

Válasz Elek Gábor opponensi véleményére

Köszönöm, hogy az Opponens nem sajnálta a fáradságot a tudományterülettel kapcsolatos kritikájának kifejtésére és hálás vagyok a végkicsengésében pozitív értékelésért.

Reakcióim a területtel kapcsolatos kritikákra (az opponensi vélemény 1. része):

Valóban igaz, hogy a komplex hálózatokat „automatikusan” skálafüggetlennek tekinteni egy túlzó egyszerűsítés. Azzal is maximálisan egyetértek, hogy a bírálóban említett, A. Clauset és munkatársai által közölt publikáció egy nagyon fontos eredmény, melynek Google Scholar hivatkozottsága 5500 felett jár a válasz írásának idején. Viszont szeretnék arra rávilágítani, hogy a cikkben tanulmányozott 24 adatsorból csak 7-et szokás a komplex hálózatokhoz sorolni; ezek a fehérjekölcsönhatási-hálózat, a metabolikus hálózat, az Internet, a rendszertani törzsfá, az e-mail hálózat, a hivatkozási hálózat és a weblapok közti hálózat. A közlemény 4-5. táblázata alapján a 7-ből 2 esetben a tiszta hatványfüggvény jól illeszkedik az adatokra úgy, hogy közben a lognormális és a hatványfüggvény exponenciális levágással is nagyjából ugyanolyan jó (vagy kicsit jobb) illesztést ad. További 4 esetben a hatványfüggvény exponenciális levágással jobb illesztésnek bizonyult, míg egy esetben (a metabolikus hálózatnál) teljesen kizárható volt a hatványfüggvényyszerű viselkedés.

Ha szigorúan nézzük, az egyszerű preferenciális kapcsolódáson alapuló modellek és a „scale-free paradigma” tiszta hatványfüggvényt követő fokszámeloszlást jósolnak, és a hatványfüggvény exponenciális levágással ettől valóban eltér. Egy fizikus számára azonban ez utóbbi eloszlás még mindig közelebb van a tiszta hatványfüggvényhez, mint az említett cikkben is vizsgált lognormális eloszlás vagy nyújtott exponenciális eloszlás. Továbbá arra is szeretném felhívni a figyelmet, hogy az elmúlt 10 évben számos olyan cikk jelent meg, mely a fent említett publikáció ismeretében, sőt sok esetben egyenesen az abban leírt módszertan alapján állapította meg további hálózatokról azt, hogy a fokszámeloszlásuk jól illeszthető a hatványszerű függvények valamelyikével. Ezekben vizsgáltak különböző online közösségi média platformokat mint pl. a Twitter [1, 2], Flickr [3, 4, 2], Youtube [3, 4, 2], Livejournal [3], Delicious [2], tanulmányoztak génregulációs kapcsolatokat [5], bitcoin tranzakciókat [6], mobilhívási kapcsolatokat [7], tudományos együttműködések [8], wikipedia szerkesztők közti együttműködések [9],

kereskedelmi kapcsolatokat [10] és a légi közlekedést [11]. Ezek alapján ha a tiszta hatványfüggvény mellett az eltolt hatványfüggvényt és az exponenciális levágással rendelkező hatványfüggvényt is megengedjük a skálafüggetlenség fogalmán belül, akkor azért szép számban találunk hálózatokat, melyek adatai legalább is konzisztensek ezzel a paradigmával.

Azt is fontosnak tartom megemlíteni, hogy a fizikában és általánosabban a természettudományban gyakran előfordul, hogy egy egyszerű modell által jósolt egyszerű eloszlás általános esetben nem ad pontos illeszkedést a valóságban megfigyelhető adatokra, csak bizonyos megkötésekkel, bizonyos paramétertartományban, speciális körülmények között. Ennek fényében a hálózatkutatók többségének nem okoz problémát az, hogy a Barabási-Albert-modell tiszta hatványfüggvényt jósol, az adatok egy konkrét rendszer vizsgálatánál ezzel szemben meg pl. eltolt vagy exponenciális levágással rendelkező hatványfüggvényt mutatnak. Az igaz, hogy a terület indulásakor, a 2000-es évek elején talán nagyobb felhajtás övezte a skálafüggetlenség fogalmát mint amekkora az adatok precíz vizsgálata alapján indokolt lett volna, viszont a kutatások fókuszsa később hamar áttolódott más fogalmak felé, és egyre több és több új kutatási irány nyílt meg, melyek mentén mára ez a tudományterület is fragmentálódni látszik egymással csak minimális átfedésben lévő részterületekre. Én úgy látom, hogy a preferenciális kapcsolódáson alapuló modellek illetve a „scale-free” paradigma helye és szerepe a hálózatkutatásban nagyjából olyan, mint az ideális gázmodellé a termodinamikában: nem gondoljuk azt, hogy végtelenségig precíz leírást ad egy valódi hálózat viselkedéséről, de ennek ellenére egy hasznos modellrendszer és referenciapont, mely kellően egyszerű és intuitív ahhoz, hogy akár egy alapszintű egyetemi oktatás keretein belül is el lehessen mondani.

