

Válasz Dr. Páczelt István akadémikus úr bírálatára

Szekrényes András:

Delamináció nem szinguláris modellezése ortotróp kompozit lemezekben

c. MTA doktori értekezéséről

Az alábbiakban tételesen megadom a válaszaimat akadémikus úr kérdéseire és megjegyzéseire. Az eredeti bírálat kérdései és megjegyzései minden esetben a szürke mezőkben szerepelnek.

Megjegyzés 1: A szemi-rétegmodellnél az N_{ESL} egyenértékű rétegszám kiválasztásának mi a mechanikai alapja? Milyen megfontolásokkal állapítjuk meg annak számát? Van-e valamiféle energetikai alapja, hibabecslésre vonatkozó összefüggése?

Válasz: Az egyenértékű rétegek minimális száma kettő, mert a delamináció egy alsó és egy felső lemezre osztja a teljes lemezt. A számítási tapasztalat azt mutatja, hogy kettő darab réteg esetén a pontosság nem megfelelő akkor, ha a delamináció közel van a lemez pereméhez. Ebből adódik a négy darab egyenértékű réteg módszere. Négy darab egyenértékű réteg esetén az SSDT és TSDT megoldásokkal a tárgyalta esetek mindegyikénél elég pontos eredmény kapható. A rétegek számát a modellméret is befolyásolja. Négy darab egyenértékű réteg esetén még viszonylag jól kezelhető a peremérték feladat, viszont pl. 6 db egyenértékű réteg esetén már jóval nagyobb rendszermátrixok adódnának. Ennek megértéséhez és következtetések levonásához további feladatok megoldására lenne szükség.

Véleményem szerint a hibaszámításhoz az szükséges, hogy legyen egy referenciamegoldásunk, amiről tudjuk, hogy helyes és pontos eredményt ad, valamint egy olyan megoldás, aminek a pontosságát előbbihez képest vizsgáljuk. Hibamentes lemezek esetén a szakirodalomban rengeteg megoldás elérhető (pl. "layerwise", vagy az ún. rugalmasságtani megoldás, amelyek a legpontosabban írják le az ilyen feladatokat). Ebben az esetben elegendő a hagyományos mezők (elmozdulás, alakváltozás, feszültség) összehasonlítása a referenciamegoldással. Ezzel ellentétben delaminált lemezek esetén jóval kevesebb megoldás létezik, ezek túlnyomó része végeelem, vagy valamilyen más numerikus megoldáson alapszik, amelyet szintén terhelhet valamekkora hiba. Meg kell azt is jegyezni, hogy a delaminált lemezeknél a modell lokálisan, a rétegszétválási front mentén is pontos kell, hogy legyen, továbbá a repedésfeszítő erőt is jól kell megadnia. Így a referenciamegoldás előállítása gondot jelent delaminált lemezek esetén.

Az N_{ESL} rétegek száma, mint paraméter hatása a modell hibájára nézve nehezen vizsgálható a nagy modellméret miatt. Végeelem modelleknél jól működnek a különböző hibaszámítási algoritmusok, hiszen az elemméret viszonylag könnyen változtatható és a számítás menete a finomabb háló esetén is ugyanaz. A dolgozatban bemutatott modelleknél azonban az N_{ESL}

rétegszám változtatása mellett az egész leíró PDE rendszer megváltozik, aminek algoritmizálása bonyolult. Elméletileg lehetséges lenne az, hogy különböző N_{ESL} értékek mellett egy adott feladat eredményeit összehasonlítsuk. A következő lépés az lehetne, hogy a bemutatott példákat meg kellene oldani 6 db egyenértékű réteggel, esetleg egy teljes "layerwise" modellel. Az így kapott eredmények alapján valószínűleg el lehetne dönten, hogy a modellméret és pontosság szempontjából melyik a legcélszerűbb megoldás, illetve megállapítható lenne az egyenértékű rétegszám optimális értéke is. Szintén szükséges lenne az is, hogy pl. globálisan szimmetrikus rétegfelépítés helyett aszimmetrikus rétegfelépítés esetére is megvizsgáljuk a 2ESL és 4ESL (illetve 6ESL) módszerek hatékonyságát. Végül, érdemes lenne az analitikus modell G_{II} és G_{III} -ra adódó eredményeit összehasonlítani a numerikus modell alapján kiszámolt J-integrál eloszlásaival (ortotróp anyagra a J-integrál ANSYSban nem érhető el). Mindezek alapján a bemutatott modellek pontossága is jobban felmérhető lenne.

Mindezek alapján azt tudom válaszolni, hogy az N_{ESL} rétegszám kiválasztásának nincs energetikai alapú hibabecslésre vonatkozó összefüggése.

Megjegyzés 2: Az összetett elemekből álló mechanikai rendszereknél (testeknél) a csatlakozási (érintkezési) felületen kétfajta illesztési feltétel írható fel, egyik kinematikai, másik dinamikai jellegű. A (2.2) alatti kinematikai, de a (2.4) már helytelenül fejezi ki a $\boldsymbol{\sigma}_{(i)} \cdot \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\sigma}_{(i+1)} \cdot \mathbf{n}_{i+1} = \mathbf{0}$ dinamikai illesztési feltételt, ahol $\boldsymbol{\sigma}_{(i)}$ az i -dik jelű test feszültségtenzora, $\mathbf{n}_i$ az i -dik testből kifelé mutató normális. A csatlakozó felületen a τ_{xz} és τ_{yz} nyírófeszültségek azonosak, azaz $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$, $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$, vagyis a $\gamma_{xz(i)} = \gamma_{xz(i+1)}$ csak azonos anyagú felületeknél fog fennállni.

Ez a hiba végig vonul az értekezésen! Számos példa is terhelt ezzel az elvi hiba hatásával! A jelölt Reddy (2004) munkájára helyesen hivatkozik, de ezt az alapvető mechanikai ténytet nem alkalmazza. Miért?

Válasz: A felvetés teljesen jogos és kontinuummechanikai szempontból igen fontos. A szakirodalomban a rétegenkénti (layerwise) megoldások is a rétegek közötti σ_z , τ_{xz} és τ_{yz} feszültségek folytonosságán alapulnak.

A kérdés megválaszolására és a feszültségek folytonosságának megsértését megmagyarázandó vegyük az SSDT megoldást négy darab egyenértékű réteg esetén! Ha a nem delaminált szakaszon előírjuk a feszültségek folytonosságát, akkor az I. esetben a folytonossági feltételek a következők:

$$\begin{aligned} (G_{13}^{(45)} \gamma_{xz(1)}, G_{23}^{(45)} \gamma_{yz(1)}) \Big|_{z^{(1)}=t_1/2} &= (G_{13}^{(0)} \gamma_{xz(2)}, G_{23}^{(0)} \gamma_{yz(2)}) \Big|_{z^{(2)}=-t_2/2}, \\ (G_{13}^{(0)} \gamma_{xz(2)}, G_{23}^{(0)} \gamma_{yz(2)}) \Big|_{z^{(2)}=t_2/2} &= (G_{13}^{(45)} \gamma_{xz(3)}, G_{23}^{(45)} \gamma_{yz(3)}) \Big|_{z^{(3)}=-t_3/2}, \\ (G_{13}^{(45)} \gamma_{xz(3)}, G_{23}^{(45)} \gamma_{yz(3)}) \Big|_{z^{(3)}=t_3/2} &= (G_{13}^{(0)} \gamma_{xz(4)}, G_{23}^{(0)} \gamma_{yz(4)}) \Big|_{z^{(4)}=-t_4/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Belátható, hogy ebben az esetben, mivel $\gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x$, valamint $\gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y$, így az elsődleges paraméterek vektora a (4.14) egyenlethez képest az alábbiak szerint változik:

$$\boldsymbol{\psi}_{(p)} = \left(\theta_{(p)2} \quad \bigcirc \phi_{(p)2} \quad \theta_{(p)4} \quad \phi_{(p)4} \quad \frac{\partial w}{\partial p} \right)^T, \quad p = x \text{ vagy } y. \quad (2)$$

