció** (Ciklikus görbe).  $n$ -edrendű ( $2n$ -edfokú) ciklikus görbén az

$$\mathbf{a}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \mathbf{d}_i, \quad u \in [0, 2\pi], \quad n \geq 1, \quad (2.15)$$

$$C_{i,n}(u) = \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n, \quad (2.16)$$

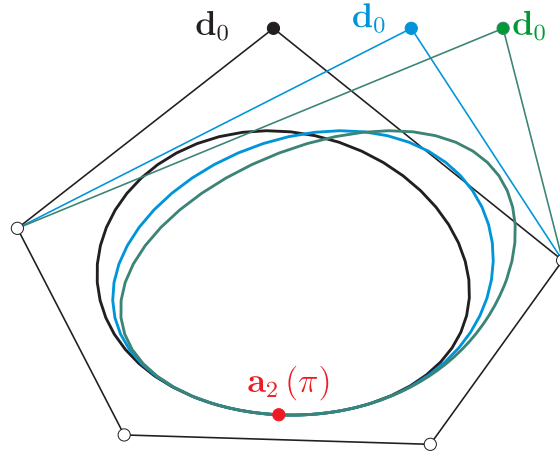
görbét értjük, ahol  $c_n$  a (2.7) kifejezéssel adott és  $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ .

**2.2. Megjegyzés** (Értelmezési tartomány). *Mivel a bázisfüggvények  $2\pi$ -szerint periodikusak, a görbe értelmezési tartománya tetszőleges  $2\pi$  hosszúságú intervallum lehet.*

A  $C_{i,n}$  függvények definíciójából nyilvánvaló, hogy a görbe kontrollpontjainak konvex burkában van. A  $C_{i,n}$  alapfüggvény egyértelmű maximuma az  $u = i\lambda_n$  helyen van, ezért a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontnak az  $\mathbf{a}_n(i\lambda_n)$  görbepont környezetében van legnagyobb hatása a görbe alakjára.

$C_{i,n}(u)$  az  $u = \pi + i\lambda_n$  helyen eltűnik, ezért a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontnak nincs hatása az ehhez tartozó görbepontra, azaz ez a görbepont invariáns a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont változtatásával szemben. E pont kivételével  $\mathbf{d}_i$  hatással van a görbe minden pontjára, vagyis a ciklikus görbe globálisan módosítható. Ezeket a tulajdonságokat illusztrálja a 2.1. ábra.

Bár a kontrollpontoknak globális hatása van a görbe alakjára, ez a hatás azonban drasztikusan csökken – különösen magas rend esetén – a maximálisan befolyásolt ponttól távolodva.



2.1. ábra. A  $\mathbf{d}_0$  kontrollpont eltolásaival kapott ciklikus görbék; a változtatás az  $\mathbf{a}_2(\pi)$  pontra nincs hatással

**2.3. Tétel.** *A görbe rendjének növelése csökkenti a kontrollpontok hatásának globális jellegét.*

**Bizonyítás.** Tekintsük a

$$C_{0,n}(u) = \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u))^n, \quad u \in [-\pi, \pi]$$

bázisfüggvényt és a tetszőlegesen kicsi  $\varepsilon \in (0, 1)$  konstanst! A  $C_{0,n}$  függvény a

$$\pm \arccos \left( 2 \left( \frac{\varepsilon}{c_n} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right)$$

paraméterértékeknél egyenlő  $\varepsilon$ -nal. A bázisfüggvények tulajdonságaiból következik, hogy a  $C_{0,n}(u) \geq \varepsilon$  egyenlőtlenség a fenti két érték között teljesül. Könnyen megmutatható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{(2n+1) \binom{2n}{n}} \right) = 4$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varepsilon} = 1.$$

Így a

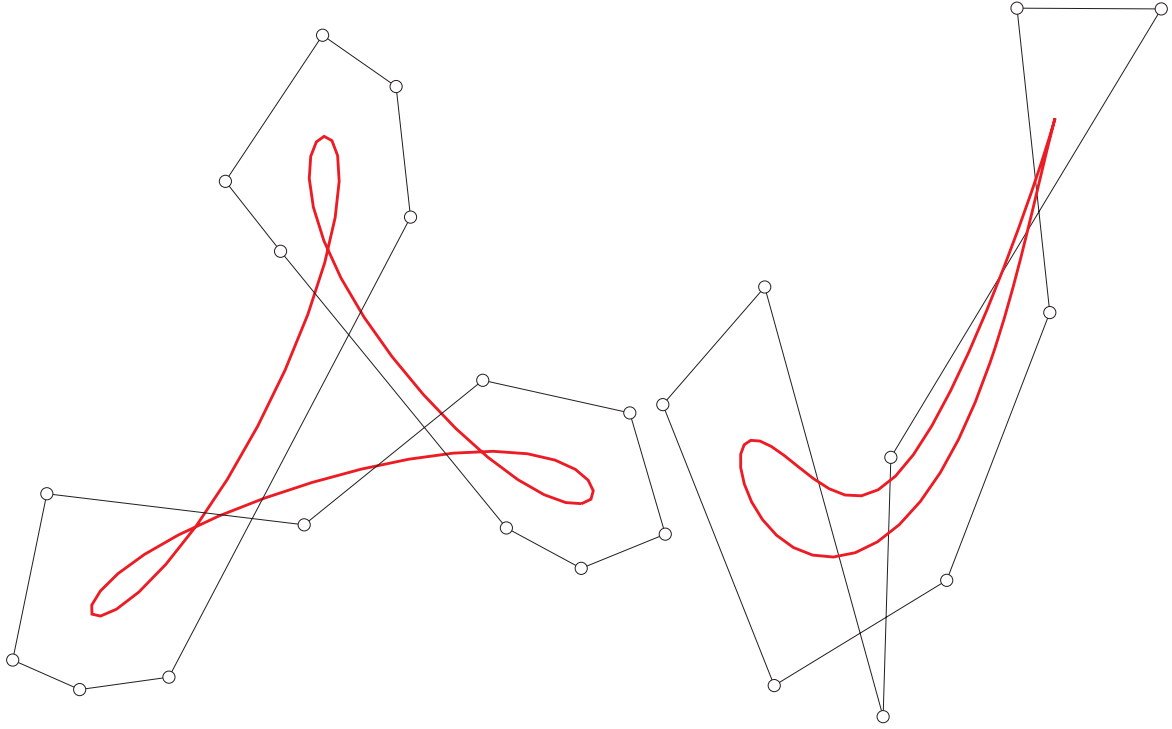
$$\pm \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \left( 2 \left( \frac{\varepsilon}{c_n} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \pm \arccos(1) = 0$$

határértéket kapjuk, ami azt jelenti, hogy  $n \rightarrow \infty$  esetén a  $\mathbf{d}_0$  kontrollpont hatása nullához tart.  $\square$

A numerikus tesztek azt mutatják, hogy ez a csökkenés gyors.

Ezzel a görbемegadással változatos alakú görbék modellezhetők, mint azt a 2.2. ábra is mutatja.

A ciklikus görbéket egyértelműen meghatározzák a kontrollpontjai, ezért az alakmódosításra csak egy lehetőségünk van: a kontrollpontok eltolása. Az (1.1)



2.2. ábra. Zárt görbék modellezése; a bal oldali ábrán  $n = 7$ , a jobb oldalin  $n = 4$

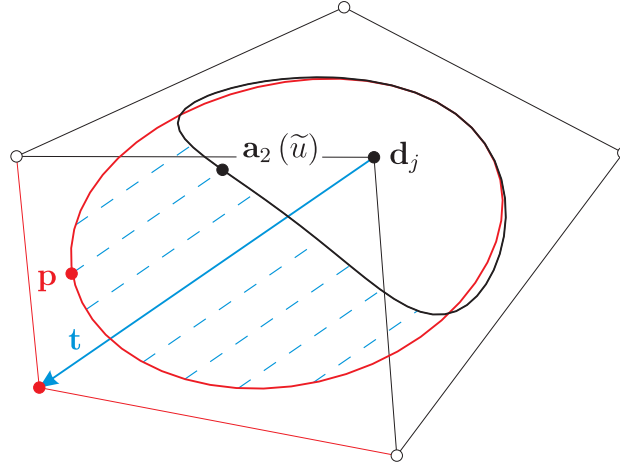
alakban adott görbék esetén, ha egy kontrollpontot eltolunk, akkor a görbe pontjai az eltolásvektorral párhuzamosan mozognak el, és az eltolás mértéke pontonként változik. Ez a következő előírt alakmódosítást teszi lehetővé: ha az akarjuk, hogy a görbe  $\mathbf{a}_n(\tilde{u})$  pontja a tetszőlegesen adott  $\mathbf{p}$  pontba kerüljön a  $\mathbf{d}_j$  ( $j \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ ) kontrollpont eltolásának eredményeként, akkor az eltolásvektort

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{a}_n(\tilde{u})}{C_{j,n}(\tilde{u})}$$

módon kell megadni, feltéve hogy  $C_{j,n}(\tilde{u}) \neq 0$  ( $C_{j,n}(\tilde{u}) = 0$  esetén természetesen nincs megoldás, másik kontrollpontot kell választani), lásd az 1.2. szakaszt. Ezt a típusú alakmódosítást szemlélteti a 2.3. ábra.

A (2.15) ciklikus görbe  $r$ -edrendű deriváltjának meghatározásához előbb az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n(u) &= \frac{c_n}{2^n} \sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \mathbf{d}_i = \\ &\stackrel{(2.3)}{=} c_n \sum_{i=0}^{2n} \cos^{2n}\left(\frac{u}{2} - \frac{i}{2}\lambda_n\right) \mathbf{d}_i = \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \frac{\binom{2n}{n} c_n}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i + \\ &\quad + \frac{c_n}{2^{2n-1}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \mathbf{d}_i = \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i + \\ &\quad + \frac{2}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \mathbf{d}_i, \end{aligned}$$



2.3. ábra. Előírt alakmódosítás

átalakításokat végezzük el, ahol

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i \quad (2.17)$$

a kontrollpoligon súlypontja.

Ezért a (2.15) görbe  $r$ -edrendű ( $r \geq 1$ ) deriváltja

$$\frac{d^r}{du^r} \mathbf{a}_n(u) = \frac{2}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (n-k)^r \cos\left((n-k)(u - i\lambda_n) + \frac{r\pi}{2}\right) \mathbf{d}_i, \quad (2.18)$$

vagyis a ciklikus görbe deriválására nézve zárt.

### 2.3.1. Zárt görbék egy osztályának egzakt leírása

Az ellipszisek (körök), zárt epi- és hipocikloisok, Lissajous-görbék, tóruszcsomók, fólíumok a zárt görbék azon osztályához tartoznak, amelyek

$$\begin{cases} \mathbf{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2, \\ \mathbf{x}(u) = [x_1(u) \quad x_2(u) \quad \cdots \quad x_d(u)]^T \end{cases} \quad (2.19)$$

alakban írhatók le, ahol

$$\begin{aligned} x_l(u) &\doteq x_l\left(u, \{(\alpha_p^l, \psi_p^l)\}_{p \in P_l}, \{(\beta_q^l, \varphi_q^l)\}_{q \in Q_l}\right) = \\ &= \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \cos(pu + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \sin(qu + \varphi_q^l), \quad (l = 1, 2, \dots, d), \end{aligned}$$

és  $P_l, Q_l \subset \mathbb{N}$ ,  $\alpha_p^l, \beta_q^l, \psi_p^l, \varphi_q^l \in \mathbb{R}$ . A célunk ezen görbecsalád ciklikus reprezentációjának megadása. Ennek érdekében előbb egy segédtevélt bizonyítunk be, mely a ciklikus görbék további tulajdonságainak igazolásában is nagy segítségünkre lesz.

**2.1. Lemma.** Tekintsük a (2.19) zárt görbét és legyen

$$n \geq n_{\min} := \max \{e \mid e \in \cup_{l=1}^d (P_l \cup Q_l)\} !$$

Vezessük be a

$$\mathbf{d}_i = [x_1(i\lambda_n) \ x_2(i\lambda_n) \ \cdots \ x_d(i\lambda_n)]^T, \ i = 0, 1, \dots, 2n, \quad (2.20)$$

kontrollpontokat és az általuk meghatározott

$$\mathbf{a}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \mathbf{d}_i = [a_1(u) \ a_2(u) \ \cdots \ a_d(u)]^T, \ u \in [0, 2\pi]$$

ciklikus görbét! Ekkor az  $\mathbf{a}_n$  görbe  $l$ -edik ( $l = 1, 2, \dots, d$ ) koordinátafüggvénye

$$a_l(u) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left( \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \binom{2n}{n-p} \cos(pu + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \binom{2n}{n-q} \sin(qu + \varphi_q^l) \right) \quad (2.21)$$

alakban fejezhető ki.

Megfordítva, ha egy ciklikus görbe koordinátafüggvényei (2.21) alakúak, akkor annak kontrollpontjai pontosan a (2.20) pontok.

**Bizonyítás.** Az  $\mathbf{a}_n$  görbe  $l$ -edik ( $l = 1, 2, \dots, d$ ) koordinátafüggvénye a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} a_l(u) &= \frac{c_n}{2^n} \sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \left( \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \sin(qi\lambda_n + \varphi_q^l) \right) = \\ &= \frac{c_n}{2^n} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) + \\ &\quad + \frac{c_n}{2^n} \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \sin(qi\lambda_n + \varphi_q^l). \end{aligned}$$

Ha  $p = 0 \in P_l$ , akkor

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \cos \psi_0^l = \\ &\stackrel{(2.3)}{=} 2^n \cos \psi_0^l \sum_{i=0}^{2n} \cos^{2n} \left( \frac{u}{2} - \frac{i}{2} \lambda_n \right) = \\ &\stackrel{(2.6)}{=} 2^n \cos \psi_0^l \left( \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2n+1}{2^n} \binom{2n}{n} \cos \psi_0^l + \frac{\cos \psi_0^l}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) = \\
&\stackrel{(2.5)}{=} \frac{2n+1}{2^n} \binom{2n}{n} \cos \psi_0^l.
\end{aligned}$$

A  $p \in P_l \setminus \{0\}$  esetben

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) = \\
&\stackrel{(2.3)}{=} 2^n \sum_{i=0}^{2n} \cos^{2n} \left( \frac{u}{2} - \frac{i\lambda_n}{2} \right) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) = \\
&\stackrel{(2.6)}{=} 2^n \sum_{i=0}^{2n} \left( \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \right) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) = \\
&= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{2n} \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) + \\
&\quad + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) = \\
&\stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos \left( 2(n-k) \left( \frac{u}{2} - \frac{i\lambda_n}{2} \right) \right) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) \\
&\stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0, k \neq n-p}^{n-1} \binom{2n}{k} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-k)u + \psi_p^l - (n-k-p)i\lambda_n) + \\
&\quad + \frac{2n+1}{2^n} \binom{2n}{n-p} \cos(pu + \psi_p^l) + \\
&\quad + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-k)u - \psi_p^l - (n-k+p)i\lambda_n) = \\
&\stackrel{(2.4)}{=} \frac{2n+1}{2^n} \binom{2n}{n-p} \cos(pu + \psi_p^l).
\end{aligned}$$

A koszinusz és szinusz függvények a  $\pi/2$  fáziseltolásban különböznek, ezért  $\forall q \in Q_l$  esetén a

$$\sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \sin(qi\lambda_n + \varphi_q^l)$$

részösszeg

$$\frac{2n+1}{2^n} \binom{2n}{n-q} \sin(qu + \varphi_q^l)$$

alakra hozható. Ezért az  $\mathbf{a}_n$  görbe  $l$ -edik ( $l = 1, 2, \dots, d$ ) koordinátafüggvényének

végző alakja

$$\begin{aligned}
 a_l(u) &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \cdot c_n \cdot \left( \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \binom{2n}{n-p} \cos(pu + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \binom{2n}{n-q} \sin(qu + \varphi_q^l) \right) = \\
 &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \cdot \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \\
 &\quad \cdot \left( \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \binom{2n}{n-p} \cos(pu + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \binom{2n}{n-q} \sin(qu + \varphi_q^l) \right) = \\
 &= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left( \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \binom{2n}{n-p} \cos(pu + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \binom{2n}{n-q} \sin(qu + \varphi_q^l) \right),
 \end{aligned}$$

ami az állítás első felének igazolását jelenti.

A megfordítás igazolásához azokat az ismeretlen

$$\mathbf{d}_i = [d_{i,1} \ d_{i,2} \ \dots \ d_{i,d}]^T \in \mathbb{R}^d, \ i = 0, 1, \dots, 2n,$$

kontrollpontokat kell meghatároznunk, melyekre a

$$\sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) d_{i,l} \equiv a_l(u), \ l = 1, 2, \dots, d, \ \forall u \in [0, 2\pi] \quad (2.22)$$

egyenlőség teljesül.

Az  $u_k = k\lambda_n$  értékeket a (2.22) egyenlőségbe helyettesítve, az ismeretlen

$$d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,d}, \ i = 0, 1, \dots, 2n.$$

paraméterekre nézve  $d$  darab lineáris egyenletrendszer kapunk, melyek mátrixalakja

$$M_{2n+1} \cdot U_l = A_l, \ l = 1, 2, \dots, d, \quad (2.23)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 M_{2n+1} &= \frac{c_n}{2^n} \Lambda_{2n+1}, \\
 U_l &= [d_{0,l} \ d_{1,l} \ \dots \ d_{2n,l}]^T, \\
 A_l &= [a_l(0) \ a_l(\lambda_n) \ \dots \ a_l(2n\lambda_n)]^T
 \end{aligned}$$

és  $\Lambda_{2n+1}$  a 2.2. tétel bizonyításánál bevezetett nonsinguláris cirkuláris mátrix. Az  $M_{2n+1}$  is reguláris, mivel

$$\det M_{2n+1} = \left(\frac{c_n}{2^n}\right)^{2n+1} \det \Lambda_{2n+1} \neq 0.$$

Ezért a (2.23) lineáris egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van. A következőkben megmutatjuk, hogy az egyértelmű megoldás

$$d_{i,l} = x_l(i\lambda_n) =$$

$$= \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \cos(ip\lambda_n + \psi_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \sin(iq\lambda_n + \varphi_q^l), \quad i = 0, 1, \dots, 2n,$$

azaz belátjuk a

$$\sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(k\lambda_n) d_{i,l} = a_l(k\lambda_n), \quad k = 0, 1, \dots, 2n, \quad (2.24)$$

egyenlőség teljesülését.

A (2.24) egyenlőség bal oldalát alkotó összegnek a  $p$  és  $q$  változók szerinti felbontása után a  $p$ -szerinti részösszeg az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} & \frac{c_n}{2^n} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos((k-i)\lambda_n))^n \cos(ip\lambda_n + \psi_p^l) = \\ & \stackrel{(2.3)}{=} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \sum_{i=0}^{2n} \cos^{2n}\left(\frac{k-i}{2}\lambda_n\right) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) = \\ & \stackrel{(2.6)}{=} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \left( \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{2n} \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{j} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-j)(k-i)\lambda_n) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) \right) = \\ & = \frac{1}{2n+1} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \left( \sum_{i=0}^{2n} \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{j} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-j)(k-i)\lambda_n) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) \right) = \\ & \stackrel{(2.4)}{=} \frac{2}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{j} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-j)(k-i)\lambda_n) \cos(pi\lambda_n + \psi_p^l) = \\ & \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{j} \left( \sum_{i=0}^{2n} \cos(((n-j)(k-i) + pi)\lambda_n + \psi_p^l) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=0}^{2n} \cos(((n-j)(k-i) - pi)\lambda_n - \psi_p^l) \right) = \\ & \stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \sum_{p \in P_l} \alpha_p^l \sum_{j=0, j \neq n-p}^{n-1} \binom{2n}{j} \sum_{i=0}^{2n} \cos(((n-j)(k-i) + pi)\lambda_n - \psi_p^l) + \\ & \quad + \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{p \in P_l} \binom{2n}{n-p} \alpha_p^l \cos(pk\lambda_n + \psi_p^l) = \end{aligned}$$

$$\stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{p \in P_l} \binom{2n}{n-p} \alpha_p^l \cos(pk\lambda_n + \psi_p^l).$$

A  $q$ -szerinti részösszegeken hasonló átalakításokat hajthatunk végre (a különbség csak a felhasznált trigonometrikus azonosságokban van, nevezetesen a (2.3), (2.6), (2.4), (2.1), (2.4) és (2.4) azonosságok helyett rendre a (2.3), (2.6), (2.5), (2.2), (2.5) és (2.5) azonosságokat kell felhasználni), aminek eredményeként

$$\begin{aligned} & \frac{c_n}{2^n} \sum_{q \in Q_l} \beta_q^l \sum_{i=0}^{2n} (1 + \cos(k-i)\lambda_n)^n \sin(iq\lambda_n + \varphi_q^l) = \\ & = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{q \in Q_l} \binom{2n}{n-q} \beta_q^l \sin(kq\lambda_n + \varphi_q^l), \end{aligned}$$

ami állításunkat igazolja.  $\square$

A következő tételek a 2.1. segédttétel közvetlen alkalmazásával bizonyíthatók.

**2.4. Tétel** (Egzakt leírás). *Tekintsük az*

$$\tilde{\mathbf{x}}(u) = [\tilde{x}_1(u) \quad \tilde{x}_2(u) \quad \cdots \quad \tilde{x}_d(u)]^T, \quad u \in [0, 2\pi],$$

*zárt görbét, mely koordinátafüggvényei*

$$\tilde{x}_l(u) = \sum_{p \in P_l} \tilde{\alpha}_p^l \cos(pu + \tilde{\psi}_p^l) + \sum_{q \in Q_l} \tilde{\beta}_q^l \sin(qu + \tilde{\varphi}_q^l), \quad l = 1, 2, \dots, d, \quad (2.25)$$

*alakúak, ahol  $P_l, Q_l \subset \mathbb{N}$  és  $\tilde{\alpha}_p^l, \tilde{\beta}_q^l, \tilde{\psi}_p^l, \tilde{\varphi}_q^l \in \mathbb{R}$ ! Legyen*

$$n \geq n_{\min} := \max \{e \mid e \in \cup_{l=1}^d (P_l \cup Q_l)\}$$

*és  $r \in \mathbb{N}$ ! Ha a 2.1. segédttétel  $\mathbf{x}$  görbéjében szereplő konstansokat*

$$\alpha_p^l(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-p}} p^r \tilde{\alpha}_p^l, \quad \psi_p^l(n) \equiv \tilde{\psi}_p^l + \frac{r\pi}{2}, \quad p \in P_l, \quad (2.26)$$

$$\beta_q^l(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-q}} q^r \tilde{\beta}_q^l, \quad \varphi_q^l(n) \equiv \tilde{\varphi}_q^l + \frac{r\pi}{2}, \quad q \in Q_l, \quad (2.27)$$

*módon adjuk meg, akkor a (2.20) kontrollpontok által meghatározott ciklikus görbe pontosan az  $\tilde{\mathbf{x}}$  görbe  $r$ -edik deriváltját ( $r \geq 0$ ) írja le bármely  $n \geq n_{\min}$  esetén, azaz az  $\mathbf{a}_n$  ciklikus görbe  $l$ -edik koordinátafüggvényére az*

$$a_l(u) = \frac{d^r \tilde{x}^l}{d u^r}(u) = \sum_{p \in P_l} p^r \tilde{\alpha}_p^l \cos\left(pu + \tilde{\psi}_p^l + \frac{r\pi}{2}\right) + \sum_{q \in Q_l} q^r \tilde{\beta}_q^l \sin\left(qu + \tilde{\varphi}_q^l + \frac{r\pi}{2}\right),$$

$$\forall u \in [0, 2\pi], \quad l = 1, 2, \dots, d$$

*egyenlőség teljesül.*

### 2.3. Megjegyzés. Mivel

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \geq n_{\min}}} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-k}} = 1, \quad k = 0, 1, \dots, n_{\min} - 1,$$

$\tilde{x}^l$   $r$ -edrendű deriváltja végtelen sok alakban előállítható, továbbá

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(u) &\doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x} \left( u, \{(\alpha_p^l(n), \psi_p^l(n))\}_{p \in P_l}, \{(\beta_q^l(n), \varphi_q^l(n))\}_{q \in Q_l} \right) = \\ &= \frac{d^r \tilde{\mathbf{x}}}{d u^r}(u), \quad \forall u \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

azaz a (2.20) kontrollpoligon a  $d^r \tilde{\mathbf{x}}^l / d u^r$  görbéhez konvergál, ha  $n \rightarrow \infty$ .

**2.4. Megjegyzés.** Tekintsük a tetszőlegesen rögzített  $n \geq n_{\min}$  rendet és a  $\tau \in [0, 2\pi]$  fáziseltolást! A 2.4. tétel

$$\begin{aligned} \alpha_p^l(n) &= \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-p}} p^r \tilde{\alpha}_p^l, \quad \psi_p^l(n) \equiv \tilde{\psi}_p^l + \frac{r\pi}{2} + \tau, \quad p \in P_l, \\ \beta_q^l(n) &= \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-q}} q^r \tilde{\beta}_q^l, \quad \varphi_q^l(n) \equiv \tilde{\varphi}_q^l + \frac{r\pi}{2} + \tau, \quad q \in Q_l, \\ l &= 1, 2, \dots, d, \end{aligned}$$

beállításával kapott

$$\mathbf{d}_i(\tau) = \begin{bmatrix} x_1(i\lambda_n + \tau) & x_2(i\lambda_n + \tau) & \cdots & x_d(i\lambda_n + \tau) \end{bmatrix}^T, \quad i = 0, 1, \dots, 2n,$$

kontrollpontokkal meghatározott ciklikus görbe ugyancsak az  $\tilde{\mathbf{x}}$  görbe  $r$ -edrendű deriváltját írja le (természetesen más paraméterezéssel), azaz

$$\mathbf{a}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i(\tau) C_{i,n}(u) \equiv \frac{d^r \tilde{\mathbf{x}}}{d u^r}(u + \tau), \quad \forall u \in [0, 2\pi].$$

**2.5. Megjegyzés.** Ha a (2.25) koordinátafüggvényekben az  $u$  paraméter együtthatói racionális számok, akkor a 2.4. tétel az  $u \rightarrow mu$  paramétertranszformáció után alkalmazható, ahol  $m$  az összes nevező legkisebb közös többszöröse.  $m > 1$  esetén a (2.20) kontrollpontok helyett a

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} x_1\left(\frac{i}{m}\lambda_n\right) & x_2\left(\frac{i}{m}\lambda_n\right) & \cdots & x_d\left(\frac{i}{m}\lambda_n\right) \end{bmatrix}^T, \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$

kontrollpontokat kell használni. Ennek alkalmazására a 2.7.2. szakaszban mutatunk példát.

**2.5. Tétel** (Zártság deriválásra). A (2.15) ciklikus görbe (2.18)  $r$ -edrendű ( $r \geq 1$ ) deriváltja azt az  $m$ -edrendű ( $m \geq n$ ) ciklikus görbét határozza meg, melynek kontrollpoligonja

$$\mathbf{D}_m = [\mathbf{x}(j\lambda_m)]_{j=0}^{2m},$$

ahol  $\mathbf{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathbf{x}(u) = \frac{2\binom{2m}{m}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2n}{k} (n-k)^r}{\binom{2m}{m-n+k}} \cos\left((n-k)(u - i\lambda_n) + \frac{r\pi}{2}\right) \mathbf{d}_i.$$

A  $\mathcal{V}_n$  térnek a természetes

$$\mathcal{T}_n = \{T_i(u)\}_{i=0}^{2n} = \{1, \cos u, \sin u, \dots, \cos(nu), \sin(nu)\}$$

bázisa mellett definiáltuk a  $\{C_{i,n}(u)\}_{i=0}^{2n}$  bázisát is. Most a két bázis közötti transzformációkra adunk explicit formulát a 2.1. segédtételt felhasználva.

**2.6. Tétel** (Bázistranszformáció). *A  $\mathcal{V}_n$  tér  $\mathcal{C}_n = \{C_{i,n}(u)\}_{i=0}^{2n}$  bázisa a  $\mathcal{T}_n = \{T_i(u)\}_{i=0}^{2n}$  bázisból a*

$$\begin{bmatrix} C_{0,n}(u) \\ C_{1,n}(u) \\ C_{2,n}(u) \\ \vdots \\ C_{2n-1,n}(u) \\ C_{2n,n}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_{0,0}}{2} & e_{0,1} & f_{0,1} & \cdots & e_{0,n} & f_{0,n} \\ \frac{e_{1,0}}{2} & e_{1,1} & f_{1,1} & \cdots & e_{1,n} & f_{1,n} \\ \frac{e_{2,0}}{2} & e_{2,1} & f_{2,1} & \cdots & e_{2,n} & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{e_{2n-1,0}}{2} & e_{2n-1,1} & f_{2n-1,1} & \cdots & e_{2n-1,n} & f_{2n-1,n} \\ \frac{e_{2n,0}}{2} & e_{2n,1} & f_{2n,1} & \cdots & e_{2n,n} & f_{2n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(u) \\ T_1(u) \\ T_2(u) \\ \vdots \\ T_{2n-1}(u) \\ T_{2n}(u) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

transzformációval állítható elő, ahol

$$e_{i,k} = \frac{2}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \cos(ki\lambda_n), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

és

$$f_{i,k} = \frac{2}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \sin(ki\lambda_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Az inverz transzformáció alakja

$$\begin{bmatrix} T_0(u) \\ T_1(u) \\ T_2(u) \\ \vdots \\ T_{2n-1}(u) \\ T_{2n}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{0,0} & \xi_{0,1} & \xi_{0,2} & \cdots & \xi_{0,2n-1} & \xi_{0,2n} \\ \xi_{1,0} & \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,2n-1} & \xi_{1,2n} \\ \zeta_{1,0} & \zeta_{1,1} & \zeta_{1,2} & \cdots & \zeta_{1,2n-1} & \zeta_{1,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_{n,0} & \xi_{n,1} & \xi_{n,2} & \cdots & \xi_{n,2n-1} & \xi_{n,2n} \\ \zeta_{n,0} & \zeta_{n,1} & \zeta_{n,2} & \cdots & \zeta_{n,2n-1} & \zeta_{n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{0,n}(u) \\ C_{1,n}(u) \\ C_{2,n}(u) \\ \vdots \\ C_{2n-1,n}(u) \\ C_{2n,n}(u) \end{bmatrix},$$

ahol

$$\xi_{k,i} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-k}} \cos(ki\lambda_n)$$

és

$$\zeta_{k,i} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-k}} \sin(ki\lambda_n).$$

**Bizonyítás.** A  $C_{i,n}$  bázisfüggvények a

$$\begin{aligned} C_{i,n}(u) &= \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n = \\ &= c_n \cos^{2n} \left( \frac{u}{2} - \frac{i}{2} \lambda_n \right) = \\ &= c_n \left( \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) = \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \cos(k(u - i\lambda_n)) = \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \cos(ku) \cos(ki\lambda_n) + \\
&\quad + \frac{2}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \sin(ku) \sin(ki\lambda_n) = \\
&= \frac{e_{i,0}}{2} + \sum_{k=1}^n e_{i,k} \cos(ku) + \sum_{k=1}^n f_{i,k} \sin(ku),
\end{aligned}$$

módon alakíthatók át, ahol

$$\begin{aligned}
e_{i,k} &= \frac{2}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \cos(ki\lambda_n), \quad k = 0, 1, \dots, n, \\
f_{i,k} &= \frac{2}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \sin(ki\lambda_n), \quad k = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

A fenti azonosságok miatt a

$$\begin{bmatrix} C_{0,n}(u) \\ C_{1,n}(u) \\ C_{2,n}(u) \\ \vdots \\ C_{2n-1,n}(u) \\ C_{2n,n}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_{0,0}}{2} & e_{0,1} & f_{0,1} & \cdots & e_{0,n} & f_{0,n} \\ \frac{e_{1,0}}{2} & e_{1,1} & f_{1,1} & \cdots & e_{1,n} & f_{1,n} \\ \frac{e_{2,0}}{2} & e_{2,1} & f_{2,1} & \cdots & e_{2,n} & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{e_{2n-1,0}}{2} & e_{2n-1,1} & f_{2n-1,1} & \cdots & e_{2n-1,n} & f_{2n-1,n} \\ \frac{e_{2n,0}}{2} & e_{2n,1} & f_{2n,1} & \cdots & e_{2n,n} & f_{2n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(u) \\ T_1(u) \\ T_2(u) \\ \vdots \\ T_{2n-1}(u) \\ T_{2n}(u) \end{bmatrix}$$

bázistranszformációt kapjuk.

