

**Opponensi vélemény Juhász Imre: Kontrollponttal adott görbék leírása,
alakmódosítása és szingularitásának vizsgálata
c. MTA-doktori értekezéséről**

A görbék és felületek számítógéppel segített geometriai modellezése a számítógéppel támogatott matematikai kutatások fontos témaköre, amely a műszaki konstrukciók tervezéséhez használható, véges számú adattal meghatározható görbék és felületek előállításával és vizsgálatával foglalkozik. A geometriai modellezés alapvető problémáinak és módszereinek megfogalmazása és kidolgozása a hatvanas évek elejétől kezdődött, elsősorban az autó és repülőgépiparban folyó tervezőmunka igényeinek megfelelően. A modellezés alapvető problémáinak és módszereinek megfogalmazása Paul De Casteljau (1959) és Pierre Bézier (1966) munkásságával kezdődött. A kezdetekben e problémakör fejlődésének fő motiválója a számítógépes geometriai módszerek alkalmazása volt a tervezésben, a műszaki konstrukciókban és gyártásban. Az alapvető cél a számítógépen megadható görbék és felületek segítségével bonyolult térbeli alakzatok közelítő előállítása és a vonatkozó algoritmusok megfogalmazására alkalmas módszerek kidolgozása volt. Kifejlődött egy új tudományterület, a geometriai modellezés, amely használta a számítógépes, az ábrázoló, az algebrai és a projektív geometria eszközeit, a polinomok, racionális és trigonometrikus függvények elméletét, a differenciálgeometria és az approximációelmélet módszereit. Az új eredmények széleskörű alkalmazást találtak, a kidolgozott számítógépes algoritmusok gyorsan beépültek a kereskedelmi CAD/CAM szoftverekbe.

A modellezni kívánt görbéket az előállító vektorfüggvény értelmezési tartományának beosztását meghatározó csomópontokhoz tartozó kontrollpontok lineáris kombinációjaként állítják elő a megadott alapfüggvényekkel, mint együtthatókkal. Az alapfüggvényekről felteszik, hogy lineárisan függetlenek, az általuk generált függvénytér határozza meg a modellezés függvényosztályát. Az alapfüggvények további szabadon választható paramétereiktől is függhetnek. A modellező görbékkel szemben fontos elvárás, hogy a kapott görbe illeszkedjen valamilyen módon a kontrollpontok által meghatározott kontrollpoligonhoz, közelítse annak alakját.

Tartalmi ismertetés, a fő eredmények kiemelése:

A disszertáció a jelölt 2000 óta publikált 20 dolgozatában közölt eredményeiről ad számot, világos megfogalmazásban. A disszertációban feldolgozott publikációi közül 6 egy-szerzős, 10 Hoffmann Miklóssal, 2 Róth Ágostonnal 2 pedig további szerzőkkel közös mű. Megítélesem a disszertáció alapját képező dolgozatok magas tudományos értékkel rendelkeznek.

Az értekezés *1. fejezete* bevezetést és a tárgyalta fogalmak előkészítését tartalmazza. Az új tudományos eredményeket a 2-4. fejezetek tartalmazzák. Az 5. fejezetben a szerző részletes tézisek formájában összefoglalja eredményeit.

A 2. fejezetben tanulmányozott zárt görbék modellezése érdekes globális geometriai problémákat vet fel. A zárt görbék modellezésére vonatkozó korábbi eredmények ugyanis nem tudták kezelni a kezdőponthoz csatlakozó végpontban a simaságot, illetve az e pont környezetében leírni kívánt görbe alakját, a modellezést lokális eszközökkel oldották meg. A teljes zárt görbének a modellezése új módszerek kidolgozását követelte meg. Ennek a problémának a kezeléséhez a legfeljebb $2n$ -edfokú trigonometrikus polinomok terében a szerző egy új típusú függvényrendszert konstruál, amit *ciklikus bázisnak*, a velük előállított görbét pedig *ciklikus görbének* nevez.