Válaszaim az értekezés módszereivel kapcsolatos kritikákra (az opponensi vélemény 2. része):

Elfogadom, hogy a topológiai fázisátalakulásokra és a k -klikkperkolációs küszöbre vonatkozó eredményeink matematikai szempontból nehezen értelmezhetők, hiszen nem egzakt bizonyításokon alapulnak. Ennek ellenére az ilyen jellegű vizsgálatoknak, levezetéseknek ezen a területen van létjogosultsága, hiszen ahogy az Opponens is rámutatott, pl. a Barabási-Albert-moddellel kapcsolatos első publikációk eredményei sem tekinthetők matematikai szempontból teljesen precíznek. A k -klikkperkoláció kritikus pontját taglaló publikációinknak szerintem egy vitathatatlan érdeme, hogy felhívták a figyelmet egy olyan problémára, melyet tisztán matematikai szempontból is érdekes vizsgálni. Ezt alátámasztja az, hogy a kritikus pontra vonat-

kozó eredményünk helyességét később matematikusok egzaktul is bebizonyították, mint ahogy az a dolgozat függelékében és az opponensi véleményben is szerepelt.

A multifraktál alapú véletlengráf-modell esetén a fokszámeloszlást szemléletesen az egységnyizeten definiált multifraktál függőleges vagy vízszintes vetülete alapján lehet kiszámolni. Az izolált csúcsok problémájának ez alapján az a magyarázata, hogy az általunk javasolt multifraktál számára a függőleges és vízszintes irányok kitüntetettek abból a szempontból, hogy az ezen irányok mentén kapott vetületek szintén multifraktálok. Emiatt ha végtelenhez tartunk az iterációk számával, akkor a vetület mentén véletlenszerűen leszórt pontok egyhez tartó hányada fog olyan szakaszra esni, melyhez tartozó élvalószínűség nullához tart. Ezen szemléletes kép alapján az az ötlet merült fel a probléma kiküszöbölésére, hogy változtassuk meg a multifraktált úgy, hogy a függőleges és vízszintes irányok ne legyenek kitüntetettek, és ez által a fokszámeloszlás szempontjából fontos vetületek már nem lesznek multifraktálok. Egy későbbi, (a disszertációban csak mint kapcsolódó további publikációként felsorolt) cikkben ezt a multifraktál elforgatásával értük el [12]. Természetesen ez a publikáció sem bizonyít egzaktul semmit, de ötletfelvetésnek a fenti probléma megoldására szerintem mindenképp elfogadható.

Arról, hogy miért lehet egy szociológus vagy biológus számára érdekes a multifraktál alapú véletlengráf-modell, én azt gondolom, hogy az inherensen hierarchikus szerkezete miatt. A modell megalkotásánál intuícióink egy része pont az olyan nagyobb szervezetek struktúrájával kapcsolatos tapasztalatokon alapult mint egy egyetem vagy egy multinacionális vállalat. Ezek általában hierarchikusan szerveződnek, például az egyetemek általában karokból állnak, a karok intézetekre vagy tanszékekre bonthatók, stb. Hasonló bennfoglalási hierarchiákat a biológiában is találunk, például egy soksejtű élőlény esetén egy sejt általában sejtszervecskéket tartalmaz, maga a sejt része egy szövetnek, ami része egy szervnek. A hierarchikusan szerveződő intézmények példájánál maradva általában a hierarchia legalsó szintjén lévő egységek belső hálózata a legsűrűbb (hiszen egy kutatócsoporton vagy tanszéken belül szinte mindenki ismer mindenkit), és ahogy megyünk felfelé a hierarchiában, válik a hálózat egyre ritkábbá. Emellett bizonyos fokú önhasonlóságot is mutat a rendszer, például a tanszékeknek és a karoknak is van vezetője, titkársága. A multifraktál alapú hálózatmodellünk esetén az egységnyizeten definiált élvalószínűségi mérték szerkezete erre emlékeztet, hiszen a rekurzió révén a cellák egy önhasonló bennfoglalási hierarchiát alkotnak.