Az inverz transzformáció mátrixának felírásához felhasználjuk, hogy a

$$\cos(ku) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \xi_{k,i}, \quad \forall u \in [0, 2\pi], \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha

$$\xi_{k,i} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-k}} \cos(ki\lambda_n).$$

Hasonlóképp, a

$$\sin(ku) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \zeta_{k,i}, \quad \forall u \in [0, 2\pi], \quad k = 1, \dots, 2n$$

egyenlőségek akkor és csak akkor teljesülnek, ha

$$\zeta_{k,i} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-k}} \sin(ki\lambda_n).$$

Ezzel az inverz bázistranszformációra vonatkozó állítást is igazoltuk.  $\square$

## 2.4. Rendszámnövelés

Geometriai modellezés során gyakran szükséges ugyanazt az alakot több kontrollponttal leírni, pl. a hatékonyabb alakmódosítás érdekében. Ez esetünkben a rend növelését jelenti, azaz adott  $n$ -edrendű ciklikus görbéhez meg kell határoznunk annak az  $(n+z)$ -edrendű ( $z \geq 1$ ) ciklikus görbének a kontrollpontjait, mely az eredetivel megegyező alakot írja le, azaz

$$\sum_{j=0}^{2(n+z)} C_{j,n+r}(u) \mathbf{d}_j^z = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \mathbf{d}_i, \quad \forall u \in [0, 2\pi],$$

ahol  $\mathbf{d}_j^z$  az  $(n+z)$ -edrendű görbe kontrollpontjait jelöli. Ha az értelmezési tartományban felveszünk  $(2n+z)$  darab páronként különböző  $u_0, u_1, \dots, u_{2(n+z)}$  paraméterértéket, akkor a

$$\sum_{j=0}^{2(n+z)} C_{j,n+r}(u_k) \mathbf{d}_j^z = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u_k) \mathbf{d}_i, \quad k = 0, 1, \dots, 2(n+z)$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a keresett  $\mathbf{d}_j^z$  kontrollpontokat. Az egyértelmű megoldás mindig létezik, mivel a  $C_{j,n+z}$  függvények lineárisan függetlenek és az  $u_k$  értékek különbözőek.

A továbbiakban explicit formulát adunk a ciklikus görbék rendszámnövelési feladatára, vagyis a fenti egyenletrendszer megoldása nélkül állítjuk elő a kontrollpontokat.

**2.7. Tétel** (Rendszámnövelés). *Az  $(n+z)$ -edrendű ( $z \geq 1$ )*

$$\mathbf{a}_{n+z}(u) = \sum_{j=0}^{2(n+z)} C_{j,n+z}(u) \mathbf{d}_j^z, \quad u \in [0, 2\pi]$$

*ciklikus görbe pontonként megegyezik az  $n$ -edrendű ( $n \geq 1$ ) (2.15) görbével, ha a kontrollpoligonját*

$$\mathbf{D}_{n+z} = [\mathbf{d}_j^z]_{j=0}^{2(n+z)} = [\mathbf{x}_z(j\lambda_{n+r})]_{j=0}^{2(n+z)}$$

*módon választjuk meg, ahol  $\mathbf{x}_z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_z(u) = & \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i + \\ & + \frac{2 \binom{2(n+z)}{n+z}}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2(n+z)}{z+k}} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \mathbf{d}_i. \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** A ciklikus görbe (2.17) alakban írható fel, amire a 2.1. segédtelet alkalmazva, állításunk igazolását nyerjük.  $\square$

Megmutatjuk azt is, hogy a rendszámnövelés során kapott kontrollpoligonok a görbéhez konvergálnak  $z \rightarrow \infty$  esetén.

**2.8. Tétel** (Konvergencia). *A fokszámnövelt görbe  $\mathbf{D}_{n+z} = [\mathbf{d}_j^z]_{j=0}^{2(n+z)}$  kontrollpoligonja az  $\mathbf{a}_n(u)$  görbéhez konvergál, azaz a*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{x}_z(u) = \mathbf{a}_n(u), \quad \forall u \in [0, 2\pi]$$

*egyenlőség teljesül.*

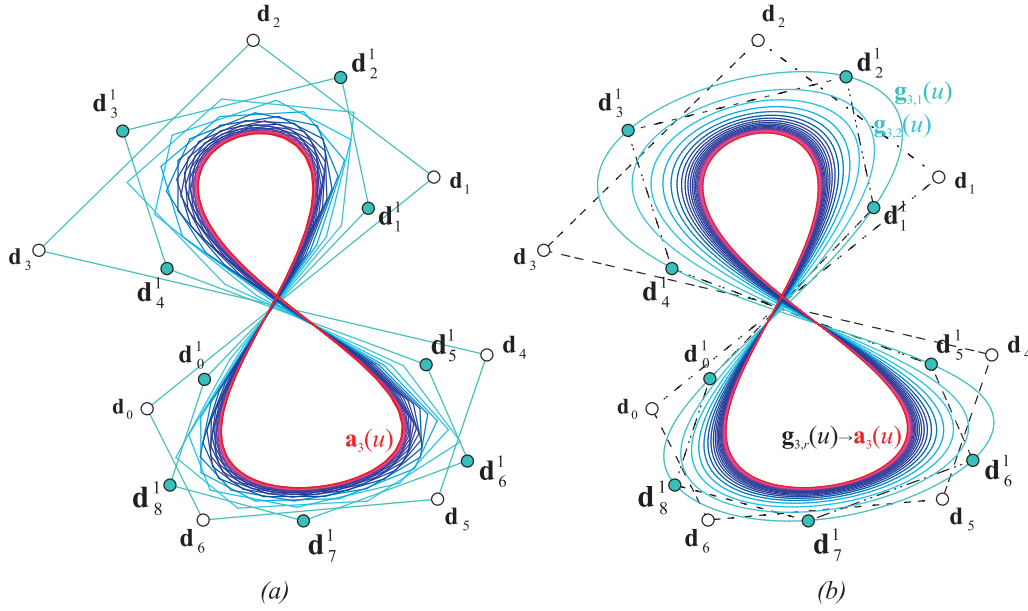
**Bizonyítás.** Az  $\mathbf{a}_n$  görbe (2.17) alakját használva és figyelembe véve a

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \geq 1}} \frac{\binom{2(n+z)}{n+z}}{\binom{2(n+z)}{z+k}} = 1, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, n \geq 1$$

határértékeket, a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{x}_z(u) = \mathbf{a}_n(u), \quad \forall u \in [0, 2\pi]$$

egyenlőséget kapjuk.  $\square$



2.4. ábra. (a) Harmadrendű ciklikus síkgörbe az eredeti és a rendszámnövelt kontrollpoligonokkal. (b) A rendszámnövelés során kapott kontrollpontok mértani helye a ciklikus görbéhez konvergál.

A 2.4. ábra a rendszámnövelést és az ennek során kapott kontrollpoligonok konvergenciáját szemlélteti.

## 2.5. Hullámzáscsökkentés

A ciklikus görbék hullámzáscsökkentő tulajdonságának bizonyításához Pólya és Schoenberg [59] eredményeit használjuk fel, ezért előbb ezeket ismertetjük röviden.

**2.2. Definíció** (Véges valós sorozatok előjelének ciklikus változása). A  $q = \{q_i\}_{i=1}^n$  véges valós számsorozat tagjai előjelváltásának számát  $v(q)$ -vel jelöljük, a sorozat előjelének ciklikus változásán pedig a

$$v_c(q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } q_i = 0, \quad \forall i \\ v(q_i, q_{i+1}, \dots, q_n, q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_i), & \text{ha } q_i \neq 0 \end{cases}$$

számot értjük.

Ha a sorozat tagjait óramutató járásával egyező irány szerinti elrendezésben képzeljük el, akkor nyilvánvaló, hogy a  $v_c(q)$  szám nem függ attól, hogy melyik el nem tűnő  $q_i$  tagból indulunk ki. Megjegyezzük, hogy  $v_c(q)$  mindig páros szám.

**2.3. Definíció** ( $2\pi$ -periodikus függvények előjelének ciklikus változása). Legyen  $f(u)$   $2\pi$ -szerint periodikus valós értékű függvény, és legyen  $\mathcal{U}$  az összes olyan valós  $u = \{u_i\}_{i=1}^n$  sorozat halmaza, mely kielégíti az

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n < u_1 + 2\pi \quad (2.29)$$

feltételt! Az  $f(u)$  függvény előjelének ciklikus változásán a

$$v_c(f) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{v_c(q) : q = \{f(u_i)\}_{i=1}^n\}$$

számot értjük.

Megjegyezzük, hogy a  $v_c(f)$  szám páros, amennyiben véges (pl.  $v_c(\sin u) = 2$ ,  $v_c(\sin 2u) = 4$ ,  $v_c(|\sin u|) = 0$ ).

A következőkben a körön értelmezett hullámszácsökkentő transzformációkat ismertetjük. Ezek a transzformációk olyan  $2\pi$ -periodikus nemnegatív  $\Omega(u)$  magfüggvényekkel, ún. kernelekkel, jellemezhetők, melyek korlátos változásúak és a következő módon normalizáltak

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(u) du = 1, \quad \Omega(u) = \frac{1}{2} (\Omega(u+0) + \Omega(u-0)).$$

**2.4. Definíció** (Hullámszácsökkentő transzformációk a körön). Legyen  $f(u)$  tetszőleges  $2\pi$ -periodikus valós értékű integrálható függvény! Azt mondjuk, hogy a

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(u-\varphi) f(\varphi) d\varphi \quad (2.30)$$

konvolúciós transzformáció hullámszácsökkentő, ha a

$$v_c(g) \leq v_c(f)$$

egyenlőtlenség teljesül minden  $f$ -re. Ugyanezt értjük azon is, hogy  $\Omega(u)$  hullámszácsökkentő kernel.

**2.5. Definíció** (de la Vallée Poussin-féle kernel és középérték). A de la Vallée Poussin-féle kernelt az

$$\omega_n(u) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left(2 \cos \frac{u}{2}\right)^{2n}, \quad n \geq 1 \quad (2.31)$$

kifejezéssel definiáljuk, mely Fourier-sora a következő egyszerű alakra hozható:

$$\omega_n(u) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=-n}^n \binom{2n}{n+k} e^{iku} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{(n+k)!} \cos(ku).$$

$\Omega(u) = \omega_n(u)$  esetén a (2.30) transzformáció

$$V_n(u) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \cos \left(\frac{u-\varphi}{2}\right)\right)^{2n} f(\varphi) d\varphi$$

alakban írható fel, amit az  $f(u)$  függvény de la Vallée Poussin-féle középértékének vagy egyszerűen  $V$ -átlagának nevezünk.

Könnyen igazolható, hogy  $V_n(u)$  legfeljebb  $2n$ -edfokú polinom, amelynek tagjai az  $f(u)$  függvény Fourier-együtthatói. Valóban, ha

$$f(u) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{iku}, \quad (f_{-k} = \bar{f}_k), \quad (2.32)$$

akkor (2.31) és (2.32) konvolúciója

$$V_n(u) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n+k} f_k e^{iku}.$$

Valós Fourier-sorokra (azaz  $2f_k = a_k - ib_k$  esetén)

$$f(u) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(ku) + b_k \sin(ku))$$

amiből

$$V_n(u) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n+k} (a_k \cos(ku) + b_k \sin(ku)).$$

Az [59] cikk egyik fő eredménye annak igazolása, hogy az  $\omega_n$ , ( $n \geq 1$ ) de Vallée Poussin-kernel ciklikus hullámzáscsökkentő tulajdonságú. Ennek bizonyításához több lemmát igazoltak, melyek közül számunkra a 3. lemma ([59], 300. o.) szükséges.

**2.2. Lemma.** *Legyen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  ( $m \geq 2$ )  $m$  darab pont a körön az óramutató járásával ellentétes irányban elhelyezve úgy, hogy*

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_m < \varphi_1 + 2\pi$$

*teljesüljön, legyen továbbá*

$$T_n(u) = \sum_{k=1}^m \omega_n(u - \varphi_k) a_k, \quad T_n(u) \not\equiv 0,$$

*ahol az  $a_k$ -k közül legalább kettő nem tűnik el. Ekkor*

$$z_c(T_n) \leq v_c(a),$$

*ahol  $a = \{a_k\}_{k=1}^m$  és a  $z_c(T_n)$  szám a  $T_n(u)$  egy perióduson belüli valós zérushelyeinek számát jelöli, a multiplicitásukat is figyelembe véve.*

A következő tételben bebizonyítjuk, hogy egyetlen hipersík sem metszheti a ciklikus görbét több pontban, mint a kontrollpoligonját.

**2.9. Tétel** (Hullámzáscsökkentés). *A (2.15) ciklikus görbe rendelkezik a hullámzáscsökkentő tulajdonsággal.*

**Bizonyítás.** Tekintsük az  $\mathbb{R}^d$  tér tetszőleges hipersíkjának

$$H(x_1, x_2, \dots, x_d) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + \dots + h_d x_d = 0$$

egyenletét, ahol  $\sum_{i=1}^d h_i^2 = 1!$  Legyen

$$q_i = H(\mathbf{q}_i) = H(q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,d}), \quad i = 0, 1, \dots, 2n$$

és tekintsük a

$$h(u) = H\left(\sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \mathbf{d}_i\right) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) H(\mathbf{d}_i) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) d_i$$

függvényt! Elegendő megmutatnunk, hogy minden valós  $q = \{q_i\}_{i=0}^{2n}$  sorozatra (ahol a  $q_i$ -k közül legalább kettő nullától különböző) teljesül a

$$v_c(h) \leq v_c(q)$$

egyenlőtlenség.

A  $C_{i,n}(u)$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n$ ) bázisfüggvények

$$\begin{aligned} C_{i,n}(u) &= \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n = \\ &= \frac{2^{2n}}{2^n (2n+1) \binom{2n}{n}} 2^n \cos^{2n}\left(\frac{u}{2} - \frac{i}{2}\lambda_n\right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left(2 \cos\left(\frac{u}{2} - \frac{i}{2}\lambda_n\right)\right)^{2n} = \\ &= \frac{1}{2n+1} \omega_n(u - i\lambda_n) \end{aligned}$$

alakra hozhatók. Ezért a tetszőlegesen rögzített  $q = \{q_i\}_{i=0}^{2n}$  valós sorozatra (ahol a  $q_i$ -k közül legalább kettő nem tűnik el)

$$h(u) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) q_i = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \omega_n(u - i\lambda_n) q_i.$$

A 2.2. lemmát felhasználva (az  $m = 2n+1$ ,  $\varphi = (k-1)\lambda_n$ ,  $a = q_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $a = \{a_k\}_{k=1}^m$  helyettesítéssel) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v_c(h) &\leq z_c(h) = \\ &= z_c\left(\frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \omega_n(u - i\lambda_n) q_i\right) = \\ &= z_c\left(\frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^m \omega_n(u - \varphi_k) a_k\right) = \\ &= z_c\left(\sum_{k=1}^m \omega_n(u - \varphi_k) a_k\right) \leq \\ &\leq v_c(a) = v_c(q), \end{aligned}$$

ami állításunkat igazolja.  $\square$

**2.2. Következmény** (Konvexitás-megőrzés). *Ha a (2.15) ciklikus síkgörbe kontrollpoligonja konvex, akkor maga a görbe is konvex.*

**2.6. Megjegyzés** (Descartes-rendszer). *A  $C_n$  függvényrendszer Descartes-féle rendszer, mivel  $\sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \equiv 1, \forall u \in [\mu, \mu + 2\pi], \mu \in \mathbb{R}$  és rendelkezik a ciklikus hullámzáscsökkentő tulajdonsággal (lásd Carnicer [9] 5.9. tételét). Hangsúlyozzuk azonban, hogy a  $C_n$  rendszer nem teljesen pozitív rendszer.*

## 2.6. Interpoláció

A ciklikus görbékkel is lehet zárt interpoláló görbékét előállítani. Ez a következő feladatot jelenti:

- **adottak** a  $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^d, (j = 0, 1, \dots, n), (d \geq 2)$  pontok és a hozzájuk rendelt  $u_j \in [0, 2\pi]$  paraméterértékek;
- **keressük** azokat a  $\mathbf{d}_j$  kontrollpontokat, melyek az  $\mathbf{a}_n(u_j) = \mathbf{p}_j$  feltételeket kielégítő (2.15) görbét határozzák meg.

Mivel a  $C_{j,n}$  függvények lineárisan függetlenek, a fenti feladat minden olyan esetben egyértelműen megoldható – az (1.2) egyenletrendszerben az  $F_j = C_{j,n}$  helyettesítéssel –, amikor az  $u_j$  értékek páronként különbözőek. Az interpoláló görbe uniform paraméterezése esetén azonban nem kell egyenletrendszert megoldani, ugyanis az interpoláló ciklikus görbe  $\mathbf{d}_j$  kontrollpontjaira zárt formulát tudunk adni. Ehhez előbb belátunk egy tételt a ciklikus görbék kontrollpontjaira vonatkozóan.

**2.10. Tétel** (Kontrollpontok mértani helye). *A (2.15) ciklikus görbe  $\mathbf{d}_j$  kontrollpontjai a*

$$\mathbf{g}_n(u) = \frac{1}{2n+1} \left( \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-k)(u + i\lambda_n)) \mathbf{d}_i \right), \quad u \in [0, 2\pi]$$

*görbén egyenközű paraméterezéssel helyezkednek el, azaz*

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{g}_n(j\lambda_n), \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

**Bizonyítás.** A  $\mathbf{g}_n$  görbébe a  $j\lambda_n (j = 0, 1, \dots, 2n)$  paraméterértékeket helyettesítve, az alábbi átalakításokat hajthatjuk végre:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((n-k)((j-i)\lambda_n)) \mathbf{d}_i = \\ &= \frac{1}{2n+1} \mathbf{d}_j + \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \mathbf{d}_i + \\ &+ \frac{2n}{2n+1} \mathbf{d}_j + \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((n-k)((j-i)\lambda_n)) \mathbf{d}_i = \\ &= \mathbf{d}_j + \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \mathbf{d}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((n-k)((j-i)\lambda_n)) \mathbf{d}_i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{a}_j + \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \mathbf{d}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((n(j-i) + k(i-j)) \lambda_n) \mathbf{d}_i = \\
&\stackrel{(2.4)}{=} \mathbf{d}_j + \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \mathbf{d}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{n(i-j)\pi}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{(n+1)(j-i)\pi}{2n+1}\right)}{\sin\frac{(i-j)\pi}{2n+1}} \mathbf{d}_i = \\
&\stackrel{(2.1)}{=} \mathbf{d}_j + \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \mathbf{d}_i + \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \frac{\sin\frac{(j-i)\pi}{2n+1} + \sin(\pi(i-j))}{\sin\frac{(i-j)\pi}{2n+1}} \mathbf{d}_i = \\
&= \mathbf{d}_j + \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \mathbf{d}_i - \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0, i \neq j}^{2n} \mathbf{d}_i = \\
&= \mathbf{d}_j. \quad \square
\end{aligned}$$

A fenti tétel arra is felhasználható, hogy adott pontokra egyenközü paraméterezésű trigonometrikus zárt görbét illesszünk. Ugyanis, adott  $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^d$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) pontok és a hozzájuk rendelt  $u_j = j\lambda_n$  paraméterértékek esetén a

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_n(u) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{p}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \mathbf{p}_i, \\
u &\in [0, 2\pi]
\end{aligned}$$

görbe pontosan ilyen tulajdonságú. Erre a trigonometrikus görbére alkalmazhatjuk a 2.4. tételt, aminek segítségével a fenti interpoláló trigonometrikus görbe ciklikus leírásának kontrollpontjait tartalmazó

$$\tilde{\mathbf{g}}_n(u) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{p}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{k}} \sum_{i=0}^{2n} \cos((n-k)(u - i\lambda_n)) \mathbf{p}_i$$

görbét kapjuk. Ezen a görbén az egyenközüen felvett

$$\mathbf{d}_j = \tilde{\mathbf{g}}_n(j\lambda_n), \quad j = 0, 1, \dots, 2n$$

pontok lesznek az interpoláló ciklikus görbe kontrollpontjai.

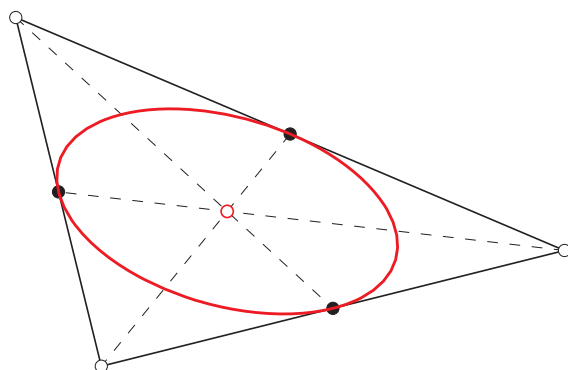
## 2.7. Nevezetes zárt görbék leírása a ciklikus bázisban

A 2.4. tétel egzakt formulát ad zárt trigonometrikus görbék egy széles osztályának kontrollpont-alapú ciklikus reprezentációjára. Ehhez a családhoz tartoznak pl. az ellipszisek, körök, a zárt epi- és hipocikloisok, Lissajous-görbék, tóruszcsomók és rozetták. Ebben a szakaszban példaként az ellipszisek, körök, valamint az epi- és hipocikloisok leírását adjuk meg.

### 2.7.1. Ellipszisek és körök

$n = 1$  esetén a ciklikus görbe ellipszis lesz. Ez azt jelenti, hogy a teljes ellipszist meg tudjuk adni három kontrollpont segítségével úgy, hogy a kapott görbe

bármely pontjában tetszőlegesen sokszor folytonosan differenciálható. Ellipsziseknek – a manapság legelterjedtebb – NURBS leírásához minimum hat kontrollpontra van szükség (három ívből kell összerakni), és a kapcsolódási pontokban csak  $C^2$ -osztályú lesz.



2.5. ábra. Az ellipszis középpontja a kontrollháromszög súlypontja

**2.11. Tétel** (Steiner-ellipszis). *A ciklikus görbe  $n = 1$  esetén a kontrollháromszögbe írt Steiner-féle ellipszis, vagyis az az ellipszis, mely a kontrollháromszöget annak felezési pontjaiban érinti, és a középpontja megegyezik a háromszög súlypontjával (lásd a 2.5. ábrát).*

**Bizonyítás.** Az  $u_j = \pi(1 + 2j/3)$  értékeket behelyettesítve a bázis függvényekbe a

$$C_{i,1}(u_j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j \\ \frac{1}{2} & \text{egyébként} \end{cases}$$

egyenlőségeket kapjuk. Ezért az ellipszis tartalmazza az oldalak középpontjait, és ezekben a pontokban az oldalaknak érinteni kell az ellipszist a ciklikus görbe konvex burok tulajdonsága miatt.

Tekintsünk egy olyan affin transzformációt, amely az ellipszist körbe viszi át! Az ilyen affin transzformáció a kontrollháromszöget olyan szabályos háromszögbe viszi át, amely érinti a kört. A szabályos háromszögbe írható kör középpontja egybeesik a háromszög súlypontjával. A súlypont és a kúpszelet középpontja is affin invariáns, így állításunk második része is igazolt.  $\square$

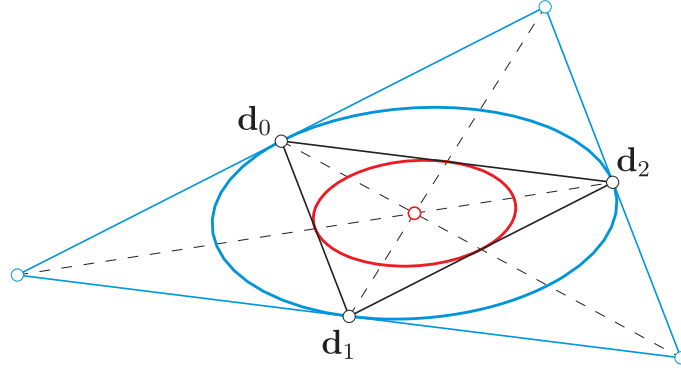
A 2.10. tétel segítségével könnyen igazolható a következő állítás.

**2.12. Tétel** (Ellipszis leírása). *Adott ellipszist leíró elsőrendű ciklikus görbék kontrollpontjai az adott ellipszissel koncentrikus, belőle kétszeres nagyítással előállítható ellipszisére illeszkednek, vagyis a kontrollháromszögek közös Steiner-féle körülírható ellipszisére (lásd a 2.6. ábrát).*

A rendszámnövelésből következően a kör természetesen magasabb rendszámú ciklikus görbével is leírható. A 2.4. tétel alkalmazásával könnyen igazolható a következő állítás.

**2.13. Tétel** (Kör leírása). *Az  $n$ -edrendű ciklikus görbe akkor és csak akkor ír le  $r > 0$  sugarú kört, ha kontrollpontjai olyan  $2n + 1$  oldalú szabályos sokszög csúcspontjai, mely körülírható körének sugara*

$$R = \frac{n+1}{n}r.$$



2.6. ábra. Adott ellipszist leíró elsőrendű ciklikus görbék kontrollpontjainak mértani helye a kontrollháromszög köré írható Steiner-féle ellipszis

**2.3. Következmény.** *Az  $n$ -edrendű ciklikus görbe akkor és csak akkor ír le ellipszist, ha a kontrollpontjai valamely  $2n + 1$  oldalú szabályos sokszög csúcspontjainak affin transzformáltjaiként előállíthatók.*

### 2.7.2. Zárt epi- és hipocikloisok

Ha az  $r$  sugarú kör az  $R$  sugarú körön kívül csúszásmentesen gördül, akkor a gördülő körhöz rögzített, annak középpontjától  $s$  távolságra lévő pont az

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u) = R((1+m)\cos(mu) - a_1\cos((1+m)u)) \\ \tilde{x}_2(u) = R((1+m)\sin(mu) - a_1\sin((1+m)u)) \end{cases} \quad (2.33)$$

*epicikloist* írja le, ahol  $m = r/R$  és  $a_1 = s/R$ . Az  $u$  paraméter a rögzített pontot a gördülő kör középpontjával összekötő egyenesnek és a két kör pillanatnyi érintkezési pontját a gördülő kör középpontjával összekötő egyenesnek a szöge. A görbét leíró pont véges számú körülfordulás után akkor kerül vissza a kiindulási helyére, azaz a görbe akkor lesz zárt, ha  $m$  racionális szám. A továbbiakban elhagyjuk az  $R$  globális skálázási tényezőt, és feltételezzük, hogy  $m = e/f$ , ( $0 < e, f \in \mathbb{N}$ ). A zárt epiciklois

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u) = \frac{e+f}{f} \cos\left(\frac{e}{f}u\right) - a_1 \cos\left(\frac{e+f}{f}u\right) \\ \tilde{x}_2(u) = \frac{e+f}{f} \sin\left(\frac{e}{f}u\right) - a_1 \sin\left(\frac{e+f}{f}u\right) \end{cases}, u \in [0, 2f\pi], 0 \leq a_1 \in \mathbb{R}$$

alakban írható fel (a gördülő körnek  $f$ -szer kell körülfordulnia a záródáshoz), ami a  $[0, 2f\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  paramétertranszformáció után

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u) = \frac{e+f}{f} \cos(eu) - a_1 \cos((e+f)u) \\ \tilde{x}_2(u) = \frac{e+f}{f} \sin(eu) - a_1 \sin((e+f)u) \end{cases}, u \in [0, 2\pi] \quad (2.34)$$

alakra hozható.

A 2.4. tételt a  $d = 2$ ;  $P_1 = Q_2 = \{e, e+f\}$ ,  $Q_1 = P_2 = \emptyset$ ;  $n \geq e+f$ ;  $\psi_p^1 = 0, \forall p \in P_1$ ;  $\varphi_q^2 = 0, \forall q \in Q_2$ ;

$$\alpha_e^1 = \beta_e^2 = \frac{e+f}{f} \prod_{k=1}^e \frac{n+k}{n+1-k}, \alpha_{e+f}^1 = \beta_{e+f}^2 = -a_1 \prod_{k=1}^{e+f} \frac{n+k}{n+1-k}$$

beállításokkal alkalmazva, az

$$\mathbf{x}(u) = \begin{bmatrix} \prod_{k=1}^e \frac{n+k}{n+1-k} \left( \frac{e+f}{f} \cos(eu) - a_1 \left( \prod_{k=e+1}^{e+f} \frac{n+k}{n+1-k} \right) \cos((e+f)u) \right) \\ \prod_{k=1}^e \frac{n+k}{n+1-k} \left( \frac{e+f}{f} \sin(eu) - a_1 \left( \prod_{k=e+1}^{e+f} \frac{n+k}{n+1-k} \right) \sin((e+f)u) \right) \end{bmatrix},$$

$$u \in [0, 2\pi]$$

görbét kapjuk, ami szintén epiciklois. Ezen a görbén a

$$\mathbf{d}_i = [x_1(i\lambda_n) \quad x_2(i\lambda_n)]^T, \quad i = 0, 1, \dots, 2n$$

módon felvett kontrollpontokkal meghatározott (2.15) ciklikus görbe megegyezik a (2.34) epicikloissal.

$e = f = 1$  esetén a *Pascal-féle csigát* kapjuk, aminek az  $a_1 = 1$  speciális esete a *kardoid*. Az  $a_1 = 0$  speciális esetben bármely  $e, f$  érték esetén kört kapunk.

A *hipociklois* abban különbözik az epicikloistól, hogy az  $r$  sugarú kör az  $R > r$  sugarú körön belül gördül. Az epicikloisnál bevezetett jelöléseket használva, a hipociklois paraméteres alakja

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u) = R((1+m)\cos(mu) + a_1\cos((1+m)u)) \\ \tilde{x}_2(u) = R((1+m)\sin(mu) - a_1\sin((1+m)u)) \end{cases}, \quad (2.35)$$

amiből a  $[0, 2f\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  paramétertranszformáció után az

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u) = \frac{f-e}{f} \cos(eu) + a_1 \cos((f-e)u) \\ \tilde{x}_2(u) = \frac{f-e}{f} \sin(eu) - a_1 \sin((f-e)u) \end{cases}, \quad u \in [0, 2\pi] \quad (2.36)$$

alakot kapjuk, ahol  $m = e/f$ ,  $(0 < e < f \in \mathbb{N})$ .

Az epicikloisnál végrehajtott lépéseket követve meghatározhatjuk a hipocikloist leíró ciklikus görbe kontrollpontjait is. Ehhez a  $d = 2$ ;  $P_1 = Q_2 = \{e, f - e\}$ ,  $Q_1 = P_2 = \emptyset$ ;  $n \geq f - e$ ;  $\psi_p^1 = 0, \forall p \in P_1$ ;  $\varphi_q^2 = 0, \forall q \in Q_2$ ;

$$\alpha_e^1 = \beta_e^2 = \frac{f-e}{f} \prod_{k=1}^e \frac{n+k}{n+1-k}, \alpha_{f-e}^1 = \beta_{f-e}^2 = -a_1 \prod_{k=1}^{f-e} \frac{n+k}{n+1-k}$$

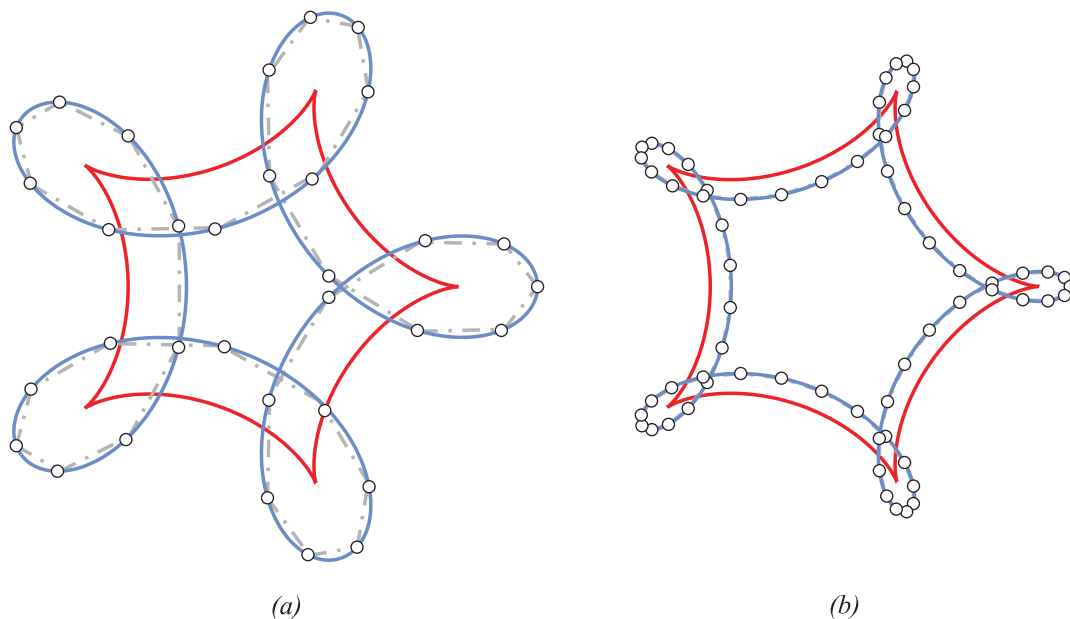
beállításokat kell alkalmazni. (A kontrollpontok ugyancsak hipocikloison helyezkednek el.)

