MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS

STRUKTURÁLT RENDSZEREK KVALITATÍV VIZSGÁLATA

Dr. Molnár Sándor

Gödöllő
2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az 1. fejezetben megadtam a dolgozat célkitűzésének eléréséhez szükséges algebrai fogalmak összefoglalását, értelmezve többek között a gyűrű, a differenciálgyűrű, az algebrai, illetve differenciálalgebrai függés, függetlenség, a differenciálpolinom, és az algebrai differenciálegyenlet fogalmát [10], [7], [2]. A paraméterváltozós irányítási rendszerek vizsgálatához az állapottól, ill. a kimenetektől függő paraméterek esetén a parciális differenciálgyűrűk néhány elemi tulajdonságaira is szükségem volt az egységes módszertani keretek végett. Az a természetes, hogy a bemeneteknek a deriváltjai is szerepelhetnek mind az állapottérben megfogalmazott irányítási differenciálegyenletekben, mind a kimenetekben. Ezzel természetes módon adódik a Kalman-féle kanonikus alakoknál is általánosabb ún. Fliess-féle kanonikus alak [29] [54]. Beszélhetünk lineáris rendszerekről is, amikor az adott leíró egyenletek lineárisak az állapotváltozókban és a bemenetekben, ill. azok deriváltjaiban is. Hogy ezek a fogalmak mennyire használhatóak, arra mutatok egy érdekes eredményt, amely általánosítja a klasszikus Kalman-féle mátrix-rangfeltételt [6] és a Fliess-féle [29] kanonikus alakban megadott állandó együtthatós lineáris rendszereket is.

Legyen a vizsgált rendszer a (derivált Fliess-féle jelölésével)

$$dx = Ax + \sum_{i=0}^{I} B_i d^i u$$
$$y = Cx + \sum_{i=0}^{I} D_i d^i u.$$

Ennek az elérhetőségét tekintve a

$$\operatorname{rang}\left[\sum_{i=0}^{I} A^i B_i, A\left(\sum_{i=0}^{I} A^i B_i\right), \ldots, A^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{I} A^i B_i\right)\right] = n$$

feltétel szükséges és elégséges.

Ez a Kalman-féle rangfeltétel általánosítása.

A paraméterváltozós irányítási rendszerek közül számomra különösen fontos egy speciálisan strukturált rendszer, mely az ún. vertikum típusú hierachiával rendelkezik. Ezeket is leírtam a differenciálalgebrák keretében. Az a fontos speciális eset, amelyben a paraméter állapotfüggő, a parciális differenciálalgebrák körében megfogalmazott módszertan segítségével tárgyalható, amelyeket így szintén felsoroltam a használt fogalmaim között. A lineáris vertikum típusú rendszerek kanonikus alakját is felírtam, ugyanis ezeket a további fejezetekben részletesen tárgyalom.

A teljesség kedvéért ugyan megadtam a differenciálalgebrák keretében a rendszermérnökök által sokat vizsgált megfigyelő és szabályozó fogalmát is, de a dolgozatban erre nem lesz szükség a továbbiakban.

A 2. fejezetben a lineáris, időtől függő rendszerek ún. rendszertulajdonságaival foglalkoztam.

Rendszertulajdonságokon a bemenet-kimenet rendszerek 0-ból való elérhetőségét, 0-ba irányíthatóságát, megfigyelhetőségét és rekonstruálhatóságát, valamint valamilyen típusú stabilitását értem. Ez utóbbival nem foglalkoztam átfogóan, mert a klasszikus Ljapunov-féle módszerek, a Riccati-egyenletes jellemzések lényegében megoldják a problémát ebben a rendszerosztályban.

A klasszikus kanonikus alakú

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

időtől függő együtthatós rendszerekre R. Kalman minden alapkérdést megoldott. Bebizonyította, az általa definiált alapvető fogalmakat illetően (elérhetőség, irányíthatóság, megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság) az elérhetőség és megfigyelhetőség, illetve az irányíthatóság és rekonstruálhatóság közötti dualitást, valamint a folytonos idejű (2.1) alakú rendszerekre fennálló elérhetőség és irányíthatóság, valamint megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság párok ekvivalenciáját. Ennek értelmében csak egyetlen rendszertulajdonsággal, az elérhetőséggel fogok foglalkozni.

Említettem a módszertani összefoglalóban, hogy a Fliess-féle állandó együtthatós kanonikus alakban felírható rendszerekre is bizonyítható egyfajta általánosított Kalman-féle rangfeltétel. Ennek megfelelően lehetne tárgyalni a Fliess-féle [29] kanonikus alakú lineáris időfüggő rendszerek általánosítását is.

A Kalman-Gram-féle mátrix vizsgálatán alapuló irányíthatósági feltétel az alapmátrix alaposabb ismeretét feltételezi [6]. Ezért az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t) = I$$

mátrixértékű differenciálegyenlet megoldásának az exponenciális szorzatokként való előállítására, a Wei-Norman tételre alapoztam vizsgálataim [4].

