Tézisfüzet

írta:

Szekrényes András
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék

Delamináció nem szinguláris modellezése ortotróp kompozit lemezekben szemi-rétegmodell alkalmazásával

című témakörből,

amellyel a Magyar Tudományos Akadémia doktora

cím elnyerésére pályázik

Budapest, 2016

1. A kutatás előzményei

Napjainkban a kompozit anyagok alkalmazása és fejlesztése egyre nagyobb hangsúlyt kap. Az autóipar jelentős átalakulás előtt áll, ami nagymértékben a kompozit anyagok fejlődésének köszönhető. Az autóipar mellett a kerékpárok, repülőgépek, helikopterek, hajók, tengeralattjárók, nyomástartó edények, üzemanyagtartályok, védősisakok, szélturbinalapátok, illetve a sporteszközök (pl. rúdugrás, nyílpuskák, teniszütők, stb.) említhetők meg. A kompozit anyagok legfontosabb tulajdonságai a relatíve nagy merevség és ezzel egyidőben a relatíve kis súly, valamint vegyi ellenállóképesség, zajcsökkentő hatás, ami a felsorolt példák esetében a fémes anyagok elé helyezi őket. Másrészt azonban a kompozit anyagok sokkal inkább hajlamosak a tönkremenetelre, valamint lényegesen többféle tönkremeneteli mód létezik, mint a fémes anyagok esetében. A tönkremeneteli módok egyik fajtája a rétegek szétválása, vagy más néven delamináció (*Kiani et al. (2013); Marat-Mendes and Freitas (2013); Zhou et al. (2013)*). A rétegszétválás a repedés egy speciális fajtája, amely a rétegek között jelenik meg. Így az izotróp anyagokra már kifejlesztett törésmechanikai módszerek kompozit anyagoknál is működnek (*Adams et al. (2000); Anderson (2005)*). A lineárisan rugalmas törésmechanika három alapvető törési módusa az I-es, II-es és III-as módusok (*Anderson (2005); Cherepanov (1997); Hills et al. (1996)*). A rétegszétválás kiváltó okai lehetnek a kis sebességű ütközés (*Burlayenko and Sadowski (2012); Christoforou et al. (2008); Ganapathy and Rao (1998); Rizov et al. (2005)*), gyártási hibák (*Zhang and Fox (2007); Zhou et al. (2013)*) és a szabad perem hatás (*Ahn et al. (2013); Sarvestani and Sarvestani (2012)*).

A kompozit anyagok alkalmazásakor legtöbbször rúd-, lemez- vagy héjalakú gyártmányról van szó. Ezek esetében nagy hatékonysággal alkalmazhatók a mechanika vékony és vastag falú szerkezeti modelljei. Rétegelt kompozit rudak, lemezek és héjak modellezésére számos elmélet áll a mérnökök rendelkezésére. Ezek közül a leginkább ismert a klasszikus rétegelt lemezelmélet (Classical Laminated Plate Theory - CLPT), amely a Kirchhoff-féle hipotézisen alapszik és alapvetően vékony lemezek modellezésére alkalmas (*Kollár and Springer (2003); Kumar and Lal (2012); Reddy (2004); Szekrényes (2012, 2013a)*). Ennek továbbfejlesztett változata az elsőrendű, vagy Mindlin-féle lemezelmélet (*Ovesy et al. (2015); Reddy (2004); Thai and Choi (2013)*), amely figyelembe veszi a transzverzális nyírás hatását, így már mérsékelten vastag lemezeket is nagy pontossággal le tud írni. A szakirodalomban az említett két elmélet mellett szintén jól ismert a Reddy-féle harmadrendű elmélet, amely a transzverzális nyírás hatását úgy veszi figyelembe, hogy a feszültségmezőre vonatkozó dinamikai peremfeltételt is teljesíti (*Reddy (2004)*). Valójában az alapötlet Levinson 1980-ban megjelent munkájában található meg izotróp anyagra (*Levinson (1980)*), amelyet Reddy alkalmazott először rétegelt szerkezetre. Jóval kevesebb eredmény található a másodrendű lemezelmélettel (*Izadi and Tahani (2010); Szekrényes (2013b, 2015)*) kapcsolatban, amely a Mindlin-féle elmélethez képest csak kis lépésnek tekinthető. Mára már rengeteg lemezelméletet kifejlesztettek, a lemezelméletek fejlesztése napjaink egyik kedvelt kutatási témája. A felsorolt elméletek mindegyike kiegészíthető a transzverzális elmozduláskomponens vastagság menti függésével, a leíró modell mérete így jelentősen megnő, viszont a klasszikus és Mindlin-féle megoldáshoz képest kicsi a modell pontosságának javulása. Már Reddy is megállapította könyvében (*Reddy (2004)*), hogy a rétegelt kompozit lemezeknél a legtöbb esetben elegendő a klasszikus és az elsőrendű elméletek alkalmazása. Az említett elméletek az ún. egyenértékű rétegelméletén alapulnak, azaz a teljes lemezt függetlenül attól, hogy hány rétegből áll, egy darab középfelülettel (vagy referenciasíkkal) írjuk le. Meg kell említeni még az ún. rétegenkénti modellezési technikát, illetve a rugalmasságtani megoldást, amelyek 3D-s megoldások és így bár növelhetik a modell méretét, a rétegek közötti feszültségek így pontosabban meghatározhatók. (*Batista (2012); Ferreira et al. (2011); Reddy (2004); Saeedi et al. (2012a,b)*).