$e = 1, f = 4, a_1 = 1/4$  esetén az *asztroist* kapjuk. Ennek  $e = 1, f = 2$  speciális esete egyenes szakasz, ha  $a_1 = 1/2$ , és ellipszis bármely más  $a_1 \neq 0$  értékre.  $a_1 = 0$  esetén kört kapunk bármely  $e, f$  értékre.

**2.1. Példa.** A 2.7. ábrán az

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u) = 4 \cos u + \cos 4u \\ \tilde{x}_2(u) = 4 \sin u - \sin 4u \end{cases}, \quad u \in [0, 2\pi] \quad (2.37)$$

*hipocikloist különböző rendű ciklikus görbével modelleztük. Megfigyelhető, hogy a kontrollpontok (a kontrollpontok mértani helyét alkotó hipocikloisok) a modellezett hipocikloishoz konvergálnak az  $n \geq 4$  rend növelésekor.*



2.7. ábra. A (2.37) hipociklois egzakt leírása ciklikus görbékkel. A kék színű görbék a kontrollpontok mértani helyét jelölik, a piros pedig a (2.37) hipocikloist. Az (a) és (b) ábrákon a ciklikus görbe rendje 16, illetve 32.

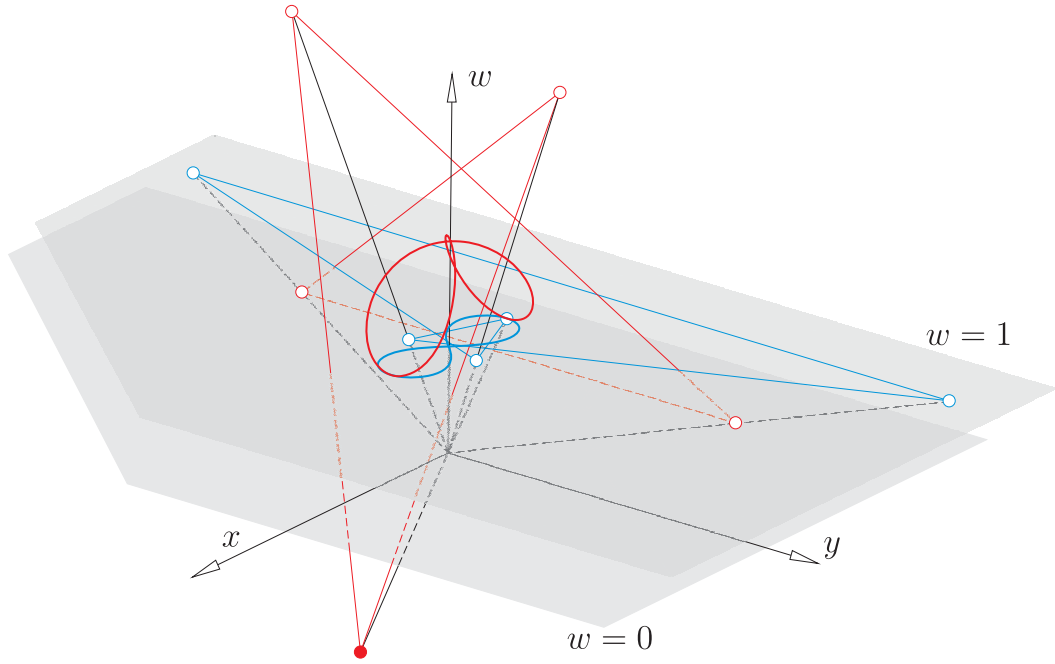
## 2.8. Racionális trigonometrikus görbék

A ciklikus bázisfüggvényekből is előállíthatunk (1.8) típusú hányadosfüggvénybázist, melyben számos ismert zárt racionális trigonometrikus görbét tudunk modellezni. Az eljárás a hányadosfüggvényekkel leírt görbék centrális vetítéssel való származtatásán alapul. A görbe hagyományos paraméteres formájából indulunk ki, és a következő lépéseket tesszük meg:

- a koordinátafüggvényeket úgy alakítjuk át, hogy a 2.4. tétel alkalmazható legyen;
- az öskép terében kiszámítjuk a ciklikus reprezentáció kontrollpontjait;
- a kontrollpontokat a  $w = 1$  hipersíkra vetítjük, amivel megkapjuk a racionális reprezentáció kontrollpontjait és súlyait.

A fenti eljárás azonban nem garantálja a súlyok pozitívitasát, mivel az öskép terében valamely kontrollpont utolsó koordinátája negatív is lehet. A modellezendő görbénk azonban egyetlen zárt görbe, ezért az ösképe nem metszheti az eltűnési síkot ( $w = 0$ ), azaz a görbepontok  $w$  koordinátájának ugyanaz az előjele (ez nem feltétlenül teljesül a kontrollpontokra, lásd a 2.8. ábrát). A rend növelésekor a kontrollpoligon a görbéhez konvergál (lásd a 2.8. tételt), ezért mindig létezik olyan minimális rendszám, melyre (és a nála nagyobbakra) már minden súly pozitív lesz (lásd a 2.9. ábrát).

A következőkben két ismert görbe leírását mutatjuk meg.



2.8. ábra. A Bernoulli-féle lemniszkátának (kék) és ősképe (piros) másodrendű racionális ciklikus reprezentációja; a kitöltött körrel jelölt kontrollpont  $w$  koordinátája negatív

### 2.8.1. Bernoulli-féle lemniszkáta

A Bernoulli-féle lemniszkáta ismert paraméteres alakja

$$x(u) = \frac{\cos(u)}{1 + \sin^2(u)}, \quad y(u) = \frac{\sin(u) \cos(u)}{1 + \sin^2(u)}, \quad u \in [0, 2\pi].$$

Ehhez az őskép terében az

$$\tilde{x}_1(u) = \cos u, \quad \tilde{x}_2(u) = \frac{\sin(2u)}{2}, \quad \tilde{x}_3(u) = \frac{3 - \cos(2u)}{2}$$

görbe tartozik.  $n \geq 2$  esetén az ezt leíró ciklikus görbe kontrollpontjait az

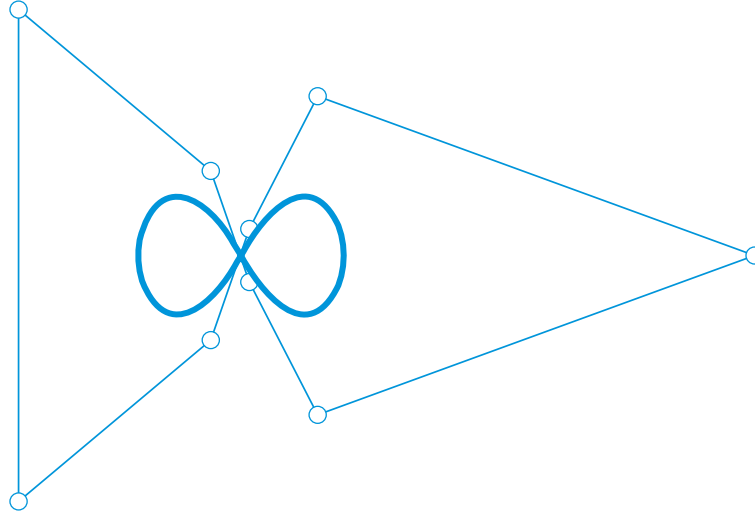
$$\begin{aligned} x_1(u) &= \frac{n+1}{n} \cos(u), \\ x_2(u) &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2n(n-1)} \sin(2u), \\ x_3(u) &= \frac{3}{2} - \frac{n^2 + 3n + 2}{2n(n-1)} \cos(2u), \end{aligned}$$

görbén kell felvenni

$$[\mathbf{d}_i^w]_{i=0}^{2n} = \left[ (x_1(i\lambda_n), x_2(i\lambda_n), x_3(i\lambda_n))^T \right]_{i=0}^{2n}$$

módon. Ezeket a kontrollpontokat a  $w = 1$  hipersíkra vetítve megkapjuk a racionális alak  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontjait és  $w_i$  súlyait:

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \frac{x_1(i\lambda_n)}{x_3(i\lambda_n)} \\ \frac{x_2(i\lambda_n)}{x_3(i\lambda_n)} \end{bmatrix}, \quad w_i = x_3(i\lambda_n), \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$



2.9. ábra. A Bernoulli-féle lemniszkátának olyan minimális, negyedrendű racionális ciklikus reprezentációja, mely esetén a görbe már a kontrollpontok konvex burkában van

Ezt az eljárást illusztrálja a 2.8. ábra.

### 2.8.2. Zsukovszkij-féle szárnyprofil

Az aerodinamikában használt  $z + 1/z$ ,  $z \in \mathbb{C}$  konformis leképezést Zsukovszkij-transzformációnak nevezik, a segítségével előállított szárnyprofil pedig Zsukovszkij-féle szárnyprofilnak. A Zsukovszkij-féle szárnyprofil olyan

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

kör transzformáltja, amely áthalad az  $(1, 0)$  ponton és körülöleli a  $(-1, 0)$  koordinátájú pontot. A transzformáció eredménye az

$$\begin{aligned} & r \cos(u) + x_0 + \frac{r \cos(u) + x_0}{r^2 + 2r(x_0 \cos(u) + y_0 \sin(u)) + x_0^2 + y_0^2} \\ & + i \left( r \sin(u) + y_0 - \frac{r \sin(u) + y_0}{r^2 + 2r(x_0 \cos(u) + y_0 \sin(u)) + x_0^2 + y_0^2} \right) \end{aligned}$$

görbe a komplex síkon, aminek koordináta-függvényei

$$\begin{cases} x(u) = (r \cos(u) + x_0) \left( 1 + \frac{1}{r^2 + 2r(x_0 \cos(u) + y_0 \sin(u)) + x_0^2 + y_0^2} \right), \\ y(u) = (r \sin(u) + y_0) \left( 1 - \frac{1}{r^2 + 2r(x_0 \cos(u) + y_0 \sin(u)) + x_0^2 + y_0^2} \right), \end{cases}$$

$$1 < \sqrt{r^2 - y_0^2}, x_0 = 1 \mp \sqrt{r^2 - y_0^2}, u \in [0, 2\pi].$$

Az őskép terében a ciklikus görbe kontrollpontjait az

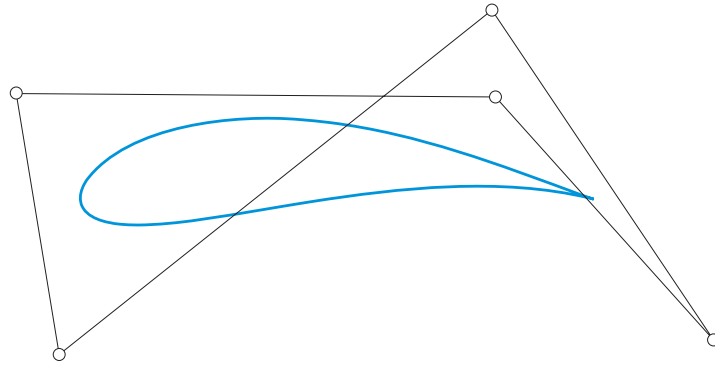
$$\begin{aligned} x_1(u) = & x_0 (2r^2 + x_0^2 + y_0^2 + 1) + r (r^2 + 3x_0^2 + y_0^2 + 1) \frac{n+1}{n} \cos(u) + \\ & + r^2 x_0 \frac{n^2 + 3n + 2}{n(n-1)} \cos(2u) + \end{aligned}$$

$$+ 2rx_0y_0 \frac{n+1}{n} \sin(u) + r^2y_0 \frac{n^2+3n+2}{n(n-1)} \sin(2u),$$

$$x_2(u) = y_0(2r^2 + x_0^2 + y_0^2 - 1) + 2rx_0y_0 \frac{n+1}{n} \cos(u) - r^2y_0 \frac{n^2+3n+2}{n(n-1)} \cos(2u) + \\ + r(r^2 + x_0^2 + 3y_0^2 - 1) \frac{n+1}{n} \sin(u) + r^2x_0 \frac{n^2+3n+2}{n(n-1)} \sin(2u),$$

$$x_3(u) = (r^2 + x_0^2 + y_0^2) + 2rx_0 \frac{n+1}{n} \cos(u) + 2ry_0 \frac{n+1}{n} \sin(u).$$

görbén kell felvenni. A 2.10. ábrán példát mutatunk öt kontrollponttal leírt Zsukovszkij-féle szárnyprofilra.



2.10. ábra. Zsukovszkij-féle szárnyprofil ( $n = 2$ ,  $r = 1.1$ ,  $y_0 = 0.1$ )



## 3. fejezet

# B-szplájn-görbék alakjának módosítása

A számítógéppel segített geometriai tervezésben kiemelt szerepet játszanak az 1.10. definícióval adott B-szplájn-görbék, vagyis azok a görbék melyeknél az (1.1) formulában az  $F_i(u)$  függvények a normalizált B-szplájn alapfüggvények. A B-szplájn-görbék racionális változata, és a belőlük származtatott felületek napjaink CAD rendszereiben a geometriai modellezés de facto szabványaivá váltak.

**3.1. Definíció** (NURBS görbe). Az  $\mathbb{R}^d$ ,  $(d \geq 2)$  térben az

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i \frac{w_i N_i^k(u)}{\sum_{j=0}^n w_j N_j^k(u)}, u \in [u_{k-1}, u_{n+1}] \quad (3.1)$$

kifejezéssel adott görbét  $(k-1)$ -edfokú ( $k$ -adrendű),  $(1 < k \leq n+1)$  racionális B-szplájn-, vagy NURBS görbének nevezzük, ahol  $N_i^k(u)$  az  $i$ -edik  $(k-1)$ -edfokú normalizált B-szplájn alapfüggvényt jelöli, mely értelmezéséhez a monoton növekvő  $\{u_r\}_{r=0}^{n+k}$  csomóértékek szükségesek. A  $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d$  pontokat kontroll- vagy de Boor-pontoknak, a  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ( $w_j \geq 0, \sum_{j=0}^n w_j \neq 0$ ) skalárokat pedig súlyoknak nevezzük.

A B-szplájn-görbék és felületek, valamint racionális változatuk átfogó tárgyalását megtalálhatjuk pl. a [31], [19] és [58] könyvekben.

A 3.1. definícióból látható, hogy a racionális B-szplájn-görbét kontrollpontjai, súlyai, csomóértékei és fokszáma határozzák meg. Ha ezek közül bármelyiket megváltoztatjuk, megváltozik a görbe alakja is. Geometriai modellezés során adott, többnyire geometriai feltételeket kielégítő alakváltozások végrehajtására van szükség. Ilyen például, hogy úgy változtassuk meg a görbe valamelyik (esetleg több) meghatározó adatát, hogy a módosított görbe adott ponton menjen át, vagy adott egyenest érintsen. Az ilyen feltételeket geometriai kényszereknek is szokták nevezni, az ezeket kielégítő alakváltozást pedig kényszeres (vagy előírt) alakváltoztatásnak.

A racionális B-szplájn-görbe pontjai által, a görbét meghatározó kontrollpontok, súlyok vagy csomóértékek folytonos változtatása során leírt görbéket a továbbiakban *pályagörbéknek* nevezzük.

Az alakváltoztatás leghatékonyabb eszköze a kontrollpont eltolása, ezzel érhető el a legdrasztikusabb változás. Ezeket az [56] cikk kimerítően tárgyalja. A súly és a csomóérték segítségével kisebb mértékű, finomabb módosítások érhetők el, azaz az előnnyel, hogy a változtatott görbe mindig az eredeti kontrollpontok által meghatározott konvex burokban marad.

Mi a továbbiakban a foksám, a súly és a csomóérték változtatása során fellépő alakváltozás néhány kérdését vizsgáljuk. A 3.1. szakaszban periodikus B-szplájn-görbék foksámának változtatásával, a 3.2. szakaszban racionális B-szplájn-görbék súlyának változtatásával elérhető alakmódosítással, a 3.3. szakaszban pedig a B-szplájn-görbék csomóértékeinek módosításával foglalkozunk.

### 3.1. Foksám változtatása

Az 1.10. definíció szerinti görbe  $k > 2$  esetén általában egyetlen kontrollponton sem megy át. Az alkalmazások során az a kívánatos, hogy a görbe menjen át az első és az utolsó kontrollponton. Ez úgy érhető el, hogy az első és utolsó figyelembe veendő csomóérték multiplicitása megegyezik a görbe rendjével. Az ilyen csomóvektorokat rögzítettnek (clamped) is nevezik, megkülönböztetésül a szabad (unclamped) csomóvektoroktól, amelynél az első és utolsó csomóérték multiplicitása is kisebb, mint a görbe rendje. Az utóbbi esetben a görbe általában egyetlen kontrollponton sem megy át, kivételt csak az az eset képez, amikor a kontrollpontok kollineárisak.

A rögzített csomóvektorral adott B-szplájn-görbékkel nyílt görbéket modellezünk. A szabad csomóvektoron értelmezett B-szplájn-görbékkel zárt görbéket modellezhetünk, ha a csomóértékeket és a kontrollpontokat a foksámnak megfelelően periodikusan újra figyelembe vesszük.

**3.2. Definíció** (Periodikus B-szplájn-görbe). A  $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  ( $n \geq 1$ ) kontrollpontokkal adott

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{l=0}^{n+k-1} \mathbf{d}_{l \bmod(n+1)} N_l^k(u), u \in [u_{k-1}, u_{n+k}),$$

görbét  $(k-1)$ -edfokú ( $k$ -adrendű) periodikus (vagy zárt) B-szplájn-görbének nevezzük. A hozzá szükséges csomóértékeket az

$$u_j = u_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_{i \bmod(n+1)}, (j > 0) \quad (3.2)$$

összefüggéssel adjuk meg, ahol  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \lambda_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Ez tehát azt jelenti, hogy  $k$  értékének megfelelően a kontrollpontokat és a  $\lambda_i$  értékeket (a szomszédos csomóértékek közötti távolságot) periodikusan ismétljük. Így a kontrollpontokra a  $\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_{n+2} = \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n+k-1} = \mathbf{d}_{k-2}$  feltételek teljesülnek. A csomóértékek közötti távolság is periodikusan ismétlődik, ezért mindössze  $n+1$  darab különböző B-szplájn alapfüggvény van, melyekből eltolással kaphatjuk meg a többit

$$N_j^k(u) = N_{j_1}^k(u - j_0 D)$$

alakban, ahol  $j = j_0(n+1) + j_1$  és  $D = \sum_{i=0}^n \lambda_i$ .

Természetesen minden sokkal egyszerűbbé válik, ha  $\lambda_i = konstans$ , azaz ha uniform paraméterezést választunk.

A B-szplájn-görbe rendjének növelésével nem változtatható a görbe alakja folytonosan, ezért a rend nem alkalmas előírt alakmódosításokra. A periodikus B-szplájn-görbék esetén azonban a rend növelésének figyelemre méltó hatása van a

görbe alakjára. A 3.2. definícióból látható, hogy zárt B-szplájn-görbék esetén a  $k$  rendre nincs felső korlát. Megfigyelhető, hogy a rend növelések kapott zárt B-szplájn-görbék egyre kevésbé követik a kontrollpoligon alakját. Bebizonyítjuk, hogy a rend növelésekor kapott zárt B-szplájn-görbék sorozata a kontrollpontok számtani közepéhez (a kontrollpoligon súlypontjához) tart, ha  $k \rightarrow \infty$  (lásd [39]).

Az  $n+1$  darab  $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  kontrollpont által meghatározott B-szplájn-görbéket tanulmányozzuk. Tetszőleges  $j$  egész szám esetén bevezetjük a  $j_0 = \lfloor j/(n+1) \rfloor$  ( $\lfloor \cdot \rfloor$  az alsó egész rész) és  $j_1 = j \bmod (n+1)$  jelöléseket, azaz  $j = j_0(n+1) + j_1$ . Ezeket felhasználva, a (3.2) csomóérték

$$u_j = u_0 + j_0 D + \sum_{i=0}^{j_1} \lambda_i \quad (3.3)$$

alakba írható.

A B-szplájn alapfüggvények következő tulajdonságait fogjuk használni:

1.  $N_i^k(u) = 0$ , ha  $u \notin (u_i, u_{i+k})$ ,  $k > 1$ ;
2.  $\int_{u_i}^{u_{i+k}} N_i^k(u) du = \frac{u_{i+k} - u_i}{k}$ ;
3. A (3.2) csomóértékeken értelmezett normalizált B-szplájn alapfüggvények egymás eltoltsjai, azaz  $N_j^k(u) = N_{j_1}^k(u - j_0 D)$ ;
4.  $\lim_{k \rightarrow \infty} N_j^k(u) = 0$ ,  $\forall u, j$ .

**3.1. Tétel.** A 3.2. definíció szerinti zárt B-szplájn-görbe rendjének növelésével kapott görbék sorozata a kontrollpontok számtani közepéhez tart, azaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=2-k}^{n+1} \mathbf{d}_{l \bmod (n+1)} N_l^k(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l, \quad \forall u \in [u_1, u_{n+2}).$$

**Bizonyítás.** Megmutatjuk, hogy a görbe tetszőleges pontja a kontrollpoligon súlypontjához tart, miközben a rend a végtelenhez tart. A 3.2. definícióval adott görbe  $j$ -edik íve

$$\mathbf{b}_j(u) = \sum_{l=j-k+1}^j \mathbf{d}_{l \bmod (n+1)} N_l^k(u), \quad u \in [u_j, u_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n+1, \quad k > 1$$

alakban írható fel. A negatív indexek kiküszöbölése érdekében a  $j \rightarrow j+k-2$  indextranszformációt hajtjuk végre, aminek eredménye

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{j+k-2}(u) &= \sum_{l=j-1}^{j+k-2} \mathbf{d}_{l \bmod (n+1)} N_l^k(u) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{d}_{(j-1+i) \bmod (n+1)} N_{j-1+i}^k(u), \\ &u \in [u_{j+k-2}, u_{j+k-1}), \quad j = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A (3.4) kifejezésben a  $\mathbf{d}_l$ , ( $l = 0, \dots, n$ ) kontrollpontok együtthatóinak összege

$$s_l(u) = \sum_{i=0}^{k_0+1} N_{l+i(n+1)}^k(u), \quad (3.5)$$

mivel az 1. tulajdonság miatt  $N_i^k(u) = 0$ , ha  $i < j$ , vagy  $i > j + k - 2$ . Vagyis az  $s_l(u)$  összeget kapjuk, ha az  $N_l^k(u)$  alapfüggvénytől kezdve minden  $(n+1)$ -edik normalizált B-szplájn alapfüggvényt összeadunk. (3.5) segítségével a (3.4) kifejezés

$$\mathbf{b}_{j+k-2}(u) = \sum_{l=0}^n s_l(u) \mathbf{d}_{(l+j-1) \bmod (n+1)}$$

alakban írható fel. A 3. tulajdonság miatt a (3.5) összegben a függvények az  $[u_l, u_{l+k}]$  intervallumon eltolhatók, vagyis

$$s_l(u) = \sum_{i=0}^{k_0+1} N_l^k(u - iD), \quad \forall l.$$

Ezért  $s_l(u)D$  az  $N_l^k(u)$  függvény integrálját közelítő összeg. A 2. tulajdonság és a (3.4) egyenlőség miatt ez az integrál

$$\begin{aligned} \int_{u_l}^{u_{l+k}} N_l^k(u) du &= \frac{k_0 D + \sum_{i=l_1+1}^{l_1+k_1} \lambda_{i \bmod (n+1)}}{k_0(n+1) + k_1} = \\ &= \frac{D}{(n+1) + \frac{k_1}{k_0}} + \frac{\sum_{i=l_1+1}^{l_1+k_1} \lambda_{i \bmod (n+1)}}{k} \end{aligned}$$

$\forall k > n+1$  esetén. Ezek alapján a

$$\frac{D}{(n+1) + \frac{k_1}{k_0}} + \frac{\sum_{i=l_1+1}^{l_1+k_1} \lambda_{i \bmod (n+1)}}{k} = s_l(u)D + \Delta_k \quad (3.6)$$

egyenlőséget kapjuk, ahol a  $\Delta_k$  maradékra

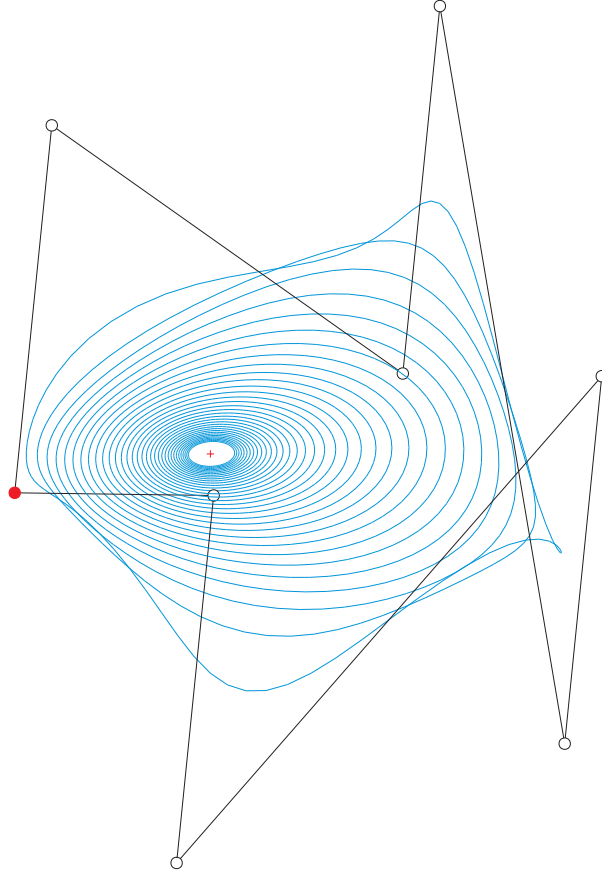
$$|\Delta_k| < 3D \max(N_l^k(u))$$

teljesül, így  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0$  a 4. tulajdonság miatt. A (3.6) egyenlőség mindkét oldalának  $k \rightarrow \infty$  határértékét véve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_l(u) = \frac{1}{n+1},$$

amivel állításunkat igazoltuk.  $\square$

Felhasználva, hogy a racionális B-szplájn-görbék centrális vetítéssel származtathatók nemracionális B-szplájn-görbékéből, a 3.1. tétel könnyen általánosítható racionális görbékre.



3.1. ábra. Térbeli zárt racionális B-szplájn-görbék a foksám növelésekor a kontrollpontok súlyozott számtani közepéhez tartanak. A piros körlappal jelölt kontrollpont súlya 4, a többié 1. A megkülönböztethetőség érdekében csak a  $k = 2 + 3i$ , ( $i = 0, 1, \dots, 33$ ) rendekhez tartozó görbéket rajzoltuk meg.

**3.2. Tétel.** A  $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  kontrollpontokkal és  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ( $w_i \geq 0$   $\sum_{i=0}^n w_i \neq 0$ ) súlyokkal adott

$$\sum_{l=0}^{n+k-1} w_l \mathbf{d}_l \frac{N_l^k(u)}{\sum_{i=0}^{n+k-1} w_i \text{mod}(n+1) N_i^k(u)}, \quad m = l \text{ mod } (n+1)$$

zárt B-szplájn-görbékéből a  $k$  rend növelésével kapott görbék sorozata a kontrollpontok súlyozott számtani közepéhez tart.

A 3.1. ábra a 3.2. tételt szemlélteti.

## 3.2. Súly módosítása

A racionális B-szplájn-görbe súlyának változtatásakor fellépő alakmódosulás alapvető tulajdonságait az 1. fejezet 1.4., 1.5. és 1.6. tételeinek speciális eseteként megkapjuk.

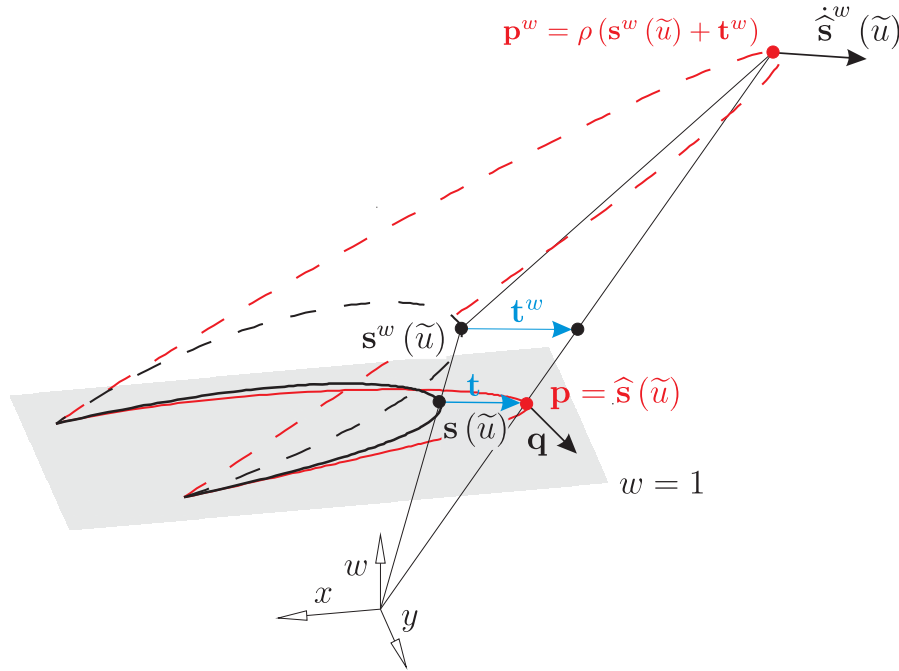
Az [56] cikkben egy és két kontrollpont súlyának változtatásával elérhető előírt alakmódosításokra találunk módszereket. A [2] és [67] publikációk a kontrollpontok és súlyok egyidejű változtatásával megvalósítható alakmódosításokat tárgyalják.

Ezen alakmódosító eljárások közös jellemzője, hogy a racionális görbe terében vizsgálják a problémát. Mi kivisszük a problémát az ősképek terébe, ott oldjuk meg, majd az eredményt visszavetítjük [33]. Az eljárást síkgörbék esetére részletezzük, mivel ebben az esetben mind az eredeti, mind az ősképek terében könnyen tudunk tájékozódni. Az alakmódosítás célja az, hogy a (3.1)  $\mathbf{s}(u)$  racionális B-szplájn-görbe alakját úgy módosítsuk több súly egyidejű változtatásával, hogy a görbe kiválasztott  $\mathbf{s}(\tilde{u})$  pontja egy adott  $\mathbf{p}$  pontba kerüljön. A  $\mathbf{p}$  pont természetesen csak az  $\mathbf{s}(\tilde{u})$  pontot tartalmazó ívet meghatározó kontrollpontok konvex burkában lehet. Ennek az eljárásnak az az előnye az eddigiekkel szemben, hogy a három (ill. térgörbék esetén négy) súly egyidejű változtatása egy új szabad paramétert eredményez, ami további feltételek kielégítését, ezáltal változatosabb alakmódosítást tesz lehetővé.

A  $w_i$  súlyú  $\mathbf{d}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) kontrollponthoz a  $[w_i \mathbf{d}_i \ w_i]^T$  kontrollpontot rendeljük az ősképek terében. A nulla súlyú kontrollpontnak nincs ősképe, ilyen esetben a (3.1) összeg megfelelő tagja nulla lesz. Az  $\mathbf{s}(\tilde{u})$  pont  $\mathbf{s}^w(\tilde{u})$  ősképe egyértelműen meghatározható, a  $\mathbf{p}$  ponté azonban nem, mivel  $\mathbf{p}^w$  a  $\mathbf{p}$  pontot az origóval összekötő egyenesen bárhol lehet. A  $\mathbf{t} = \mathbf{p} - \mathbf{s}(\tilde{u})$ ,  $\mathbf{t}^w = [s_w(\tilde{u}) \mathbf{t} \ 0]^T$  jelöléseket bevezetve

$$\mathbf{p}^w = \rho(\mathbf{s}^w(\tilde{u}) + \mathbf{t}^w), \quad (3.7)$$

ahol  $s_w(\tilde{u})$  az  $\mathbf{s}^w(\tilde{u})$  pont  $w$  koordinátáját jelöli, továbbá  $0 \neq \rho \in \mathbb{R}$  szabad paraméter (lásd a 3.2. ábrát).