Ebből a célból ismertettem a Lie algebrák fogalmát és ehhez kapcsolódóan néhány elemi állítást.

A 2.1. Tétel kapcsolatot teremt az elérhetőség Gram-féle mátrixos jellemzése és az általánosított Kalman-féle rangfeltétellel megfogalmazott szükséges és elégséges feltétel között. Ez azonban nem teljesen zökkenőmentes, ui. szükségem volt további, az időfüggő együtthatókra vonatkozó differenciálalgebrai feltételekre is, az ún. gerjesztési feltételekre. Ezeket úgy kaptam meg, hogy a Wei-Norman-féle differenciálegyenletre alkalmaztam a Diop-féle állapoteliminációs algoritmust [4], [28].

A 3. fejezetben az előző fejezethez hasonlóan strukturált rendszert vizsgáltam, de az időtől függő együtthatók helyett állapotfüggést feltételeztem. Kisebb egyszerűsítést végeztem azzal, hogy a bemenetről feltételezzem, hogy egydimenziós:

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^{I} p_i(t)A_i x + q(t)Bu.$$

Ez segít abban, hogy később olyan LPV rendszereket is vizsgáljak, amelyben a paraméter állapotfüggő. A felhasznált módszer hasonlít az előző fejezetben alkalmazotthoz, de ahhoz, hogy áttekinthetővé tegyem a deriválással kapott részletszámításaimat, bevezetem a vektorterek Lie-algebrájának néhány alapvető fogalmát és a jelölését.

A 3.2. Tételem a speciális

$$\dot{x} = p(x)Ax + q(x)Bu$$

rendszerre vonatkozik.

Bebizonyítottam, hogy ha a $p(x)$ együttható teljesít egy ún. gerjesztési feltételt, amely egy p-re vonatkozó parciális differenciálegyenlet nem teljesülését jelenti, akkor kivéve egy nem sűrű szinguláris felületet, a rendszer lokális irányíthatóságának a feltétele a jól ismert

$$\mathrm{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

Kalman-féle feltétel lesz [31], [35], [34], [44]. A lokalitás ebben az esetben azt jelenti, hogy a szingularitási felület felbonthatja több nyílt komponensre az állapotteret, amelyek együttesen sűrű halmazt alkotnak ugyan, de nem feltétlenül lehet egyik komponensről a másikra irányítani a rendszert.

Az általános tételt hasonlóképpen igazolhattam, egy technikailag finomított módszerrel. Az általánosított, un. perzisztens gerjesztési tétel hasonlót állít. A gerjesztési feltételek teljesülése esetén a lokális irányíthatóság szükséges és elégséges feltétele az általánosított Kalman-féle rangfeltétel teljesülése.

A 4. fejezetben egy eddig nem alkalmazott módszert fejlesztettem ki abból a célból, hogy az eddigi eredményeim segítségével korábban nem remélt kapcsolatokat építsek távolinak hitt területek között.

Lineáris irányítási rendszerek optimalizálása a lineáris programozáshoz hasonlóan viselkedik, ugyanis az optimumot adó irányítások egy konvex poliéder alakú irányítási paraméter-tartomány esetén a csúcsokból veszik az optimális értékeket. Ezt már L.S. Pontryagin és tanítványai is észrevették [3]. R. Gamkrelidze az optimális irányítások minőségi vizsgálataiból kiindulva bebizonyított egy approximációs tételt [9]:

Ha az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

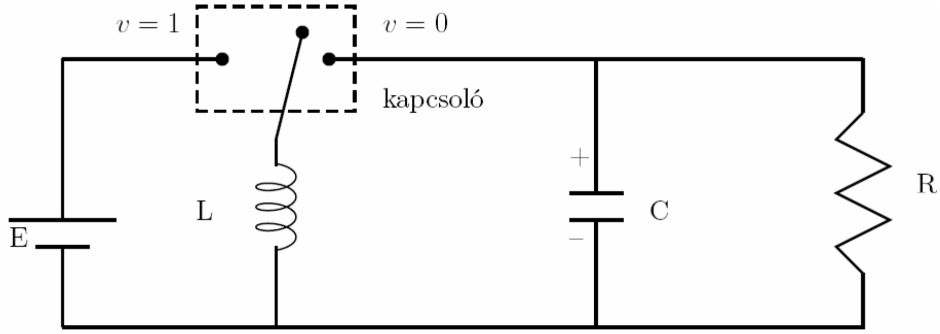
LTV rendszert a k-dimenziós $\mathcal{U} = \mathop{\times}\limits_{1}^{k}[0,1]$ egységkockából vett $u(t)$ irányításokra tekintjük, akkor minden szakaszonként folytonos $u : [0,T] \to \mathcal{U}$ irányításhoz és előírt pontossághoz található olyan, szakaszonként konstans $v : [0,T] \to \mathcal{U}$, amelynek az értékei a kocka csúcsaiból vannak, de a megfelelő trajektóriák az előírt pontossággal közel maradnak egymáshoz az egész időintervallumon.