Továbbá, mivel az egyes $x - z$ és $y - z$ kapcsolósíkokhoz eltérő csúsztató rugalmassági modulusok (G_{13} és G_{23}) tartoznak így az elmozdulásmező u és v komponenseiben mások lesznek a multiplikátormátrixok is:

$$\begin{aligned} u_{(i)} &= u_0 + \left(K_{(x)ij}^{(0)} + K_{(x)ij}^{(1)} z^{(i)} + K_{(x)ij}^{(2)} [z^{(i)}]^2 + K_{(x)ij}^{(3)} [z^{(i)}]^3 \right) \psi_{(x)j}, \quad i = 1..k, \\ v_{(i)} &= v_0 + \left(K_{(y)ij}^{(0)} + K_{(y)ij}^{(1)} z^{(i)} + K_{(y)ij}^{(2)} [z^{(i)}]^2 + K_{(y)ij}^{(3)} [z^{(i)}]^3 \right) \psi_{(y)j}, \quad i = 1..k, \end{aligned} \quad (3)$$

azaz az x és y irányokhoz más K_{ij} értékek fognak tartozni. Mindezek eredménye az lesz, hogy a leíró PDE rendszer levezetésekor a nyíróerők egyensúlyát kifejező (2.34)-es, alábbi egyenletben

$$\delta w : \sum_{i=1}^k \nabla \cdot \hat{\mathbf{Q}}_i + q = 0, \quad (4)$$

a Reddy-féle elmélethez hasonlóan a $w(x, y)$ lehajlásfüggvény negyedrendű parciális deriváltjai is meg fognak jelenni (ellentétben a dolgozatban bemutatott SSDT modellel, aminél $w(x, y)$ -ra csak másodrendű PDE vonatkozik). A nem delaminált szakasz modelljét megoldva a dolgozatban megadott rétegfelépítésre egy egyszerűen alátámasztott lemezre a 24x24-es $\mathbf{T}$ rendszermátrix sajátértékei a következők lesznek:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (\pm 26.465501, \pm 2.731169, \pm 1.461269, \pm 1.301421, \pm .927099, \pm .938756, \\ &\pm .398129, \pm .460292, \pm 0.27090 \cdot 10^{-1}, \pm 0.18119 \cdot 10^{-1}, \pm 0.22630 \cdot 10^{-1} \pm 0.708 \cdot 10^{-3} \cdot i) \end{aligned} \quad (5)$$

Konstans	Érték	Konstans	Érték
K_1^{ud}	$-2.285 \cdot 10^{181}$	K_{13}^{ud}	$1.012 \cdot 10^{181}$
K_2^{ud}	$5.285 \cdot 10^{179}$	K_{14}^{ud}	$5.528 \cdot 10^{180}$
K_3^{ud}	$-5.833 \cdot 10^{180}$	K_{15}^{ud}	$1.286 \cdot 10^{181}$
K_4^{ud}	$-2.179 \cdot 10^{179}$	K_{16}^{ud}	$3.284 \cdot 10^{179}$
K_5^{ud}	$9.504 \cdot 10^{180}$	K_{17}^{ud}	$1.290 \cdot 10^{180}$
K_6^{ud}	$7.478 \cdot 10^{180}$	K_{18}^{ud}	$-4.411 \cdot 10^{180}$
K_7^{ud}	$1.285 \cdot 10^{181}$	K_{19}^{ud}	$4.515 \cdot 10^{177}$
K_8^{ud}	$3.003 \cdot 10^{179}$	K_{20}^{ud}	$3.755 \cdot 10^{178}$
K_9^{ud}	$-5.948 \cdot 10^{178}$	K_{21}^{ud}	$-4.098 \cdot 10^{182}$
K_{10}^{ud}	$2.018 \cdot 10^{179}$	K_{22}^{ud}	$-6.910 \cdot 10^{180}$
K_{11}^{ud}	$-1.622 \cdot 10^{177}$	K_{23}^{ud}	$-1.696 \cdot 10^{181}$
K_{12}^{ud}	$2.806 \cdot 10^{178}$	K_{24}^{ud}	$-7.292 \cdot 10^{182}$

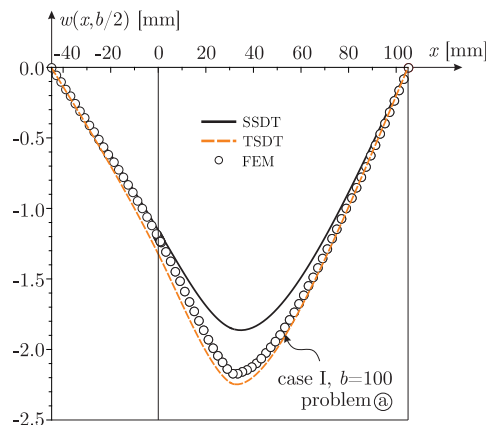
1. táblázat: **Az SSDT (4ESL) modell megoldásfüggvényeinek konstansai a rétegek közötti feszültségek folytonosságának előírásakor (I.eset, nem delaminált szakasz).**

A fenti gyökök közül az első a dolgozatban bemutatott modellek karakterisztikus gyökeihez képest jelentősen nagyobb. A PDE rendszer megoldása az 1. táblázatban megadott végtelenhez közelítő konstansokat eredményezi. Az 1. táblázat szerinti értékek MAPLEben a Digits:=3000 érték mellett adódtak, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy a tizedesek száma 3000 volt. Meg kell jegyezni, hogy a dolgozatban bemutatott megoldások és példák esetében a Digits:=500 érték mindig elegendőnek bizonyult a megfelelően pontos megoldás kiszámításához.

A delaminált szakasz esetén hasonlóan levezethető a módosított PDE rendszer, ebben az esetben nem adódtak pontossági problémák, illetve végtelenhez közelítő konstansok. Mivel azonban a két részt össze kell illeszteni, így a lehajlásfüggvény is végtelenhez közelít, ezért a delaminált lemezek feladatainak megoldása ilyen módon nem lehetséges (legalábbis ez volt a számítási tapasztalatom).

A kérdésre tehát, hogy a dolgozatban bemutatott modellek miért a szögváltozások (szögtorzulások) és nem a feszültségek folytonosságát írják elő, az a válasz, hogy utóbbi esetben van ugyan matematikai megoldás, viszont az mechanikailag helytelen.

A bemutatott modellek a szögváltozások folytonossága mellett láthatóan mindig helyes eredményt adtak a mechanikai mezőkre. A feszültségek folytonossága fontos és kontinuummechanikailag is ez látszik szükségesnek. Más azonban az általános elmélet és más az, amikor egy adott feladatra effektíve megoldást keresünk. Utóbbi esetben annak érdekében, hogy használható modellt és megoldást kapjunk néha megengedett, hogy közelítésekkel éljünk. A fentiek alapján a szögváltozásokra vonatkozó feltétel előírását én nem gondolom hibának, hanem egy számítási tapasztalat alapján alkalmazott, jó eredményre vezető feltételnek. Megjegyzem, hogy a 3D-s végelem modell is sérti a csúsztatófeszültségek folytonosságát, mert az eltérő anyagú rétegek kapcsolódásánál két csomóponti értéket kapunk, ld. pl. 6.8 ábra a dolgozatban.

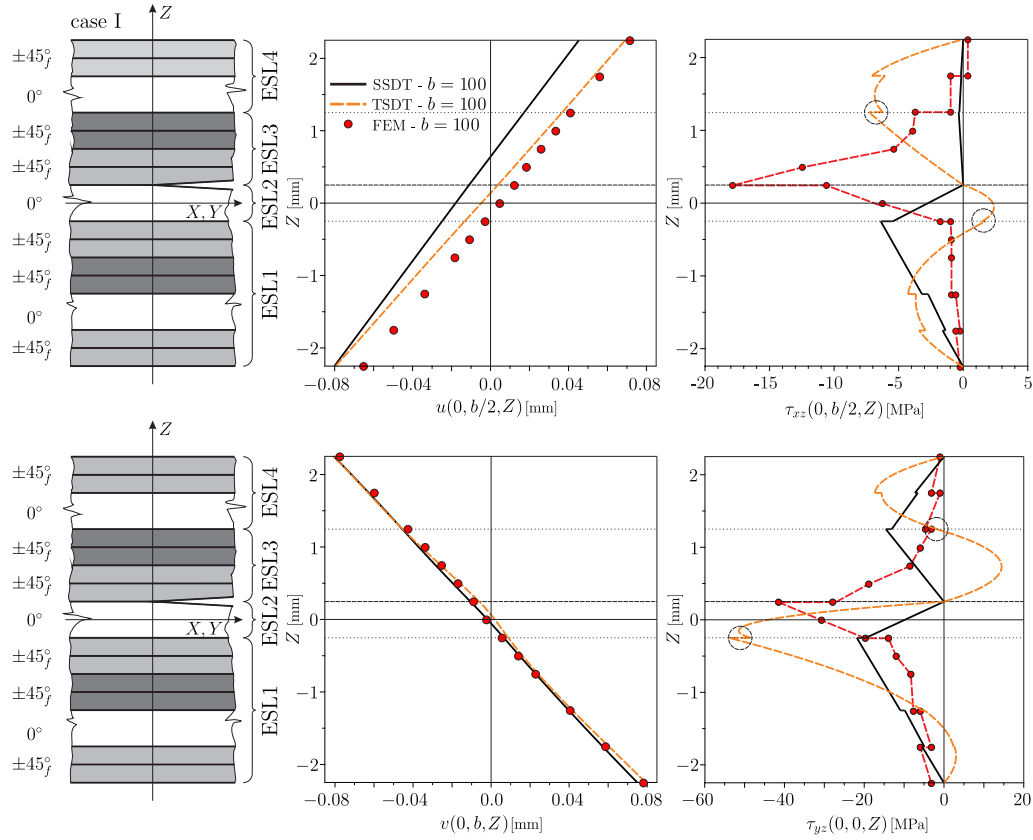


1. ábra. A TSDT és SSDT modellek eredményei a lehajlásfüggvényre figyelembe véve a dinamikai peremfeltételt és a szögtorzulások (SSDT, TSDT) és azok deriváltjainak (TSDT) folytonosságát a kapcsolósíkok mentén, I.eset, 4ESL módszer.