3.2. ábra. A  $\mathbf{p}^w$  ősképek meghatározása

Az  $\mathbf{s}^w(\tilde{u}) \rightarrow \mathbf{p}^w$  alakmódosítás az ősképek terében három kontrollpontnak a helyvektora menti eltolásával is megvalósítható. Ehhez  $\mathbf{s}^w(u)$  terében ki kell választanunk három olyan kontrollpontot, melyek által meghatározott sík nem illeszkedik az origóra, vagyis amelyek helyvektorai lineárisan függetlenek. Ügyelni kell arra is, hogy ezen kontrollpontok hatással legyenek a görbe alakjára az  $\tilde{u}$  pa-

raméterértéknél. A továbbiakban a kiválasztott kontrollpontok ősképre az

$$\mathbf{e}_p^w = \begin{bmatrix} w_p \mathbf{d}_p \\ w_p \end{bmatrix}, \mathbf{e}_q^w = \begin{bmatrix} w_q \mathbf{d}_q \\ w_q \end{bmatrix}, \mathbf{e}_r^w = \begin{bmatrix} w_r \mathbf{d}_r \\ w_r \end{bmatrix}$$

jelölést használjuk, és feltételezzük, hogy a  $p, q, r$  indexekre az  $\tilde{u} \in [u_p, u_{p+k}) \cap [u_q, u_{q+k}) \cap [u_r, u_{r+k})$  teljesül. Ezen kontrollpontok segítségével az alakmódosítás

$$\mathbf{p}^w = \mathbf{s}^w(\tilde{u}) + \lambda_p \mathbf{e}_p^w N_p^k(\tilde{u}) + \lambda_q \mathbf{e}_q^w N_q^k(\tilde{u}) + \lambda_r \mathbf{e}_r^w N_r^k(\tilde{u}) \quad (3.8)$$

alakban írható fel a még ismeretlen  $\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r$  együtthatók segítségével. Az  $\mathbf{e}_p^w, \mathbf{e}_q^w, \mathbf{e}_r^w$  vektorok egy origó kezdőpontú affin koordináta-rendszert alkotnak az őskép terében, melyben

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^w &= \mu_p \mathbf{e}_p^w + \mu_q \mathbf{e}_q^w + \mu_r \mathbf{e}_r^w, \\ \mathbf{s}^w(\tilde{u}) &= \alpha_p \mathbf{e}_p^w + \alpha_q \mathbf{e}_q^w + \alpha_r \mathbf{e}_r^w. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ezt felhasználva, a (3.7) és (3.8) és kifejezésekből a

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^w &= \rho \left( (\alpha_p + \mu_p) \mathbf{e}_p^w + (\alpha_q + \mu_q) \mathbf{e}_q^w + (\alpha_r + \mu_r) \mathbf{e}_r^w \right), \\ \mathbf{p}^w &= (\alpha_p + \lambda_p N_p^k(\tilde{u})) \mathbf{e}_p^w + (\alpha_q + \lambda_q N_q^k(\tilde{u})) \mathbf{e}_q^w + (\alpha_r + \lambda_r N_r^k(\tilde{u})) \mathbf{e}_r^w \end{aligned}$$

egyenlőségeket kapjuk, melyekből kifejezhetjük az ismeretlen  $\lambda_i$ , ( $i = p, q, r$ ) mennyiségeket

$$\lambda_i = \frac{\rho(\alpha_i + \mu_i) - \alpha_i}{N_i^k(\tilde{u})}, \quad i = p, q, r$$

formában, mivel az  $\mathbf{e}_p^w, \mathbf{e}_q^w, \mathbf{e}_r^w$  vektorok lineárisan függetlenek. Ehhez az  $N_i^k(\tilde{u}) > 0$  ( $i = p, q, r$ ) feltételeknek kell teljesülni, aminek szükséges feltétele a már korábban tett  $\tilde{u} \in [u_p, u_{p+k}) \cap [u_q, u_{q+k}) \cap [u_r, u_{r+k})$  megszorítás. Ez a feltétel azonban nem elégséges, mivel egynél nagyobb multiplicitású csomóértékek esetén előfordulhat, hogy a fenti függvények eltűnnek.

Mivel csak nemnegatív súlyokat engedünk meg, a  $\lambda_i \geq -1$  ( $i = p, q, r$ ) feltételnek is teljesülnie kell, azaz

$$\lambda_i = \frac{\rho(\alpha_i + \mu_i) - \alpha_i}{N_i^k(\tilde{u})} \geq -1, \quad i = p, q, r,$$

amiből a  $\rho$  paraméterre a

$$\rho \begin{cases} \geq \frac{\alpha_i - N_i^k(\tilde{u})}{\alpha_i + \mu_i}, & \text{ha } \alpha_i + \mu_i > 0 \\ \leq \frac{\alpha_i - N_i^k(\tilde{u})}{\alpha_i + \mu_i}, & \text{ha } \alpha_i + \mu_i < 0 \\ \text{tetszőleges,} & \text{ha } \alpha_i + \mu_i = 0 \end{cases}, \quad i = p, q, r \quad (3.10)$$

feltételeket kapjuk. A  $\rho$  szabad paraméternek tehát a fenti három intervallum metszetében kell lennie, mely nem üres, ugyanis  $\rho$  mindig megválasztható úgy, hogy a  $\mathbf{t}^w$  vektor két  $\mathbf{e}_i^w$ ,  $i \in \{p, q, r\}$  vektor lineáris kombinációjaként előállítható legyen (ezt hamarosan megmutatjuk).

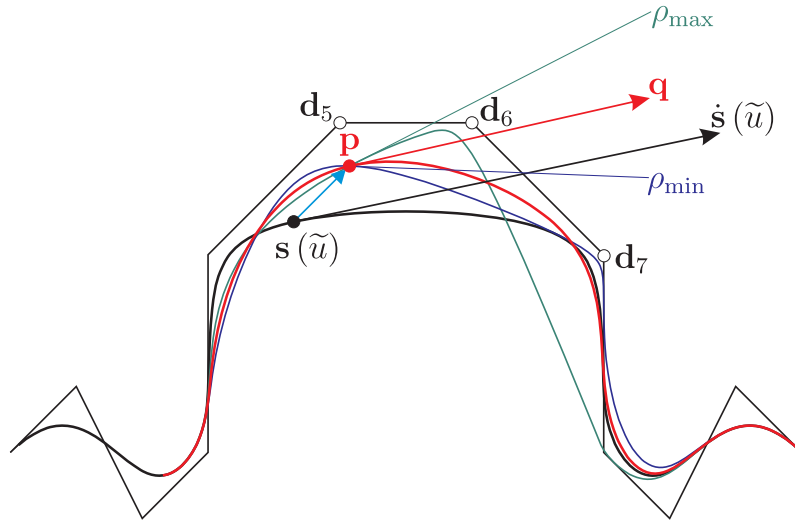
Tehát azt kaptuk, hogy síkgörbe esetén az  $\mathbf{s}(\tilde{u}) \rightarrow \mathbf{p}$  alakmódosítást három kontrollpont súlyának megváltoztatásával is megvalósíthatjuk. Ennek előnye, hogy a megoldás egyparaméteres görbesereg, ami lehetőséget ad egy további feltétel

kielégítésére is. Két példát mutatunk síkgörbék esetén a  $\rho$  szabad paraméter megválasztására.

1) A  $\rho$  érték speciális választásával mindig elérhető az, hogy az alakmódosítást csak két kontrollpont súlyának változtatásával hozzuk létre. Ennek érdekében olyan  $\rho$ -ra van szükségünk, amely mellett a  $\mathbf{t}$  vektor ősképe kifejezhető két kontrollpont helyvektorának lineáris kombinációjaként. A transzformált görbét  $\hat{\mathbf{s}}(\tilde{u})$ -val jelölve, (3.7) és (3.9) alapján

$$\hat{\mathbf{s}}^w(\tilde{u}) - \mathbf{s}^w(\tilde{u}) = \rho(\mathbf{s}^w(\tilde{u}) + \mathbf{t}^w) - \mathbf{s}^w(\tilde{u}) = \sum_{i=p,q,r} (\rho(\alpha_i + \mu_i) - \alpha_i) \mathbf{e}_i^w.$$

Ahhoz, hogy az egyik  $\mathbf{e}_i$  együtthatója nulla legyen  $\rho = \alpha_i / (\mu_i + \alpha_i)$ ,  $\mu_i + \alpha_i \neq 0$  szükséges valamely  $i \in \{p, q, r\}$  indexre. Mindig van olyan  $i$ , hogy  $\mu_i + \alpha_i \neq 0$ , egyébként  $\mathbf{t}^w = -\mathbf{s}^w(\tilde{u})$  teljesülne, ami lehetetlen, mivel  $t_w = 0$ .



3.3. ábra. A  $\mathbf{d}_5$ ,  $\mathbf{d}_6$  és  $\mathbf{d}_7$  kontrollpontok súlyaival elért olyan alakmódosítás, amikor a kijelölt  $\mathbf{s}(\tilde{u})$  pont új  $\mathbf{p}$  helye mellett az érintő  $\mathbf{q}$  iránya is előírt ( $\mathbf{q}$  a  $\rho_{\min}$  és  $\rho_{\max}$  között lehet)

2) A  $\rho$  paramétert arra is használhatjuk, hogy az  $\mathbf{s}(\tilde{u}) \rightarrow \mathbf{p}$  alakmódosításnál a  $\mathbf{p}$  pontban az érintő irányát is előírjuk. Jelöljük  $\mathbf{q}$ -val az  $\hat{\mathbf{s}}(\tilde{u})$  pontban a görbe érintőjének a kívánt irányát! Az  $\hat{\mathbf{s}}(u)$  görbe  $\tilde{u}$ -beli érintője  $\mathbf{q}$  irányú lesz, ha az  $\hat{\mathbf{s}}^w(u)$  görbe  $\tilde{u}$ -beli érintője az  $\hat{\mathbf{s}}(\tilde{u})$  és  $\mathbf{q}$  által meghatározott vetítősíkban van, azaz

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\hat{\mathbf{s}}}^w(\tilde{u}) = 0, \text{ ahol } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}(\tilde{u}) \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ez alapján

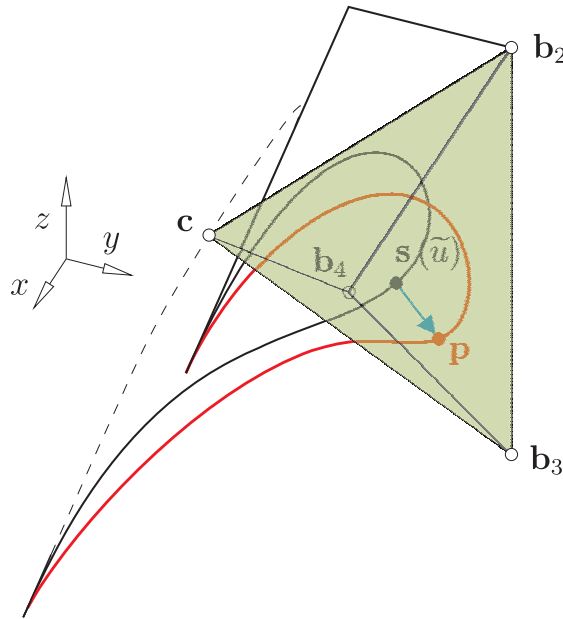
$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\hat{\mathbf{s}}}^w(\tilde{u}) \cdot \mathbf{n} = \left( \dot{\mathbf{s}}^w(\tilde{u}) + \sum_{i=p,q,r} \lambda_i \dot{N}_i^k(\tilde{u}) \mathbf{e}_i^w \right) \cdot \mathbf{n} = \\ &= \dot{\mathbf{s}}^w(\tilde{u}) \cdot \mathbf{n} + \sum_{i=p,q,r} \frac{\rho(\alpha_i + \mu_i) - \alpha_i}{N_i^k(\tilde{u})} \dot{N}_i^k(\tilde{u}) \mathbf{e}_i^w \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

amiből

$$\rho = \frac{\sum_{i=p,q,r} \frac{\alpha_i \dot{N}_i^k(\tilde{u})}{N_i^k(\tilde{u})} \mathbf{e}_i^w \cdot \mathbf{n} - \dot{\mathbf{s}}^w(\tilde{u}) \cdot \mathbf{n}}{\sum_{i=p,q,r} \frac{(\alpha_i + \mu_i) \dot{N}_i^k(\tilde{u})}{N_i^k(\tilde{u})} \mathbf{e}_i^w \cdot \mathbf{n}}. \quad (3.11)$$

A  $\mathbf{q}$  irány természetesen nem lehet teljesen tetszőleges, hiszen a kívánt alakmódosítás csak akkor valósítható meg, ha a (3.11) kifejezéssel kapott  $\rho$  érték a (3.10) összefüggések által meghatározott intervallumok metszetében van. A 3.3. ábrán arra az esetre láthatunk példát, amikor  $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{s}}(\tilde{u})$ . Az ábrán feltüntettük a  $\rho_{\min}$  és  $\rho_{\max}$  értékekhez tartozó görbéket és azok  $\tilde{u}$ -beli érintőjét is. A  $\rho_{\max}$  értékhez feltüntetett görbe és érintő csak közelítő, mivel az adott példánál  $\rho \in [1.98, \infty)$ .

Térgörbe esetén az előzővel analóg eredményt kapunk. Az egyetlen különbség abból fakad, hogy az őskép tere négydimenziós, ezért négy kontrollpont súlyának megváltoztatásával érhető el az alakmódosítás. Az egyetlen szabad paraméter azonban nem elegendő az érintő irányának meghatározására. Ebben az esetben a szabad paraméterrel az érintővektor hosszát, vagy a pontbeli görbületet szabályozhatjuk, természetesen jól meghatározott korlátok között. (Ilyen feltételeket síkgörbéknél is kielégíthetünk.)



3.4. ábra. NURBS térgörbe alakjának előírt módosítása a  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  kontrollpontok súlyának változtatásával; a  $\mathbf{p}$  új helyzetének a  $\mathbf{c} = \mathbf{s}(\tilde{u}, w_2 = w_3 = w_4 = 0)$ ,  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  pontok által meghatározott tetraéderen belül kell lennie

Térgörbe esetén a szabad paraméter mindig megválasztható úgy, hogy csak három kontrollpont súlyát kell megváltoztatni. Ekkor a kiválasztott pont új helyzete egy tetraéderen belül lehet, ami még mindig sokkal több lehetőséget biztosít, mint az [56] által javasolt eljárás, ahol az új helyzetek tartománya egy háromszög. A 3.4. ábrán olyan alakmódosításra láthatunk példát, amikor a NURBS térgörbe  $\mathbf{s}(\tilde{u}) \rightarrow \mathbf{p}$  alakmódosítását három kontrollpont súlyának változtatásával értük el. A  $\mathbf{p}$  pont megengedett helyzeteinek tartománya a zöld tetraéder.

### 3.3. Csomóérték módosítása

A monotonitás megőrzése érdekében a belső  $u_i$  csomóérték csak az  $[u_{i-1}, u_{i+1}]$  intervallumon változhat. Előbb egyszeres, majd többszörös multiplicitású csomóértékek, ezt követően két csomóérték együttes változtatásának hatását vizsgáljuk, végül az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazására mutatunk példát (lásd [40], [34], [25], [41], [42], [27], [43], [44], [28]). A vizsgálatokat a nemracionális esetre végezzük el részletesen.

#### 3.3.1. Egyszeres csomóérték változtatása

Az

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{l=0}^n N_l^k(u) \mathbf{d}_l, u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

B-szplájn-görbe  $j$ -edik íve

$$\mathbf{s}_j(u) = \sum_{l=j-k+1}^j \mathbf{d}_l N_l^k(u), u \in [u_j, u_{j+1}), j = k-1, \dots, n$$

alakban írható fel. Az ív alakját befolyásoló  $u_i$  egyszeres csomóérték változtatásakor a tetszőlegesen rögzített  $\tilde{u} \in [u_j, u_{j+1})$  paraméterértékhez tartozó pont a

$$\mathbf{g}_j(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=j-k+1}^j \mathbf{d}_l N_l^k(\tilde{u}, u_i), u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

görbét írja le. Először ezeket a pályagörbéket vizsgáljuk.

A továbbiakban a normalizált B-szplájn alapfüggvény következő tulajdonságait használjuk:

1.  $N_j^k(u) = 0$ , ha  $u \notin [u_j, u_{j+k})$ ;
2. az  $N_j^k(u)$  függvény kiértékelésekor a rekurzió  $r$ -edik lépésében a

$$N_{j+n}^{k-r}(u), r = 0, \dots, k-1, n = 0, \dots, r$$

függvények fordulnak elő;

3.  $\dot{N}_j^k(u) = (k-1) \left( \frac{1}{u_{j+k-1}-u_j} N_j^{k-1}(u) - \frac{1}{u_{j+k}-u_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(u) \right)$ ;
4. az  $u_i$  csomóérték módosítása csak az  $N_{i-k}^k(u), \dots, N_i^k(u)$  függvényekre van hatással, ezért csak az  $\mathbf{s}_{i-k+1}(u), \dots, \mathbf{s}_i(u), \dots, \mathbf{s}_{i+k-2}(u)$  görbeívek alakja változik meg.

**3.1. Lemma.** *Tetszőlegesen rögzített  $m = 1, \dots, k-1$  index és  $\tilde{u} \in [u_{i-m}, u_{i-m+1})$  paraméterértékek esetén, az  $N_{i-k}^k(\tilde{u}, u_i)$ ,  $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$  leképezés  $u_i$ -re nézve  $(k-m)$ -edfokú racionális függvény.*

**Bizonyítás.** Az 1.9. rekurzív definíció szerint

$$N_{i-k}^k(\tilde{u}, u_i) = \frac{\tilde{u} - u_{i-k}}{u_{i-1} - u_{i-k}} N_{i-k}^{k-1}(\tilde{u}, u_i) + \frac{u_i - \tilde{u}}{u_i - u_{i-k+1}} N_{i-k+1}^{k-1}(\tilde{u}, u_i),$$

amiben az első tag független  $u_i$ -től a 4. tulajdonság miatt, így csak a másodikat kell vizsgálnunk. Ez a rekurzió további lépéseiben is igaz, vagyis

$$\begin{aligned} & \vdots \\ N_{i-m-1}^{m+1}(\tilde{u}, u_i) &= \frac{\tilde{u} - u_{i-m-1}}{u_{i-1} - u_{i-m-1}} N_{i-m-1}^m(\tilde{u}, u_i) + \frac{u_i - \tilde{u}}{u_i - u_{i-m}} N_{i-m}^m(\tilde{u}, u_i), \\ N_{i-m}^m(\tilde{u}, u_i) &= \frac{\tilde{u} - u_{i-m}}{u_{i-1} - u_{i-m}} N_{i-m}^{m-1}(\tilde{u}, u_i) + \frac{u_i - \tilde{u}}{u_i - u_{i-m+1}} N_{i-m+1}^{m-1}(\tilde{u}, u_i). \end{aligned}$$

A fenti két egyenlőség jobb oldalának első tagja konstans a 4. tulajdonság miatt. Az utolsó egyenlőség jobb oldalának második tagja 0 az 1. tulajdonság következtében.  $u_i$  tehát csak  $k-m$  tényezőben jelenik meg, mindenütt első fokon, ezért az  $N_{i-k}^k(\tilde{u}, u_i)$  függvény  $(k-m)$ -edfokú  $u_i$ -ben.  $\square$

### 3.3. Tétel. A

$$\mathbf{g}_{i-m}(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=i-m-k+1}^{i-m} N_l^k(\tilde{u}, u_i) \mathbf{d}_l, \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

*pályagörbe*  $u_i$ -ben  $(k-m)$ -edfokú racionális görbe,  $\forall \tilde{u} \in [u_{i-m}, u_{i-m+1}]$ ,  $m = 1, \dots, k-1$ .

**Bizonyítás.** Az összegzés alsó határa  $(i-k)$ -ra növelhető, mivel  $u_i$ -nek nincs hatása az  $N_l^k(\tilde{u}, u_i)$  függvényre, ha  $l < i-k$  (lásd a 4. tulajdonságot). Ezért csak az

$$N_{i-k+z}^k(\tilde{u}, u_i), \quad z = 0, \dots, k-m \quad (3.12)$$

függvényeket kell figyelembe venni. Az  $N_{i-k}^k(\tilde{u}, u_i)$  függvény  $(k-m)$ -edfokú  $u_i$ -ben, a 3.1. lemma miatt, ezért elég azt bebizonyítani, hogy a (3.12) függvény fokszáma legfeljebb  $k-m$  bármely  $z > 0$  esetén.

A rekurzió  $r$ -edik lépésében azok a függvények, amelyek a fenti függvényekre hatással vannak,

$$\begin{aligned} N_{i-k+z+n}^{k-r}(\tilde{u}, u_i) &= \frac{\tilde{u} - u_{i-k+z+n}}{u_{i+z+n-r-1} - u_{i-k+z+n}} N_{i-k+z+n}^{k-r-1}(\tilde{u}, u_i) + \\ &+ \frac{u_{i+z+n-r} - \tilde{u}}{u_{i+z+n-r} - u_{i-k+z+n+1}} N_{i-k+z+n+1}^{k-r-1}(\tilde{u}, u_i), \\ r &= 0, \dots, k-1, \quad n = 0, \dots, r. \end{aligned}$$

formában írhatók fel (lásd a 2. tulajdonságot). Ebben  $u_i$  a következő esetekben fordulhat elő:

1.  $i-k+z+n = i$ , azaz  $z+n-k = 0$ , vagyis az  $N_{i-k+z+n}^{k-r-1}(\tilde{u}, u_i)$  függvény az első tagban szerepel, de ez a függvény 0 az  $[u_{i-m}, u_{i-m+1}]$  intervallumon  $m$  minden megengedett értékére (lásd az 1. tulajdonságot);

2.  $i + z + n - r - 1 = i$ , azaz  $z + n = r + 1$ , ezért a normalizált B-szplájn függvény az első tagban  $N_{i-(k-r-1)}^{k-r-1}(\tilde{u}, u_i)$ , a 3.1. lemma szerint ennek a függvénynek  $u_i$  szerinti fokszáma  $k - m - r - 1$ , ezért az első tag fokszáma legfeljebb  $k - m - r \leq k - m$  lehet;
3.  $i + z + n - r = i$ , azaz  $z + n = r$ , ami a 2. esetnek felel meg;
4.  $i - k + z + n + 1 = i$ , ami az 1. esetnek felel meg.  $\square$

Ez tehát azt jelenti, hogy az  $\mathbf{s}_{i-1}(u)$  ív pontjainak pályagörbéi  $(k-1)$ -edfokú, az  $\mathbf{s}_{i-2}(u)$  ív pontjaié  $(k-2)$ -edfokú racionális görbék, az  $\mathbf{s}_{i-k+1}(u)$  ív pontjainak pályagörbéi pedig már egyenes szakaszok.

**3.1. Következmény.** A  $\mathbf{g}_{i-k+1}(\tilde{u}, u_i)$ ,  $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$  pályagörbék a  $\mathbf{d}_{i-k}$ ,  $\mathbf{d}_{i-k+1}$  kontrollpontokat összekötő egyenessel párhuzamos szakaszok.

Ebben az esetben ugyanis a pályagörbe a

$$\mathbf{g}_{i-k+1}(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=i-2(k-1)}^{i-k-1} N_l^k(\tilde{u}) \mathbf{d}_l + N_{i-k}^k(\tilde{u}, u_i) \mathbf{d}_{i-k} + N_{i-k+1}^k(\tilde{u}, u_i) \mathbf{d}_{i-k+1}$$

egyszerűbb alakra hozható, ahol csak az utolsó két tag függ  $u_i$ -től, és az ezekben előforduló normalizált B-szplájn alapfüggvények

$$\begin{aligned} N_{i-k}^k(\tilde{u}, u_i) &= C_1(\tilde{u}) + C_2(\tilde{u}) \frac{u_i - \tilde{u}}{u_i - u_{i-k+1}}, \\ N_{i-k+1}^k(\tilde{u}, u_i) &= C_2(\tilde{u}) \frac{\tilde{u} - u_{i-k+1}}{u_i - u_{i-k+1}} \end{aligned}$$

alakban írhatók fel, ahol

$$C_1(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u} - u_{i-k}}{u_{i-1} - u_{i-k}} N_{i-k}^{k-1}(\tilde{u}, u_i), \quad C_2(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u} - u_{i-k+1}}{u_{i-1} - u_{i-k+1}} N_{i-k+1}^{k-2}(\tilde{u}, u_i)$$

$u_i$ -től független konstansok. Ezért az  $u_i$ -től függő rész

$$\begin{aligned} &\left( C_1(\tilde{u}) + C_2(\tilde{u}) \left( 1 - \frac{\tilde{u} - u_{i-k+1}}{u_i - u_{i-k+1}} \right) \right) \mathbf{d}_{i-k} + C_2(\tilde{u}) \frac{\tilde{u} - u_{i-k+1}}{u_i - u_{i-k+1}} \mathbf{d}_{i-k+1} = \\ &= (C_1(\tilde{u}) + C_2(\tilde{u})) \mathbf{d}_{i-k} + C_2(\tilde{u}) \frac{\tilde{u} - u_{i-k+1}}{u_i - u_{i-k+1}} (\mathbf{d}_{i-k+1} - \mathbf{d}_{i-k}), \end{aligned}$$

ami egyenes szakaszt ír le.

Mint láttuk, az  $\mathbf{s}_{i-k+1}(u, u_i)$  ív pontjai egymással párhuzamos egyenesek mentén mozdulnak el. Felmerülhet a kérdés, hogy ez az alakváltozás vajon tengelyes affinitás-e. A válasz nem, mivel az affinitás irányának létezése maga után vonná a pontonként önmagának megfelelő tengely létezését, ami általában nem teljesül.

Az  $u_i$ -től jobbra elhelyezkedő intervallumokhoz tartozó görbeívek pontjainak pályagörbéire a fentiekkel analóg állítások igazolhatók.

**3.2. Lemma.**  $N_i^k(\tilde{u}, u_i)$ ,  $\tilde{u} \in [u_{i+m}, u_{i+m+1})$ ,  $(m = 0, \dots, k-2)$ ,  $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$   $(k-m-1)$ -edfokú racionális függvény  $u_i$ -ben.

**Bizonyítás.** A bizonyítás a 3.1. lemma bizonyításával analóg.  $\square$

### 3.4. Tétel. A

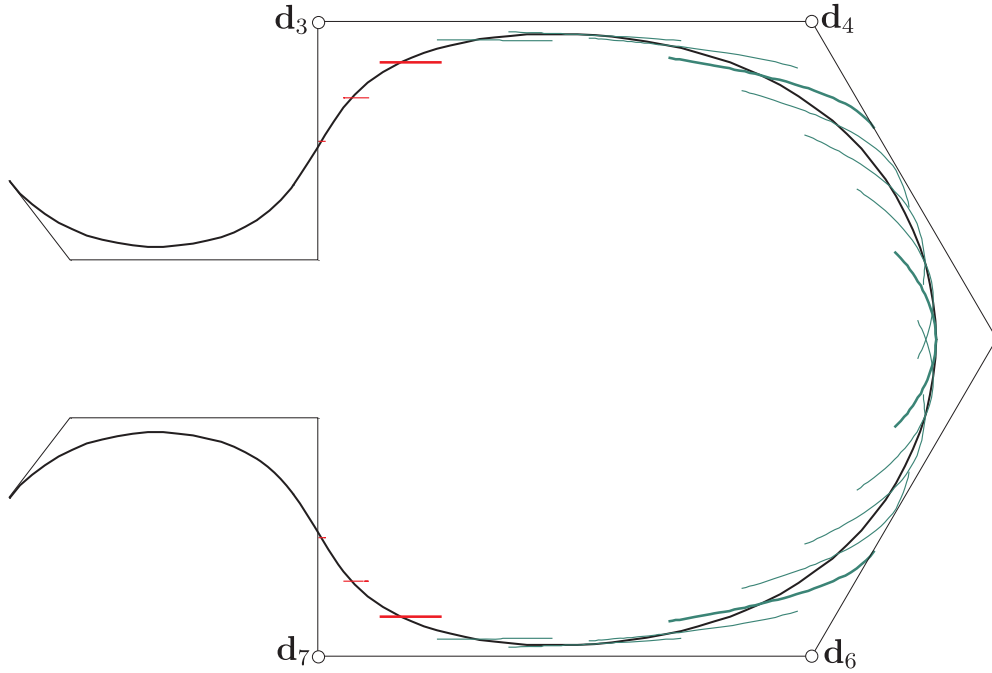
$$\mathbf{g}_{i+m}(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=i+m-k+1}^{i+m} N_l^k(\tilde{u}, u_i) \mathbf{d}_l, \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

*pályagörbe*  $u_i$ -ben  $(k - m - 1)$ -edfokú racionális görbe  $\forall \tilde{u} \in [u_{i+m}, u_{i+m+1})$ ,  $m = 0, \dots, k - 2$ .

**Bizonyítás.** Az összegzés felső határa  $i$ -re csökkenthető, mivel  $u_i$ -nek nincs hatása az  $N_l^k(\tilde{u}, u_i)$ ,  $l > i$  függvényekre (lásd a 4. tulajdonságot). A 3.2. lemma felhasználásával a bizonyítás további része a 3.3. tétel bizonyításával analóg.  $\square$

**3.2. Következmény.** A  $\mathbf{g}_{i+k-2}(\tilde{u}, u_i)$ ,  $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$  pályagörbék a  $\mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{d}_i$  kontrollpontokat összekötő egyenessel párhuzamos szakaszok.

A 3.3. és a 3.4. tételek alapján tehát azt mondhatjuk, hogy az egyes ívekhez tartozó pontok pályagörbéinek fokszáma  $u_i$ -től szimmetrikusan kifelé haladva, ívenként csökken  $(k - 1)$ -től 1-ig. A 3.5. ábra harmadfokú B-szplájn-görbe pályagörbéit szemlélteti.



3.5. ábra. Harmadfokú B-szplájn-görbe és néhány pontjának az  $u_7$  egyszeres csomóérték változtatásával kapott pályagörbéje

$u_i$  minden értékéhez egy-egy B-szplájn-görbe tartozik, vagyis miközben  $u_i$  befutja az  $[u_{i-1}, u_{i+1}]$  intervallumot egy egyparaméteres görbesereget kapunk, mely

$$\mathbf{g}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

alakban írható fel. Másodfokú esetben ( $k = 3$ ) azt tapasztaljuk, hogy az egymáshoz kapcsolódó parabolaíveknek a kapcsolódási pontban a kontrollpoligon megfelelő oldala az érintője, vagyis a harmadrendű B-szplájn-görbét az ugyanazokkal a kontrollpontokkal adott másodrendű B-szplájn-görbe érinti. Ennek a tulajdonságnak egy általánosítása a következő tétel.

### 3.5. Tétel. A

$$\mathbf{g}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}], \quad k > 2$$

*görbesereg elemeire és a*

$$\mathbf{h}(v) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-1}(v), \quad v \in [v_{i-1}, v_i]$$

*görbére*

$$\left. \frac{d^r}{d v^r} \mathbf{h}(v) \right|_{v=u_i} = \frac{k-1-r}{k-1} \left. \frac{d^r}{d u^r} \mathbf{g}(u, u_i) \right|_{u=u_i}, \quad r \geq 0$$

*teljesül, ahol*

$$v_j = \begin{cases} u_j, & \text{ha } j < i \\ u_{j+1}, & \text{ha } j \geq i, \end{cases}$$

*vagyis az  $u_j$  csomóértékek közül kihagyjuk az  $i$ -ediket.*

**Bizonyítás.** Először az  $r = 0$  esetet bizonyítjuk, azaz megmutatjuk, hogy a  $\mathbf{g}(u, u_i)$  görbe  $u = u_i$ -hez tartozó pontja egybeesik a  $\mathbf{h}(v)$  görbe  $v = u_i$  pontjával.

A görbesereg  $i$ -edik eleme

$$\mathbf{g}_i(u, u_i) = \sum_{l=i-k+1}^i \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_i, u_{i+1}], \quad (3.13)$$

ami

$$\mathbf{g}_i(u, u_i) = \sum_{l=i-k+1}^i \mathbf{d}_l \left( \frac{u - u_l}{u_{l+k-1} - u_l} N_l^{k-1}(u) + \frac{u_{l+k} - u}{u_{l+k} - u_{l+1}} N_{l+1}^{k-1}(u) \right) \quad (3.14)$$

alakban írható fel az 1.9. definíció alapján. Ennek az  $u = u_i$  helyen vett

$$\mathbf{g}_i(u_i, u_i) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l \left( \frac{u_i - u_l}{u_{l+k-1} - u_l} N_l^{k-1}(u_i) + \frac{u_{l+k} - u_i}{u_{l+k} - u_{l+1}} N_{l+1}^{k-1}(u_i) \right) \quad (3.15)$$

értéke az ív kezdőpontja (a felső határt  $(i-1)$ -re csökkentettük, mivel  $N_i^{k-1}(u_i) = N_{i+1}^{k-1}(u_i) = 0$ ).