A felsorolt elméleteket (vagy azok igen nagy részét) viszont még nem alkalmazták rétegszétválást tartalmazó lemezek modellezésére. Az olyan esetekben, amikor lemezalakú a szerkezet és rétegszétválást is tartalmaz, analitikus megoldás általában nem érhető el a szakirodalomban. Ezért a feladatokat rendszerint végeselem-módszerrel oldják meg, és a repedésfeszítő erőt pl. a J-integrál (*Rice (1968)*) vagy a virtuális repedészáródás technikája (*Bonhomme et al. (2010)*) alapján numerikusan számítják ki. Ennek a modellezési technikának a hátránya, hogy a rétegszétválást tartalmazó szerkezetet 3D-s modellel kell leírni, még akkor is, ha az vékony falúnak tekinthető. Bár vannak lemezelméleten alapuló megoldások erre a problémára, azok vagy túl bonyolultak, vagy pedig nem elég pontosak (*Bruno et al. (2003, 2005); Davidson et al. (2000)*).

2. A kutatás célkitűzései

A kutatás célja a különböző (első-, másod- és harmadrendű) lemezelméletek alkalmazása rétegszétválást tartalmazó lemezekre. Ezen a területen a legegyszerűbb terhelési esetekre találhatók megoldások a szakirodalomban, ez a húzott-nyomott és csavart lemezek esete. A szakirodalom jelentős hiányossága, hogy a klasszikus Lévy-féle peremfeltételek esetére a rétegszétválást tartalmazó lemezek legegyszerűbb hajlítási feladatai sincsenek megoldva. Ez azért fontos, mert ezen feladatok megoldásai jó alapot adhatnak hatékonyabb lemez és héj végeselem típusok kifejlesztésére és a 3D-s modellek helyettesítésére. A hajlított lemezek esetén számos megoldatlan probléma létezik. A legfontosabb célok a rétegszétválást tartalmazó hajlított lemezek mechanikai modelljeinek megalkotása, a leíró egyensúlyi egyenletek, a peremértékfeladatok megfogalmazása. A rétegek szétválásából, azaz a repedéscsúcsból adódó perturbáció miatt a lemez vastagsága mentén több egyenértékű réteg egymásra helyezésével lehetséges egy az eddigieknél pontosabb modell létrehozása. Az egyenértékű rétegek - amelyek leírhatók az első-, másod- és harmadrendű elméletekkel - közötti kapcsolósíkokon meg kell fogalmazni a megfelelő kinematikai feltételeket. Az analitikus megoldás esetén a rétegszétválást tartalmazó és nem tartalmazó szakaszokat külön kell kezelni, és meg kell fogalmazni az egyes részek perem- és illesztési feltételeit. Az így adódó feladatok matematikai módszerekkel való megoldása és a különböző elméletek pontosságának és modellméretének összehasonlítása szintén fontos célok. A modellek pontosságát úgy lehet felmérni, hogy azok mechanikai mezőkre (elmozdulás, alakváltozás, feszültség) vonatkozó eredményeit végeselem-módszer eredményeivel hasonlítjuk össze. A repedésfeszítő erő számítását a J-integrál segítségével célszerű elvégezni. A J-integrál kifejezése harmadrendű delaminált lemezek esetén nem volt eddig levezetve, illetve a J-integrál különböző módusainak repedési front menti eloszlását sem határozták meg ez idáig analitikus módszerrel. Meg kell jegyezni, hogy pl. az ANSYS végeselem szoftverben a J-integrál csak izotróp anyagi viselkedésű modellre alkalmazható, így az analitikus számítás eredményét a virtuális repedészáródás technikájával kapható eredményekkel célszerű összevetni. A virtuális repedészáródás technikája segítségével a repedési front környezetében létrehozott végeselemekben kiszámítható csomóponti elmozdulások és erők segítségével határozható meg a repedésfeszítő erő egyes komponensei.