Most mutatok egy hasonló, a mérnök gyakorlatból vett, az optimumszámítástól meglehetősen távoli kiinduló példát [71].

Tekintsük az ún. Buck-Boost-konverter áramkörét:

A $v(t)$ szakaszonként 0, 1-et felvevő függvény írja le a kapcsoló állását, ahogy az az ábrán is látható. A valamilyen szempontból ideális viselkedést egy szakaszonként folytonos $u : (0,t) \to [0,1]$ függvénnyel jellemezhetjük, az áramkört pedig

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= (1-u)x_2 + uE \\ C\dot{x}_2 &= -(1-u)x_1 - \frac{x_2}{R} \end{aligned} \tag{2}$$



1. ábra

differenciálegyenlettel írjuk le. Itt a x_1 a tekercsen átfolyó áramerősségét, x_2 a kondenzátoron eső feszültséget jelöli.

Egy kívánt ideális viselkedést leíró, szakaszonként folytonos $u : [0, T] \to [0, 1]$ függvényt természetesen nem állíthatok elő a kapcsoló ki-be kapcsolásával, amelyre az $u(t)$ csak 0, vagy 1 értéket vehet fel. Felvethető itt is, hogy előírt pontossághoz lehet-e olyan kapcsolássorozatot előállítani, amelyre a tekercs áramerőssége x_1, illetve a kondenzátor feszültsége x_2, előírt pontossággal közelíti meg az ideális viselkedést. A jelenséget leíró differenciálegyenlet-rendszer bilineáris, ezért az idézett Gamkrelidze-tétel erre az „egyszerű" modellre nem is alkalmazható.

Ebből kiindulva egy nagyon általános approximációs problémát tekintettem és oldottam meg, mely megalapozza az ún. kapcsolási (switching) rendszerek további vizsgálatát, egybefogva nagyon különböző jellegű rendszerelméleti problémákat. A Buck-Boost konvertert tekintjük a „switching" rendszerek paradigmájának, mely ezeknek a rendszereknek a nevét is adta.

Az LPV rendszerek bevezetése a Buck-Boost-konverterből kiindulva: A fenti rendszer nemlineáris, ezért a Gamkrelidze-féle approximációs tétel [9] kereteibe nem illeszthető. Linearizálás helyett egy paramétert vezetek be a $\binom{x_1}{x_2}$ állapot helyébe, amivel formailag „lineárissá" válik a rendszer. Az L és a C fizikai állandókkal leosztva (4.3) átírható a következőképpen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{L}x_2 + \left(\frac{E}{L} - p_2\frac{1}{L}\right)u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 + \frac{1}{C}p_1 u. \end{aligned} \tag{3}$$

Két approximációs tételt bizonyítottam LPV rendszerek közelítésére. Az első tételben az irányítási paraméterek $\mathcal{U}$ halmaza konvex poliéder, az $A(p, t)$ és a $B(p, t)$ struktúramátrixok pedig megszokott folytonossági feltételeket teljesítenek. Ekkor tetszőleges pontosságot előírva, lehet olyan, az $u : (0, t) \to \mathcal{U}$ kontrollt approximáló $v : (0, t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként konstans kontrollt definiálni, amelynek az értékei az $\mathcal{U}$ csúcspontjaiból vannak, és olyan, a $p(t)$ paraméterfüggvény pontonként jól approximáló szakaszonként konstans $g(t)$ függvényt megadni, hogy a megfelelő trajektóriák az adott pontossággal közeliek maradnak az adott időintervallumban. Ez a tétel a Gamkrelidze-féle approximációs tétel általánosítása, amiből az eredetit úgy kapjuk meg, hogy az $A(p, t)$ és a $B(p, t)$ konstansok a p-változóban. A 4.2. approximációs tétel esetén feltételeztem, hogy az $A(p, t)$ és a $B(p, t)$ lineárisak a p paraméterfüggvényében, és a p paraméter egy adott $\mathcal{P}$ konvex poliéderből veszi az értékeit. Ekkor a $p : \mathbb{R} \to \mathcal{P}$, állapotváltozós paraméterhez található olyan szakaszonként konstans $q : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}$ állapotfüggő paraméterfüggvény, amely a $\mathcal{P}$ csúcspontjaiból veszi az értékeit. (Tehát a paraméterfüggvénynek sem kell pontonként jól approximálni). A megfelelő trajektóriák mégis az egész időintervallumon az adott pontossággal közel maradnak egymáshoz. Egy példán bemutatom, hogy adott időintervallumhoz lehet olyan $[-M, M] \times [-M, M]$ négyzetet megadni, hogy Buck-Boost konverterre a (4.3) és (4.5) modell helyett olyan szakaszonként konstans modelleket is használhatunk, amelyben a bilineáris tagokban a tekercs x_1 áramerőssége helyett $\pm M$-et, a kondenzátor x_2 feszültsége helyett is $\pm M$-et beírva, az

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= x_2 + (E \pm M)u, \\ C\dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{1}{R}x_2 \pm Mu. \end{aligned} \tag{4}$$

közelítéssel tetszőleges pontosságot elérhetünk.