A dolgozat tartalmazza az új függvényrendszer több fontos tulajdonságának bizonyítását. Ezek teljesülése biztosítja a vizsgált függvényrendszer jól alkalmazhatóságát a geometriai modellezésben: a függvényrendszer lineáris függetlensége és bázis tulajdonsága, egy ciklikus görbe a kontrollpontok számának növelésével magasabb rendű alapfüggvényekkel is előállítható, a rendszámnövelt görbe kontrolpoligonja konvergál a görbéhez, egy síkbeli konvex kontrolpoligonhoz tartozó ciklikus görbe konvex, a ciklikus görbe invariáns a kontrollpontok ciklikus permutációjával szemben, a trigonometrikus polinomokkal megadott zárt görbék előállíthatók ciklikus görbeként.

A megfogalmazott eredmények érdekes matematikai tartalommal rendelkeznek, a részletesen kidolgozott bizonyítások sok új ötletre és pontos számolásokra épülnek, gyakran több segédítélen keresztül. Az eredmények közül kiemelkedik a kapott görbék hullámszám-csökkentő tulajdonságára vonatkozó tétel, amely szerint bármely hipersík a modellező görbét legfeljebb annyi pontban metszi, mint a kontrolpoligont. Ennek matematikai tárgyalása Fourier sorokra vonatkozó klasszikus analízisbeli eredményekre épül, a bizonyításban fontos szerepet játszik Pólya és Schönberg egy tétele. A kidolgozott görbemodellezési módszer érdekességét alátámasztják azok a geometriai szempontból is fontos új eredmények, amelyek megmutatják, hogy tetszőleges ellipszis, epi- és hipociklus, a Bernoulli-lemniszkáta és a Zsukovszkij-féle szárnyprofil előállítható ciklikus görbeként. Ezek az előállítások érdekes elemi geometriai tételekhez vezetnek. A fejezet a tárgyalt matematikai eredmények alapján a hagyományos paraméteres alakban megadott zárt görbék modellezésére alkalmazható algoritmus leírásával zárul.

A 3. fejezet a racionális B-szplájn görbék alakváltozásának leírására vonatkozó eredményeket foglalja össze. A racionális B-szplájn görbéknél az alapfüggvények racionális törtkifejezések, a modellgörbe alakját a kontrollpontok, a súlyértékek, a csomóértékek és az alapfüggvények fokszáma határozza meg. Érdekes eredmény, hogy a modellgörbék sorozata a kontrollpontok súlyozott közepéhez tart, ha az alapfüggvények fokszámát növeljük. A szerző eredményesen használja a projektív geometria eszközeit a súlyértékek változtatásával elért görbeváltozások leírására azon észrevétel alapján, hogy a racionális B-szplájn görbék előállnak egy magasabb dimenziós térbeli egész együtthatós (nemracionális) B-szplájn görbe hipersíkra való középpontos vetítésével. A csomóértékek folytonos változtatása során többek között megismerhetjük a görbe pontjainak pályagörbéiből álló görbesereg burkológörbéit, és ezzel követhetők a modellgörbe alakjának változásai. A csomóértékek változtatásával kapott modellgörbe alakváltoztatási lehetőségeit a fejezet utolsó részében a harmadfokú B-szplájn görbék változásainak vizsgálatával ismerhetjük meg: eljárásokat kapunk arra vonatkozóan, hogy a módosított görbe adott ponton menjen át, adott egyenest érintsen vagy adott pontja előírt pontba kerüljön. Az ebben a fejezetben leírt disszertációbeli eredmények egy új kutatási területet határoztak meg, amelynek kiművelésében a szerzőnek Hoffmann Miklóssal közös további kutatási eredményei jelentős szerepet játszottak.

A 4. fejezetben a szerző azt vizsgálja, hogy egy modellgörbében egy kiválasztott kontrollpont elmozdításával hogyan érhető el, hogy a módosított görbe a kontrollpont új helyzetében különböző típusú szingularitással rendelkezzen. A vizsgálat szingularitások: csúcspont, eltűnő görbület, metszéspont, eltűnő torzió. A kapott eredmények lehetőséget adnak síkgörbék konvexitásának ellenőrzéséhez.

A szingularitások vizsgálatának alapvető eszköze a szerző által bevezetett, a kiválasztott kontrollponthoz tartozó *diszkrimináns görbe*. A diszkrimináns görbét a modellgörbét leíró vektorfüggvénynek a nem kiválasztott kontrollpontok által meghatározott komponense határozza meg. Ennek segítségével meghatározza a kiválasztott kontrollpontnak azon helyzeteit, amelyekben valamilyen szingularitás van. A kapott eredmények jelentősek, a klasszikus kinematikai geometria esztétikus tételeire emlékeztetnek.