3. A kutatás módszere

A mechanikai modellek létrehozásához a lineáris rugalmasságtan és a rétegelt kompozit szerkezetek alapelveit használtam fel. Az első-, másod- és harmadrendű lemezelméletek esetén minden esetben egy feltételezett elmozdulásmezőből indultam ki. További alkalmazandó alapelvek az alakváltozás-elmozdulás kapcsolata, a virtuális munka elve, a lineárisan rugalmas, ortotróp testek anyagtörvénye, a merevségek fogalma és az igénybevételek definíciója. A modellek pontosságát olyan példákon keresztül mutattam meg, amelyek az ún. Lévy-féle megoldáson alapulnak. A megoldás lényege, hogy téglalap alakú lemezeknél két szemben lévő peremnek egyszerűen alátámasztottnak kell lennie, a másik kettőnél pedig tetszőleges feltétel adható meg. Az egyszerű alátmasztás azt jelenti, hogy az adott peremen a középfelületre merőleges elmozdulás zérus, valamint a lemez pereme mentén az azzal párhuzamos irányú hajlító élnyomaték szintén zérus. Ilyen módon ugyan korlátozottak a lehetőségek, de így is sok variáció lehetséges. A matematikai megoldáshoz minden esetben állapottér modellt alkalmaztam, amely a mátrixexponenciálison alapszik és igen hatékony módszer a differenciálegyenlet-rendszerek megoldására. A törésmechanikai számítások során a ridegtörési modellt és a 3D-s J-integrál definícióját alkalmaztam, amely általános esetben három egymástól független komponenst ad meg. A matematikai modellt a MAPLE szoftverrel építettem fel, amely hatékonyan alkalmazható a nagy modellméretek és a hosszú kifejezések esetén is. Az analitikus modellek eredményeinek ellenőrzésére az ANSYS szoftverben elkészített térbeli (SOLID típusú) lineáris modellt hoztam létre, amelynél a hagyományos eredmények mellett a repedésfeszítő erők delaminációs front menti eloszlását egy már rendelkezésre álló MACRO segítségével számítottam ki.

4. Új tudományos eredmények

1. Tézis

a. Megadtam a szemi-rétegmodell definícióját rétegszétválást tartalmazó lemezekre. Az alapgondolat az, hogy egy N_l számú rétegből felépülő kompozit lemezt N_{ESL} számú egyenértékű réteggel modellezünk, valamint igaz, hogy $N_{ESL} < N_l$. Az egyenértékű rétegek közötti síkok a kapcsoló- vagy perturbációs síkok. A perturbációs síkok közül az egyiket a delamináció síkjában kell felvenni.

b. Megadtam az un. egzakt kinematikai feltételrendszert olyan, rétegszétválást tartalmazó kompozit lemezek modellezésére, amelyek N_{ELS} számú, harmadrendű egyenértékű rétegből épülnek fel. Az egzakt kinematikai feltételrendszer a szemi-rétegmodell egyenértékű rétegei között transzverzális irányban felírt kinematikai feltételek halmaza. A feltételrendszer a következő elemekből áll:

- a síkbeli és transzverzális elmozduláskomponensek folytonossága,
- a globális membrán elmozduláskomponens megadása a referenciasíkon,
- a transzverzális fajlagos szögváltozások, azok első és második deriváltjainak folytonossága a kapcsolósíkokon,
- a transzverzális fajlagos szögváltozást szabályozó feltétel.