Ezzel áramkörrel nem realizált (4.13) modelleket kapcsolgatva approximálhatok egy fizikailag realizálható áramkörnek tetszőleges pontosságú közelítését. Ez pedig már tisztán a digitális kontroll témaköre lehet, amely az utóbbi időben kimondottan fontos terület.

Az 5. fejezetben a 4. fejezet approximációs tételeit figyelembe véve visszatérek a 2. és 3. fejezetben tárgyalt rendszerek vizsgálatára.

Ezen irányítási rendszerek vizsgálatának a célja, – legyen az műszaki, közgazdasági, biológiai, pl. populációdinamikai rendszer, – mindig az, hogy előkészítsen döntéseket, döntéssorozatokat (irányításokat) melyekkel úgy lehet befolyásolni az adott rendszert, hogy az stabilan működjön, megvalósítva a kívánt célt. Ennek érdekében fontos ún. rendszer-tulajdonságokat kell vizsgálni. Ezek legfontosabbika a rendszerek irányíthatósága, megfigyelhetősége. Ezen tulajdonságok részletes és pontos vizsgálatára szükségünk van akkor, amikor a rendszer optimális működésével kapcsolatos döntéseket meghozzuk.

Bevezető példám egy stabilitásra vonatkozó anomáliára mutat: két aszimptotikusan stabilis rendszert kapcsolgatva, a kapcsolások időpontjának megválasztásától függően kaphatunk aszimptotikusan stabilis és instabilis kapcsolási rendszert is. Ez is mutatja, hogy módszeremmel nem tudjuk a stabilitás kérdéseit tárgyalni a kapcsolási rendszerekre.

A szokásos definíció szerint teljesen irányítható egy irányított rendszer, ha bármely kezdőállapotból bármely végállapotba átvihető a rendszer az irányítás alkalmas megválasztásával. Majd a differenciálegyenletek elméletéből ismert integrálási eljárások követésével jellemezhető az irányíthatóság a rendszer paraméterei segítségével, azaz az irányíthatóság a rendszer belső tulajdonsága, amelyben sem az állapot fogalma, sem az integrálási eljárás mibenléte nem játszik szerepet. Pommaret [43] eredeti módon interpretálja az irányíthatóságot a gyakorlati irányítási szakember szemszögéből. A rendszer műszerei méréseket végeznek, amelyek a rendszer és a mérőműszerek dinamikájának megfelelően az irányításoktól és azok deriváltjaitól függnek. Akkor irányítható a rendszer, ha tetszőleges mérés esetén mért függvényre igaz, hogy csak az irányítás segítségével előállítható. Ez nyilvánvalóan nincs így, ha egy mérés kielégíthet egy olyan differenciálegyenletet, amelyik független az irányításoktól, azaz ilyenkor a rendszer nem irányítható. Lineáris rendszerekre ebből az irányítási fogalomból levezethetők a szokásos rangfeltételek. De ez a megközelítés nagymértékben általánosítható parciális differenciálegyenletekkel leírható, nemlineáris rendszerekre is, a megfelelő matematikai apparátus segítségével.

Az 5.1. Tétel az időtől függő paraméteres LPV rendszerre vonatkozik. Azt bizonyítjuk, hogy az 4.1. approximációs tétel által leírt approximációra nézve az irányítható rendszereket közelítő rendszerek is irányíthatóak. Nehéz lenne a rendszerek objektumában topológiát bevezetve arról beszélni, hogy erre nézve az irányítható rendszer elég kis környezetében levő rendszerek is irányíthatók, ezért beszélek az approximációs tétel szerinti közelség terminusában. Ennek a megjegyzésnek fokozottan nagy a jelentősége, amikor a 4.2. approximációs tétel szerinti approximáló kapcsolási rendszerekről bizonyítjuk azok irányíthatóságát, ui. abban a $\mathbf{p}$ paraméterfüggvény approximációját szakaszonként konstans, csak egy konvex poliéder csúcsaiból vett értékekkel approximáljuk, ami pontonként nem approximálja jól a szakaszonként folytonos $\mathbf{p}(t)$ függvényt.

A Riccati-féle differenciálegyenlet segítségével adható irányíthatósági vizsgálatok és a Kalman-féle mátrix rangfeltételek kapcsolata az approximációs tételek tükrében nagyon természetesen vetődik fel. A mátrix Lie-algebrák elemeinek felhasználásával, a rendszertulajdonságok csupán Wei-Norman-féle [4] exponenciális szorzat alkalmazásával is tárgyalhatók. Csupán lineáris algebrai eliminációval kaphatók az előző fejezetekben említett gerjesztési feltételek is. Nem lesz szükségünk a Diop-féle [28] differenciálalgebrai eliminációra, 5.3. Tétel.