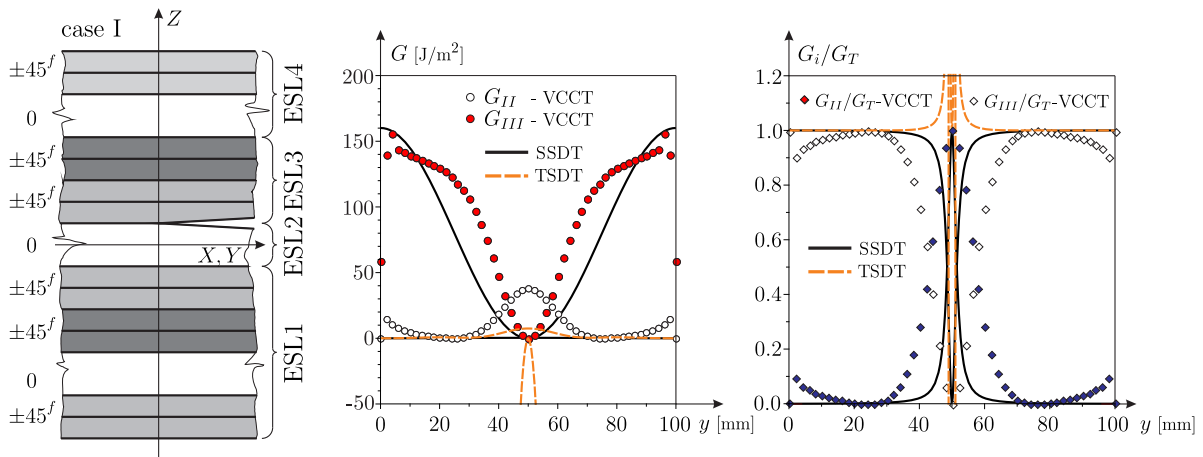
Megjegyzés 3: A (2.5) és a (2.6) alatti összefüggéseknek mi a fizikai alapja? Milyen kontinuummechanikai tételből következik?

Válasz: A (2.5) és (2.6) feltételek számítási tapasztalatok alapján lettek bevezetve. Először nézzük meg, hogy mi történik akkor, ha pl. a harmadrendű elmélet (4ESL) esetén előírjuk a dinamikai peremfeltételt, továbbá az ESL-ek között előírjuk a szögtorzulások és azok deriváltjainak folytonosságát, viszont nem írjuk elő azok második deriváltjainak folytonosságát. Az eredményeket a következő ábrák mutatják. Az 1. ábra az @ feladat, I. esetben mutatja a lemez lehajlásfüggvényét. Látható, hogy a harmadrendű (TSDT) elmélet túlbecsli a végelem eredményt, ez azonban nem jelentős. A 2. ábrán a síkbeli elmozdulások és a transzverzális nyírófeszültségek eloszlása van kirajzolva a delaminációs front menti keresztmetszetekben. Az u és v elmozdulásoknál nem olyan jó az egyezés, mint a dolgozatban bemutatott modelleknél. A nyírófeszültségeknél a karikával jelzett pontokban nincs előírva a második deriváltak folytonossága és jól látható, hogy ebből adódik az eloszlások oszcilláló jellege. Hasonló oszcillációhoz vezet az, ha a deriváltak folytonosságát sem írjuk elő. A megoldás nem megfelelőségét azonban leginkább az mutatja és igazolja, ha kiszámoljuk a J-integrál eloszlását a delaminációs front mentén. Ez látható a 3. ábrán, ahol a G_{II} -nél pontatlan a becslés, G_{III} esetén pedig negatív eloszlás adódik, ami fizikailag elfogadhatatlan.

A megjegyzésre válaszolva tehát: a (2.5) és (2.6) kifejezések nem következnek semmilyen kontinuummechanikai tételből, hanem számítási tapasztalat alapján a nyírófeszültségek oszcillációját küszöbölik ki (ezt a dolgot 11. oldalán meg is jegyeztem). A két feltétel alkalmazá-



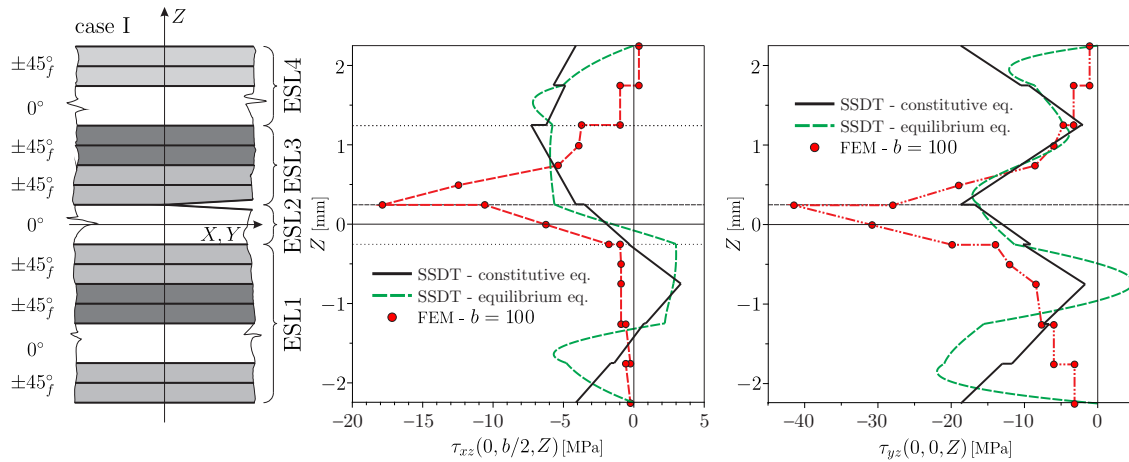
2. ábra. A síkbeli elmozdulások és nyírófeszültségek eloszlása a delaminációs front menti keresztmetszetekben figyelembe véve a dinamikai peremfeltételt és a szögtorzulások (SSDT, TSDT) és azok deriváltjainak (TSDT) folytonosságát a kapcsolósíkok mentén, I.eset, 4ESL módszer.



3. ábra. A J-integrálok és a módusok arányának eloszlásai a delaminációs front mentén figyelembe véve a dinamikai peremfeltételt és a szögtorzulások (SSDT, TSDT) és azok deriváltjainak (TSDT) folytonosságát a kapcsolósíkok mentén, I.eset, 4ESL módszer.

sakor (TSDT) nem jelentek meg az előbbieken részletezett pontatlanságok és minden vizsgált esetben helyes eredmény adódott.

Ugyancsak szeretném megjegyezni, hogy közvetve ugyan, de a rétegek közötti nyírófeszültségek folytonossága, valamint a dinamikai peremfeltétel megjelenhet a számításokban, ha a nyírófeszültségeket a $\sigma \cdot \nabla = 0$ egyenlet integrálásával határozzuk meg. Erre mutat egy példát a 4. ábra, amelyen a dolgozatban bemutatott SSDT (4ESL) modellel kiszámolt két nyírófeszültségeloszlás látható. A dolgozatban bemutatott "constitutive eq." megoldás mellé téve az integrálással kapott "equilibrium eq." megoldást jól látszik, hogy a kettő jól egyezik és láthatóan a zöld és fekete görbék alatti területek nagyon jó közelítéssel egyeznek. Mindezzel azt szeretném hangsúlyozni, hogy attól, hogy a nyírófeszültségek a bemutatott modelleknél nem folytonosak a kapcsolósíkokon, a modell még képes arra, hogy a feszültségeloszlást (valamint a görbe alatti területet, ami tulajdonképpen a nyíró élerő az adott pontban) jól közelítse.



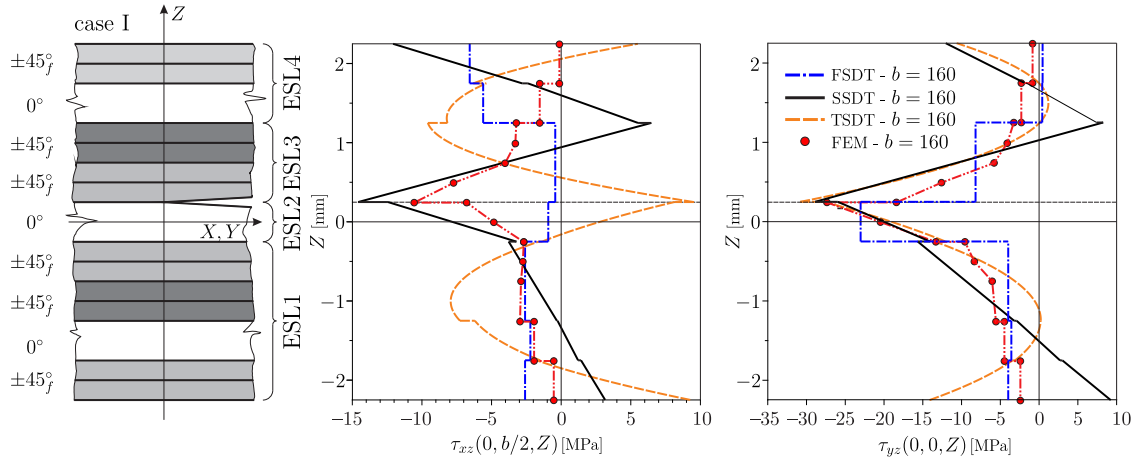
4. ábra. A transzverzális nyírófeszültségek eloszlása a delaminációs front menti keresztmetszetekben az SSDT (4ESL) modell alapján konstitutív és egyensúlyi egyenletek alapján, I. eset.