Az egzakt kinematikai feltételrendszer bármely lemezelmélet esetén alkalmazható. A nyírási deformációt magában foglaló, de a vastagság irányában nem deformálható lemezek esetén az egzakt kinematikai feltételrendszer a síkbeli elmozduláskomponensekre, illetve azok lokális vastagság menti koordináták szerinti első, második és harmadik deriváltjaira megadott feltételek halmaza.

- **A tézishez tartozó publikációk**: *Szekrényes (2013b,c, 2016a).*

2. Tézis

Megmutattam, hogy az egzakt kinematikai feltételrendszert teljesítő elmozdulásmező egy szemi-rétegmodell i-edik egyenértékű rétegében a következőképpen adható meg:

$$u_{(i)} = u_0^* + \left(K_{ij}^{(0)} + K_{ij}^{(1)} z^{(i)} + K_{ij}^{(2)} [z^{(i)}]^2 + K_{ij}^{(3)} [z^{(i)}]^3\right) \psi_{(x)j}, \quad i = q..s,$$
$$v_{(i)} = v_0^* + \left(K_{ij}^{(0)} + K_{ij}^{(1)} z^{(i)} + K_{ij}^{(2)} [z^{(i)}]^2 + K_{ij}^{(3)} [z^{(i)}]^3\right) \psi_{(y)j}, \quad i = q..s,$$
$$w_{(i)} = w, \quad i = 1..k.$$

ahol a harmadrendű függvényekben $\psi_{(p)j}$ ($p = x$ vagy y) az elsődleges paraméterek vektora, K_{ij} az elmozdulás-multiplikátor mátrix, valamint a következők igazak a

$$\left.\begin{array}{l}\text{nem delaminált szakaszra}\\ \text{delaminált szakasz, alsó lemezfélre}\\ \text{delaminált szakasz, felső lemezfélre}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll}(u_0^*, v_0^*) = (u_0, v_0)\,, & q = 1, & s = k,\\ (u_0^*, v_0^*) = (u_{0b}, v_{0b})\,, & q = 1, & s = h,\\ (u_0^*, v_0^*) = (u_{0t}, v_{0t})\,, & q = h+1, & s = k,\end{array}\right.$$

ahol k az egyenértékű rétegek száma, h pedig az egyenértékű rétegek száma az alsó lemezfélben. Az u_0, v_0, u_{0b}, v_{0b}, u_{0t} és v_{0t} membrán elmozduláskomponensek és a w transzverzális lehajlás tipikusan elsődleges paraméterek. A további elsődleges paramétereket úgy kell kiválasztani, hogy az egzakt kinematikai feltételrendszer alkalmazása során adódó algebrai egyenletrendszer egymástól lineárisan független egyenletekből épüljön fel. A virtuális munka elve alapján harmadrendű lemezek esetén levezettem az egyensúlyi egyenletek invariáns alakját. Az egyensúlyi egyenleteket bemutattam arra az esetre, amikor a kettő és négy darab egyenértékű réteg módszerét alkalmazzuk. Megmutattam, hogy az egyensúlyi egyenletek megfelelő összegzése segítségével megadhatók az ún. egyenértékű igénybevételek, mint $\hat{\mathbf{M}}^{(x,xy)}$ egyenértékű nyomatékok, valamint egyenértékű $\hat{\mathbf{L}}^{(x,xy)}$ és $\hat{\mathbf{P}}^{(x,xy)}$ igénybevételek. Az egyenértékű igénybevételek szerepe kulcsfontosságú a peremértékfeladatok folytonossági és peremfeltételeinek megadásakor.