A p-ben lineáris $A(p)$ és $B(p)$ mátrixok segítségével adott LPV rendszerekre is elvégezhetők az állapotfüggés esetén is mindazok az elemi átalakítások, amelyeket az időváltozós paraméterek esetére elvégeztem. Az általánosított Kalman-féle rangfeltétel [31], [32], [35], [34] azonban csak szükségességet ad az irányíthatóságra, a lineáris algebrai eliminációból adódó „gerjesztési" feltétel is csak azt adja, hogy egy pontból elérhető pontok halmaza (elérhetőségi halmaz, amely általában nem altér) kifeszíti az egész teret, de nem lesz a rendszer irányítható. Ennek az oka az, hogy egy

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{K} a_k(x) A_k x + \sum_{l=1}^{L} b_l(x) B_l u$$

rendszer elérhetőségi halmaza egy nemlineáris altér, hanem valamely esetleg szingularitásokat is tartalmazó felület. Ezt egy példán is bemutatom.

Egy hasonló példán azt is megmutatom, hogy LPV rendszer esetén előfordulhat, hogy minél pontosabb approximációt hajtunk végre az irányíthatósági tulajdonságok egyre romlanak.

A módszertani bevezetőben absztraktan már definiáltam a vertikum típusú rendszerek speciális struktúráját.

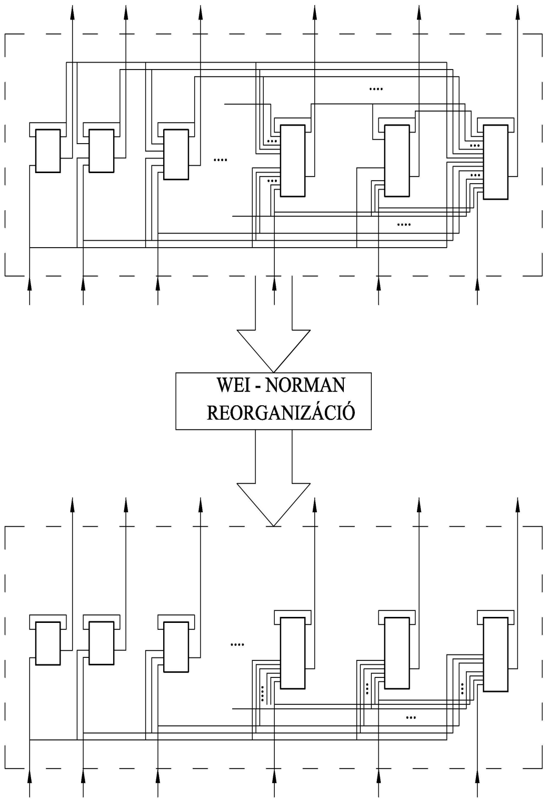
A 6. fejezetben visszatértem ehhez a rendszerosztályhoz. Ez a gráfok nyelvén is megfogalmazható hierarchiát jelent.

A feldolgozóipar folytonos folyamatai, de a feldolgozó, összeszerelő ipari objektumok is, vagy pl. egy olajfinomító sok részegységre, részrendszerre bomlik, azzal a speciális struktúrával, hogy lényegében nincs visszatérő folyamat, a részben feldolgozott termékek lesznek a bemenetei egy következő folyamatnak, és így tovább. Ezt egy irányított fával lehet egyszerűen érzékeltetni [40], [21].

Ezekre a lineáris rendszerekre is megfogalmazhatók, felvethetők azok a kérdések (a gyakorlatban is előforduló esetek tanulmányozása során), mint amelyeket az általános lineáris rendszernél vizsgáltam, lásd [6]. A szokásos rendszertulajdonságok tanulmányozására alkalmazhatjuk az általánosan kapott kritériumokat az elérhetőségre, az irányíthatóságra, megfigyelhetőségre és rekonstruálhatóságra. Elváható azonban, hogy a specialitást kihasználva leegyszerűsödnek az eredményeim.

A vertikum struktúra [18], [19], [20], [25], [48] az alapmátrixnak a Wei-Norman-féle exponenciális szorzatként való előállításában nagyon sok egyszerűsítést tesz lehetővé. Ebből adódóan az általánosított Kalman-féle feltétel is nagyon leegyszerűsödik. Az i-edik részrendszerre felírható Cauchy-féle megoldó formulát pedig úgy tudtam átalakítani, hogy az i-edik rendszer „bemenetbe” csak az előző rendszereknek a múltjára van szükség, de nincs szükség az előző részrendszerek állapotára. Ezt egy nem kommutatív, Lie-algebrai technikát alkalmazó kalkulus kiépítésével értem el. Ezzel strukturálisan át tudtam alakítani a vertikumos szétcsatolt rendszereket, amelyek közt a kapcsolatot a bemenetek múltja teremti meg. Ezt az alkalmazott technikáról Wei-Norman-féle reorganizációnak nevezzük. Hogy ez mekkora egyszerűsítést jelent a hierarchiában a szemléltető ábránk jól tükrözi.