Megjegyzés 4: A terheletlen peremeken miért nem a feszültségmentességet írja elő a jelölt, mi a fizikai (mechanikai) tartalma a (2.7)-nek? Mennyivel lesz pontosabb a megoldás ha a (2.7)-et alkalmazzuk és nem a $\tau_{pz} = G\gamma_{pz} = 0$, $p = 1, 2$ feltételt?

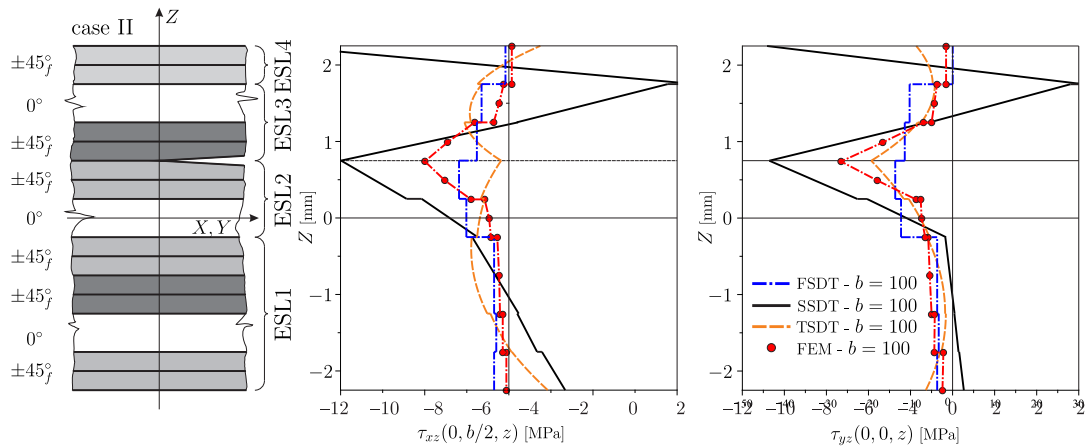
Válasz: A dinamikai peremfeltétel előírása a harmadrendű és másodrendű elméletnél is lehetséges (4ESL módszer). Az 1., 2. és 3. ábrákon a fekete vonalak jelzik a másodrendű (SSDT) elmélet eredményeit. Az 1. ábra szerint a lehajlás jelentősen kisebb, mint a végeelem eredmény, azaz ebben az esetben a dinamikai peremfeltétel merevíti a lemezt (overconstrained model). A síkbeli elmozdulások közül (2. ábra) az u esetén eléggé pontatlan a görbe meredeksége a VE eredményhez képest, a v esetén nagyon jó az egyezés. A 2. ábrán látható nyírófeszültségekre kapott "háromszögek" alapján akár még jó is lehetne a megoldás. Azonban a 3. ábra szerint a G_{II} -re gyakorlatilag nulla eloszlást kapunk, de a G_{III} esetén sem tűnik elfogadhatónak a megoldás.

A dolgozatban bemutatott modellek esetén a 4ESL módszernél minden esetben azt tapasztaltam, hogy ha a dinamikai peremfeltételt nem írom elő, akkor mindig helyes eredmény adódik a mechanikai mezőkre és a J-integrálra is. Az 1.-3. ábrákon látható, hogy a dinamikai peremfeltételt bele lehet ugyan erőltetni a modellekbe, mint kontinuummechanikai feltételt, ez azonban

rossz eredményekre vezet. A dolgozatban a 2ESL módszernél a Reddy-féle elmélet eredményei (ld. 6.2 ábra) is azt mutatják, hogy a dinamikai peremfeltétel merevíti a lemezt, és a lehajlás pontossága a peremfeltételektől és a delamináció pozíciójától is függ, ellentétben a bemutatott SSDT és FSDT megoldásokkal, ahol a $w(x, y)$ egyezése gyakorlatilag invariáns az előző paraméterekre nézve.

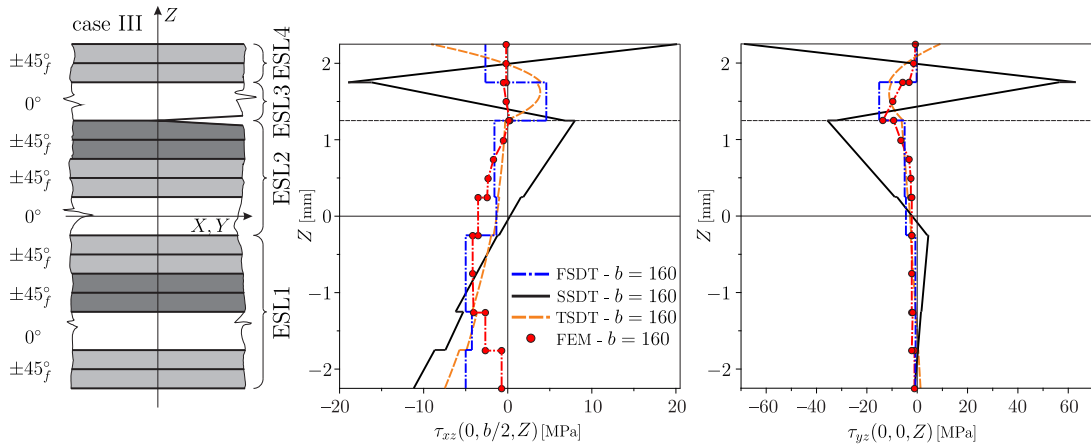


5. ábra. A transzverzális nyírófeszültségek eloszlása a delaminációs front menti keresztmetszetekben az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - I. eset.

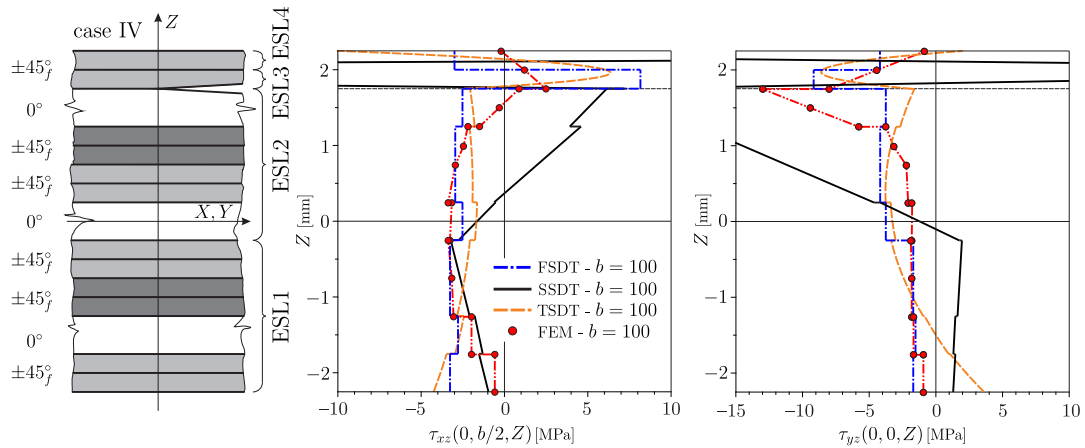


6. ábra. A transzverzális nyírófeszültségek eloszlása a delaminációs front menti keresztmetszetekben az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - II. eset.

A fenti számítási tapasztalat alapján vezettem be az un. szögváltozást szabályozó (SSCC) feltételt. Ennek alapja az, hogy "lazább" feltételt írjunk elő a peremeken a dinamikai peremfeltételhez képest. Azt már megindokoltam, hogy a szabad peremeken a zérus nyírófeszültségek előírása mindig rossz eredményre vezet. Hogy lássuk, az SSCC feltételnek milyen hatása van, ahhoz vegyük azt az SSDT (4ESL) modellt, amelyben ezt a feltételt nem írjuk elő (megjegyzem, a dinamikai peremfeltételt sem). Az eredményeket az 5-8. ábrák mutatják a nyírófeszültségek eloszlására vonatkozóan. A két másik megoldás (FSDT és TSDT) megegyezik a dolgozatban közltekkel (a TSDT esetén nincs előírva az SSCC feltétel). Jól látható, hogy az I. esettől haladva az IV. esetig egyre nagyobb értékeket érnek el a csúcsok az SSDT megoldás szerint. A IV.



7. ábra. A transzverzális nyírófeszültségek eloszlása a delaminációs front menti keresztmetszetekben az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - III. eset.