- **A tézishez tartozó publikációk**: *Szekrényes (2014b, 2016a,b).*

3. Tézis

a. Megmutattam, hogy az (1) jelű, rétegszétválást tartalmazó és a (2) jelű, rétegszétválást nem tartalmazó lemezrészek közötti folytonossági feltételek harmadrendű, ortotróp, Lévy típusú kompozit lemezek esetén a következőképpen írhatók fel:

$$\left.\begin{pmatrix} g_\alpha \\ h_\alpha \\ m_\alpha \\ n_\alpha \\ p_\alpha \end{pmatrix}\right|_{x=+0}^{(1)} = \left.\begin{pmatrix} g_\alpha \\ h_\alpha \\ m_\alpha \\ n_\alpha \\ p_\alpha \end{pmatrix}\right|_{x=-0}^{(2)},$$

ahol g_α egy paraméterhalmaz, amely tartalmazza lehajlásfügggényt, annak deriváltjait az alkalmazott elmélet szerint, és a $\psi_{(p)j}$ vektor komponenseit, h_α és m_α az elmozdulásmező membránrészeit tartalmazó halmazok, n_α az un. autokontinuitási feltétel halmaza, végül p_α egy a hagyományos és egyenértékű igénybevételeket magában foglaló paraméterhalmaz.

b. Meghatároztam az autokontinuitás tételét. Az autokontinuitás tétele kimondja, hogy harmadrendű, Lévy típusú, ortotrop, kompozit lemezek rétegszétválást tartalmazó és nem tartalmazó lemezrészeinek közös keresztmetszetében az elmozdulásmezők teljes folytonossága a $g_\alpha, h_\alpha, m_\alpha$ és p_α halmazokon túlmenően $|N_d - N_{ud}| \in \mathbb{N}$ számú paraméter folytonossági feltételének előírásával biztosítható, ahol N_d és N_{ud} a kiküszöbölt paraméterek száma a rétegszétválást tartalmazó és nem tartalmazó lemezrészeken. Az előbbi paraméterek az *autokontinuitási paraméterek*, amelyek egyben *elsődleges paraméterek* is. Az autokontinuitás csak akkor teljesül, ha az egyenértékű rétegek kapcsolósíkjai mentén azonos feltételeket írunk elő a rétegszétválást tartalmazó és nem tartalmazó lemezrészekre. A rétegszétválás síkjában eltérő feltételeket lehet előírni. Megadtam az autokontinuitás tételének bizonyítását abban az esetben, amikor harmadrendű lemezelméletet és a négy darab egyenértékű réteg módszerét alkalmazzuk, valamint akkor, amikor a Reddy-féle harmadrendű elmélet és a két darab egyenértékű réteg módszere kerül alkalmazásra. A tétel következményét is megadtam, amely az elmozdulásmező membránrészeire vonatkozó folytonossági feltételek számának csökkenését eredményezte.

- **A tézishez tartozó publikációk**: *Szekrényes (2015, 2016a,b).*

4. Tézis

Meghatároztam a háromdimenziós J-integrál zárt formájú kifejezését tetszőleges k számú harmadrendű egyenértékű rétegből felépülő, rétegszétválást tartalmazó kompozit

Lévy-típusú lemezekre abban az esetben, amikor a lemezek terhelése II/III-as módusú. Megmutattam, hogy az általános kifejezés egyszerűsíthető egy, a rétegszétválási csúcsot tartalmazó, zérus értékű területen felvett zárt útvonal alkalmazásával. Megmutattam továbbá, hogy a J-integrált a rétegszétválást tartalmazó és nem tartalmazó lemezrészek közös keresztmetszetében ébredő igénybevételek és alakváltozási mező komponensek felhasználásával lehet kiszámítani. A teljes J-integrált szétválasztottam egy J_{II} (II-es módusú) és J_{III} (III-as módusú) komponensre rétegszétválást tartalmazó, ortotróp, Lévy-típusú lemezek esetén. Megmutattam, hogy a II-es módusú J-integrál képletében az N_x, N_y (síkbeli élerők), M_x, M_y (élnyomatékok), L_x, L_y, P_x és P_y (magasabb rendű) igénybevételek jelennek meg, valamint, hogy a III-as módusú J-integrál tartalmazza az N_{xy} (síkbeli nyíróerő), M_{xy} (csavaró élnyomaték), L_{xy} és P_{xy} (magasabb rendű) igénybevételeket. Ez az eredmény összhangban van a szakirodalmban megtalálható alapgondolattal. Megadtam az ún. konjugált fajlagos szögváltozást. A J_{II} és J_{III} kifejezéseit egyszerűen alátámasztott, rétegszétválást tartalmazó első-, másod- és harmadrendű rétegelt lemezekre alkalmaztam.