Értékelés:

A disszertáció több eredménye részben kétszerzős, egy esetben többszerzős kutatás terméke, a legfontosabb szerzőtársak Hoffmann Miklós (3. fejezet) és Róth Ágoston (2. fejezet). Fontos dolgozatokat publikált a szerző egyedül is, többek között a 4. fejezet érdekes eredményeit. Egyébként a kollektívában végzett kutatás módszere megszokott és természetes az alkalmazás orientált elméleti vizsgálatokban, ahol a társszerzők különböző szakmai kultúrát képviselnek. Ugyanakkor ez a kutatási módszer a gyors információcserét lehetővé tevő korunkban az elméleti kutatásokban is hatékony. A szerző disszertációbeli eredményeinek nagy részét a geometriai modellezés vezető nemzetközi folyóirataiban publikálta, több dolgozata azonban igényesebb és tekintélyesebb publikációs fórumot érdemelt volna. Mindenképpen javasolható az értekezés átdolgozott és kiegészített változatának monografikus publikálása.

Az egész disszertációra jellemző a világos és korrekt matematikai tárgyalás. A bizonyítások esetenként összetettek és ötletgazdag számításokra épülnek, megfogalmazásuk követhető és érthető. A második fejezet matematikai eredményei kiemelkedőek. A szerző tárgyalási módszerére jellemző, hogy értékes általános eredményeket fogalmaz meg és bizonyít, majd azokat adaptálja konkrét struktúrákra és speciális esetekre, ami matematikai tudományos újdonságú megállapításokra vezet. Pl. a 2. fejezet 7. és 8. szakaszában nevezetes görbék előállítását írja le, a 3. fejezet 3.5 szakaszában harmadfokú B-szplájn görbéket vizsgál, a 4. fejezet 8. szakaszában Bezier- és ciklikus görbék szingularitásait határozza meg, az előzőekben vizsgált tételek felhasználásával. A szerző rendszeresen utalásokat tesz az eredményeinek gyakorlati alkalmazhatóságára és motivációjára is. A gyakorlati alkalmazásokra vonatkozó megjegyzések is érthetőek és meggyőzőek, de azok részletesebb elemzése a disszertáció értékét növelte volna.

Az értekezés legfontosabb új eredményeit a szerző az 5. fejezetben megfogalmazta a 2-4. fejezetek címének és tartalmának megfelelően 3 fő tézisben: 1. Ciklikus görbék, 2. NURBS görbék alakmódosítása, 3. Szingularitásvizsgálat. Az első két esetben az eredményeket 3-3 alponthban foglalta össze. Ezek a tézisek pontosan kiemelik a disszertáció legfontosabb új tudományos eredményeit.

A következő kérdést fogalmazom meg: *A zárt görbék ciklikus görbékkel való modellezésének módszere továbbfejleszthető-e gömbfelülettel diffeomorf felületek modellezésére a görbére transzverzális síkokban megadható ciklikus görbesereg segítségével?*

Összefoglalva: Juhász Imre akadémiai doktori disszertációja jelentős, a szakmai tudományos közvélemény által magasra értékelt, mérnöki alkalmazásokban is elismert kutatási eredményekről ad összefoglaló képet. A kutatás sokoldalú egzakt matematikai, ezen belül analitikus és projektív geometriai, függvénytani és differenciálgeometriai módszereket használ. A fentiek alapján megállapítható, hogy Juhász Imre a görbék geometriai modellezésének nemzetközi szempontból kiemelkedő szakembere.

Juhász Imre tudományos tevékenysége, a disszertációjában feldolgozott jelentős újdonsági értékkel rendelkező és a nemzetközi tudományos környezetben elismert kutatási eredményei igazolják, hogy a jelölt minden szempontból megfelel az MTA doktora cím követelményeinek. Mindezek alapján javaslom a nyilvános védés lefolytatását és a jelölt számára az MTA doktora cím megítélését.

Budapest, 2017. január 11.

Nagy Péter Tibor
professzor emeritus, MTA doktora