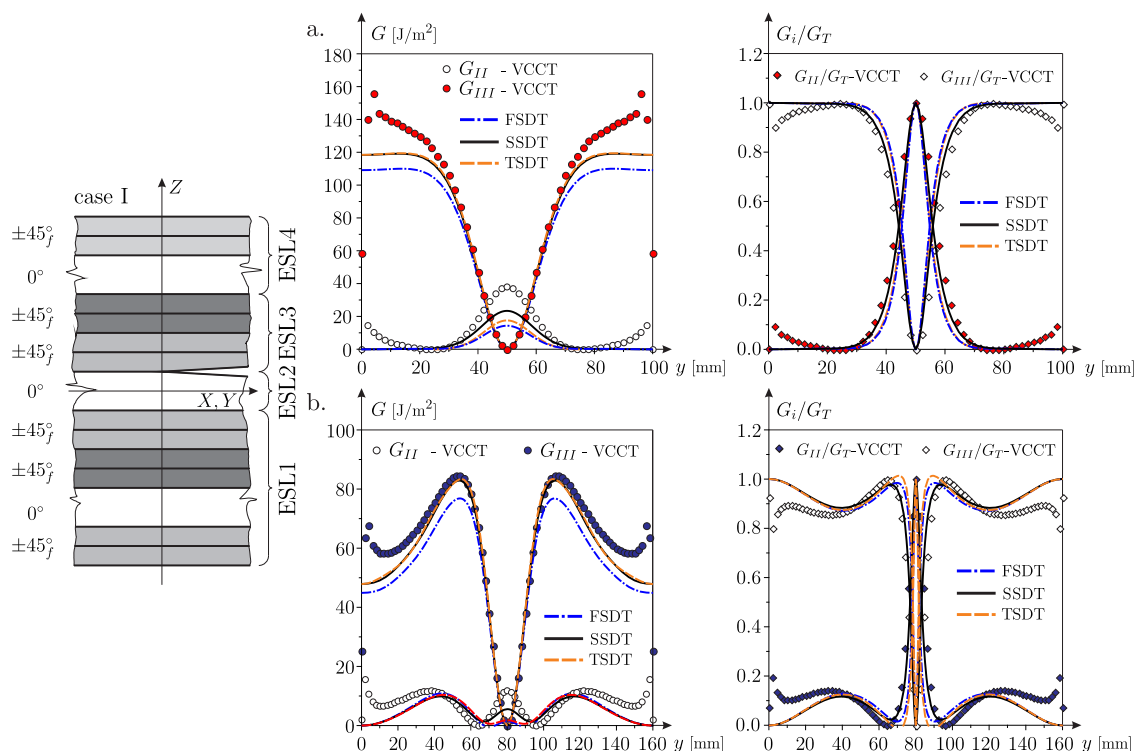
8. ábra. A transzverzális nyírófeszültségek eloszlása a delaminációs front menti keresztmetszetekben az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - IV. eset.

esetben már akkora a csúcsérték, hogy a VE megoldás csak egy egyenes vonalként látszódná, ha a fekete vonalhoz igazítanánk a skálát.

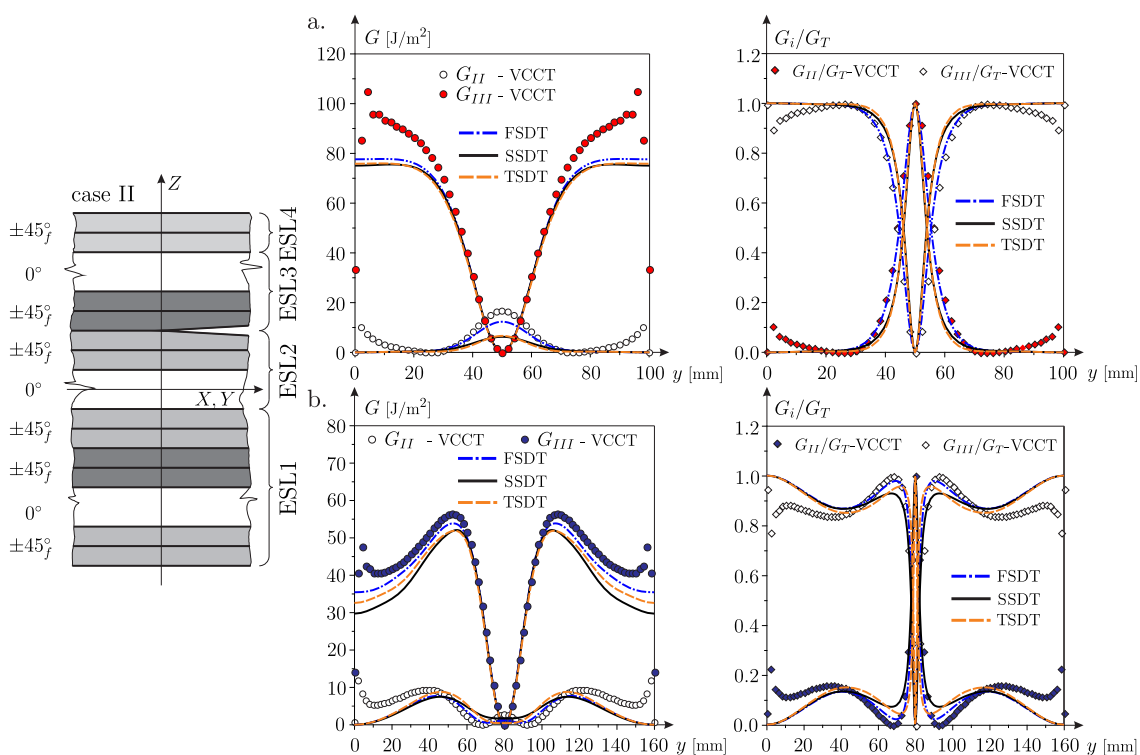
A 9.-12. ábrákon a J-integrál eloszlások azt mutatják, hogy az SSCC feltétel nélkül a III. esetben (11. ábra, $b = 100$ -nál) rossz az eredmény, mert a G_{II} -nél az eloszlásnak negatív értéke is van. A IV. esetben pedig már nem elfogadható a megoldás.

Az SSCC feltétel a harmadrendű elméletre is alkalmazható. Hatása viszont pont ellentétes azzal, amit az SSDT-nél tapasztaltam. A TSDT-re előírt SSCC feltétel hatását mutatja a 13. és 14. ábra a IV. esetre. A feszültségek jóval nagyobb értékeket vesznek fel, és a J-integrál eloszlása is jóval pontatlanabb az SSDThez (SSCC előírva) képest.

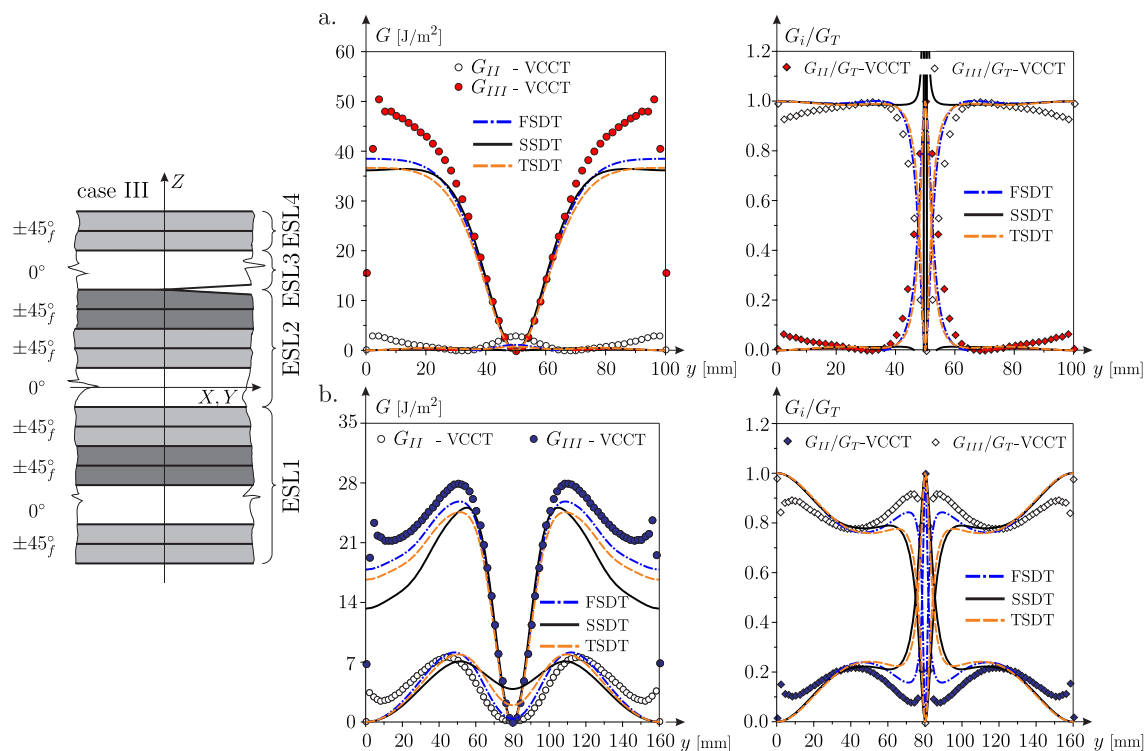
A válasz tehát, hogy míg a dinamikai peremfeltétel előírása hibás eredményre vezet, addig az SSCC feltétel a másodrendű elmélet eredményeinek pontosságát jelentősen növeli, illetve sosem adódnak negatív értékek a J-integrál eloszlásában. Hozzá kell azonban tenni, hogy a harmadrendű elméletnél az SSCC-t nem célszerű előírni, mert annak pontosságát rontja.