- **A tézishez tartozó publikációk**: *Szekrényes (2014a,c,d).*

5. Tézis

a. A két darab egyenértékű réteg módszerét egyszerűen alátámasztott, ortotróp, a teljes szélesség mentén végighaladó rétegszétválást tartalmazó kompozit lemezek hajlítási feladataira alkalmaztam. A megoldásokat az első-, másodrendű valamint harmadrendű Reddy-féle lemezelméletekkel állítottam elő. Meghatároztam a mechanikai mezőket egyszerűen alátámasztott, eltérő geometriai felépítésű, rétegszétválást tartalmazó kompozit lemezekben és az eredményeket összehasonlítottam 3D-s végeselem modell eredményeivel. Megmutattam, hogy harmadrendű Reddy-féle lemezeknél egyfajta merevítő hatás következtében a lehajlásfüggvényt pontatlanul követi a modell. A négy darab egyenértékű réteg módszerét szintén alkalmaztam az előbb említett feladatokra felhasználva az első-, másod- és harmadrendű lemezelméleteket. Bemutattam, hogy az elsőrendű elmélet esetén szintén merevítő hatás jelentkezik.

b. A kettő és négy darab egyenértékű réteg módszerével meghatározott mechanikai mezőkre és a J-integrálra kapott eredmények alapján elvégeztem az alkalmazott lemezelméletek rangsorolását a pontosságuk alapján. Az elsődleges szempont a transzverzális irányú lehajlás és a J-integrál rétegszétválási front menti eloszlásának végeselemmel kiszámolt eredményekhez képesti egyezése volt. A síkbeli elmozdulások és a feszültségek eloszlásának egyezését másodlagos szempontként vettem figyelembe. A rangsorolás alapján azt a következtetést vontam le, hogy figyelembe véve a modellek pontosságát és méretét a tárgyalt feladatok optimális megoldására a másodrendű lemezelméletet érdemes alkalmazni, amely így egy olyan lemez/héj végeselem típus kifejlesztésének is alapját képezheti, amely alkalmas a rétegszétválások modellezésére rétegelt kompozitokban.

- **A tézishez tartozó publikációk**: *Szekrényes (2013b, 2014d, 2016a).*

5. Az eredmények alkalmazási lehetőségei

Az értekezésben bemutatott eredmények egyaránt alkalmazhatók a kísérleti és modellezési területeken az alábbiak szerint.

- A bemutatott modellek alapján új rúd, lemez és héj típusú végeselemek hozhatók létre, vagy a modellek az izogeometrikus módszer segítségével is megoldhatók, amelyek helyettesíthetik a nagy számítási igényű 3D-s modellezési technikákat repedéseket és rétegszétválásokat tartalmazó vékony és vastag falú szerkezeteknél.

- A bemutatott modellek alkalmazhatók a törésmechanikában használatos lemez alakú próbatestekre (pl. az ún. edge cracked torsion típusú próbatestre (ECT, *Marat-Mendes and Freitas (2009)*) vagy a négypontos lemezhajlító próbatestre (4-point bending plate - 4PBP, *Mehrabadi (2014)*)), annak érdekében, hogy zárt formájú megoldást kapjunk.

- A két és négy darab egyenértékű réteg módszere alkalmazható a rétegszétválást tartalmazó rudak, lemezek és héjak szabadrezgési feladatainak megoldására. A bemutatott megoldások jelentősége az, hogy lehetővé teszi az igénybevételek alsó és felső lemezekben külön-külön való meghatározását. Nem régiben sikerült kimutatni, hogy a rétegszétválást tartalmazó rudak (*Szekrényes (2014, 2015)*) és lemezek (*Szekrényes (2015)*) szabadrezgésekor az igénybevételek harmonikus mozgásból adódó periodikus változása a paraméteres gerjesztés forrása. A modellek ugyancsak alkalmazhatók a rétegszétválást tartalmazó kompozit lemezek stabilitási feladataira.

- A modellek kiegészíthetők a vastagság menti deformáció hatásával a pontosság további növelése érdekében. A fajlagos szögváltozásokkal szemben alkalmazott folytonossági feltétel helyett feszültségre vonatkozó feltétel is alkalmazható.