Válaszom az értekezéssel kapcsolatos kérdésre:

A dolgozatban érintett problémák közül a k -klikkperkolációval kapcsolatban már születtek matematikailag precíz eredmények Ráth Balázs és Tóth Bálint cikkének [13] valamint Bollobás Béla és Oliver Riordan munkásságának [14] köszönhetően, ahogy az a disszertáció B. függelékében és az Opponens bírálatában is szerepel. Emellett a multifraktál alapú véletlengráfmodell esetén érzem azt, hogy születhetnek még matematikailag precíz, érdekes eredmények. Ahogy az értekezés módszereivel kapcsolatos kritikákra adott válaszban kifejtettem, az iterációk illetve a rendszerméret függvényében egyre nagyobb hányadban izolálódó csúcsok problémája szerintem az általunk konkrétan megadott multifraktál „hibája”, mert szerencsétlen módon a vízszintes és függőleges vetületei is szingulárisak. A multifraktál alapú gráfsorozat generálás ettől még működhet olyan multifraktál esetén, melynek a vetülete nem szinguláris, és ez talán lehet érdekes matematikai szempontból is.

A csoportok időfejlődésével kapcsolatos eredmények erősen adatvezéreltek, konkrét hálózatok időfejlődésével kapcsolatos megfigyeléseken alapsznak, ezért ezek esetében szerintem nem merül fel matematikailag egzakt állítások, bizonyítások kidolgozása. A topológiai fázisátalakulások kapcsán nem kizárt, hogy lehetséges matematikailag precízebb állításokat megfogalmazni mint amik a dolgozatban szerepelnek, viszont nem hiszem, hogy ezek olyan érdemi újdonságot jelenthetnének, ami megéri a kidolgozásukba vetett fáradságot.

2017. november 17.

Palla Gergely

Hivatkozások

- [1] Bliss CA, Kloumann IM, Harris KD, Danforth CM, Dodds PS. Twitter reciprocal reply networks exhibit assortativity with respect to happiness. *J Comput Sci.* 2012;3:388 – 397.
- [2] Zhou T, Matúš M, Cimini G, and Y C Zhang ZKZ. Emergence of Scale-Free Leadership Structure in Social Recommender Systems. *PLOS ONE.* 2011;6:e20648.
- [3] Mislove A, Marcon M, Gummadi KP, Druschel P, Bhattacharjee B. Measurement and Analysis of Online Social Networks. In: *In Proceedings of ACM Internet Measurement Conference (IMC'07); 2007.* .
- [4] Cui AX, Zhang ZK, Tang M, Hui PM, Fu Y. Emergence of Scale-Free Close-Knit Friendship Structure in Online Social Networks. *PLoS ONE.* 2012;7:e50702.
- [5] Freyre-González JA, Tauch A. Functional architecture and global properties of the *Corynebacterium glutamicum* regulatory network: Novel insights from a dataset with a high genomic coverage. *J Biotech.* 2017;257:199 – 210.
- [6] Kondor D, Pósfai M, Csabai I, Vattay G. Do the Rich Get Richer? An Empirical Analysis of the Bitcoin Transaction Network. *PLoS ONE.* 2014;9:e86197.
- [7] Li MX, Jiang ZQ, Xie WJ, Micciché S, Tumminello M, Zhou WX, et al. A comparative analysis of the statistical properties of large mobile phone calling networks. *Sci Rep.* 2014;4:5132.
- [8] Araújo EB, Moreira A, Furtado V, Pequeno THC, Jr JSA. Collaboration Networks from a Large CV Database: Dynamics, Topology and Bonus Impact. *PLoS ONE.* 2014;9:e90537.
- [9] Muchnik L, Pei S, Parra LC, Reis SDS, J S Andrade Jr SH, Makse HA. Origins of power-law degree distribution in the heterogeneity of human activity in social networks. *Sci Rep.* 2013;3:1783.
- [10] Wang J, Zhou S, Guan J. Characteristics of real futures trading networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2011;390:398 – 409.

- [11] Neal Z. The devil is in the details: Differences in air traffic networks by scale, species and season. *Soc Net.* 2014;38:63–73.
- [12] Palla G, Pollner P, Vicsek T. Rotated multifractal network generator. *J Stat Mech.* 2011;p. P02003.
- [13] Ráth B, Tóth B. Triangle Percolation in Mean Field Random Graphs—with PDE. *J Stat Phys.* 2008;131:385–391.
- [14] Bollobás B, Riordan O. Clique percolation. *Random Struct Algor.* 2009;35:294–322.