Vertikum típusú rendszerek



Szétcsatolt dinamikájú rendszerek

2. ábra

Azt is megmutattam, miként lehet az LPV rendszerekként interpretálni a vertikum típusú rendszereket. Azt fogalmaztam meg, hogy milyen paraméterek $0, 1$ értékeivel, hogyan lehet azt leírni, hogy adott részrendszerek be vannak kapcsolva, mások pedig nem. Ezzel elérhető, hogy egyes termékeket adott időszakban nem állítunk elő. Gazdasági érdekekből, vagy technikai feltételek teljesítése miatt elképzelhető egy, az időben lejátszódó, ideálisnak nevezett időfüggő paraméterrel leírható program, melyet azonban a konverteres bevezető példánkhoz hasonlóan, a részrendszerek ki-be kapcsolásával nem realizálhatunk. Ezért az ideális paraméterrel leírható viselkedést egy kapcsolási rendszer kapcsolási programjával közelítjük olyan pontossággal, hogy teljesüljenek a kívánt rendszertulajdonságok is.

A 7. fejezetben a dolgozatomban megfogalmazott absztrakt rendszerelméleti keret lehetővé teszi, hogy a korábban vizsgált vertikum típusú rendszerosztályt széles körben alkalmazzuk. Ebben a fejezetben rövid áttekintést adok egyes jellemző mérnöki és populációökológiai alkalmazásokról [56], [57], [67], [68].

A vertikum típusú rendszereket bizonyos ipari rendszerek modellezése céljából vezettem be. Ezek a rendszerek hierarchizált lineáris „alrendszerekből” állnak oly módon, hogy az alrendszerek állapotváltozói a következő rendszer állapotváltozóira hatnak. A megfigyelhetőségre és irányíthatóságra szükséges és elégséges feltételeket adtam ilyen rendszerek esetében [4], [19], további rendszerelméleti tulajdonságaikat vizsgáltam [22] és [20], [25] szerint.

A továbbiakban néhány fontos alkalmazást, a témában írt cikkeim alapján tekintettem át [56], [67], [68], [72]. A vertikum típusú rendszerek egyik fontos jelenlegi alkalmazása a populációökológia területén található. A populációk kölcsönhatása jellemzően nemlineáris, de Gámez et al. [11] megmutatta, hogy egy tipikus, erőforrás – termelő – elsődleges felhasználó – másodlagos fogyasztó láncot lehet egy konkrét ökológiai kölcsönhatásrendszerben vertikum típusú rendszerként azonosítani. Ezzel pedig az eredeti modell megfigyelhetőségét lokálisan egy lineáris rendszer megfigyelhetőségére redukálhatjuk.

A csatolt finomítóirendszerek operatív irányítása a keletkező termékek összetételének ismeretét igényli a teljes folyamat során. Egyes esetekben modelprediktív irányítást alkalmaznak, amelyek az állapotbecslésből [60] származó pontos adatok rendelkezésre állását igénylik. Ehhez hagyományosan összetételanalizátorokat alkalmaznak, amelyek bár nagyon pontosak, de egyben igen drága berendezések is, emellett a teljes mérés manuálisan zajlik. Fejlett szintű eljárások esetén ez nemkívánatos. Az analizátorok fő alternatívájaként hőmérsékletvisszacsatolásos szabályozókat alkalmaznak, ezek azonban az összetétel variációjának nem pontos indikátorai.

Egy másik alternatíva állapotbecslések alkalmazása, amelyek szekunder hőmérsékletmérésekre támaszkodnak megfigyelésként.

A csatolt finomítási eljárások komplex, magasabbrendű, nemlineáris folyamatokat követnek, időben változó dinamikával. Nemlineáris rendszerek robosztus állapotbecslésének externális zavarok ellenében való megállapítására számos esetben szükség van: szenzorok meghibásodása, a mérési jelekben bekövetkező zavarok stb.

Laborkísérletekkel igyekeztünk találni egy, a KKSZ korlátait meghaladó alternatív szűrési eljárás lehetőségét (ld. pl. A. Edelmayer et al, 2010). Valós, nem szimulált, gyáregységszintű adatok segítségével sikerült alternatív megfogalmazást adni egy csatolt finomítási eljárás segítségével, amely a vertikum típusú rendszerek egyik jó gyakorlati példája.

1. Módszertani összefoglaló

Az első fejezetben összefoglalom és vizsgálataim céljának megfelelően átfogalmazom azokat a matematikai módszereket, amelyekre szükségem lesz az ún. rendszer-tulajdonságok (irányíthatóság, megfigyelhetőség, stb) gondos, fogalmilag tiszta tárgyalása során [8]. Ezeket a rendszer-tulajdonságokat algebrai, geometriai rangfeltételekkel jellemezhetjük autonóm esetben. Hasonló eredményeket tudunk megfogalmazni időtől függő (nemautonóm) esetekre is, ha az időtől függő elemek, pl. együtthatók bizonyos gerjesztési feltételeket teljesítenek. Ez differenciál-algebrai feltételek teljesülését jelenti. Így a következő pontban röviden összefoglalom a tárgyaláshoz szükséges differenciál-algebrai fogalmakat.