A  $\mathbf{h}(v)$  görbe pedig

$$\mathbf{h}(v) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-1}(v), \quad v \in [v_{i-1}, v_i] = [u_{i-1}, u_{i+1}].$$

Az  $u_i$  csomóértéket beszúrjuk a  $v_{i-1}$  és  $v_i$  csomóértékek közé ( $v_{i-1} = u_{i-1} < u_i < u_{i+1} = v_i$ ) a Böhm-féle inzertáló algoritmussal [6]. Az új  $\widehat{v}_j$  csomóértékek a következők:

$$\widehat{v}_j = \begin{cases} v_j = u_j, & \text{ha } j < i; \\ u_i, & \text{ha } j = i; \\ v_{j-1} = u_j, & \text{ha } j > i. \end{cases} \quad (3.16)$$

A  $\{v_j\}$ , ill.  $\{\widehat{v}_j\}$  csomóvektorokon definiált  $N_l^{k-1}(v)$ , ill.  $\widehat{N}_l^{k-1}(v)$  normalizált B-szplájn alapfüggvények közötti kapcsolat

$$N_l^{k-1}(v) = \begin{cases} \widehat{N}_l^{k-1}(v), & \text{ha } l < i - k + 1; \\ \frac{u_i - \widehat{v}_l}{\widehat{v}_{l+k-1} - \widehat{v}_l} \widehat{N}_l^{k-1}(v) + \frac{\widehat{v}_{l+k} - u_i}{\widehat{v}_{l+k} - \widehat{v}_{l+1}} \widehat{N}_{l+1}^{k-1}(v), & \text{ha } l = i - k + 1, \dots, i - 1; \\ \widehat{N}_{l+1}^{k-1}(v), & \text{ha } l > i - 1. \end{cases}$$

Ezek alapján

$$\mathbf{h}(v) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l \left( \frac{u_i - \widehat{v}_l}{\widehat{v}_{l+k-1} - \widehat{v}_l} \widehat{N}_l^{k-1}(v) + \frac{\widehat{v}_{l+k} - u_i}{\widehat{v}_{l+k} - \widehat{v}_{l+1}} \widehat{N}_{l+1}^{k-1}(v) \right), \quad v \in [\widehat{v}_{i-1}, \widehat{v}_{i+1}),$$

ami

$$\mathbf{h}(u) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l \left( \frac{u_i - u_l}{u_{l+k-1} - u_l} N_l^{k-1}(u) + \frac{u_{l+k} - u_i}{u_{l+k} - u_{l+1}} N_{l+1}^{k-1}(u) \right), \quad u \in [u_{i-1}, u_{i+1}) \quad (3.17)$$

alakba írható (3.16) miatt, mivel  $\widehat{v}_j = u_j, \forall j$ . Ezért a (3.15) és (3.17) egyenlőségek miatt  $\mathbf{h}(u_i) = \mathbf{g}_i(u_i, u_i)$ .

Az  $r > 0$  esetekhez tekintsük a (3.17) görbe  $u$  szerinti  $r$ -edrendű deriváltját, ami

$$\frac{d^r}{d u^r} \mathbf{h}(u) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l \left( \frac{u_i - u_l}{u_{l+k-1} - u_l} \frac{d^r}{d u^r} N_l^{k-1}(u) + \frac{u_{l+k} - u_i}{u_{l+k} - u_{l+1}} \frac{d^r}{d u^r} N_{l+1}^{k-1}(u) \right). \quad (3.18)$$

A  $k$ -adrendű normalizált B-szplájn alapfüggvény  $r$ -edrendű deriváltjára

$$\frac{k-1-r}{k-1} \frac{d^r}{d u^r} N_l^k(u) = \frac{u - u_l}{u_{l+k-1} - u_l} \frac{d^r}{d u^r} N_l^{k-1}(u) + \frac{u_{l+k} - u}{u_{l+k} - u_{l+1}} \frac{d^r}{d u^r} N_{l+1}^{k-1}(u) \\ k > 1, r \geq 0$$

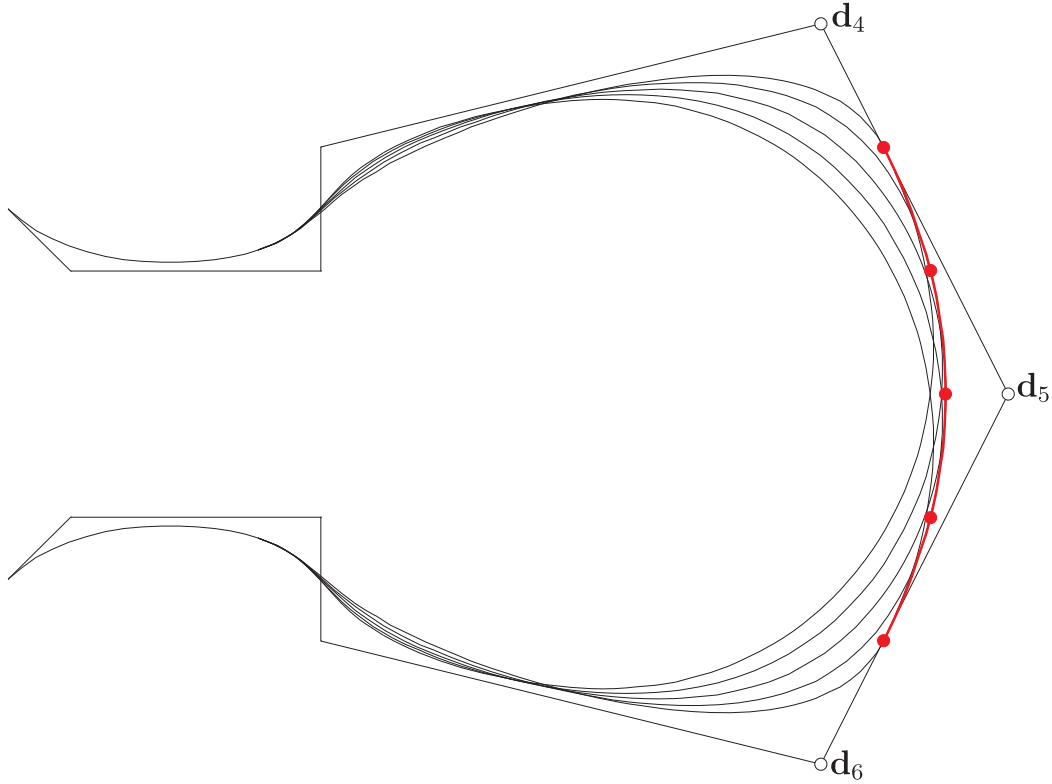
teljesül (lásd Butterfield [8]). Így a  $\mathbf{g}_i(u, u_i)$  görbe  $u$  szerinti  $r$ -edrendű deriváltja

$$\frac{k-1-r}{k-1} \frac{d^r}{d u^r} \mathbf{g}_i(u, u_i) = \sum_{l=i-k+1}^i \mathbf{d}_l \left( \frac{u - u_l}{u_{l+k-1} - u_l} \frac{d^r}{d u^r} N_l^{k-1}(u) + \frac{u_{l+k} - u}{u_{l+k} - u_{l+1}} \frac{d^r}{d u^r} N_{l+1}^{k-1}(u) \right),$$

melynek az  $u = u_i$  helyen vett értéke

$$\frac{k-1-r}{k-1} \frac{d^r}{d u^r} \mathbf{g}_i(u_i, u_i) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l \left( \frac{u_i - u_l}{u_{l+k-1} - u_l} \frac{d^r}{d u^r} N_l^{k-1}(u_i) + \frac{u_{l+k} - u_i}{u_{l+k} - u_{l+1}} \frac{d^r}{d u^r} N_{l+1}^{k-1}(u_i) \right).$$

Ezt összevetve a (3.18) egyenlőséggel, állításunk igazolását kapjuk.  $\square$



3.6. ábra. Az  $u_7$  csomóérték változtatásakor kapott harmadfokú B-szplajn-görbese-reg néhány eleme, és a burkoló parabolaív

**3.3. Következmény (Burkolás).** A  $\mathbf{g}(u, u_i)$   $k$ -adrendű görbékéből álló görbeseregnek burkolója a  $(k-1)$ -edrendű  $\mathbf{h}(v)$  görbe. Ezt a burkolást szemlélteti a 3.6. ábra.

**3.4. Következmény.** A  $\mathbf{h}(v)$  görbének és a  $\mathbf{g}(u, u_i)$  görbesereg elemeinek nemcsak az érintője, hanem a simulósíkja is megegyezik az  $u = u_i$  paraméterértékhez tartozó pontban. A görbületük viszont nem egyezik meg, egészen pontosan a

$$\kappa_h = \frac{(k-1)(k-3)}{(k-2)^2} \kappa_s$$

összefüggés áll fenn köztük. A  $\mathbf{g}(u, u_i)$ ,  $u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$ ,  $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$  által leírt felületnek tehát  $\mathbf{h}(v)$ ,  $v \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$  szinguláris görbéje.

### 3.3.2. Többszörös csomóérték változtatása

Az  $m$  ( $0 < m < k$ ) multiplicitású  $u_i$  csomóérték ( $u_0, \dots, u_{i-1}, u_i = \dots = u_{i+m-1}, u_{i+m}, \dots, u_{n+k}$ ) változtatása az  $N_{i-k}^k(u), \dots, N_i^k(u), \dots, N_{i+m-1}^k(u)$  függvényeket befolyásolja, így az  $\mathbf{s}_{i-k+1}(u), \dots, \mathbf{s}_i(u), \dots, \mathbf{s}_{i+k-2}(u), \dots, \mathbf{s}_{i+k+m-3}(u)$  ívekre van hatása. Az  $\mathbf{s}_i(u) = \dots = \mathbf{s}_{i+m-2}(u)$  ívek azonban egyetlen ponttá zsugorodnak, ezért a ténylegesen megváltozó ívek darabszáma és fokszáma megegyezik az egy multiplicitású esettel. A 3.1. következmény változatlan marad, azaz a  $\mathbf{g}_{i-k+1}(\tilde{u}, u_i)$  pályagörbék a  $\mathbf{d}_{i-k}, \mathbf{d}_{i-k+1}$  kontrollpontokat összekötő egyenessel párhuzamos szakaszok, a 3.2. következmény viszont módosul, nevezetesen a  $\mathbf{g}_{i+k+m-3}(\tilde{u}, u_i)$  pályagörbék lesznek a  $\mathbf{d}_{i+m-1}, \mathbf{d}_{i+m-2}$  kontrollpontokat összekötő egyenessel párhuzamos szakaszok.

A 3.5. tétel a következőképpen módosul.

**3.6. Tétel.** Az  $m$  multiplicitású  $u_i$  csomóérték változtatásával kapott

$$\mathbf{g}(u, u_i) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^k(u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+m}], \quad 0 < m < k, \quad k > 2$$

görbesereg elemeire és a

$$\mathbf{h}(v) = \sum_{l=i-k+m}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-m}(v), \quad v \in [v_{i-1}, v_i]$$

görbére

$$\left. \frac{d^r}{dv^r} \mathbf{h}(v) \right|_{v=u_i} = \left. \frac{d^r}{du^r} \mathbf{g}(u, u_i) \right|_{u=u_i} \prod_{j=1}^m \frac{k-j-r}{k-j}, \quad r \geq 0$$

teljesül, ahol

$$v_j = \begin{cases} u_j, & \text{ha } j < i, \\ u_{j+m}, & \text{ha } j \geq i, \end{cases}$$

vagyis az  $m$ -szeres  $u_i$  csomóértéket kihagyjuk.

**Bizonyítás.** A 3.5. tétel bizonyításánál alkalmazott megfontolásokkal könnyen igazolhatjuk, hogy az  $m$  multiplicitású esetben a

$$\left. \frac{d^r}{d\hat{u}^r} N_l^{k-j}(\hat{u}) \right|_{\hat{u}=u_i} = \frac{k-j-r}{k-j} \left. \frac{d^r}{d\tilde{u}^r} N_l^{k-j+1}(\tilde{u}) \right|_{\tilde{u}=u_i}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.19)$$

egyenlőség teljesül, ahol

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \{\dots, u_{i-1}, u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+m-j-1}, \dots\}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \{\dots, u_{i-1}, u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+m-j}, \dots\}, \end{aligned}$$

azaz az  $u_i$  csomóérték  $m-j$  multiplicitású  $\hat{\mathbf{u}}$ -ben és  $m-j+1$  multiplicitású  $\tilde{\mathbf{u}}$ -ban. (3.19) ismételt alkalmazásával a

$$\left. \frac{d^r}{d\hat{u}^r} N_l^{k-m}(\hat{u}) \right|_{\hat{u}=u_i} = \left. \frac{d^r}{du^r} N_l^k(u) \right|_{u=u_i} \prod_{j=1}^m \frac{k-j-r}{k-j}$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \{\dots, u_{i-1}, u_{i+m}, \dots\}, \\ \mathbf{u} &= \{\dots, u_{i-1}, u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+m-1}, u_{i+m}, \dots\}, \end{aligned}$$

ami állításunkat igazolja.  $\square$

**3.5. Következmény.** Az  $m$  multiplicitású  $u_i$  csomóérték változtatásakor kapott  $k$ -adrendű  $\mathbf{g}(u, u_i)$  görbék seregének burkolója a  $(k-m)$ -edrendű  $\mathbf{h}(v)$  görbe.

**3.6. Következmény.** A  $\mathbf{h}(v)$  görbének és a  $\mathbf{g}(u, u_i)$  görbesereg elemeinek nemcsak az érintője, hanem a simulósíkja is megegyezik az  $u = u_i$  paraméterértéknél. A közös pontbeli görbületek között a

$$\kappa_h = \frac{(k-1)(k-m-2)}{(k-2)(k-m-1)} \kappa_s$$

összefüggés áll fenn, amiből ugyancsak az következik, hogy  $\mathbf{h}(v)$  szinguláris görbéje a  $\mathbf{g}(u, u_i)$  felületnek.

### 3.3.3. Racionális eset

Felhasználjuk, hogy a racionális B-szplájn-görbék centrális vetítéssel származtathatók nemracionális B-szplájn-görbékből. Miután a centrális vetítés során a foksám nem nőhet, a 3.3. és a 3.4. tételek érvényesek maradnak. A 3.1. és a 3.2. következményeknél annyi a változás, hogy a megfelelő pontokat összekötő egyenesek általában már nem lesznek párhuzamosak, hanem egy közös ponton mennek át. Pontosan fogalmazva, a  $\mathbf{g}_{i-k+1}(\tilde{u}, u_i)$  pályagörbék a  $(w_{i-k}\mathbf{d}_{i-k} - w_{i-k+1}\mathbf{d}_{i-k+1}, w_{i-k} - w_{i-k+1})$  homogén koordinátákkal adott tartójú sugársorra illeszkedő szakaszok, a  $\mathbf{g}_{i+k+m-3}(\tilde{u}, u_i)$  pályagörbék pedig  $(w_{i+m-1}\mathbf{d}_{i+m-1} - w_{i+m-2}\mathbf{d}_{i+m-2}, w_{i+m-1} - w_{i+m-2})$  tartójú sugársorra illeszkedők, ahol  $m$  a változtatott  $u_i$  csomóérték multiplicitása.

A 3.5. tételhez hasonló általános formulát nem tudunk adni a deriváltakra racionális esetben, de azt tudjuk, hogy a  $G^1$ -folytonosság és a közös simulósík biztosan megmarad, miután ezek a leírástól független belső geometriai tulajdonságai a görbéknek és centrális vetítéssel szemben invariánsak. Ez tehát azt jelenti, hogy a  $\mathbf{h}(v)$ -nek megfelelő racionális görbe burkolja a  $\mathbf{g}(u, u_i)$  görbeseregnek megfelelő racionális görbéket. Kis számolással az is igazolható, hogy az érintkezési pontban a burkoló és a görbesereg érintkező elemének görbületére ugyanaz az összefüggés érvényes, mint a nemracionális esetben.

### 3.3.4. Két csomóérték együttes változtatása

Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy a B-szplájn-görbe egyes pontjai hogyan mozdulnak el, azaz milyenek lesznek a pályagörbék, ha az  $u_i$  és  $u_{i+2k-3}$  egyszeres csomóértéket szimmetrikusan mozgatjuk. Az  $u_i$  és  $u_j$  ( $i < j$ ) csomóértékek szimmetrikus elmozdításán az  $u_i + \lambda$ ,  $u_j - \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , típusú változtatást értjük. A csomóértékek monotonitásának megőrzése érdekében  $\lambda \in [-c, c]$ ,  $c = \min\{u_i - u_{i-1}, u_{i+1} - u_i, u_j - u_{j-1}, u_{j+1} - u_j\}$ .

A görbe  $(i+k-2)$ -edik íve, melyre mind  $u_i$  mind  $u_{i+2k-3}$  hatással van,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{i+k-2}(u) &= \sum_{l=i-1}^{i+k-2} \mathbf{d}_l N_l^k(u) = \sum_{l=i+1}^{i+k-4} \mathbf{d}_l N_l^k(u) + \\ &+ \left( N_i^{k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u) \right) \mathbf{d}_i + \\ &+ \left( \frac{u - u_{i+k-3}}{u_{i+2k-4} - u_{i+k-3}} N_{i+k-3}^{k-1}(u) + N_{i+k-2}^{k-1}(u) \right) \mathbf{d}_{i+k-3} + \\ &+ \frac{u_{i+k-1} - u}{u_{i+k-1} - u_i} N_i^{k-1}(u) (\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i) + \\ &+ \frac{u - u_{i+k-2}}{u_{i+2k-3} - u_{i+k-2}} N_{i+k-2}^{k-1}(u) (\mathbf{d}_{i+k-2} - \mathbf{d}_{i+k-3}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

alakban írható fel. A továbbiakban az  $u_i = u_i + \lambda$  és  $u_{i+2k-3} = u_{i+2k-3} - \lambda$  helyettesítéssel kapott  $\mathbf{s}_{i+k-2}$  ív pontjainak pályagörbéit vizsgáljuk.

**3.7. Tétel.** *A  $\mathbf{g}_{i+k-2}(u, \lambda)$ ,  $\lambda \in [-c, c]$  pályagörbék akkor és csak akkor egyenes szakaszok, ha  $u_{i+k-1} - u_i = u_{i+2k-3} - u_{i+k-2}$  teljesül.*

**Bizonyítás.** A (3.20) kifejezésben csak a  $(\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i)$  és  $(\mathbf{d}_{i+k-2} - \mathbf{d}_{i+k-3})$  tagok együtthatója függ  $\lambda$ -tól, az összeg többi része egyetlen konstans eltolásvektornak tekinthető, amit a továbbiakban  $\mathbf{p}$ -vel jelölünk.

1) Ha  $\delta = u_{i+k-1} - u_i = u_{i+2k-3} - u_{i+k-2}$  teljesül, akkor  $1/(\delta - \lambda)$  kiemelhető, azaz

$$\mathbf{g}_{i+k-2}(u, \lambda) = \mathbf{p} + \frac{1}{\delta - \lambda} \left( (u_{i+k-1} - u) N_i^{k-1}(u) (\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i) + (u - u_{i+k-2}) N_{i+k-2}^{k-1}(u) (\mathbf{d}_{i+k-2} - \mathbf{d}_{i+k-3}) \right),$$

tehát egyenest kapunk.

2) Ha  $u_{i+k-1} - u_i \neq u_{i+2k-3} - u_{i+k-2}$ , akkor a (3.20) racionális görbének két végtelen távoli pontja van, nevezetesen a  $\lambda = u_{i+k-1} - u_i$  és  $\lambda = u_{i+2k-3} - u_{i+k-2}$  paraméterértékhez tartozó, vagyis a görbe nem lehet egyenes.  $\square$

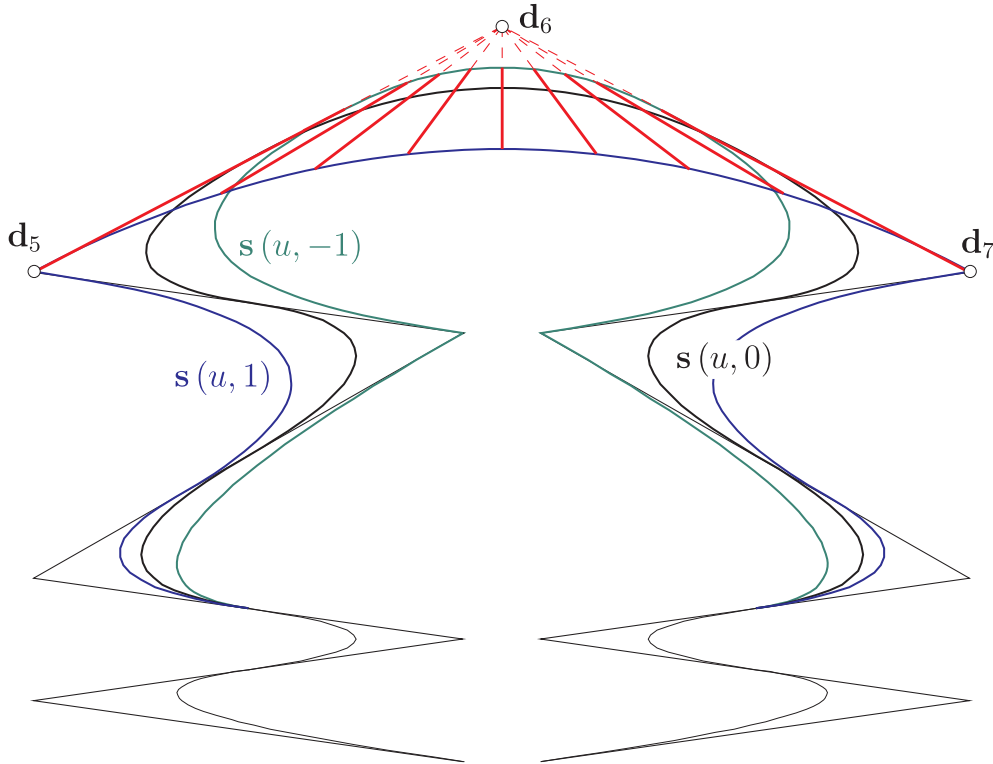
A fenti tétel  $k = 3$  és  $k = 4$  speciális eseteit célszerű megvizsgálnunk.

### 3.3.4.1. A $k = 3$ eset

Ekkor az  $\mathbf{s}_{i+1}$  görbeív

$$\mathbf{d}_i + \frac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_i - \lambda} N_i^2(u) (\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i) + \frac{u - u_{i+1}}{u_{i+3} - \lambda - u_{i+1}} N_{i+1}^2(u) (\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i)$$

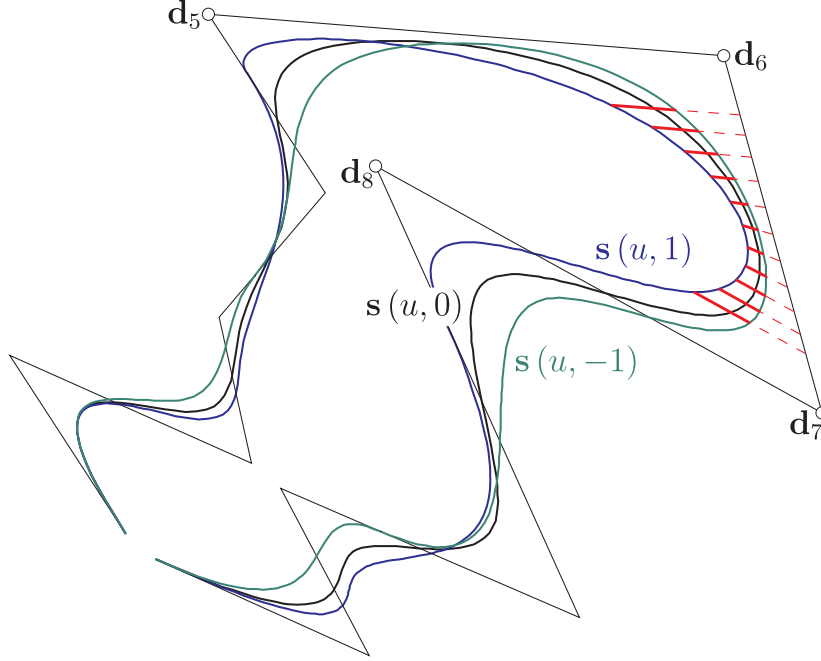
alakban írható fel. Tehát a pályagörbék a  $\mathbf{d}_i$  tartójú sugársor elemei lesznek, ha  $u_{i+2} - u_i = u_{i+3} - u_{i+1}$  teljesül (lásd a 3.7. ábrát).



3.7. ábra. Másodfokú B-szplajn-görbe  $u_6$  és  $u_9$  csomóértékeinek szimmetrikus változtatásának hatása a görbe alakjára. Az  $\mathbf{s}_{i+1}(u)$  ív néhány pontjának pályagörbéjét is feltüntettük ( $n = 12, k = 3, i = 6, \lambda \in [-1, 1]$ ).

Ez azt jelenti, hogy az  $u_i$  és  $u_{i+2k-3}$  csomóértékek szimmetrikus változtatása a másodfokú B-szplajn-görbe  $\mathbf{s}_{i+1}(u)$  ívének pontjait a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont felé

húzza (tőle távolítja) egyenes szakaszok mentén. Vagyis ez a módosítás hasonló a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont súlyának változtatásakor fellépő alakváltozáshoz. A két alakváltoztatási módszer azonban nem helyettesíthető egymással. A legfontosabb eltérés, hogy a  $w_i$  súly változtatásakor csak az  $\mathbf{s}_i(u), \mathbf{s}_{i+1}(u), \dots, \mathbf{s}_{i+k-1}(u)$  ívek alakja változik, míg az  $u_i$  és  $u_{i+2k-3}$  csomóértékek szimmetrikus változtatásakor az  $\mathbf{s}_{i-k+1}(u), \mathbf{s}_{i-k+2}(u), \dots, \mathbf{s}_{i+3k-5}(u)$  íveké, vagyis az utóbbi esetben a változás a görbének sokkal nagyobb darabját érinti.



3.8. ábra. Az  $u_6$  és  $u_{11}$  csomóértékek szimmetrikus változtatásának hatása a harmadfokú B-szplajn-görbe alakjára. Az  $\mathbf{s}_8(u)$  ív meghosszabbított lineáris pályagörbéi metszik a  $\mathbf{d}_6, \mathbf{d}_7$  szakaszt ( $n = 12, k = 4, i = 6, \lambda \in [-1, 1]$ ).

### 3.3.4.2. A $k = 4$ eset

Az  $\mathbf{s}_{i+2}$  ív

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u_{i+4} - u}{u_{i+4} - u_{i+1}} N_{i+1}^3(u) + N_i^3(u) \right) \mathbf{d}_i + \left( \frac{u - u_{i+1}}{u_{i+4} - u_{i+1}} N_{i+1}^3(u) + N_{i+2}^3(u) \right) \mathbf{d}_{i+1} + \\ & + \frac{u_{i+3} - u}{u_{i+3} - u_i - \lambda} N_i^3(u) (\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i) + \frac{u - u_{i+2}}{u_{i+5} - \lambda - u_{i+2}} N_{i+2}^3(u) (\mathbf{d}_{i+2} - \mathbf{d}_{i+1}) \end{aligned}$$

$\mathbf{d}_i$  és  $\mathbf{d}_{i+1}$  együtthatói nemnegatívak és összegük 1, vagyis az összeg konstans tagja a  $\mathbf{d}_i$  és  $\mathbf{d}_{i+1}$  kontrollpontok konvex kombinációja. Az  $\mathbf{s}_{i+2}$  ív pályagörbéi tehát  $u_{i+3} - u_i = u_{i+5} - u_{i+2}$  esetén olyan egyenesek, melyek a  $\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1}$  szakaszt belső pontban metszik, továbbá a  $\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i$  és  $\mathbf{d}_{i+2} - \mathbf{d}_{i+1}$  irányokkal meghatározott síkkal párhuzamosak (lásd a 3.8. ábrát).

### 3.3.5. Harmadfokú B-szplájn-görbe előírt alakmódosítása csomóértékekkel

A csomóérték változtatásakor a módosított görbeív mindig az eredeti ív konvex burkán belül marad, ami biztosítja, hogy a görbe elég jól megőrizze alapvető jellegét a módosítás során. A csomóértékekkel való alakmódosítás legnagyobb nehézsége, hogy a tervezőrendszerek felhasználói nem sokat tudnak a csomóértékekről, azok szerepéről. Ezért olyan módosítási eljárásokat kell kidolgozni, melyek használata nem igényli a csomóértékek alaposabb ismeretét. Az a legjobb, ha szemléletes geometriai feltételekkel adható meg az alakmódosítás. További probléma, hogy egyetlen csomóérték megváltoztatása általában csekély mértékben módosítja a görbe alakját. Több csomóérték egyidejű változtatása azonban már jelentősebb alakváltozást idéz elő. Harmadfokú nemracionális B-szplájn-görbéknek három szomszédos csomóérték módosításán alapuló, adott geometriai feltételeket kielégítő alakmódosításaira dolgoztunk ki eljárásokat.

A 3.5. tétel  $k = 4$  esetét használjuk fel. Azt feltételezzük, hogy az  $u_{j+1}$  csomóértéket módosítjuk, ezért a görbesereg elemei

$$\mathbf{g}(u, u_{j+1}) = \sum_{l=0}^n \mathbf{d}_l N_l^4(u, u_{j+1}), \quad u \in [u_3, u_{n+1}], \quad u_{j+1} \in [u_j, u_{j+2}]$$

alakban írhatók fel, a burkoló parabolaív pedig

$$\mathbf{h}_j(v) = \sum_{l=j-2}^j N_l^3(v) \mathbf{d}_l, \quad v \in [v_j, v_{j+1}] \quad (3.21)$$

alakban, melynek csomóértékei  $v_{j-2} = u_{j-2}$ ,  $v_{j-1} = u_{j-1}$ ,  $v_j = u_j$ ,  $v_{j+1} = u_{j+2}$ ,  $v_{j+2} = u_{j+3}$ ,  $v_{j+3} = u_{j+4}$ .

A módszer lényege, hogy a harmadfokú görbével kapcsolatos illeszkedési és érintési problémát a burkológörbe segítségével a sokkal hatékonyabban kezelhető parabolával kapcsolatos másodfokú feladatra vezetjük vissza. A megoldás lehetővé teszi olyan felhasználói felület kialakítását, amely nem igényli a csomóértékek beható ismeretét.

#### 3.3.5.1. A módosított görbe adott ponton menjen át

Az alakmódosítás geometriai kényszere lehet az, hogy megadjuk azt a  $\mathbf{p}$  pontot, amin a módosított görbének át kell mennie. Ezt a harmadfokú B-szplájn-görbe néhány csomóértékének megváltoztatásával akarjuk elérni. Az eljárás a következő:

- a  $\mathbf{h}_j(v)$  burkolót úgy módosítjuk, hogy az átmenjen a megadott ponton;
- ezután az  $\mathbf{s}(u)$  görbe megfelelő csomóértékeit a 3.5. tétel alapján megváltoztatjuk, aminek eredményeként a módosított  $\mathbf{s}(u)$  görbe  $\mathbf{p}$ -ben fog érintkezni  $\mathbf{h}_j(v)$ -vel.

A megoldhatóság érdekében a  $\mathbf{p}$  pont nem lehet bárhol. A továbbiakban meghatározzuk  $\mathbf{p}$  megengedett pozícióinak mértani helyét.

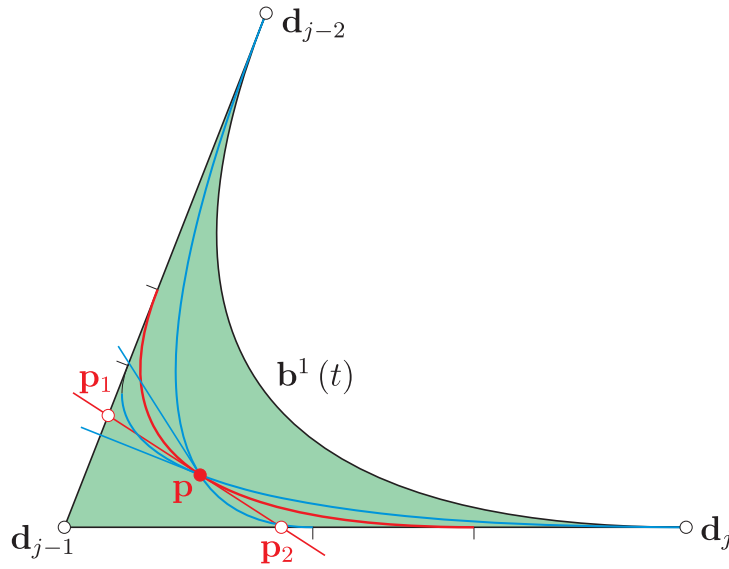
A  $\mathbf{h}_j(v)$  parabolaív Bézier-görbeként is leírható, mely kontrollpontjait a (3.21) kifejezésből a  $v = v_j$ , ill.  $v = v_{j+1}$  helyettesítéssel megkaphatjuk. Az így kapott kontrollpontok

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= (1 - \alpha) \mathbf{d}_{j-1} + \alpha \mathbf{d}_{j-2}, \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{d}_{j-1}, \\ \mathbf{b}_2 &= (1 - \beta) \mathbf{d}_{j-1} + \beta \mathbf{d}_j, \end{aligned} \quad (3.22)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{v_{j+1} - v_j}{v_{j+1} - v_{j-1}}, \\ \beta &= \frac{v_{j+1} - v_j}{v_{j+2} - v_j}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

melyekre a kontrollpontok monotonitása miatt az  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  feltételnek kell teljesülni.