- Az alapgondolat alkalmazható a szendvics illetve gradiens anyagú rúd-, lemez- és héjszerkezetek modelljeire, amelyek rétegszétválásokat és repedéseket tartalmaznak.

Hivatkozások

Adams, D.F., Carlsson, L.A., Pipes, R.B., 2000. Experimental characterization of advanced composite materials. CRC Press, Boca Raton London New York Washington, D.C.. Third edition.

Ahn, J.S., Kim, Y.W., Woo, K.S., 2013. Analysis of circular free edge effect in composite laminates by p-convergent global-local model. *International Journal of Mechanical Sciences* 66, 149–155.

Anderson, T.L., 2005. Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore. Third edition.

Batista, M., 2012. Comparison of Reissner, Mindlin and Reddy plate models with exact three dimensional solution for simply supported isotropic and transverse inextensible rectangular plate. *Meccanica* 47, 257–268.

Bonhomme, J., Argüelles, A., Castrillo, M.A., Viña, J., 2010. Computational models for mode I composite fracture failure: the virtual crack closure technique versus the two-step extension method. *Meccanica* 45, 297–304.

Bruno, D., Greco, F., Lonetti, P., 2003. A coupled interface-multilayer approach for mixed mode delamination and contact analysis in laminated composites. *International Journal of Solids and Structures* 40, 7245 – 7268.

Bruno, D., Greco, F., Lonetti, P., 2005. A 3D delamination modelling technique based on plate and interface theories for laminated structures. *European Journal of Mechanics A/Solids* 24, 127–149.

Burlayenko, V.N., Sadowski, T., 2012. A numerical study of the dynamic response of sandwich plates initially damaged by low-velocity impact. *Computational Materials Science* 52, 212–216.

Cherepanov, G.P., 1997. Methods of Fracture Mechanics: Solid Matter Physics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Christoforou, A.P., Elsharkawy, A.A., Guedoua, L.H., 2008. An inverse solution for low-velocity impact in composite plates. *Computers & Structures* 86, 988–996.

Davidson, B.D., Yu, L., Hu, H., 2000. Determination of energy release rate and mode mix in three-dimensional layered structures using plate theory. *International Journal of Fracture* 105, 81–104.

Ferreira, A.J.M., Roque, C.M.C., Carrera, E., Cinefra, M., Polit, O., 2011. Two higher order zig-zag theories for the accurate analysis of bending, vibration and buckling response of laminated plates by radial basis functions collocation and a unified formulation. *Journal of Composite Materials* 45, 2523–2536.

Ganapathy, S., Rao, K., 1998. Failure analysis of laminated composite cylindrical/spherical shell panels subjected to low-velocity impact. *Computers & Structures* 68, 627–641.

Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N., Korsunsky, A.M., 1996. Solution of Crack Problems, The Distributed Dislocation Technique. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Izadi, M., Tahani, M., 2010. Analysis of interlaminar stresses in general cross-ply laminates with distributed piezoelectric actuators. *Composite Structures* , 757–768.

Kiani, M., Shiozaki, H., Motoyama, K., 2013. Using experimental data to improve crash modeling for composite materials, in: Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, pp. 215–226. 2012 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics; Costa Mesa, CA; United States; 11-14 June, 2012.

Kollár, L.P., Springer, G.S., 2003. Mechanics of Composite Structures. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paolo.

Kumar, Y., Lal, R., 2012. Vibrations of nonhomogeneous orthotropic rectangular plates with bilinear thickness variation resting on winkler foundation. *Meccanica* 47, 893–915.

Levinson, M., 1980. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications* 7, 343–350.

Marat-Mendes, R., Freitas, M.D., 2013. Fractographic analysis of delamination in glass/fibre epoxy composites. *Journal of Composite Materials* 47, 1437–1448.

Marat-Mendes, R.M., Freitas, M.M., 2009. Characterisation of the edge crack torsion (ECT) test for the measurement of the mode III interlaminar fracture toughness. *Engineering Fracture Mechanics* 76, 2799–2809.

Mehrabadi, F.A., 2014. The use of ECT and 6PBP tests to evaluate fracture behavior of adhesively bonded steel/epoxy joints under mode-III and mixed mode III/II. *Applied Adhesion Science* 2, 1–15.