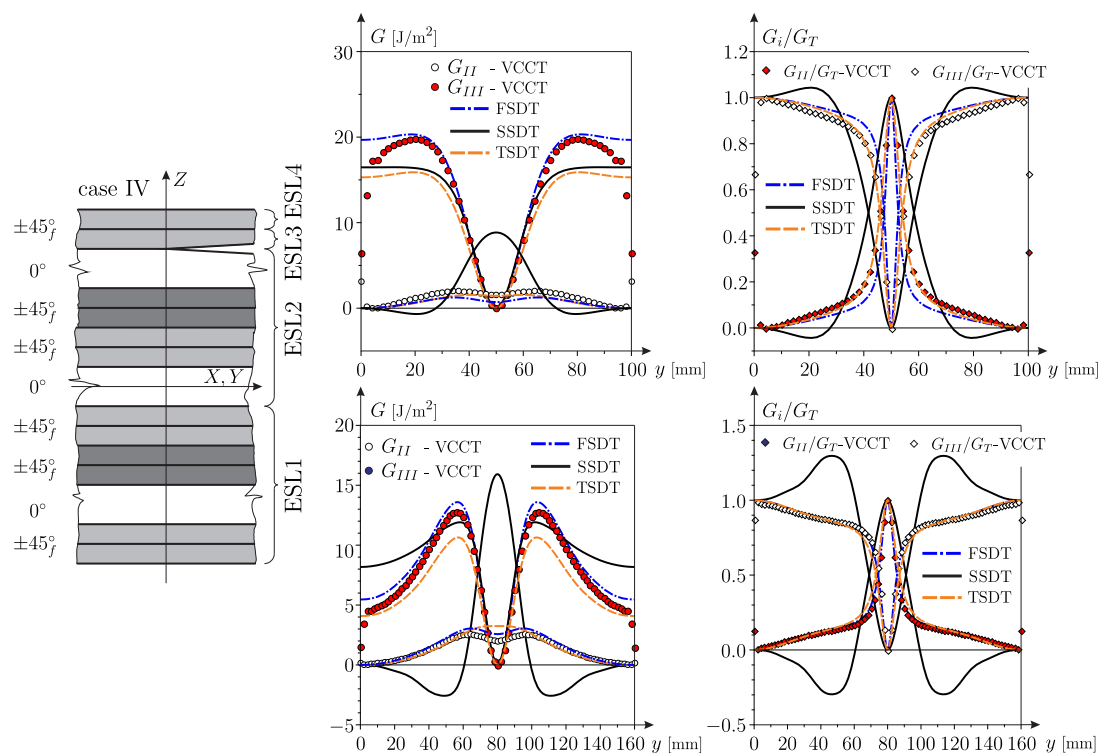
9. ábra. A J-integrál és a módusok arányának eloszlása a delaminációs front mentén az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - I. eset.



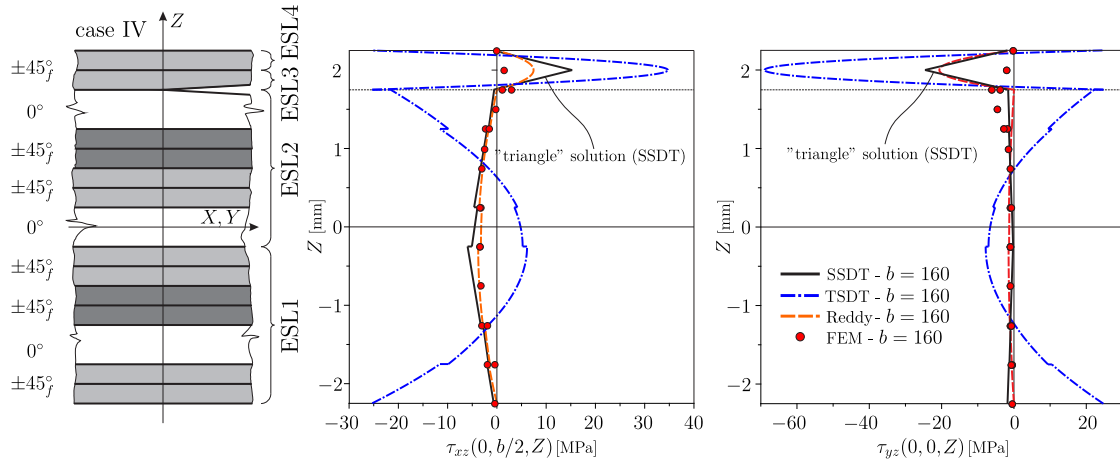
10. ábra. A J-integrál és a módusok arányának eloszlása a delaminációs front mentén az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - II. eset.



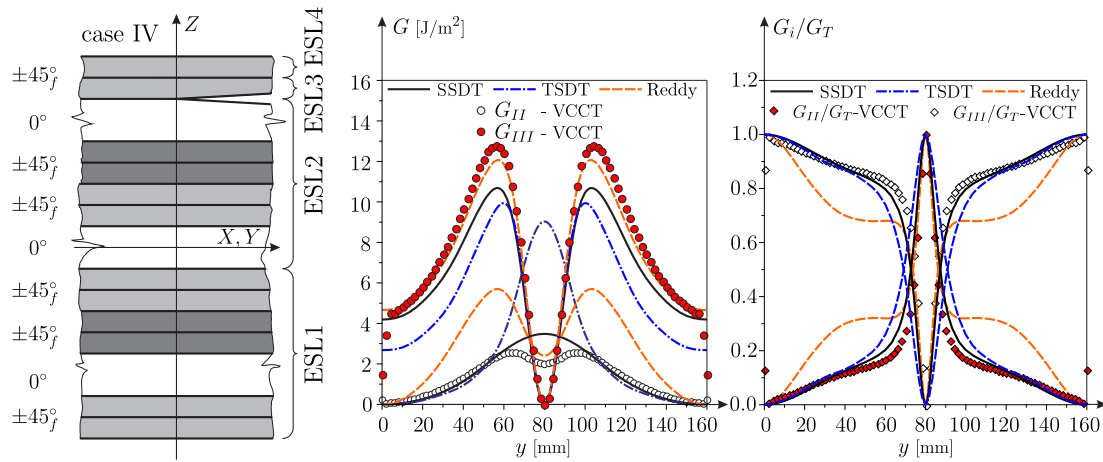
11. ábra. A J-integrál és a módusok arányának eloszlása a delaminációs front mentén az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - III. eset.



12. ábra. A J-integrál és a módusok arányának eloszlása a delaminációs front mentén az FSDT, SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel nélkül - IV. eset.



13. ábra. A transzverzális nyírófeszültségek eloszlása a delaminációs front menti keresztmetszetekben a Reddy (2ESL), SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel előírása mellett - IV. eset.



14. ábra. A J-integrál és a módusok arányának eloszlása a delaminációs front mentén a Reddy (2ESL), SSDT és TSDT modellek alapján 4ESL esetén, az SSCC feltétel előírása mellett - IV. eset.

Megjegyzés 5: A 3. és a 4. fejezetben változatlanul a tényleges dinamikai illesztési feltétel helyett a fajlagos szögtorzulások azonosságát használja fel (Lásd. (3.3), (3.4)).