3.9. ábra. A  $\mathbf{p}$  pont megengedett helyzetei (zöld terület), a  $\mathbf{p}$  ponton áthaladó parabola két szélső helyzete (kék) és a  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  pontokkal meghatározott érintőjű parabola (piros)

A Bernstein-polinomok  $B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t) \equiv 1$  azonossága miatt a fenti Bézier-görbe

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_1 + B_0^2(t) (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1) + B_2^2(t) (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1), \quad t \in [0, 1]$$

alakba írható. A (3.22) egyenlőségeket felhasználva, a burkoló a

$$\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{e}_1 = \mathbf{d}_{j-2} - \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j-1}. \quad (3.24)$$

affin koordináta-rendszerben

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{d}_{j-1} + \alpha B_0^2(t) \mathbf{e}_1 + \beta B_2^2(t) \mathbf{e}_2 \quad (3.25)$$

alakot ölt. A (3.25) kifejezés az  $\alpha, \beta$  paraméterű kétparaméteres parabolaív-sereget írja le. Ezek a parabolaívek azt a területet fedik le, mely határait a  $\mathbf{d}_{j-2}, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_j$

kontrollpoligon és az általa meghatározott  $\mathbf{b}^1(t)$  Bézier-görbe alkotja (ezt az  $\alpha = \beta = 1$  helyettesítéssel kapjuk). Ezt a tartományt  $\Omega$ -val jelöljük (lásd a 3.9. ábra árnyalt részét). A (3.25) parabolái a  $\mathbf{b}^1(t)$  parabolából affin transzformációval, egész pontosan a (3.24) koordináta-rendszer tengelyei mentén alkalmazott  $\alpha, \beta$  tényezőjű skálázással állíthatók elő. Ezért, ha  $\mathbf{p} \in \Omega$ , biztosan van megoldás.

Most megvizsgáljuk, hogy hány megoldás lesz, azaz meghatározzuk, hogy mely (3.25) alakú parabola megy át rajta, egyébként végtelen sok olyan (3.25) alakban felírható parabola van, amelyre

$$\mathbf{p} = \mathbf{d}_{j-1} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

alakban a (3.24) koordináta-rendszerben. Ha  $\mathbf{p}$  a tartomány határán van, akkor csak egy parabola megy át rajta, egyébként végtelen sok olyan (3.25) alakban felírható parabola van, amelyre

$$x = \alpha B_0^2(t), y = \beta B_2^2(t) \text{ teljesül valamely } t \in [0, 1] \text{ esetén.} \quad (3.26)$$

Ezeknek a paraboláknak a szélső helyzetei az

$$\alpha = 1, t = 1 - \sqrt{x}, \beta = \frac{y}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

és

$$\beta = 1, t = \sqrt{y}, \alpha = \frac{x}{(1 - \sqrt{y})^2}$$

értékeknél van. Ezeket a szélső helyzeteket szemlélteti a 3.9. ábra.

Ezért  $\forall \alpha \in [x/(1 - \sqrt{y})^2, 1]$  értékhez  $\exists \beta \in [y/(1 - \sqrt{x})^2, 1]$  (egész pontosan  $\beta = y/(1 - \sqrt{x/\alpha})^2$ ), hogy a hozzájuk tartozó (3.25) alakú parabola átmegy a  $\mathbf{p}$  ponton. (Ez természetesen megfordítva is működik, tehát  $\forall \beta$ -hoz  $\exists \alpha$ .) Ez tehát azt jelenti, hogy a  $\mathbf{p}$  ponton áthaladó (3.25) alakú parabola egyparaméteres sereget alkotnak.

Ebből a seregből kell kiválasztanunk egy elemet. Ezt megtehetjük úgy is, hogy rögzítjük azt a  $\tilde{t}$  paraméterértéket, amelynél a parabolának át kell mennie a  $\mathbf{p}$  ponton. A (3.26) egyenlőségből következik, hogy  $\tilde{t}$ -nak  $\sqrt{y}$  és  $1 - \sqrt{x}$  között kell lennie. A sereg elemének ez a kiválasztási módja nem eléggé intuitív egy interaktív tervezőrendszer számára.

Sokkal célszerűbb a parabola érintőjét előírni, annál is inkább, mivel ez lesz az érintője a módosított B-szplajn-görbének is  $\mathbf{p}$ -ben. Ez az érintő a parabola két szélső helyzetének érintői között adható meg, lásd a 3.9. ábrát. Jelöljük a megadott érintőnek a  $\mathbf{d}_{j-2}, \mathbf{d}_{j-1}$  és  $\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_j$  kontrollpoligon oldalakkal alkotott metszéspontját  $\mathbf{p}_1$  és  $\mathbf{p}_2$ -vel! Ekkor a

$$\tilde{t} = \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|}$$

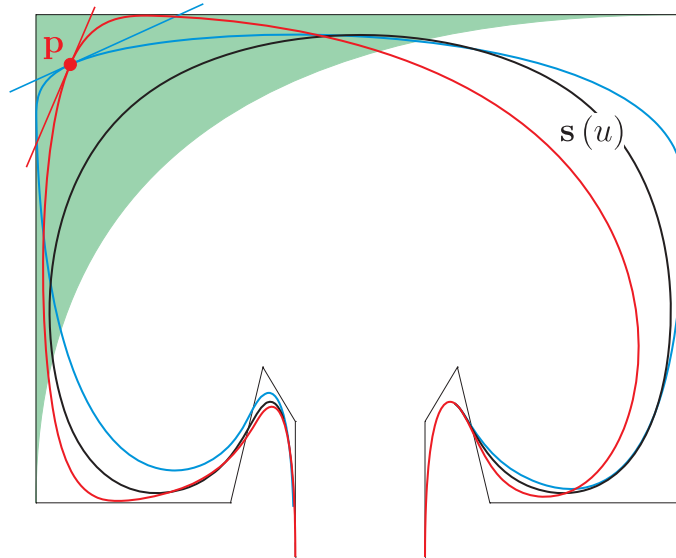
paraméterértékre  $\mathbf{b}(\tilde{t}) = \mathbf{p}$  teljesül. Ezzel a (3.25) kifejezés minden szabad paraméterét egyértelműen meghatároztuk.

Ezt követően előállítjuk a módosított burkoló B-szplajn alakját, majd magát a módosított  $\mathbf{s}(u)$  harmadfokú B-szplajn-görbét. Ehhez az  $\alpha, \beta$  és  $\tilde{t}$  ( $\mathbf{b}(\tilde{t}) = \mathbf{p}$ ) értékek ismeretében meg kell határoznunk:

- a  $\mathbf{b}(t)$  parabolaív B-szplájn reprezentációját, azaz a  $v_{j-1}$ ,  $v_j$ ,  $v_{j+1}$  és  $v_{j+2}$  csomóértékeket;
- a  $\tilde{t} \in [0, 1]$  értékhez tartozó  $\tilde{v} \in [v_j, v_{j+1}]$  értéket (a  $\tilde{v} = v_j + \tilde{t}(v_{j+1} - v_j)$  paramétertranszformációval);
- a harmadfokú B-szplájn-görbe megváltozó  $u_i$  csomóértékeit

$$u_{j-1} = v_{j-1}, u_j = v_j, u_{j+1} = \tilde{v}, u_{j+2} = v_{j+1}, u_{j+3} = v_{j+2}. \quad (3.27)$$

Ezen lépések közül csak az első, azaz a  $v_i$ ,  $(i = j - 1, j, \dots, j + 2)$  csomóértékek meghatározása nem egyértelmű, mivel a (3.23) két egyenletében négy ismeretlen van. Így még két szabad paraméterünk maradt. A  $v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, v_{j+2}$  közül bármely kettő rögzíthető és a megmaradt ismeretlenekre megoldható a rendszer. Azonban annak érdekében, hogy a módosítandó harmadfokú B-szplájn megváltozó íveinek a számát minimalizáljuk, egymást követő csomóértékekre célszerű megoldani a rendszert. Mi  $v_{j-1}$  és  $v_{j+2}$  rögzítését javasoljuk, vagyis  $v_j$  és  $v_{j+1}$ -re oldjuk meg a rendszert. Az előzetes geometriai feltételek miatt az egyértelmű megoldás garantált.

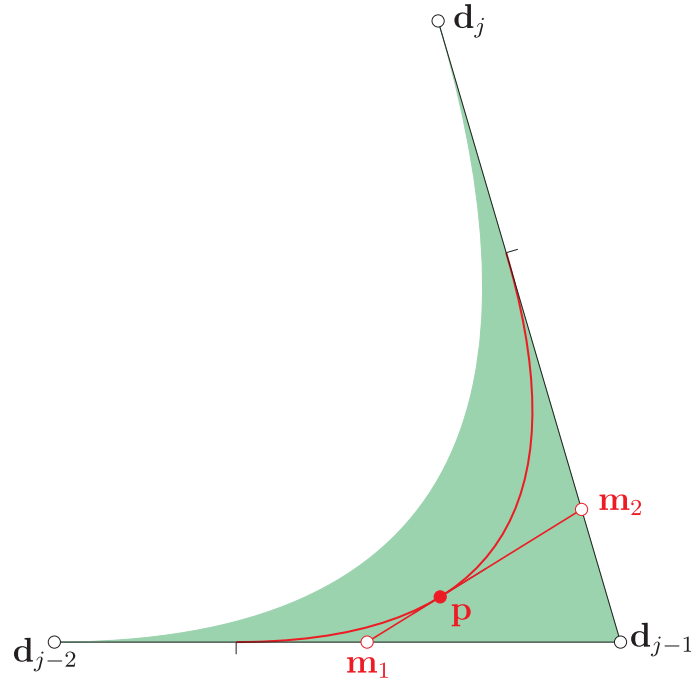


3.10. ábra. Az  $s(u)$  harmadfokú B-szplájn-görbe (fekete) és a  $\mathbf{p}$  ponton áthaladó, adott érintőjű két módosítása (piros és kék), valamint a  $\mathbf{p}$  pont megengedett helyzeteinek tartománya (zöld terület)

A 3.10. ábra két különböző érintőjű megoldást mutat. Interaktív tervezői környezetben a felhasználónak csak a  $\mathbf{p}$  pontot és az érintőt kell megadnia, ezek megengedett helyzeteinek mértani helyét a rendszer automatikusan meg tudja jeleníteni.

### 3.3.5.2. A módosított görbe adott egyenest érintsen

$s(u)$  alakváltoztatásának másik geometriai kényszere lehet az érintő és érintési pont megadása. Ez gyakorlatilag a 3.3.5.1. alpontban megoldott feladat duálisának tekinthető.



3.11. ábra. Az érintőszakaszok megengedett pozícióinak mértani helye (zöld terület), az érintési pontok mértani helye (vastag piros szakasz) az  $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2$  szakaszon és a feladat egy megoldása (piros parabolaív)

A megoldhatóság érdekében a megadott érintőnek a  $\mathbf{d}_{j-2}$ ,  $\mathbf{d}_{j-1}$  és  $\mathbf{d}_{j-1}$ ,  $\mathbf{d}_j$  szakaszokat metszenie kell. Ezeket a metszéspontokat rendre  $\mathbf{m}_1$  és  $\mathbf{m}_2$ -vel jelöljük, lásd a 3.11. ábrát. Az  $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2$  szakasz minden pontja  $\Omega$ -ban kell legyen.

A (3.24) koordináta-rendszerben

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{d}_{j-1} + \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{d}_{j-1} + \lambda_2 \mathbf{e}_2.$$

Ezen szakasz pontjai akkor és csak akkor vannak  $\Omega$ -ban, ha

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1.$$

Ha  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , akkor csak egy olyan (3.25) típusú Bézier-görbe van, amely a megadott szakaszt érinti. Ez a parabola az  $\alpha = \beta = 1$  beállításnak felel meg.

Egyébként egy parabolasereg elemei elégítik ki az adott feltételeket. Ezek Bézier-alakjának kontrollpontjai

$$\mathbf{d}_{j-1} + (\lambda_1 + \mu) \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{d}_{j-1}, \quad \mathbf{d}_{j-1} + \left( \lambda_2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu} \right) \mathbf{e}_2 \quad (3.28)$$

alakban írhatók fel a (3.24) affin koordináta-rendszerben, ahol a  $\mu$  paraméternek a

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{1 - \lambda_2} \leq \mu \leq 1 - \lambda_1$$

egyenlőtlenséget kell kielégítenie. Ezen parabolák érintési pontjai olyan szakaszt alkotnak az  $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2$  szakaszon, mely végpontjai a  $\mu$  minimális és maximális értékéhez tartozó parabolák érintési pontjai.

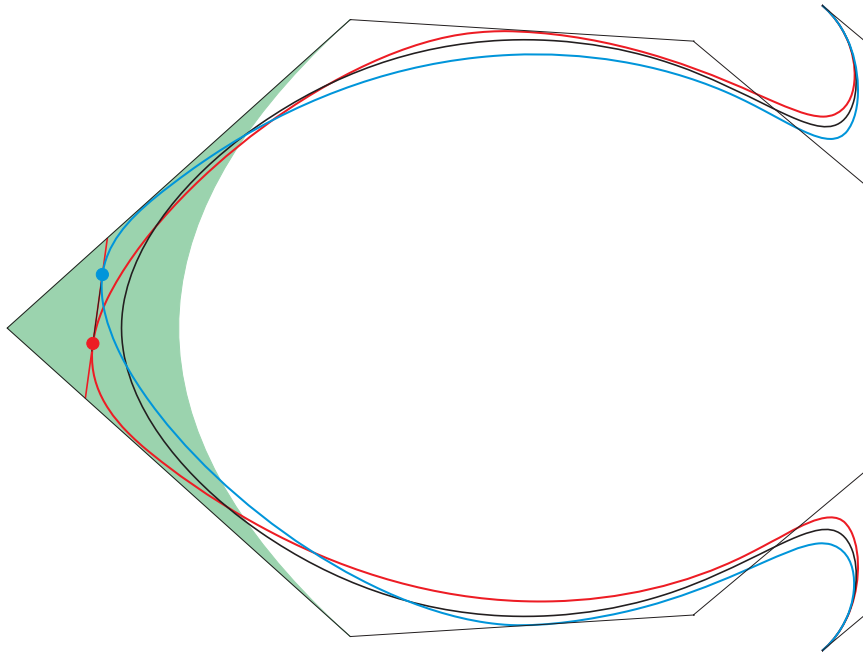
A kívánt  $\mathbf{p}$  érintési pont ezen a részzszakaszon adható meg.  $\mathbf{p}$  megadásával kiválasztjuk a sereg egy elemét. A  $\mathbf{b}(\tilde{t}) = \mathbf{p}$  egyenlőséget kielégítő  $\tilde{t}$  érték:

$$\tilde{t} = \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{m}_1|}{|\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1|}.$$

A (3.28) kontrollpontokkal meghatározott Bézier-görbe (3.25) típusú parabola,  $\alpha = \lambda_1 + \mu$ ,  $\beta = \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 / \mu$  beállítással. Legyenek  $\mathbf{p}$  koordinátái a (3.24) koordináta-rendszerben  $x$  és  $y$ , azaz  $\mathbf{p} = \mathbf{d}_{j-1} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ .  $\mathbf{p}$  a (3.28) kontrollpontú Bézier-görbére is illeszkedik, ezért  $x = B_0^2(\tilde{t})(\lambda_1 + \mu)$ , amiből a (3.28) kifejezésben szereplő  $\mu$  paraméter

$$\mu = \frac{x}{(1 - \tilde{t})^2} - \lambda_1.$$

Ezzel meghatároztuk a Bézier-alakot, azaz a burkolóhoz szükséges  $\alpha, \beta, \tilde{t}$  értékeket. Ezek után meg kell határoznunk a burkoló B-szplajn alakját, majd az  $\mathbf{s}(u)$  görbe megfelelő csomóértékeit. Ezt ugyanúgy tehetjük meg, mint ahogy azt a 3.3.5.1. alponthban leírtuk.



3.12. ábra. Harmadfokú B-szplajn-görbe és ugyanazt az egyenest érintő két módosítása

A 3.12. ábra ezt az alakmódosítást szemlélteti. Interaktív tervezői környezetben a felhasználónak az érintőt és az érintési pontot kell megadnia, a rendszer ezek lehetséges pozícióinak mértani helyét automatikusan meg tudja jeleníteni.

### 3.3.5.3. A görbe adott pontja adott helyre kerüljön

Gyakran alkalmazott alakmódosítási eljárás, amikor a felhasználó kijelöli a görbe valamely pontját, majd ennek a pontnak az új helyét. A továbbiakban azt feltételezzük, hogy a kiválasztott  $\mathbf{s}(\tilde{u})$  pontra  $\tilde{u} \in [u_j, u_{j+2})$  teljesül. A kiválasztott

pont új helyét  $\mathbf{p}$ -vel jelöljük, ennek a (3.24) koordináta-rendszerbeli koordinátái pedig  $x$  és  $y$ . Az  $\mathbf{s}(\tilde{u}) \rightarrow \mathbf{p}$  alakváltozást az  $\mathbf{s}(u)$  görbe három egymást követő csomóértékének a módosításával akarjuk elérni.

A  $\mathbf{p}$  pont lehetséges helyzeteinek meghatározásához nem alkalmas az előzőekben követett út, mivel figyelembe kell vennünk, hogy a burkoló Bézier-alakjánál a  $\tilde{t}$  érték (ami  $\tilde{v} = \tilde{u}$ -hoz tartozik) a  $v_j$  és  $v_{j+1}$  csomóértékekkel együtt változik, ugyanis  $\tilde{t} = (\tilde{v} - v_j) / (v_{j+1} - v_j)$ . Most a burkoló B-szplájn alakját használjuk.

Az  $N_{j-2}^3(v) + N_{j-1}^3(v) + N_j^3(v) = 1$ ,  $\forall v \in [v_j, v_{j+1}]$  azonosság segítségével a (3.21) egyenlőség

$$\mathbf{h}_j(v) = \mathbf{d}_{j-1} + N_{j-2}^3(v) (\mathbf{d}_{j-2} - \mathbf{d}_{j-1}) + N_j^3(v) (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j-1})$$

alakra hozható, ahol

$$N_{j-2}^3(v) = \frac{(v_{j+1} - v)^2}{(v_{j+1} - v_{j-1})(v_{j+1} - v_j)},$$

$$N_j^3(v) = \frac{(v - v_j)^2}{(v_{j+2} - v_j)(v_{j+1} - v_j)}.$$

A  $\mathbf{p}$  pont megengedett helyzetei  $\Omega$  résztartományát alkotják, mely határait meg kell keresnünk. A következő három csomóértékpár változását engedjük meg:  $(v_{j-1}, v_j)$ ,  $(v_j, v_{j+1})$  és  $(v_{j+1}, v_{j+2})$ . A  $\mathbf{p}$  pont megengedett helyzeteinek ezekhez tartozó tartományai legyenek rendre  $\Omega_1, \Omega_2$  és  $\Omega_3$ ! (A megváltozó ívek számának minimalizálása érdekében csak egymást követő csomóértékeket változtattunk.) Az  $\Omega_i$  résztartományok határait a burkoló görbe  $\mathbf{h}(\tilde{v})$  pontjainak különböző szélső helyzeteihez tartozó pályagörbék adják.

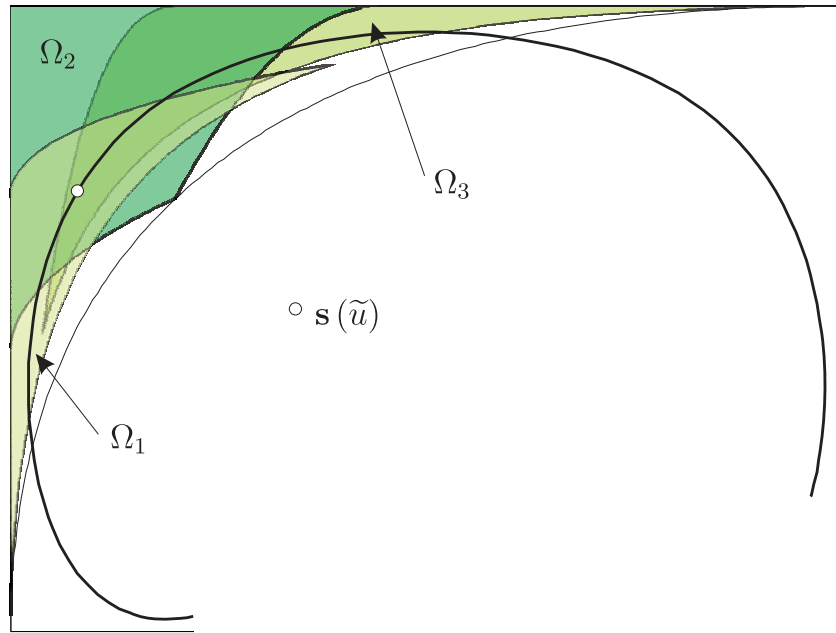
- Az  $\Omega_1$  tartományt három pályagörbe határolja. Az első  $v_{j-2} = v_{j-1}$  esetén  $v_j$  változtatásával, a másodikat  $v_j = \tilde{v}$  esetén  $v_{j-1}$  változtatásával, a harmadikat pedig  $v_{j-1} = v_j$  esetén  $v_{j-1}$  és  $v_j$  egyidejű változtatásával kapjuk meg.
- Az  $\Omega_2$  tartományt négy pályagörbe határolja. Az első  $v_{j+1} = v_{j+2}$  esetén  $v_j$  változtatásával, a másodikat  $v_{j+1} = \tilde{v}$  esetén  $v_j$  változtatásával, a harmadikat  $v_j = v_{j-1}$  esetén  $v_{j+1}$  változtatásával, a negyediket pedig  $v_j = \tilde{v}$  esetén  $v_{j+1}$  változtatásával kapjuk meg.
- Az  $\Omega_3$  tartományt három pályagörbe határolja. Az első  $v_{j+2} = v_{j+3}$  esetén  $v_{j+1}$  változtatásával, a másodikat  $v_{j+1} = \tilde{v}$  esetén  $v_{j+2}$  változtatásával, a harmadikat pedig  $v_{j+1} = v_{j+2}$  esetén  $v_{j+1}$  és  $v_{j+2}$  egyidejű változtatásával kapjuk meg.

Ezt a három, részben átfedő tartományt szemlélteti a 3.13. ábra.

Ha a  $\mathbf{p}$  pont ennek a három tartománynak az uniójában van, akkor az  $\mathbf{s}(\tilde{u}) \rightarrow \mathbf{p}$  alakváltoztatási problémánknak biztosan van megoldása. Ilyen esetben 1, 2 vagy 3 megoldás lehet, attól függően, hogy a  $\mathbf{p}$  pont az  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , ill.  $\Omega_3$  tartományokhoz képest hogyan helyezkedik el. Az

$$x = \frac{(v_{j+1} - \tilde{v})^2}{(v_{j+1} - v_{j-1})(v_{j+1} - v_j)},$$

$$y = \frac{(\tilde{v} - v_j)^2}{(v_{j+2} - v_j)(v_{j+1} - v_j)}$$
(3.29)



3.13. ábra. Az a három átfedő tartomány, melyen belül a kiválasztott  $s(\tilde{u})$  pont elmozdítható

egyenletrendszer kell megoldanunk a következő három ismeretlen-pár valamelyikére:  $(v_{j-1}, v_j)$ ,  $(v_j, v_{j+1})$ ,  $(v_{j+1}, v_{j+2})$ . A (3.29) egyenletrendszernek csak azok a megoldásai jelentik az alakmódosítási probléma megoldását, melyek a

$$v_{j-1} \leq v_j \leq \tilde{v} \leq v_{j+1} \leq v_{j+2}$$

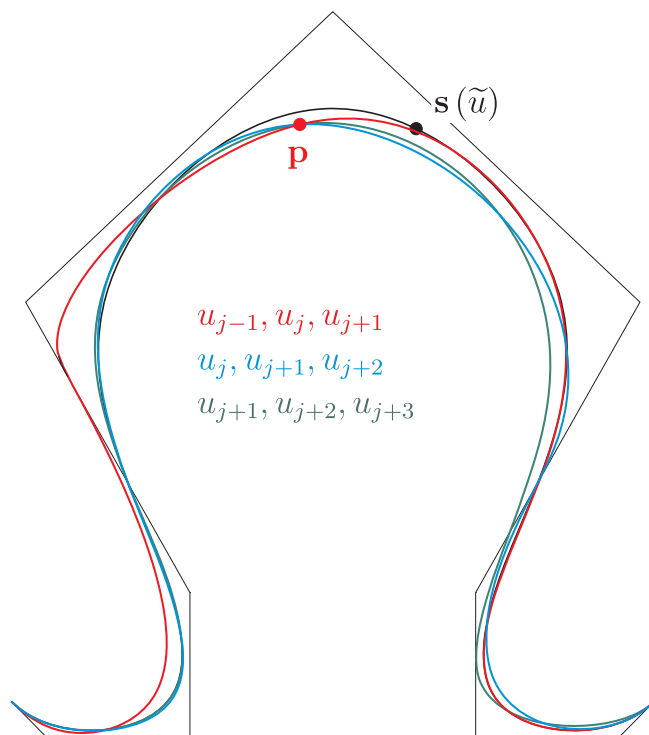
monotonitási feltételt is kielégítik. Ilyen megoldás biztosan van, ha  $\mathbf{p}$  abban a tartományban helyezkedik el, amelyhez tartozó ismeretlenpárra oldottuk meg az egyenletrendszer.

A  $\{v_i\}$  csomóértékek segítségével az  $u_i$ ,  $i = j - 1, j, \dots, j + 3$  csomóértékeket (3.27) szerint beállítjuk. Az ezekhez a csomóértékekhez tartozó  $s(u)$  görbe kielégíti az  $s(\tilde{u}) = \mathbf{p}$  feltételt. A 3.14. ábra olyan esetet szemléltet, amikor a problémának három különböző megoldása van.

Természetesen ez a probléma kontrollponteltolással is megoldható. A két megoldási módszert összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a kontrollponteltolás a görbe négy ívét módosítja és nincs megszorítás a  $\mathbf{p}$  helyzetére nézve. Az általunk ismertett csomóérték-változtatáson alapuló eljárás esetén a harmadfokú görbe nyolc íve változik meg, és a  $\mathbf{p}$  pont csak a viszonylag szűk  $\Omega$  tartományban lehet.

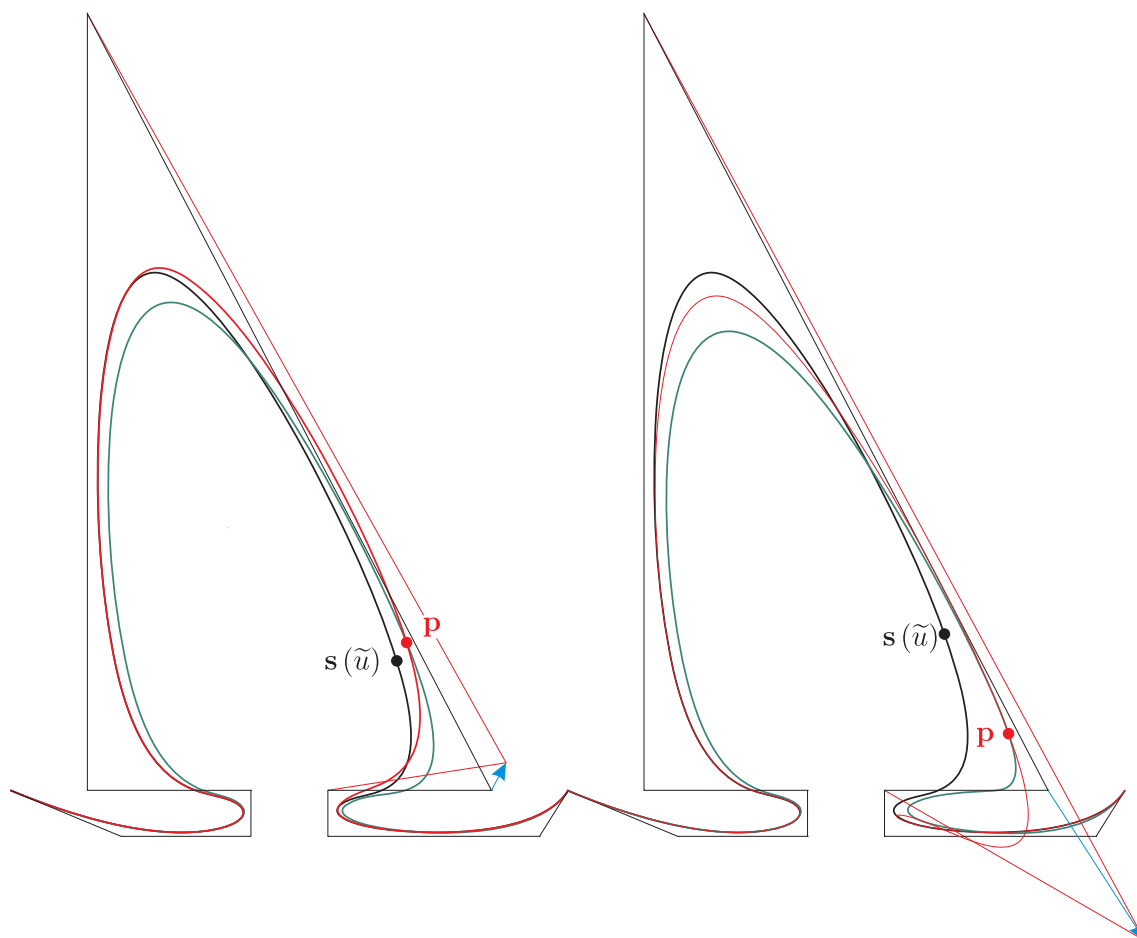
Másrészt azonban, a csomóérték módosítás jól megőrzi a görbe jellegét, lásd a 3.15. ábrát, mivel a megoldás mindig az eredeti görbéhez tartozó konvex burokban marad. A kontrollpont eltolása ugyanakkor inflexiós vagy önmetszésponot eredményezhet.

Ez az alakmódosítási eljárás úgy implementálható, hogy a felhasználó kijelöli a görbe elmozdítandó pontját, és annak új  $\mathbf{p}$  helyzetét. Ha  $\mathbf{p}$  több  $\Omega_i$  tartomány metszetében van, akkor a felhasználónak ki kell választania a kívánt megoldást a rendszer által felkínáltak közül, vagy azt a tartományt kell megadnia, amelyben a megoldást keresi. Az  $\Omega_i$  tartományokat a rendszer automatikusan megjeleníti.



3.14. ábra. A három különböző csomóértékhármashoz tartozó alakmódosítás

A B-szplájn-görbéken folytatott vizsgálatok természetes módon kiterjeszthetők B-szplájn felületekre is (lásd [26], [29], [35]), ez azonban nem képezi a jelen dolgozat tárgyát.



3.15. ábra. Harmadfokú B-szplajn-görbe (fekete)  $s(\tilde{u})$  pontjának elmozdítása a  $\mathbf{p}$  pontba csomóértékek változtatásával (zöld) és kontrollpont eltolással (piros)

## 4. fejezet

# Kontrollponttal adott görbék szingularitása, konvexitása

A geometriai modellezés során gyakran van szükség a görbék szinguláris pontjainak (csúcs-, önmetszés-, nulla görbületű vagy eltűnő torziójú pontjainak) megtalálására, konvexitásuk eldöntésére. Harmadfokú paraméteres görbék esetére számos publikációt találhatunk ebben a témában, lásd pl. [72], [74], [71], [52], [46], [66]. Az [50] cikk ezt a problémát tetszőleges fokszámú polinomiális és racionális paraméteres görbékre vizsgálta, [47] pedig racionális görbékre, továbbá [53] a racionális Bézier-görbék szingularitásait tárgyalta.