Egy $R \neq \emptyset$ halmaz gyűrű, ha elláttuk két, összeadásként, illetve szorzásként jelölt bináris művelettel. Ezen kívül az R-ben kitüntettünk speciális elemeket, a $0 \in R$ nulla-, és esetenként az $1 \in R$ egységelemet; továbbá, minden $r \in R$ elemnek van ellentettje a $-r$, amelyre

$$r + (-r) = 0. \tag{1.1}$$

Az összeadás kommutatív és asszociatív, azaz

$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1, \qquad \forall r_1, r_2 \in R \tag{1.2}$$

$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3), \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in R. \tag{1.3}$$

A 0-elemre fenáll, hogy

$$0 + r = r, \quad \forall r \in R. \tag{1.4}$$

A szorzás esetenként kommutatív,

$$r_1 r_2 = r_2 r_1, \quad \forall r_1 r_2 \in R, \tag{k}$$

és mindig asszociatív:

$$(r_1 r_2) r_3 = r_1 (r_2 r_3), \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in R. \tag{1.5}$$

Ha R-ben létezik egységelem, akkor

$$1 \cdot r = r, \qquad r \cdot 1 = r, \qquad \forall r \in R. \tag{e}$$

Esetenként egy $r \in R$ elemnek lehet bal, illetve jobbinverze, és inverze: ${}^{-}r \in R$ balinverz, ha

$${}^{-}r \cdot r = 1,$$

$r^{-} \in R$ jobbinverz, ha

$$r r^{-} = 1,$$

és r^{-1} inverz, ha

$$r^{-1} r = r r^{-1} = 1. \tag{i}$$

Az összeadás és a szorzás műveletét összekapcsolja a disztributivitás:

$$r_1 (r_2 + r_3) = r_1 r_2 + r_1 r_3 \tag{1.6}$$

és

$$(r_1 + r_2) r_3 = r_1 r_3 + r_2 r_3, \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in R.$$

Ha (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) mindegyike fenáll, akkor azt mondjuk, hogy R gyűrű.

Ha az R gyűrűben van $1 \in R$ egységelem, akkor R egységelemes gyűrű.

Példák.

1. $\mathbb{Z}$ az egész számok gyűrűje.
2. $\mathbb{Q}$ a racionális számok gyűrűje.
3. $\mathbb{R}$ a valós számok gyűrűje (több mint gyűrű, mint látni fogjuk).
4. $\mathbb{R}^{n\times n}$ az $n \times n$-es valós mátrixok gyűrűje.
5. $C[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények gyűrűje.
6. $C^\infty[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett végtelen sokszor differenciálható (sima) függvények gyűrűje.
7. $C_\searrow[0,\infty)$ a $[0,\infty)$ intervallumon folytonos, a ∞-ben 0-hoz konvergáló függvények gyűrűje.

Ez utóbbi egy nem egységelemes gyűrű. Ha az R gyűrűben a szorzás kommutatív, akkor R kommutatív gyűrű.

A példáink közül, ha $n > 1$, akkor $\mathbb{R}^{n\times n}$ nemkommutatív gyűrű.

A 3. példánkban $\mathbb{R}$ minden nemnulla elemének van inverze, a szám reciproka. Ha az R gyűrűben ez a tulajdonság fennáll, akkor azt mondjuk, hogy R test, amely lehet nem-kommutatív is.

Ha egy R gyűrűben valamely $r_1 \neq 0$ és $r_2 \neq 0$ elemre $r_1 r_2 = 0$, akkor azt mondjuk, hogy r_1 baloldali 0-osztó, r_2 pedig jobboldali nullosztó. Tehát, ha R-ben van baloldali 0-osztó, akkor van jobboldali 0-osztó is.

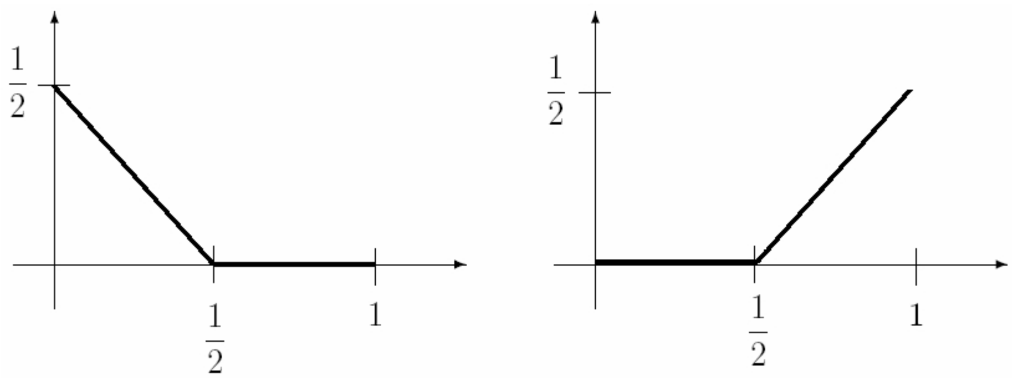
Ha egy R gyűrűben nincs 0-osztó, azaz $r_1 r_2 = 0$-ból következik, hogy vagy $r_1 = 0$, vagy $r_2 = 0$, akkor R 0-osztómentes.