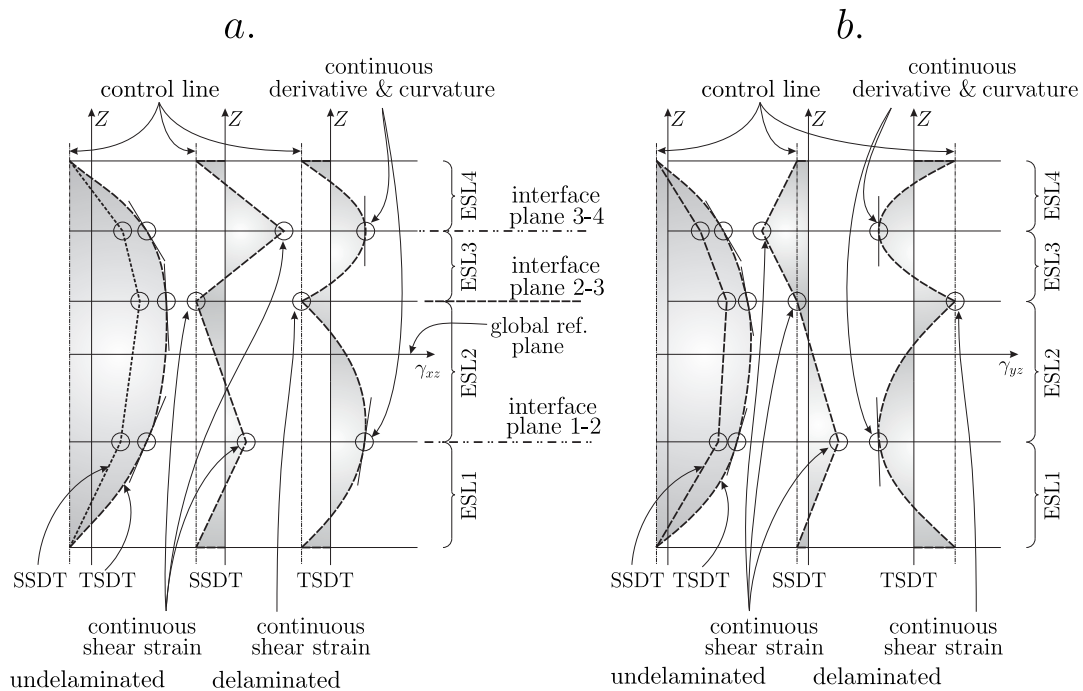
Válasz: Az előzőek (1.-4. megjegyzésekre adott válaszok) alapján erre a megjegyzésre is az a válasz, hogy a csúsztató feszültségek illesztése a leíró PDE rendszer megoldásakor azt eredményezi, hogy matematikai megoldás létezik ugyan, de az mechanikailag helytelen (túlkényszerezett modell illetve végtelenhez tartó konstansok).

Megjegyzés 6: A (4.7)-ben u_{0i} , v_{0i} írandó.

Válasz: A (4.7) egyenlet a 4.1 alfejezet szerint a nem delaminált részre vonatkozik, amelynél az ESL-ek együtt dolgoznak, így a globális membránmozgásokat helyesen u_0 és v_0 írja le, így az egyenlet véleményem szerint rendben van.

Megjegyzés 7: A (4.20)-ban $z^{(1)} = t_1/2$, $z^{(2)} = -t_2/2$, $z^{(3)} = t_3/2$, $z^{(4)} = -t_4/2$ írandó.

Válasz: A (4.20) egyenlet a 4.2 alfejezethez tartozik, amely a delaminált részre vonatkozik. A (4.20) egyenletben a szögváltozást szabályozó (SSCC) feltételt írtam elő és nem a szögváltozások folytonosságát (utóbbi esetben valóban akadémikus úr megjegyzése szerint lenne helyes az egyenlet). Az egyenlet helyességét igazolandó szeretnék hivatkozni a dolgozatban szereplő 4.3 ábrára, ami itt most a 15. ábra. Ennek megfelelően, ahol dinamikai peremfeltételt lehetne előírni, ott alkalmazzuk a szögváltozást szabályozó feltételt. Ezek a peremek a delaminált szakaszon ott vannak, ahol azt a (4.20) egyenlet megadja. Ez látható a 15.a és 15.b ábrák jobb oldalán. A szabályozó feltétel szerint a felső és alsó lemezek terheletlen peremein a nyírófeszültségek azonosak és egy ún. szabályozó egyenes mentén helyezkednek el.



15. ábra. A szögváltozást szabályozó feltétel és a szabályozó egyenes alap gondolata a nem delaminált és delaminált részekben.

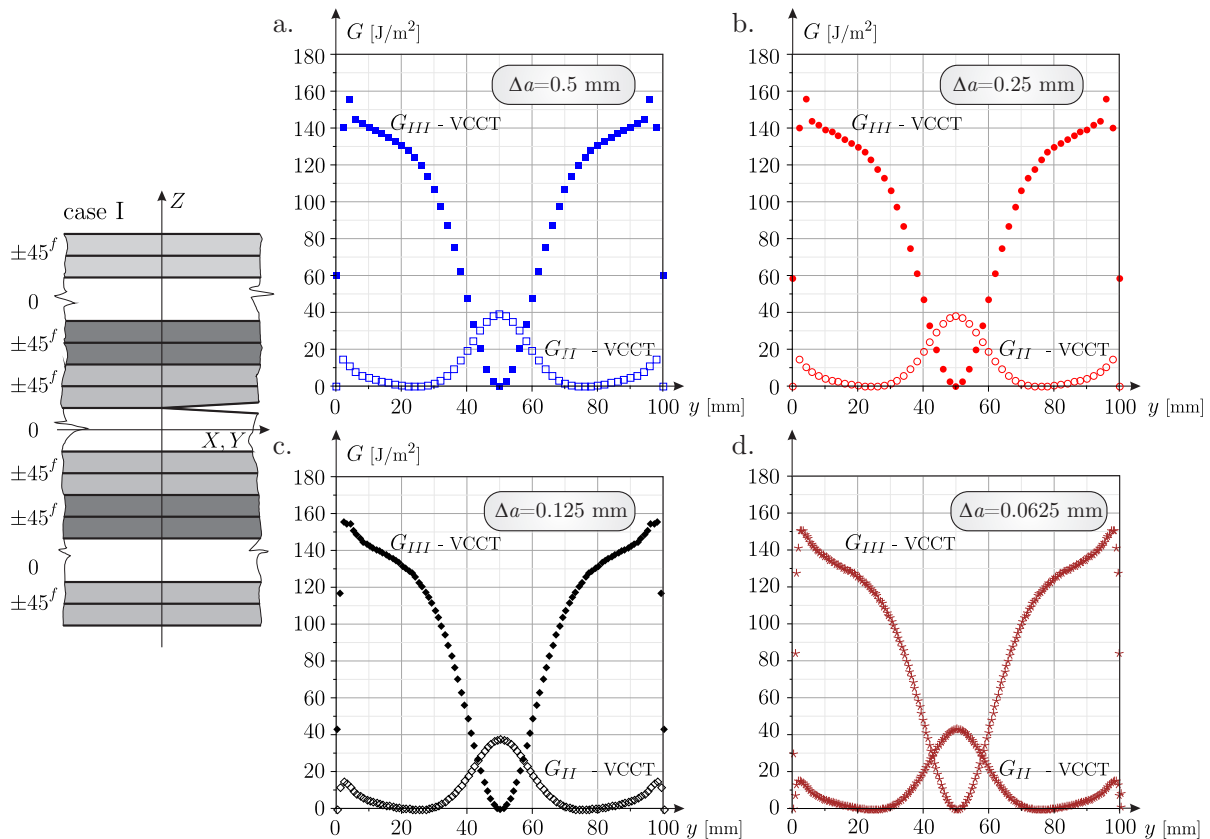
Megjegyzés 8: Az elvált részekben miért nem írjuk elő a $\tau_{pz} = 0|_{z^{(3)}=-t_3/2}, p = 1,2$, $\tau_{pz} = 0|_{z^{(2)}=t_2/2}, p = 1,2$ feltételt?

Válasz: Ennek a két feltételnek ez előírása szintén azt eredményezné, hogy a nyíróerők egyensúlyát kifejező PDEben megjelennének a $w(x, y)$ lehajlásfüggvény negyedrendű parciális deriváltjai, ami számítási tapasztalat alapján mindig problémát okoz, illetve túlkényszerezetté teszi a modellt. Ezt a két feltételt előírtam az 1.-2. ábrákon látható megoldásoknál is, ahol rossz eredmény adódott.

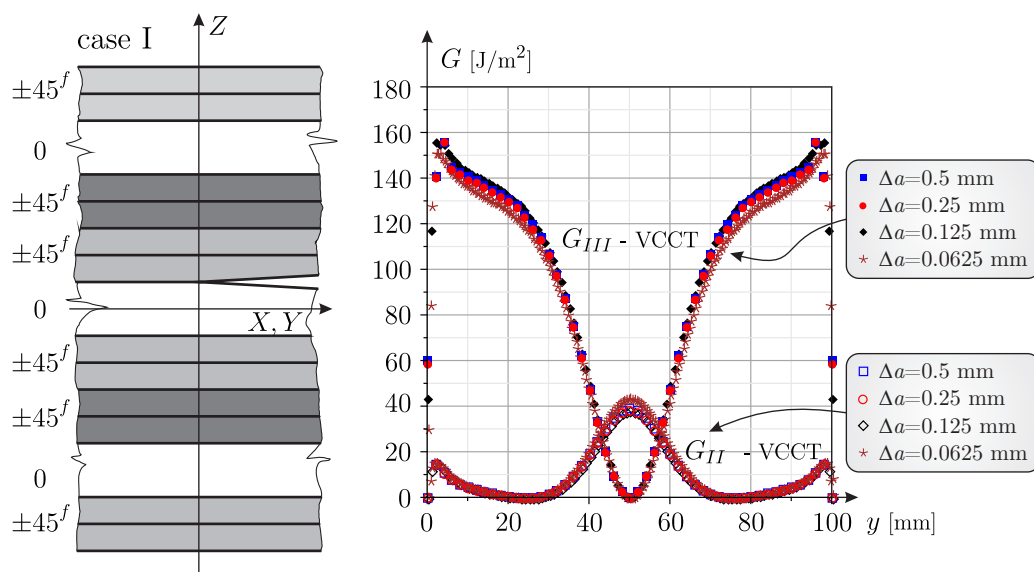
Megjegyzés 9: A kiszámolt eredményekből összeállított Table 7.1 és Table 7.2 összefoglalja a „jóság mértékét”, a megoldások sorrendiségét. Itt kulcsszerephez jut a VEM-es „alapmegoldás”, aminek, sajnos, a pontosságáról nincsenek információk.