Mi az előbbieken felsoroltakhoz képest a paraméteres görbék szélesebb osztályára vizsgáljuk a problémát. Ez az osztály a kontrollpontok bázisfüggvényekkel való kombinálásaként előállítható görbék – vagyis az (1.1) alakú – görbék osztálya, mely napjainkban a számítógéppel segített geometriai tervezésben a leggyakrabban használt görbeleírási mód, és valódi részhalmazként tartalmazza a fent idézett munkákban vizsgált görbéket. Ez lehet sík- vagy térgörbe, attól függően, hogy a  $\mathbf{d}_j$  kontrollpontok sík- vagy térbeli pontok. Az  $F_j(u)$  bázisfüggvényekre két megkorlátozás van: legyenek elegendően sokszor folytonosan differenciálhatóak és a teljes értelmezési tartományon legyen hatásuk a görbe alakjára, azaz legyenek globális tartójúak.

A vizsgálatunk lényege, hogy a tetszőlegesen kiválasztott  $\mathbf{d}_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  kontrollpont helyét változtatjuk, miközben a többi kontrollpontot rögzítjük, és keressük  $\mathbf{d}_i$  azon helyzetét, melyek az (1.1) görbén szingularitást eredményeznek, vagy biztosítják a görbe konvexitását. A következő szingularitásokat vizsgáljuk: csúcspont ( $\dot{\mathbf{g}}(u) = \mathbf{0}$ ), nulla görbületű pont, önmetszéspon és nulla torziójú pont. Az eredményeket a [36], [37] és [38] publikációk alapján ismertetjük.

## 4.1. Csúcspont

Feltételezzük, hogy a görbe legalább egyszer folytonosan differenciálható. A további vizsgálatokhoz az (1.1) görbe állandó és változó részeit szétválasztjuk és az így kapott

$$\mathbf{g}(u) = F_i(u) \mathbf{d}_i + \mathbf{r}_i(u), \quad \mathbf{r}_i(u) = \sum_{j=0, j \neq i}^n F_j(u) \mathbf{d}_j \quad (4.1)$$

alakot használjuk. Az (1.1) görbének abban a pontban van csúcspontja (kuszpidális pontja), ahol a deriváltja eltűnik. A (4.1) görbének a

$$\dot{\mathbf{g}}(u) = \dot{F}_i(u) \mathbf{d}_i + \dot{\mathbf{r}}_i(u), \quad \dot{\mathbf{r}}_i(u) = \sum_{j=0, j \neq i}^n \dot{F}_j(u) \mathbf{d}_j$$

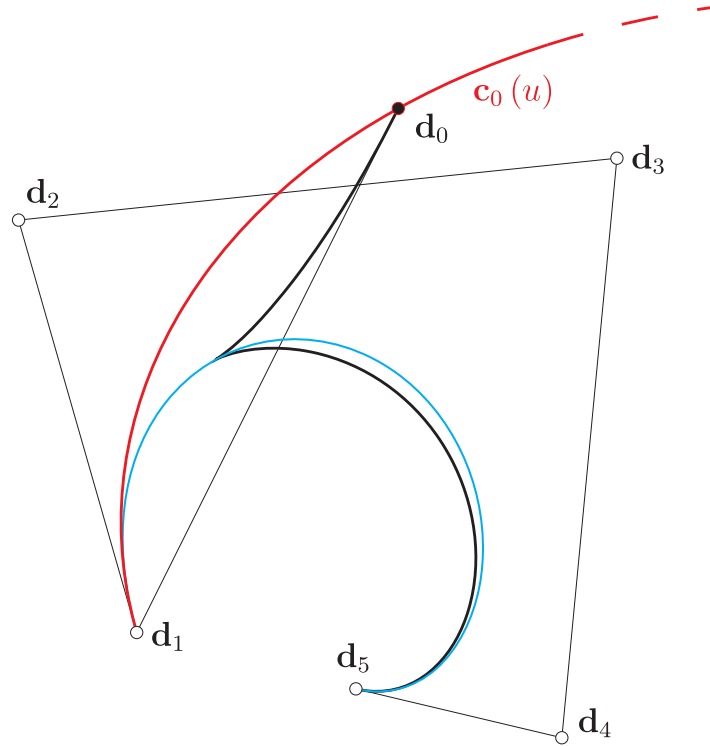
érintővektora pontosan akkor lesz nulla hosszúságú valamely  $\bar{u} \in [a, b]$  paraméterértékhez tartozó pontban, ha

$$\mathbf{d}_i = -\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u})}, \quad \dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0,$$

vagy  $\dot{F}_i(\bar{u}) = 0$  és az  $\dot{\mathbf{r}}_i(u)$ -ban szereplő kontrollpontok speciálisan helyezkednek el. Az utóbbi különleges esetet a 4.6. szakaszban külön tárgyaljuk, mindaddig azt feltételezzük, hogy  $\dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0$ , tehát az osztás elvégezhető. Miközben  $\bar{u}$  felveszi az összes lehetséges értékét, a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont a

$$\mathbf{c}_i(u) = -\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(u)}{\dot{F}_i(u)}, \quad u \in [a, b] \quad (4.2)$$

görbét írja le. Ezt a görbét az (1.1) görbe  $i$ -edik *diszkriminánsgörbéjének* nevezzük.



4.1. ábra. Ötödfokú Bézier-görbe (fekete),  $\mathbf{c}_0(u)$  diszkriminánsa (piros) és a csúcspontok által leírt görbe (kék)

Ezzel az eljárással nemcsak a csúcspont létezése mutatható ki, hanem annak pontos helyét is megkapjuk. A (4.1) egyenlőségben  $\mathbf{d}_i$ -t a (4.4) összefüggés jobb oldalával helyettesítve, a

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n \left( F_j(u) - \frac{\dot{F}_j(u)}{\dot{F}_i(u)} F_i(u) \right) \mathbf{d}_j. \quad (4.3)$$

görbét kapjuk. A (4.1) görbe csúcspontjai ezt a görbét írják le, miközben  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont a  $\mathbf{c}_i(u)$  görbén mozog. A 4.1. ábra ezt szemlélteti ötödfokú Bézier-görbével.

A kapott eredményt a következő tétel foglalja össze.

**4.1. Tétel** (Kritérium csúcspontra). *Az (1.1) görbe  $\mathbf{g}(\bar{u})$ ,  $\bar{u} \in [a, b]$  pontbeli deriváltja  $\dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0$  esetén akkor és csak akkor tűnik el, ha a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont a  $\mathbf{c}_i(u)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  diszkrimináns  $\mathbf{c}_i(\bar{u})$  pontján van.*

## 4.2. Eltűnő görbület

A (4.1) görbének a

$$\kappa(u) = \frac{|\dot{\mathbf{g}}(u) \times \ddot{\mathbf{g}}(u)|}{|\dot{\mathbf{g}}(u)|^3}$$

görbülete az  $\bar{u} \in [a, b]$  tetszőleges paraméterértékhez tartozó pontban pontosan akkor tűnik el, ha a következő feltételek valamelyike teljesül:  $\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$ , vagy  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , hogy  $\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \lambda \ddot{\mathbf{g}}(\bar{u})$ .

A  $\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$  feltételből (ebben az esetben a görbület nem értelmezhető) az következik, hogy

$$\mathbf{d}_i = -\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u})}, \dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0, \quad (4.4)$$

a  $\ddot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$  feltételből

$$\mathbf{d}_i = -\frac{\ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u})}, \ddot{F}_i(\bar{u}) \neq 0, \quad (4.5)$$

a  $\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \lambda \ddot{\mathbf{g}}(\bar{u})$  feltételből pedig

$$\dot{F}_i(\bar{u}) \mathbf{d}_i + \dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) = \lambda \left( \ddot{F}_i(\bar{u}) \mathbf{d}_i + \ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) \right).$$

Az utóbbi egyenlőségéből a

$$\mathbf{d}_i = \frac{\lambda \ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) - \dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u}) - \lambda \dot{F}_i(\bar{u})} \quad (4.6)$$

feltételt kapjuk a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontra. A (4.6) egyenlet egy  $\lambda$  paraméterű egyenes, amin a

$$\lambda = \frac{\dot{F}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u})} \left( \frac{t}{1+t} \right)$$

paramétertranszformációt végrehajtva a jobban kezelhető

$$\mathbf{d}_i = -\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u})} + t \left( \frac{\ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u})} - \frac{\dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u})} \right) \quad (4.7)$$

alakot nyerjük.

Ez az egyenes a (4.4) pontot a  $t = 0$ -nál, a (4.5) pontot pedig  $t = -1$  esetén tartalmazza. Ha a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont ezen az egyenesen mozog, miközben a többi kontrollpont rögzített, olyan egyparaméteres görbesereget kapunk, mely minden elemének eltűnik a görbülete a  $\mathbf{g}(\bar{u})$  pontban. Ezek a  $\mathbf{g}(\bar{u})$  pontok a

$$\mathbf{g}(\bar{u}, t) = \mathbf{c}_0(\bar{u}) F_i(\bar{u}) + \mathbf{r}_i(\bar{u}) + t \left( \frac{\ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u})} - \frac{\dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u})} \right) F_i(\bar{u})$$

egyenest írják le, mely tehát párhuzamos a (4.7) egyenessel.

Miközben  $\bar{u}$  felveszi az összes lehetséges értékét, a (4.7) egyenesek vonalfelületet írnak le. Ezen felület alkotóinak  $t = 0$ -hoz tartozó (4.4) pontjai a

$$\mathbf{c}_i(u) = -\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(u)}{\dot{F}_i(u)}$$

diszkriminánsgörbét írják le. ( $\mathbf{d}_i = \mathbf{c}_i(u)$  esetén az (1.1) görbének csúcspontja van.) A  $\mathbf{c}_i(u)$  görbe deriváltja

$$\dot{\mathbf{c}}_i(u) = \frac{\ddot{F}_i(u) \dot{\mathbf{r}}_i(u) - \dot{F}_i(u) \ddot{\mathbf{r}}_i(u)}{\left(\dot{F}_i(u)\right)^2},$$

érintő egyenese pedig

$$\mathbf{c}_i(u) + \alpha \dot{\mathbf{c}}_i(u)$$

alakban írható fel. Ez az egyenes a  $\mathbf{c}_i(u)$  pontot  $\alpha = 0$ -nál, a (4.5) pontot  $\alpha = \dot{F}_i(u) / \ddot{F}_i(u)$ -nál tartalmazza, ezért a (4.7) egyenes érintője a  $\mathbf{c}_i(u)$  görbének, következésképpen a fent definiált vonalfelület kifejezhető, mivel érintőfelület.

**4.2. Tétel** (Kritérium eltűnő görbületre). *Az (1.1) görbe  $\mathbf{g}(\bar{u})$ ,  $\bar{u} \in [a, b]$  pontbeli görbülete  $\dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0$  esetén akkor és csak akkor tűnik el, ha a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont a  $\mathbf{c}_i(u)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  diszkrimináns  $\mathbf{c}_i(\bar{u})$  pontbeli érintő egyenesén van, de nem esik egybe a  $\mathbf{c}_i(\bar{u})$  ponttal. A  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont azon helyzeteinek mértani helye, melyek az (1.1) görbén nulla görbületű pontot eredményeznek, a  $\mathbf{c}_i(u)$  diszkrimináns érintő felülete.*

### 4.3. Önmetszés pont

A  $\mathbf{g}(\bar{u})$ ,  $\bar{u} \in [a, b]$  pont az (1.1) görbének pontosan akkor önmetszés pontja, ha  $\exists \delta \in (0, b - \bar{u}]$ , amire

$$\mathbf{g}(\bar{u}) = \mathbf{g}(\bar{u} + \delta)$$

teljesül. A (4.1) egyenlőség felhasználásával

$$\mathbf{d}_i = -\frac{\mathbf{r}_i(\bar{u} + \delta) - \mathbf{r}_i(\bar{u})}{F_i(\bar{u} + \delta) - F_i(\bar{u})}.$$

Tehát a következő állítás igaz.

**4.3. Tétel** (Önmetszés pont). *A  $\mathbf{d}_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  kontrollpontok azon helyzeteinek mértani helye, melyek önmetszés pontot eredményeznek az (1.1) görbén, az*

$$\mathbf{l}_i(u, \delta) = -\frac{\mathbf{r}_i(u + \delta) - \mathbf{r}_i(u)}{F_i(u + \delta) - F_i(u)}, \quad u \in [a, b], \quad \delta \in (0, b - u]$$

*felület.*

Ez egy háromszög alakú felületfolt, melynek határgörbéi

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_i(a, \delta) &= -\frac{\mathbf{r}_i(a + \delta) - \mathbf{r}_i(a)}{F_i(a + \delta) - F_i(a)}, \quad \delta \in (0, b - a], \\ \mathbf{l}_i(u, b - u) &= -\frac{\mathbf{r}_i(b) - \mathbf{r}_i(u)}{F_i(b) - F_i(u)}, \quad u \in [a, b], \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{l}_i(u, \delta) &= \mathbf{c}_i(u), \quad u \in [a, b]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

## 4.4. Eltűnő torzió

A továbbiakban azt feltételezzük, hogy az  $F_j(u)$  bázisfüggvények legalább háromszor folytonosan differenciálhatóak. Az (1.1) görbe

$$\tau(u) = \frac{(\dot{\mathbf{g}}(u), \ddot{\mathbf{g}}(u), \dddot{\mathbf{g}}(u))}{|\dot{\mathbf{g}}(u) \times \ddot{\mathbf{g}}(u)|^2}$$

torziója pontosan akkor tűnik el valamely  $\bar{u} \in [a, b]$  paraméterértékhez tartozó pontban, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

1.  $\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$ ;
2.  $\ddot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$ ;
3.  $\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) \times \ddot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$ ;
4.  $\dddot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{0}$ ;
5. a  $\dot{\mathbf{g}}(\bar{u})$ ,  $\ddot{\mathbf{g}}(\bar{u})$  és  $\dddot{\mathbf{g}}(\bar{u})$  vektorok egy síkkal párhuzamosak (természetesen ez az eset tartalmazza az előzőeket is, de a fenti elkülönítés megkönnyíti a további magyarázatokat).

Az 1., 2. és 3. feltételekből az következik, hogy a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontnak a

$$\mathbf{c}_i(u) = -\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(u)}{\dot{F}_i(u)}, \dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0$$

diszkrimináns  $u = \bar{u}$  pontbeli érintőjére kell illeszkednie, ami alapján

$$\mathbf{d}_i = \frac{\lambda \ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) - \dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u}) - \lambda \ddot{F}_i(\bar{u})}, \lambda \in \mathbb{R}$$

(lásd a 4.1. és 4.2. szakaszokat).

A 4. feltétel következménye

$$\mathbf{d}_i = -\frac{\ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u})}.$$

Az 5. feltétel azt jelenti, hogy  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , amire

$$\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \alpha \ddot{\mathbf{g}}(\bar{u}) + \beta \dddot{\mathbf{g}}(\bar{u})$$

teljesül, amiből a

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i &= \frac{\alpha \ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) + \beta \ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) - \dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u}) - \alpha \ddot{F}_i(\bar{u}) - \beta \ddot{F}_i(\bar{u})} = \\ &= \frac{\dot{F}_i(\bar{u}) (\alpha \ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) + \beta \ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})) - \left( \alpha \ddot{F}_i(\bar{u}) + \beta \ddot{F}_i(\bar{u}) \right) \dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u}) \left( \dot{F}_i(\bar{u}) - \alpha \ddot{F}_i(\bar{u}) - \beta \ddot{F}_i(\bar{u}) \right)} - \frac{\dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\dot{F}_i(\bar{u})} \end{aligned} \quad (4.9)$$

feltételt kapjuk a vizsgált kontrollpontra. A (4.9) egy  $\alpha, \beta$  paraméterektől függő felület. Ez a felület az alábbi pontokat tartalmazza:

- $\mathbf{c}_i(\bar{u})$ , ha  $\alpha = \beta = 0$ ;
- $-\frac{\ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u})}$ , ha  $\alpha = 0, \beta \rightarrow \infty$  (ez a felület paraméterezésének szingularitása);
- $-\frac{\ddot{\mathbf{r}}_i(\bar{u})}{\ddot{F}_i(\bar{u})}$ , ha  $\beta = 0, \alpha \rightarrow \infty$  (ez szintén a felület paraméterezésének szingularitása).

Az is látható, hogy mind az  $\alpha$ , mind a  $\beta$  paramétervonalak egyenesek. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a (4.9) felület a  $\mathbf{c}_i(u)$  diszkriminánsgörbe  $\bar{u}$ -beli simulósíkja. (A rövidség kedvéért a következő formulákból az  $(\bar{u})$  argumentumot elhagyjuk.)

A fent említett simulósík párhuzamos a

$$\dot{\mathbf{c}}_i = \frac{\ddot{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{F}_i \ddot{\mathbf{r}}_i}{\dot{F}_i^2}$$

és

$$\ddot{\mathbf{c}}_i = \frac{(\dot{F}_i \ddot{F}_i - 2\dot{F}_i^2) \dot{\mathbf{r}}_i + 2\dot{F}_i \ddot{F}_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \dot{F}_i^2 \ddot{\mathbf{r}}_i}{\dot{F}_i^3},$$

vektorokkal, ezért a normálisa

$$\dot{\mathbf{c}}_i \times \ddot{\mathbf{c}}_i = \frac{(\dot{F}_i^2 \ddot{F}_i (\dot{\mathbf{r}}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i) - \dot{F}_i^2 \ddot{F}_i (\dot{\mathbf{r}}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i) + \dot{F}_i^3 (\ddot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i))}{(\dot{F}_i)^5}$$

alakban írható fel. Átalakítások segítségével (valamilyen komputeralgebra program használata sokat segít) megmutatható, hogy a fenti vektor és a

$$\mathbf{d}_i - \mathbf{c}_i = \frac{\dot{F}_i (\alpha \ddot{\mathbf{r}}_i + \beta \ddot{\mathbf{r}}_i) - (\alpha \ddot{F}_i + \beta \ddot{F}_i) \dot{\mathbf{r}}_i}{\dot{F}_i (\dot{F}_i - \alpha \ddot{F}_i - \beta \ddot{F}_i)}$$

vektor skaláris szorzata nulla  $\forall \alpha, \beta$ , azaz  $\mathbf{d}_i$  a simulósíkban van. Természetesen ez a simulósík tartalmazza a diszkrimináns  $\bar{u}$ -beli érintőjét is, így kielégíti az 1 – 5. feltételeket. Tehát a következő tételt bizonyítottuk be.

**4.4. Tétel** (Kritérium eltűnő torzióra). Az (1.1) görbe  $\mathbf{g}(\bar{u})$ ,  $\bar{u} \in [a, b]$  pontbeli torziója  $\dot{F}_i(\bar{u}) \neq 0$  esetén akkor és csak akkor tűnik el, ha a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont a  $\mathbf{c}_i(u)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  diszkrimináns  $\mathbf{c}_i(\bar{u})$  pontbeli simulósíkján van.

## 4.5. Konvexitás

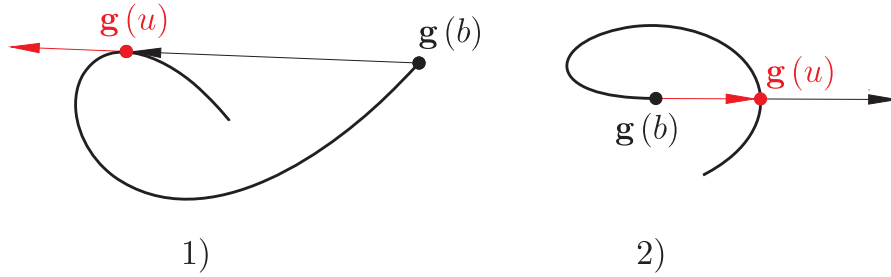
A továbbiakban az 1.3. definíció szerinti görbéket tekintjük konvexnek. Más megközelítésekkel is találkozhatunk.

- Egy síkgörbét konvexnek nevezünk, ha a görbe érintőinek ugyanazon az oldalán van (a különböző oldalakat a bejárás szerint tekintve).

- A göbe konvex, ha bármely hipersík legfeljebb két pontban metszi, vagy a teljes görbe a hipersíkban van (lásd [62], [20]). Ezért a konvex görbék síkgörbék (kétdimenziós síkban vannak). Ez a definíció megszorítóbb mint az általunk használt, mivel kizárja azokat a görbéket, amelyek egyenes szakaszt tartalmaznak.
- A [48] cikk irányított paraméteres görbék konvexitását vizsgálja. E szerint, az irányítástól függően ugyanaz a síkgörbe (alak) lehet konvex is és konkáv is.

Ismert, hogy amennyiben az (1.1) görbe rendelkezik a hullámzáscsökkentő tulajdonsággal, akkor a kontrollpoligon konvexitása maga után vonja a görbe konvexitását. Az állítás megfordítása azonban általában nem igaz.

Feltételezzük, hogy az (1.1) görbének nincs inflexiós pontja, csúcspontja és önmetszéspontja, azaz szingularitásmentes. Ilyen feltételek mellett a zárt görbék ( $\mathbf{g}(a) = \mathbf{g}(b)$ ) konvexek, a nyílt görbék azonban nem feltétlenül. A két lehetséges ellenpéldatípust mutatja a 4.2. ábra.



4.2. ábra. Szingularitásmentes nemkonvex nyílt görbék

#### 4.5.1. 1. eset

Az első eset azt jelenti, hogy

$$\dot{\mathbf{g}}(u) \times (\mathbf{g}(u) - \mathbf{g}(b)) = \mathbf{0},$$

azaz  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , amire

$$\lambda \dot{\mathbf{g}}(u) = \mathbf{g}(u) - \mathbf{g}(b)$$

teljesül. A (4.1) egyenlőséget behelyettesítve

$$\mathbf{d}_i = \frac{\mathbf{r}_i(u) - \lambda \dot{\mathbf{r}}_i(u) - \mathbf{r}_i(b)}{\lambda \dot{F}_i(u) + F_i(b) - F_i(u)},$$

ami egy  $\lambda$  paraméterű egyenes. Ennek az egyenesnek a  $\lambda = 0$  pontja

$$\frac{\mathbf{r}_i(u) - \mathbf{r}_i(b)}{F_i(b) - F_i(u)},$$

ami a (4.8) görbén van, és a  $\lambda \rightarrow \infty$  pontja (ami a paraméterezés szingularitása)

$$-\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(u)}{\dot{F}_i(u)}$$

a (4.2) diszkriminánusra illeszkedik. Az egyenes irányvektora

$$(\mathbf{r}_i(u) - \mathbf{r}_i(b)) \dot{F}_i(u) + \dot{\mathbf{r}}_i(u) (F_i(b) - F_i(u)),$$

vagyis ez az egyenes a (4.8) görbét annak  $u \in [a, b]$  pontjában érinti.

Tehát a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont azon helyzeteinek mértani helye, mely az 1. esetet eredményezi, a síknak a (4.8) görbe érintői által fedett tartománya.

### 4.5.2. 2. eset

A 2. eset jelentése

$$\dot{\mathbf{g}}(b) \times (\mathbf{g}(u) - \mathbf{g}(b)) = \mathbf{0},$$

azaz  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , amire

$$\lambda \dot{\mathbf{g}}(b) = \mathbf{g}(u) - \mathbf{g}(b)$$

teljesül. A (4.1) egyenlőség behelyettesítésével a

$$\mathbf{d}_i = \frac{\mathbf{r}_i(u) - \lambda \dot{\mathbf{r}}_i(b) - \mathbf{r}_i(b)}{\lambda \dot{F}_i(b) + F_i(b) - F_i(u)}$$

egyenlőséget kapjuk, ami egy  $\lambda$  paraméterű egyenes. Ennek  $\lambda = 0$  pontja

$$\frac{\mathbf{r}_i(u) - \mathbf{r}_i(b)}{F_i(b) - F_i(u)},$$

ami a (4.8) görbére illeszkedik, a  $\lambda \rightarrow \infty$ -hez tartozó

$$-\frac{\dot{\mathbf{r}}_i(b)}{\dot{F}_i(b)}$$

pontja pedig (ami a paraméterezés szingularitása) a (4.2) diszkriminánson van. Az egyenes irányvektora

$$\mathbf{q}_i(u) = (\mathbf{r}_i(u) - \mathbf{r}_i(b)) \dot{F}_i(b) + \dot{\mathbf{r}}_i(b) (F_i(b) - F_i(u)). \quad (4.10)$$

Tehát a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont azon helyzeteinek a mértani helye, mely a 2. esetet eredményezi, a (4.8) görbe pontjain áthaladó, a (4.10) iránnyal párhuzamos egyenesek által fedett síkrész.

### 4.5.3. Konvexitási vizsgálat

Nyilvánvaló, hogy amennyiben a görbének önmetszés pontja van, akkor az 1. és 2. esetek valamelyikének feltétele is teljesül. Következésképpen, az alábbi kérdésekre kell válaszolni a konvexitás eldöntése érdekében.

1. Van az (1.1) görbének csúcspontja vagy inflexiós pontja?

Ez a következőket foglalja magában:

- $\mathbf{d}_i$  a diszkriminánra illeszkedik? (csúcspont)
- lehet érintőt rajzolni a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontból a (4.2) diszkriminánshoz?

- ha a válasz igen: előjelet vált az (1.1) görbe görbülete a hozzá tartozó pont környezetében? (inflexiós pont)
2. Lehet érintőt húzni a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpontból a (4.8) görbéhez? (1. eset)
  3. Van olyan (4.10) iránnyal párhuzamos egyenes, mely áthalad a  $\mathbf{d}_i$  kontrollponton és metszi a (4.8) görbét? (2. eset)

Ha mindhárom kérdésre nemleges a válasz, akkor a görbe konvex, egyébként konkáv. A kérdésekhez tartozó egyenletek rendre

$$(\mathbf{d}_i - \mathbf{c}_i(u)) \times \dot{\mathbf{c}}_i(u) = \mathbf{0}, \quad u \in (a, b), \quad (4.11)$$

$$(\mathbf{d}_i - \mathbf{l}_i(u)) \times \dot{\mathbf{l}}_i(u) = \mathbf{0}, \quad u \in (a, b), \quad (4.12)$$

$$(\mathbf{d}_i - \mathbf{l}_i(u)) \times \mathbf{q}_i(u) = \mathbf{0}, \quad u \in (a, b). \quad (4.13)$$

Mivel a görbék síkbeliek, feltételezhetjük, hogy az  $x, y$  koordinátasíkban vannak, ezért a fenti vektoriális szorzatoknak csak a harmadik komponense lehet nullától különböző. A (4.11), (4.12), (4.13) egyenletek tehát skaláregyenletekké redukálhatók, vagyis egyváltozós függvények zérushelyeit kell keresnünk. Elegendő egyetlen zérushely a kérdés megválaszolására, nem kell mindet megkeresni.

Valójában a (4.12) és (4.13) esetekben nincs szükségünk magukra a zérushelyekre, csak a létezésüket kell megvizsgálni. Miután folytonos függvényekről van szó, elég a zérushelyeket behatárolni, azaz két olyan  $u$  értéket kell találni, melyhez tartozó függvényértékek különböző előjelűek.

Az inflexiós pont esetén azonban ki kell számítanunk magát a zérushelyet is, mivel a (4.11) egyenlőség csak a görbület eltűnését garantálja. Azt is meg kell néznünk, hogy a görbület előjelet vált-e a zérushelyhez tartozó pont környezetében.

Ez a konvexitás-vizsgálat működik zárt görbék esetén is, és az 1. ill. 2. eset feltételeinek teljesülését könnyebb vizsgálni, mint az önmetszéstartományra való illeszkedést.

Elvileg a görbe bármely kontrollpontja használható a konvexitás vizsgálatához, de legtöbb esetben  $\mathbf{d}_0$  bizonyul a legjobb választásnak, így pl. a végpontban interpoláló görbénél is. Könnyen belátható, hogy Bézier-görbe esetén  $\mathbf{q}_0$  független  $u$ -tól és a  $\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{n-1}$  iránnyal párhuzamos (lásd a 4.3. ábrát).

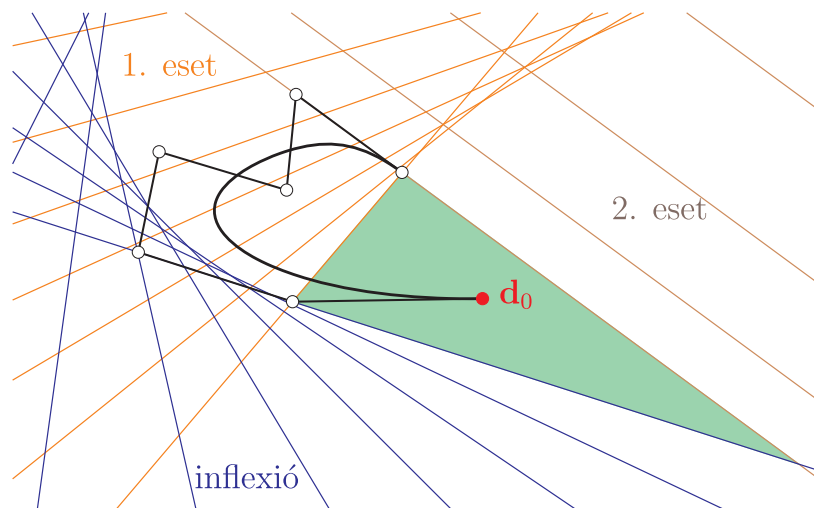
## 4.6. Speciális eset

Most azt a speciális esetet vizsgáljuk meg, amikor a mozgó kontrollpont együtt-hatófüggvényének deriváltja a vizsgált pontban eltűnik. Ha a  $\mathbf{d}_i$  ( $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ) kontrollpont együtthatójára  $\dot{F}_i(\bar{u}) = 0$  teljesül, akkor a (4.1) görbe  $\bar{u}$  pontbeli

$$\dot{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \dot{F}_i(\bar{u}) \mathbf{d}_i + \dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}), \quad \dot{\mathbf{r}}_i(\bar{u}) = \sum_{j=0, j \neq i}^n \dot{F}_j(\bar{u}) \mathbf{d}_j$$

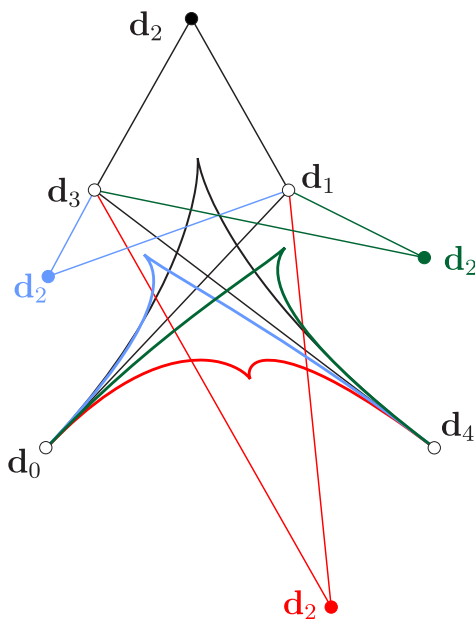
deriváltjának eltűnéséhez a

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n \dot{F}_j(\bar{u}) \mathbf{d}_j = \mathbf{0} \quad (4.14)$$



4.3. ábra. Konkáv kontrollpoligonú konvex Bézier-görbe; a görbe pontosan akkor konvex, ha a  $\mathbf{d}_0$  kontrollpont a zöld területen van

egyenlőségnek kell teljesülni. Ez azt jelenti, hogy  $\dot{F}_i(\bar{u}) = 0$  esetén, ha a (4.14) egyenlőség teljesül, akkor a  $\mathbf{g}(u)$  görbének az  $\bar{u}$  helyen a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont helyzetétől függetlenül mindig csúcspontja van. A diszkriminánsgörbe helyett tehát az egész síkot, ill. teret kapjuk mértani helyként.



4.4. ábra. A (4.15) feltételt kielégítő kontrollpontú negyedfokú Bézier-görbének az  $u = 0.5$  helyen a  $\mathbf{d}_2$  kontrollpont helyzetétől függetlenül mindig csúcspontja van

### 4.6.1. Bézier-görbe

Bézier-görbe esetén a bázisfüggvények a Bernstein-polinomok lesznek, melyek deriváltjára a

$$\dot{B}_i^n(u) = n(B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)), \quad u \in [0, 1]$$

rekurzió teljesül. Ennek zérushelye

$$\begin{aligned} &1, \text{ ha } i = 0; \\ &0, \text{ ha } i = n; \\ &\frac{i}{n}, \text{ ha } 0 < i < n. \end{aligned}$$

A görbe deriváltja

$$\dot{\mathbf{g}}(u) = n \left( B_{n-1}^{n-1}(u) \mathbf{d}_n - B_0^{n-1}(u) \mathbf{d}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (B_{j-1}^{n-1}(u) - B_j^{n-1}(u)) \mathbf{d}_j \right)$$

alakban írható fel.