Ovesy, H., Totounferoush, A., Ghannadpour, S., 2015. Dynamic buckling analysis of delaminated composite plates using semi-analytical finite strip method. *Journal of Sound and Vibration* 343, 131–143.

Reddy, J.N., 2004. Mechanics of laminated composite plates and shells - Theory and analysis. CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington D.C.

Rice, J.R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics* 35, 379–386.

Rizov, V., Shipsha, A., Zenkert, D., 2005. Indentation study of foam core sandwich composite panels. *Composite Structures* 69, 95–102.

Saeedi, N., Sab, K., Caron, J.F., 2012a. Delaminated multilayered plates under uniaxial extension. part I: Analytical analysis using a layerwise stress approach. *International Journal of Solids and Structures* 49, 3711–3726.

Saeedi, N., Sab, K., Caron, J.F., 2012b. Delaminated multilayered plates under uniaxial extension. part II: Efficient layerwise mesh strategy for the prediction of delamination onset. *International Journal of Solids and Structures* 49, 3727–3740.

Sarvestani, H.Y., Sarvestani, M.Y., 2012. Free-edge stress analysis of general composite laminates under extension, torsion and bending. *Applied Mathematical Modelling* 36, 1570–1588.

Szekrényes, A., 2014. Coupled flexural-longitudinal vibration of delaminated composite beams with local stability analyis. *Journal of Sound and Vibration* 333, 5141–5164.

Szekrényes, A., 2015. Natural vibration-induced parametric excitation in delaminated Kirchhoff plates. *Journal of Composite Materials* , 1–28, DOI:0021998315603111.

Szekrényes, A., 2015. A special case of parametrically excited systems: free vibration of delaminated composite beams. *European Journal of Mechanics A/Solids* 49, 82–105.

Thai, H.T., Choi, D.H., 2013. Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates. *Applied Mathematical Modelling* 37, 8310–8323.

Zhang, J., Fox, B.L., 2007. Manufacturing influence on the delamination fracture behavior of the T800H/3900-2 carbon fiber reinforced polymer composites. *Materials and*

Manufacturing Processes 22, 768–772.

Zhou, W., Liang, X., Li, Y., You, S., Liu, R., Chai, H., Lv, Z., 2013. Acoustic emission monitoring for delaminated composites under bending damage failure condition. *Applied Mechanics and Materials* 310, 51–54.

Az értekezés témájában megjelent publikációk

Szekrényes, A., 2012. Interlaminar stresses and energy release rates in delaminated orthotropic composite plates. *International Journal of Solids and Structures* 49, 2460–2470.

Szekrényes, A., 2013a. Interface crack between isotropic Kirchhoff plates. *Meccanica* 48, 507–526.

Szekrényes, A., 2013b. Interface fracture in orthotropic composite plates using second-order shear deformation theory. *International Journal of Damage Mechanics* 22, 1161–1185.

Szekrényes, A., 2013c. The system of exact kinematic conditions and application to delaminated first-order shear deformable composite plates. *International Journal of Mechanical Sciences* 77, 17–29.

Szekrényes, A., 2014a. Analysis of classical and first-order shear deformable cracked orthotropic plates. *Journal of Composite Materials* 48, 1441–1457.

Szekrényes, A., 2014b. Application of Reddy's third-order theory to delaminated orthotropic composite plates. *European Journal of Mechanics A/Solids* 43, 9–24.

Szekrényes, A., 2014c. Bending solution of third-order orthotropic Reddy plates with asymmetric interfacial crack. *International Journal of Solids and Structures* 51, 2598–2619.

Szekrényes, A., 2014d. Stress and fracture analysis in delaminated orthotropic composite plates using third-order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling* 38, 3897–3916.

Szekrényes, A., 2015. Antiplane-inplane shear mode delamination between two second-order shear deformable composite plates. *Mathematics and Mechanics of Solids* , 1–24, DOI:10.1177/1081286515581871.

Szekrényes, A., 2016a. Nonsingular crack modelling in orthotropic plates by four equivalent single layers. *European Journal of Mechanics A/Solids* 55, 73–99.

Szekrényes, A., 2016b. Semi-layerwise analysis of laminated plates with nonsingular delamination - the theorem of autocontinuity. *Applied Mathematical Modelling* 40, 1344–1371.