Válasz: A statikai feladatoknál általában határozottan konvergálnak a mechanikai mezők komponensei (feszültség, alakváltozás, elmozdulás) a végelem háló finomítása mellett, ennek kiszámításával meghatározható a pontos eredményt adó elemméret adott hibakorlát mellett. A repedéseket, delaminációkat tartalmazó rétegelt szerkezetek esetén azonban a repedésfeszítő erő máshogy viselkedik. A szakirodalom szerint a repedésfeszítő erők esetén nem vezet pontosabb eredményhez az, ha a VE hálót a végletekig finomítjuk. Ennek oka, hogy a repedésfeszítő erők a két eltérő anyagú réteg delaminációs frontja körüli elemek méretének változtatása mellett oszcilláló jelleget mutatnak, azaz nem várható az a határozott konvergens eredmény, mint a hagyományos mezők esetén. Ennek bemutatása érdekében elvégeztem a repedésfeszítő erők számítását az I. esetre az @ feladatra négy különböző repedéscsúcs körüli legkisebb elemméret ($\Delta x = \Delta z = \Delta a = 0.5, 0.25, 0.125$ és 0.0625 mm, a Δy méretek sorra: 2, 2, 1 és 0.5 mm voltak) alkalmazásával. Az eredményeket a 16. ábra mutatja. Az elemméret csökkenése mellett az figyelhető meg, hogy a G_{II} értéke a delaminációs front mentén először egy nagyon kicsit csökken, amikor $\Delta x = \Delta z = \Delta a$ értéke 0.5-ről 0.25 mm-re csökken. Az érték nem változik akkor, ha összehasonlítjuk a $\Delta x = \Delta z = \Delta a = 0.25$ és 0.125 mm értékek esetén kapott eredményeket. Végül, ha a $\Delta x = \Delta z = \Delta a = 0.0625$ mm, akkor a G_{II} értéke a középső pontban láthatóan egy kicsivel növekszik. Ez az oszcilláló jelleg tovább folytatódna, ha még kisebb elemmérettel dolgoznánk. A 17. ábrán a négyféle elemmérettel kapott eredmények egy diagramban vannak ábrázolva. Ebből látható, hogy az oszcilláló jelleg a G_{III} esetén is hasonló.

A dolgozatban azért nincs szó a pontossági kérdésekről, mert ez az oszcilláló jelleg ismert és a szakirodalom leírja, hogy milyen elemmérettel célszerű dolgozni. Egész konkrétan az az ajánlás, hogy a $\Delta x = \Delta z = \Delta a$ méret egy darab réteg vastagságának fele és negyede közötti, vagy



16. ábra. A repedésfeszítő erők eloszlása a delaminációs front mentén a VCCT módszer alapján különböző elemméret mellett.



17. ábra. A repedésfeszítő erők eloszlása a delaminációs front mentén a VCCT módszer alapján különböző elemméret mellett - összesített diagram.

azzal megegyező érték legyen. A dolgozat 2.1 ábráján fel van tüntetve, hogy egy darab réteg vastagsága 0.5 mm. A dolgozat 6. fejezetének elején le van írva, hogy a repedéscsúcs körüli elemméret $\Delta x = \Delta z = \Delta a = 0.25$ mm, ami így megfelel a szakirodalom által előírt feltételnek. Az oszcilláló jelleg számításával foglalkozik többek között az alábbi két cikk:

- I.S. Raju, J.H. jr Crews and M.A. Aminpour, *Convergence of strain energy release rate components for edge-delaminated composite laminates*, *Engineering Fracture Mechanics* 1988, 30;3, 383-396
- D. Bruno, F. Greco and P. Lonetti. *A 3D delamination modelling technique based on plate and interface theories for laminated structures*. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 2005, 24:1, 127-149.

Az elemméretre vonatkozó ajánlás az első cikkben található meg. A második cikkben pedig megtalálható a repedésfeszítő erő oszcilláló jellegére vonatkozó eredmény. Mindkét cikkben látható a diagramok alapján, hogy a kisebb elemméret kedvezőtlenebb.

A végeelem modellek a szakirodalmi ajánlásnak megfelelő elemmérettel készültek, erre utaltam is a dolgozat 57. oldalán. Megjegyzem, hogy finomabb háló mellett bizonyosan pontosabb eredmények kaphatók pl. a transzverzális nyírófeszültségekre. Viszont, ha erre törekedtem volna, akkor minden kiszámolt esetre kétféle VE modellt kellett volna alkalmaznom, egyet a repedésfeszítő erőre vonatkozó feltételnek megfelelően, és egy másikat a feszültségek konvergenciáját figyelembe véve. Ez természetesen lehetséges, de úgy gondolom, hogy meghaladta volna a dolgozat kereteit. Az alkalmazott lemezelméletek rangsorolása a VE eredményekhez hasonlított repedésfeszítő erők és a lehajlásfüggvény alapján történt. Előzőre nézve a szakirodalom szerinti előírást betartottam, utóbbira nézve a dolgozatban bemutatott VE háló finomításának nincs hatása.

- 1. Tézis: A Megjegyzés 1-3 -ra adott választól függően tudom kialakítani álláspontomat a tézis elfogadásáról.
- 2. Tézis: Azzal a feltétellel fogadom el, hogy az ESL lemezek illesztésénél a két csatlakozó lemez anyagállandója azonos kell, hogy legyen.
- 3. Tézis: Itt is korlát a 2. Tézisnél említett feltétel teljessége.
- 4. Tézis: Elfogadom.
- 5. Tézis: Alkalmazásnak tekintem. Az új eredmények rangsorolásának „technikája” rendszerben van, de a konkrét eredmény függ a numerikus (VEM) közelítés pontosságától, amiről a jelen doktori disszertáció nem közöl adatokat.

Válasz:

①-②-③ Tézisek: akadémikus úr megjegyzéseire adott válaszokhoz szeretném hozzátenni, hogy az elmúlt években a dinamikai peremfeltétel előírásával és a feszültségek kapcsolósíkok menti folytonosságával kapcsolatban is nagyon sok próbálkozásom volt. Számos módon próbáltam ezeket figyelembe venni, de sohasem kaptam helyes eredményt. Szeretném azt is megjegyezni, hogy a dolgozat 11. oldalán az SSCC feltétel megadásakor utaltam arra, hogy a dinamikai peremfeltétel előírása túlkényszerezett modell eredményez. Szintén a 11. oldalon megjegyeztem, hogy (hibamentes lemezeknél) a layerwise modellek a feszültségek folytonosságán alapulnak. Ezzel szeretném kiemelni, hogy akadémikus úr által felvetett feltételek ismertek voltak számomra. Mindkét feltétel rossz megoldásra vezet delaminált lemezek esetén. Ellenben, amikor a dolgozatban megadott feltételeket alkalmaztam, akkor mindig helyes eredményt kaptam. Úgy gondoltam, hogy ebben a dolgozatban azokat a megoldásokat mutatom be, amelyek működnek és hatékonyak lehetnek lemez és hűtő típusú véges elemek kifejlesztéséhez. Megjegyzem, hogy a nem működő megoldásokról egy külön dolgozatot lehetett volna írni.

④ Tézis: a bírálattal egyetértek.

⑤ Tézis: a pontossági kérdésekkel valóban nem foglalkozik a dolgozat. Ennek oka, ahogy a 9. megjegyzésre adott válaszütemben leírtam, az, hogy a repedésfeszítő erő értéke az elemméret csökkenése mellett oszcilláló (illetve nem konvergáló) jellegűt mutat. Így a delaminációs front menti elemméret meghatározásához a szakirodalom által javasolt előírást vettem figyelembe, ahogy ezt az 57. oldalon meg is jegyeztem. A modell globális elemméretét is ennek megfelelően állítottam be. A tézis védelmében szeretném megemlíteni, hogy véleményem szerint fontos eredmény az, hogy a végelem eredményekkel való összehasonlítások alapján az SSDT modell nevezhető meg egy esetleges végelem típus kifejlesztésére alkalmas modellnek. Legjobb tudomásom szerint a tézis egy tudományos mű eredményeinek rövid összefoglalása. Véleményem szerint az ⑤ tézis ennek a meghatározásnak megfelel.

Végezetül szeretném megköszönni Dr. Páczelt István akadémikus úr részletes bírálatát valamint építő jellegű észrevételeit és kérem, hogy fogadja el a válaszaikat.

Budapest, 2017. április 6.

Szekrényes András