Az  $i \neq 0, n$  kontrollpontokat célszerű vizsgálni, ugyanis a  $\dot{\mathbf{g}}(u) = 0$  megoldására  $i = 0$  esetben a jól ismert  $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1}$ ,  $i = n$  esetén pedig a  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_0$  feltételt kapjuk a kontrollpontokra. Vagyis  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_0$  esetén a kezdőpontban eltűnik a derivált az összes többi kontrollpont helyzetétől függetlenül, a végpontban pedig  $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1}$  esetén.

$n = 3, i = 2$  esetén (4.14) alapján a

$$\mathbf{d}_3 = \frac{1}{4} \mathbf{d}_0 + \frac{3}{4} \mathbf{d}_1$$

feltételt kapjuk.  $n = 4, i = 2$  esetén pedig a

$$2(\mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_1) = \mathbf{d}_0 - \mathbf{d}_4 \quad (4.15)$$

feltételt. Az utóbbi esetet illusztrálja a 4.4. ábra.

## 4.7. Normalizált bázisfüggvények

Ha az (1.1) görbe kombináló függvényeinek összege 1 (ami a leggyakrabban használt görbeleírásoknál teljesül), akkor további információkat is tudunk mondani a szingularitásokról.

**4.5. Tétel.** *Ha az (1.1) görbe a kontrollpontjainak baricentrikus kombinációja, akkor a  $\mathbf{c}_i(u)$  diszkrimináns a  $\{\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n\} \setminus \{\mathbf{d}_i\}$  kontrollpontok baricentrikus kombinációja.*

**Bizonyítás.** Ha az (1.1) görbe a kontrollpontjainak baricentrikus kombinációja, azaz

$$\sum_{l=0}^n F_l(u) = 1,$$

akkor

$$\dot{F}_i(u) = - \sum_{l=0, l \neq i}^n \dot{F}_l(u),$$

ami miatt a  $\mathbf{c}_i(u)$  diszkrimináns

$$\mathbf{c}_i(u) = -\frac{\sum_{j=0, j \neq i}^n \dot{F}_j(u) \mathbf{d}_j}{\dot{F}_i(u)} = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{\dot{F}_j(u)}{\sum_{l=0, l \neq i}^n \dot{F}_l(u)} \mathbf{d}_j$$

alakban írható fel tetszőleges  $i$  esetén.  $\square$

**4.1. Következmény.** *Ha a kombináló függvények normalizáltak, akkor  $n = 3$  esetén a diszkrimináns mindig síkgörbe és az önmetszés pontok felülete síktartománnyá degenerálódik, tehát  $n = 3$  esetén csak síkbeli (1.1) görbének lehet csúcspontja, önmetszés pontja vagy nulla görbületű pontja.*

**4.2. Következmény.** *Ha a kombináló függvények normalizáltak, akkor  $n = 3$  esetén a torzió vagy a görbe minden pontjában eltűnik, vagy sehol sem.*

## 4.8. Alkalmazás

A  $\mathbf{c}_i$  diszkrimináns a  $\mathbf{g}$  görbe szingularitásainak teljes jellemzését lehetővé teszi. A diszkrimináns görbe és a segítségével létrehozott felületek a tervezők számára segítséget nyújtanak a nem kívánt szingularitások elkerülésében, illetve a kívánt szingularitások biztosításában, valamint a görbék vizsgálatában. Mindegyik esetben a  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont és görbe, vagy kontrollpont és paraméteres alakban adott felület kölcsönös helyzetét kell megvizsgálni. Ha az illeszkedésüket vizsgáljuk, akkor ez a görbékre, ill. felületekre vonatkozó pontinverzió problémájának megoldását jelenti (Piegl, Tiller [58]). Ha csak a közelségük érdekel bennünket, akkor az ún. pontvetület (Piegl, Tiller [58]) vagy talppont probléma (Anderson et al. [1]). Ezek a görbék, ill. felületek könnyen megjeleníthetők, ezért a tervező számára vizuális segítséget jelentenek.

Az (1.1) görbének  $n + 1$  különböző diszkriminánsa van. Bármely  $\mathbf{d}_i$  kontrollpont és a hozzá tartozó diszkrimináns felhasználható a szingularitás vizsgálatára, azonban, mint ahogy a következő szakaszokban látni fogjuk,  $i$  alkalmas megválasztása nagymértékben egyszerűsítheti a feladatot. A problémát az okozza, hogy a diszkriminánsoknak általában több végtelen távoli pontjuk van, azaz a diszkrimináns görbék általában több ágból állnak.

### 4.8.1. Bézier-görbék szingularitásai

Feltételezve, hogy a kombináló függvények Bernstein-polinomok, további eredményeket kapunk. A Bézier-görbék diszkrimináns görbéi általában racionális görbék. Azonban tetszőleges fokszámú Bézier-görbe  $\mathbf{c}_0(u)$  és  $\mathbf{c}_n(u)$  diszkriminánsa mindig polinomiális görbe. Ezt a  $\mathbf{c}_0(u)$  diszkriminánsra mutatjuk meg,  $\mathbf{c}_n(u)$ -re a bizonyítás ezzel analóg.

A Bézier-görbénk

$$\mathbf{g}(u) = B_0^n(u) \mathbf{d}_0 + \sum_{j=1}^n B_j^n(u) \mathbf{d}_j, \quad u \in [0, 1]$$

alakban írható fel, ahol  $B_j^n(u)$  a  $j$ -edik  $n$ -edfokú Bernstein-polinomot jelöli, tehát

$$B_j^n(u) = \begin{cases} \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j}, & \text{ha } 0 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Felhasználva, hogy  $B_0^n(u)$  deriváltjára  $\dot{B}_0^n(u) = -nB_0^{n-1}(u)$  teljesül és

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0(u) &= n(B_0^{n-1}(u) - B_1^{n-1}(u))\mathbf{d}_1 + n(B_1^{n-1}(u) - B_2^{n-1}(u))\mathbf{d}_2 + \dots + nB_{n-1}^{n-1}(u)\mathbf{d}_n = \\ &= n\left(B_0^{n-1}(u)\mathbf{d}_1 + \sum_{j=1}^{n-1} B_j^{n-1}(u)(\mathbf{d}_{j+1} - \mathbf{d}_j)\right),\end{aligned}$$

a  $\mathbf{c}_0(u)$  diszkrimináns

$$\mathbf{c}_0(u) = \frac{-\dot{\mathbf{r}}_0(u)}{\dot{B}_0^n(u)} = \mathbf{d}_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_j^{n-1}(u)}{B_0^{n-1}(u)}(\mathbf{d}_{j+1} - \mathbf{d}_j). \quad (4.16)$$

alakú lesz. A

$$\begin{aligned}\frac{B_i^{n-1}(u)}{B_0^{n-1}(u)} &= \binom{n-1}{i} \frac{u^i(1-u)^{n-1-i}}{(1-u)^{n-1}} = \binom{n-1}{i} \left(\frac{u}{1-u}\right)^i \\ i &= 1, 2, \dots, n-1\end{aligned}$$

azonosság segítségével a (4.16) kifejezés

$$\mathbf{c}_0(u) = \mathbf{d}_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{u}{1-u}\right)^j (\mathbf{d}_{j+1} - \mathbf{d}_j)$$

alakra hozható. Ebből a

$$t = \frac{u}{1-u}, \quad t \in [0, \infty), \quad u \neq 1 \quad (4.17)$$

paramétertranszformációval a diszkrimináns hatványbázisban felírt

$$\mathbf{c}_0(t) = \mathbf{d}_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j (\mathbf{d}_{j+1} - \mathbf{d}_j)$$

alakját kapjuk.

A következőkben az önmetszést eredményező pozíciók

$$\mathbf{l}_0(u, \delta) = -\frac{\sum_{j=1}^n (B_j^n(u+\delta) - B_j^n(u))\mathbf{d}_j}{B_0^n(u+\delta) - B_0^n(u)}$$

felületét vizsgáljuk. A  $\delta = 1 - u$  értékhez tartozó határgörbének a (4.17) paramétertranszformáció után a hatványbázisban felírt alakja

$$\mathbf{d}_n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} t^j (\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_j), \quad t \in [0, \infty). \quad (4.18)$$

Az  $u = 0$  határgörbe

$$\mathbf{l}_0(0, \delta) = \sum_{j=1}^n \frac{B_j^n(\delta)}{1 - B_0^n(\delta)} \mathbf{d}_j.$$

$n = 3$  esetén a Bézier-görbe  $\mathbf{c}_0(u)$  diszkriminánsgörbéjére és az önmetszések felületének határgörbéire a következőket kapjuk.

$\mathbf{c}_0(u)$  olyan parabolaív, mely kezdőpontja  $\mathbf{d}_1$  és ebben az érintő iránya  $\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$ .  $\mathbf{c}_3(u)$  szintén parabolaív, míg  $\mathbf{c}_1(u)$  és  $\mathbf{c}_2(u)$  hiperbolaívek.

Az  $\mathbf{l}_0(u, \delta)$  önmetszéspontok határgörbéi a következők.

A  $\delta = 1 - u$  határgörbe a  $\mathbf{d}_3$  kontrollpontból induló parabolaív, lásd a (4.18) kifejezést. Az  $u = 0$  határgörbe

$$\mathbf{l}_0(0, \delta) = \sum_{j=1}^3 \frac{\binom{3}{j} \delta^j (1-\delta)^{3-j}}{1 - (1-\delta)^3} \mathbf{d}_j = \frac{\sum_{j=0}^2 B_j^2(\delta) w_j \mathbf{d}_{j+1}}{\sum_{k=0}^2 B_k^2(\delta) w_k},$$

racionalis Bézier-görbe alakban írható fel, ahol a súlyok  $w_0 = 3, w_1 = 3/2$  és  $w_2 = 1$ . Ezekre a  $\hat{w}_j = c^j w_j$ ,  $c = \sqrt{3}$  projektív paramétertranszformációt alkalmazva megkapjuk a másodfokú racionalis Bézier-görbe standard alakját a  $\hat{w}_0 = \hat{w}_2 = 1$  és  $\hat{w}_1 = \sqrt{3}/2$  súlyokkal. Ez a görbe tehát olyan ellipszisív, mely végpontjai  $\mathbf{d}_1$  és  $\mathbf{d}_3$ .

A 4.1. és 4.2. következményeknek megfelelően az  $\mathbf{l}_0(u, \delta)$  önmetszéspontok felülete a  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  és  $\mathbf{d}_3$  kontrollpontok által kifeszített síkbeli tartománnyá degenerálódik, csakúgy mint a diszkrimináns érintőfelülete. Tehát csak síkbeli harmadfokú Bézier-görbéknek lehet csúcspontja, önmetszéspontja vagy nulla görbületű pontja, valamint harmadfokú Bézier-térgörbe egyetlen pontjában sem tűnhet el a torzió. Ezek összhangban vannak Stone és de Rose [71] más úton kapott eredményeivel.

#### 4.8.2. Ciklikus görbe diszkriminánsa

A (2.15) ciklikus görbe  $i$ -edik diszkriminánsgörbéje

$$\mathbf{c}_i(u) = -\frac{\sum_{j=0, j \neq i}^{2n} \dot{C}_{j,n}(u) \mathbf{d}_j}{\dot{C}_{i,n}(u)}.$$

Mivel

$$\dot{C}_{j,n}(u) = -\frac{nc_n}{2^n} (1 + \cos(u - j\lambda_n))^{n-1} \sin(u - j\lambda_n),$$

a diszkrimináns

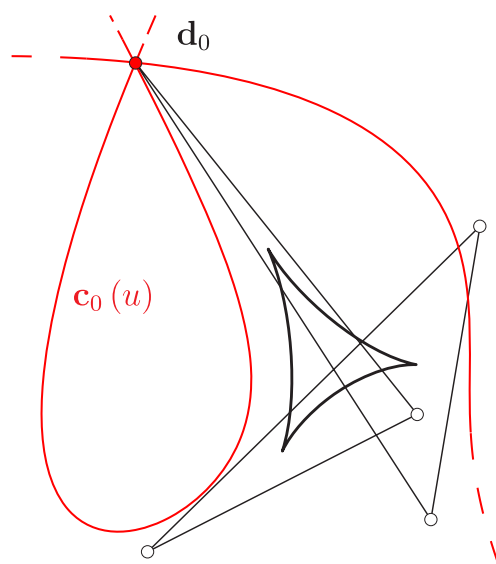
$$\mathbf{c}_i(u) = -\frac{\sum_{j=0, j \neq i}^{2n} (1 + \cos(u - j\lambda_n))^{n-1} \sin(u - j\lambda_n) \mathbf{d}_j}{(1 + \cos(u - i\lambda_n))^{n-1} \sin(u - i\lambda_n)}$$

alakban írható fel. Ennek a nevezője az  $u = i\lambda_n$  és  $u = \pi + i\lambda_n$  helyeken tűnik el, ezért a diszkriminánsgörbének két végtelen távoli pontja van, vagyis a görbe két ágból áll.

A diszkriminánsgörbe  $i = 0$  esetén

$$\mathbf{c}_0(u) = -\frac{\sum_{j=1}^{2n} (1 + \cos(u - j\lambda_n))^{n-1} \sin(u - j\lambda_n) \mathbf{d}_j}{(1 + \cos(u))^{n-1} \sin(u)}.$$

A 4.5. ábrán olyan másodrendű ciklikus görbét láthatunk, melynek három csúcspontja van.



4.5. ábra. Három csúcsponntal rendelkező másodrendű ciklikus görbe (fekete) és  $\mathbf{c}_0$  diszkriminánsa (piros)



## 5. fejezet

# Összefoglalás

A számítógéppel segített geometriai tervezésben a görbéket leggyakrabban

$$\mathbf{g}(u) = \sum_{j=0}^n F_j(u) \mathbf{d}_j$$

$$F_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2$$

alakban írjuk le, ahol a  $\mathbf{d}_j$  pontokat kontrollpontnak, az  $F_j(u)$  függvényeket pedig kombináló függvénynek (ha lineárisan függetlenek, akkor bázisfüggvénynek) nevezzük. Dolgozatunkban ennek a görbemodellezésnek néhány kérdésével foglalkoztunk. Az eredmények az alábbi három fő területre terjedtek ki.

### 5.1. Ciklikus görbék

A legfeljebb  $n$ -edrendű ( $2n$ -edfokú) trigonometrikus polinomok

$$\mathcal{V}_n = \langle V_n \rangle = \langle 1, \cos(u), \sin(u), \dots, \cos(nu), \sin(nu) : u \in [0, 2\pi] \rangle, \quad 0 < n \in \mathbb{N}$$

terében a

$$C_n = \left\{ C_{i,n}(u) := \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u - i\lambda_n))^n \right\}_{i=0}^{2n}, \quad c_n = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}}, \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{2n+1}$$

ciklikus bázist definiáltuk, amely zárt görbék leírására alkalmas az

$$\mathbf{a}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} C_{i,n}(u) \mathbf{d}_i, \quad u \in [0, 2\pi], \quad n \geq 1$$

alakú ciklikus görbékkel.

### 1. Tézis (Ciklikus görbék).

- A ciklikus függvényrendszer lineárisan független (tehát a legfeljebb  $2n$ -edfokú trigonometrikus polinomok terének bázisa), a függvények nemnegatívak, egységfelbontást és Descartes-féle rendszert alkotnak (de nem totálisan pozitívak), továbbá egzakt formula létezik a  $V_n$  és  $C_n$  bázisok közötti transzformációra.
- A ciklikus görbék globálisan változtathatók, szingularitásmentes paraméterezésű  $C^\infty$ -osztályú zárt görbék leírására alkalmasak redundáns kontrollpontok megadása nélkül, deriválásra nézve zártak, hullámzáscsökkentő tulajdonságúak, konvexitás-megőrzők, egzakt formula létezik a fokszámnövelésükre, a fokszámnövelt görbe kontrollpoligonja a görbéhez konvergál, zárt trigonometrikus görbék széles osztályának biztosít egzakt kontrollpont-alapú leírást (mely magában foglal olyan nevezetes görbét is, mint az ellipszis, zárt epi- és hipociklois, Lissajous-görbe, tóruszcsomó, fólium).
- Eljárást adtunk racionális trigonometrikus görbék egy osztályának kontrollpont-alapú leírására, melyhez olyan nevezetes görbék is tartoznak, mint a Bernoulli-féle lemniszkáta és a Zsukovszkij-féle szárnyprofil.

Kapcsolódó publikációk: [64], [63] és [45].

## 5.2. NURBS görbék alakmódosítása

A NURBS (racionális B-szplájn) görbéket kontrollpontjai, súlyai, csomóértékei és fokszáma határozzák meg. Ha ezek közül bármelyiket megváltoztatjuk, a görbe alakja is megváltozik. Célunk a fellépő alakváltozások vizsgálata és adott geometriai feltételeket teljesítő alakmódosítási eljárások kidolgozása volt.

## 2. Tézis (B-szplájn-görbék alakmódosítása).

- A zárt racionális B-szplájn-görbék rendjének növelésével kapott görbék sorozata a kontrollpontok súlyozott számtani közepéhez tart.
- Olyan alakmódosítási eljárást adtunk meg, amellyel a NURBS görbe alakját úgy módosíthatjuk több súly egyidejű változtatásával, hogy a görbe kiválasztott pontja egy adott pontba kerüljön. Ez egyparaméteres görbesereget eredményez, mely seregparaméter további (pl. érintési) feltétel kielégítését teszi lehetővé.
- A  $k$ -adrendű B-szplájn-görbe  $m$  multiplicitású  $u_i$  csomóértékének változtatásakor kapott görbesereg burkolója az a  $(k - m)$ -edrendű B-szplájn-görbe, mely kontrollpontjai megegyeznek az eredeti görbe kontrollpontjaival, csomóértékeit pedig úgy kapjuk meg, hogy az eredeti csomóértékek közül kihagyjuk a változtatottat. Harmadfokú B-szplájn-görbékre több csomóérték együttes változtatásával kényszeres (illeszkedési, érintési) alakmódosítási eljárást adtunk meg, kihasználva, hogy a probléma a burkológörbe segítségével parabolával kapcsolatos másodfokú feladatra vezethető vissza.

Kapcsolódó publikációk: [40], [34], [25], [41], [42], [27], [43], [44], [28].

## 5.3. Szingularitásvizsgálat

Új módszert adtunk a kontrollpontok és bázisfüggvények kombinációjával adott globálisan változtatható görbék szingularitásainak (csúcs-, önmetszés-, eltűnő görbületű és torziójú pontjainak) és konvexitásának meghatározására. A módszer lényege, hogy a tetszőlegesen kiválasztott kontrollpont helyét változtatjuk, miközben a többi rögzítjük, és keressük a kiválasztott kontrollpont azon helyezeteit, melyek görbén szingularitást eredményeznek, ill. biztosítják a konvexitást.

## 3. Tézis (Szingularitás, konvexitás).

Kontrollpontok és bázisfüggvények kombinációjaként előállított globálisan változtatható görbék szingularitásának vizsgálatához definiáltuk a diszkriminánsgörbét, ami lehetőséget ad arra, hogy tetszőlegesen kiválasztott kontrollpont helyzete alapján eldöntsük, hogy van-e szingularitása (csúcs-, önmetszés-, eltűnő görbületű, nulla torziójú pontja) a görbének, továbbá a szingularitás pontos helyét is megkapjuk. A módszer segítségével a görbék globális konvexitása is eldönthető.

Kapcsolódó publikációk: [36], [37], [38].



# Hivatkozások

- [1] Anderson, I. J., Cox, M. G., Forbes, A. B., Mason, J. C., Turner, D. A. „An Efficient and Robust Algorithm for Solving the Foot Point Problem,” *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II.: Lillehammer, 1997*, edited by Daehlen, M., Lyche, T., Schumaker, L. L.. Vanderbilt University Press. Nashville, 1998. pp. 1–8.
- [2] Au, C. K., Yuen, M. F. „Unified approach to NURBS curve shape modification”, *Computer-Aided Design*, (1995), **27** (2), pp. 85–93.
- [3] Bézier, P. „Definition numérique des courbes et surfaces I.”, *Automatisme*, (1966), **11** , pp. 625–632.
- [4] Bézier, P. *Numerical Control*. John Wiley. London - New York, 1972.
- [5] Bézier, P. *The Mathematical Basis of the UNISURF CAD System*. Butterworths. London, 1986.
- [6] Böhm, W. „Inserting new knots into B-spline curves”, *Computer-Aided Design*, (1980), **12** (4), pp. 199–201.
- [7] Brechera, C., Langea, S., Merza, M., Niehaus, F., Wenzela, C., Winterschladena, M., Weck, M. „NURBS Based Ultra-Precision Free-Form Machining”, *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, (2006), **55** (1), pp. 547–550.
- [8] Butterfield, K. R. „The computation of all the derivatives of a B-spline basis”, *Journal of Applied Mathematics*, (1976), **17** (1), pp. 15–25.
- [9] Carnicer, J. M. „Interpolation, shape control and shape properties,” *Shape preserving representations in Computer-Aided Geometric Design*, edited by Peña, J. M. P.. Nova Science Publishers Inc. 1999. pp. 15–44.
- [10] Carnicer, J. M., Peña, J. M. „Shape preserving representations and optimality of the Bernstein basis”, *Advances in Computational Mathematics*, (1993), **1** (2), pp. 173–196.
- [11] Carnicer, J. M., Peña, J. M. „Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of B-splines”, *Computer Aided Geometric Design*, (1994), **11** (6), pp. 635–656.
- [12] Carnicer, J. M., Peña, J. M. „Total positivity and optimal bases,” *Total Positivity and its Applications*,. Kluwer Academic. Dordrecht, 1996. pp. 133–155.

- [13] Casteljaud de, P. *Outils méthodes calcul*. Technical Report, Paris: André Citroën Automobiles S. A., 1959.
- [14] Chen, Q., Wang, G. „A class of Bézier-like curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (2003), **20** (1), pp. 29–39.
- [15] Coons, S. *Surfaces for computer aided design*. Technical report, 1964.
- [16] Coons, S. *Rational cubic surface patches*. Technical report, Project MAC, 1968.
- [17] Farin, G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*. Academic Press. 1988.
- [18] Farin, G. „Rational curves and surfaces,” *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, edited by Lyche, T. Schumaker, L. L.. Academic Press. Boston, 1989. pp. 195–206.
- [19] Farin, G. *NURB curves and surfaces: from projective geometry to practical use*. A K Peters. Wellesley, Massachusetts, 1995.
- [20] Farin, G. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide* (4 Edition). Academic Press. San Diego, 1999.
- [21] Farin, G., Hoschek, J., (eds), M.-S. K. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier. Amsterdam, 2002.
- [22] Forrest, A. *Curves and surfaces for computer-aided design*. Ph.D. thesis, Cambridge, 1968.
- [23] Ge, Q. J., Srinivasan, L., Rastegar, J. „Low-harmonic rational Bézier curves for trajectory generation of high-speed machinery”, *Computer Aided Geometric Design*, (1997), **14** (3), pp. 251–271.
- [24] Goodman, T. N. T. „Shape preserving representations,” *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, edited by Lyche, T. Schumaker, L. L.. Academic Press. Boston, 1989. pp. 333–357.
- [25] Hoffmann, M., Juhász, I. „Shape Control of Cubic B-spline and NURBS Curves by Knot Modifications,” *Proceedings of the Fifth International Conference on Information Visualisation*, edited by Banissi, E., Khosrowshahi, F., Sarfraz, M., Ursyn, A.. IEEE CS Press. 2001. pp. 63–68.
- [26] Hoffmann, M., Juhász, I. „Geometric aspects of knot modification of B-spline surfaces”, *Journal for Geometry and Graphics*, (2002), **6** (2), pp. 141–149.
- [27] Hoffmann, M., Juhász, I. „On the paths of B-spline curves obtained by the modification of a knot”, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, (2004), **65** (1-2), pp. 193–203.
- [28] Hoffmann, M., Juhász, I. „Symmetric alteration of two knots of B-spline curves”, *Journal for Geometry and Graphics*, (2005), **9** (1), pp. 43–49.

- [29] Hoffmann, M., Juhász, I. „Constrained shape control of bicubic B-spline surfaces by knots,” *Proceedings of International Conference on Geometric Modelling and Imaging*, edited by Sarfraz, M. Banissi, E.. IEEE CS Press. 2006. pp. 41–46.
- [30] Hong, H., Schicho, J. „Algorithms for Trigonometric Curves (Simplification, Implicitization, Parameterization)”, *Journal of Symbolic Computation*, (1998), **26** (3), pp. 279–300.
- [31] Hoschek, J., Lasser, D. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A. K. Peters. Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [32] Huang, Y., Wang, G. „An orthogonal basis for the hyperbolic hybrid polynomial space”, *Science in China Series F: Information Sciences*, (2007), **50** (1), pp. 21–28.
- [33] Juhász, I. „Weight-based shape modification of NURBS curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (1999), **16** (5), pp. 377–383.
- [34] Juhász, I. „A shape modification of B-spline curves by symmetric translation of two knots”, *Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae*, (2001), **28** , pp. 69–77.
- [35] Juhász, I. „On the family of B-spline surfaces obtained by knot modification”, *Mathematical Communications*, (2006), **11** (1), pp. 9–16.
- [36] Juhász, I. „On the singularity of a class of parametric curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (2006), **23** (2), pp. 146–156.
- [37] Juhász, I. „Vanishing torsion of parametric curves”, *Journal of Zhejiang University (Science A)*, (2007), **8** (4), pp. 593–595.
- [38] Juhász, I. „A convexity test for control point based curves”, *Annales Mathematicae et Informaticae*, (2011), **38** , pp. 37–44.
- [39] Juhász, I., Bancsik, Zs. „Increasing the degree of closed B-spline curves”, *Mathematical and Computer Modelling*, (2003), **38** (7–9), pp. 877–882.
- [40] Juhász, I., Hoffmann, M. „The effect of knot modifications on the shape of B-spline curves”, *Journal for Geometry and Graphics*, (2001), **5** (2), pp. 111–119.
- [41] Juhász, I., Hoffmann, M. „Knot modification of B-spline curves,” *I. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia*, edited by Szirmay-Kalos, L. Renner, G.. IEEE CS Press. 2002. pp. 38–43.
- [42] Juhász, I., Hoffmann, M. „Modifying a knot of B-spline curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (2003), **20** (5), pp. 243–245.
- [43] Juhász, I., Hoffmann, M. „Constrained shape modification of cubic B-spline curves by means of knots”, *Computer-Aided Design*, (2004), **36** (5), pp. 437–445.

- [44] Juhász, I., Hoffmann, M. „Modifying the Shape of Cubic B-spline and NURBS Curves by Means of Knots,” *Advances in Geometric Modeling* edited by Sarfraz, M., chapter 22, pp. 299–313. John Wiley & Sons, 2004.
- [45] Juhász, I., Róth, Á. „Closed rational trigonometric curves and surfaces”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (2010), **234** (8), pp. 2390–2404. doi: 10.1016/j.cam.2010.03.009.
- [46] Kim, D. K. „Hodograph approach to geometric characterization of parametric cubic curves”, *Computer-Aided Design*, (1993), **25** (10), pp. 644–654.
- [47] Li, Y. M., Cripps, R. J. „Identification of inflection points and cusps on rational curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (1997), **14** (5), pp. 491–497.
- [48] Liu, C., Traas, C. R. „On convexity of planar curves and its application in CAGD”, *Computer Aided Geometric Design*, (1997), **14** (7), pp. 653–669.
- [49] Lü, Y., Wang, G., Yang, X. „Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (2002), **19** (6), pp. 379–393.
- [50] Manocha, D., Canny, J. F. „Detecting cusps and inflection points in curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (1992), **9** (1), pp. 1–24.
- [51] Mazure, M. L. „Chebyshev–Bernstein bases”, *Computer Aided Geometric Design*, (1999), **16** (7), pp. 649–669.
- [52] Meek, D. S., Walton, D. J. „Shape determination of planar uniform cubic B-spline segments”, *Computer-Aided Design*, (1990), **22** (7), pp. 434–441.
- [53] Monterde, J. „Singularities of rational Bézier curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (2001), **18** (8), pp. 805–816.
- [54] Patowa, G., Pueyoa, X., Vinacuab, A. „User-guided inverse reflector design”, *Computers & Graphics*, (2007), **31** (3), pp. 501–515.
- [55] Peña, J. M. „Shape preserving representations for trigonometric polynomial curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (1997), **14** (1), pp. 5–11.
- [56] Piegl, L. „Modifying the shape of rational B-splines. Part 1: curves”, *Computer-Aided Design*, (1989), **21** (8), pp. 509–518.
- [57] Piegl, L. „On NURBS: A survey”, *IEEE Computers Graphics and Applications*, (1991), **11** (1), pp. 55–71.
- [58] Piegl, L., Tiller, W. *The NURBS Book*. Springer-Verlag. 1995.
- [59] Pólya, G. Schoenberg, I. J. „Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle”, *Pacific Journal of Mathematics*, (1958), **8** (2), pp. 295–334.
- [60] Pottmann, H. „On the geometry of higher planet motion (in german)”, *Monatshefte für Mathematik*, (1984), **97** , pp. 141–156.

- [61] Pottmann, H., Wagner, M. G. „Helix splines as an example of affine Tchebycheffian splines”, *Adv. Comput. Math.*, (1994), **2**, pp. 123–142.
- [62] Prautzsch, H., Boehm, W., Paluszny, M. *Bézier and B-spline Techniques*. Springer. Berlin, 2002.
- [63] Róth, Á., Juhász, I. „Control point based exact description of a class of closed curves and surfaces”, *Computer Aided Geometric Design*, (2010), **27** (2), pp. 179–201. 10.1016/j.cagd.2009.11.005.
- [64] Róth, Á., Juhász, I., Schicho, J., Hoffmann, M. „A cyclic basis for closed curve and surface modeling”, *Computer Aided Geometric Design*, (2009), **25** (5), pp. 528–546. doi:10.1016/j.cagd.2009.02.002.
- [65] Rózsa, P. *Lineáris algebra és alkalmazásai*. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1974.
- [66] Sakai, M. „Inflection points and singularities on planar rational cubic curve segments”, *Computer Aided Geometric Design*, (1999), **13** (3), pp. 149–156.
- [67] Sánchez-Reyes, J. „A simple technique for NURBS shape modification”, *IEEE Computer Graphics and Applications*, (1997), **17** (1), pp. 52–59.
- [68] Sánchez-Reyes, J. „Harmonic rational Bézier curves, p-Bézier curves and trigonometric polynomials”, *Computer Aided Geometric Design*, (1998), **15** (9), pp. 909–923.
- [69] Schuster, W. „A closed algebraic interpolation curve”, *Computer Aided Geometric Design*, (2000), **17** (7), pp. 631–642.
- [70] Smith, G. H. *Practical Computer-Aided Lens Design*. Willmann-Bell. 1998.
- [71] Stone, M. C., Rose de, T. D. „A geometric characterization of parametric cubic curves”, *ACM Transactions on Graphics*, (1989), **8** (3), pp. 147–163.
- [72] Su, B. Liu, D. „An affine invariant and its application in computational geometry”, *Scientia Sinica (series A)*, (1983), **24** (3), pp. 259–267.
- [73] Versprille, K. J. *Computer aided design applications of the rational B-spline approximation form*. Ph.D. thesis, Syracuse University, 1975.
- [74] Wang, C. Y. „Shape classification of the parametric cubic curve and parametric B-spline cubic curve”, *Computer-Aided Design*, (1981), **13** (4), pp. 199–206.
- [75] Wang, G., Chen, Q. „NUAT B-spline curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (2004), **21** (2), pp. 193–205.
- [76] Wang, G., Li, Y. „Optimal properties of the uniform algebraic trigonometric B-splines”, *Computer Aided Geometric Design*, (2006), **23** (2), pp. 226–238.
- [77] Wunderlich, W. „Higher cycloid curves”, *Österr. Ing. Arch.*, (1947), **1**, pp. 277–296.

- [78] Wunderlich, W. „Approximation with higher cycloid curves”, *Österr. Ing. Arch.*, (1950), **4** , pp. 3–11.
- [79] Zhang, J. „C-curves: An extension of cubic curves”, *Computer Aided Geometric Design*, (1996), **13** (3), pp. 199–217.
- [80] Zhang, J. „Two different forms of C-B-splines”, *Computer Aided Geometric Design*, (1997), **14** (1), pp. 31–41.
- [81] Zhang, J. W., Krause, F. L., Zhang, H. „Unifying C-curves and H-curves by extending the calculation to complex numbers”, *Computer Aided Geometric Design*, (2005), **22** (9), pp. 865–883.