A példáink közül az 1., 2., és 3. nullosztó-mentes, míg a többiben vannak 0-osztók.

Például, ha $n > 1$, akkor $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben van 0-osztó:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $C[0,1]$ függvénytérben a következő függvények nullosztók.



Sima függvényekre is hasonló konstrukciókat lehet adni:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{ha} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ e^{-\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2}} & , \quad \text{ha} \quad t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ e^{-\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2}} & , \quad \text{ha} \quad t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

Ekkor $f, g \in C^\infty[0,1]$

$$f \neq 0, \qquad g \neq 0, \quad \text{és}$$

$$f(t)g(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,1].$$

Definiáljuk a $(0,1)$ intervallumon analitikus függvények gyűrűjét: $A(0,1)$-t, amely a korábbi függvénytereinkhez hasonló, azonban nincs benne 0-osztó.

Tegyük fel, hogy $f, g \in A(0,1)$, $f \neq 0, g \neq 0$ és $f(t) \cdot g(t) = 0$ minden $t \in (0,1)$. Ekkor legyen $t_0 \in (0,1)$ egy olyan pont, ahol, $f(t_0) \neq 0$. De ekkor létezik olyan $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset (0,1)$ nyílt környezet, amelyben $f(t) \neq 0$. De itt a $g(t) = 0$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ahhoz, hogy $f(t)g(t) = 0$ teljesüljön. Viszont, ha egy g analitikus függvény $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ nyílt intervallumon 0, akkor 0 az egész $(0,1)$ értelmezési tartományán, ami ellentmond annak, hogy f, g nullosztók lennének.

A továbbiakban R mindig kommutatív gyűrű lesz, esetenként egységelemes, esetenként 0-osztómentes, esetenként nem, de a 0-osztómentességnek nem lesz szerepe a vizsgálatainkban.

Legyen R kommutatív gyűrű (továbbiakban egyszerűen gyűrű), amelyben definiálunk egy deriválásnak (vagy differenciálásnak) nevezett $d : R \to R$ műveletet, amelyre minden $r_1, r_2 \in R$ esetén fennáll

$$d(r_1 + r_2) = dr_1 + dr_2, \tag{1.7}$$

$$d(r_1 r_2) = (dr_1)r_2 + r_1(dr_2),$$

Ekkor azt mondjuk, hogy R differenciálgyűrű [27], [10], [7].

Az 1., 2., 3. és 4. példákban a d művelet legyen a triviális:

$$dr = 0, \qquad \forall r \in R$$

esetén. A $C^\infty[0,1]$ és az $A(0,1)$ gyűrűben legyen $(df)(t) = \dfrac{df}{dt} = f'(t)$, azaz a közönséges deriválás.

Valójában a vizsgálatainkba bevonhatnánk a nemkommutatív differenciálgyűrű fogalmát is, de erre a jelen értekezésben nem lesz szükségünk. Erre példa lehet az analitikus elemeket tartalmazó $n \times n$-es mátrixok gyűrűje,

$$A(0,1)^{n\times n} = \left\{ (a_{ij}(t))_{n\times n} \mid a_{ij} \in A(0,1) \right\},$$

az elemenkénti differenciálással:

$$dA = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Míg egy kommutatív differenciálgyűrűben a szorzat deriváltjára

$$d(fg) = (df)g + f(dg) = (df)g + (dg)f = g(df) + (dg)f = d(gf)$$

szabadon felcserélhetők, az $(A(0,1)^{n\times n}, d)$ differenciálgyűrűben a

$$d(AB) = (dA)B + A(dB)$$

sorrend szigorúan betartandó:

$$d\left[\begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}\right] = d\begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'g + fg' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

míg

$$d\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g'f + gf' \end{pmatrix}.$$

Legyen R differenciálgyűrű d deriválással, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, i_j és $\alpha_{ij,ij}$ nemnegatív egész szám. Tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ esetén $x_1, x_2, \ldots, x_n$ differenciál határozatlanú monomnak nevezzük a következő szorzatot:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i_j\geq 0}\left(d^{i_j}x_j\right)^{\alpha_{j,i_j}}\right) =$$

$$= x_1^{\alpha_{1,0}}\left(dx_1\right)^{\alpha_{1,1}}\left(d^2x_1\right)^{\alpha_{1,2}}\ldots x_2^{\alpha_{2,0}}\left(dx_2\right)^{\alpha_{2,1}}\ldots x_n^{\alpha_{n,0}}\left(dx_n\right)^{\alpha_{n,1}}\left(d^2x_n\right)^{\alpha_{n,2}}\ldots$$

mindig véges sok szorzótényezővel. Nem véletlenül használtuk itt is a „d" jelölés a deriválásra, ui. most kiterjesztjük a deriválást a monomokra:

$$d\left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{i_j\geq 0}\left(d^{i_j}x_j\right)^{\alpha_{j,i_j}}\right) = \sum_{l=1}^{n}\prod_{j=1}^{l-1}\prod_{i_j\geq 0}\left(d^{i_j}x_j\right)^{\alpha_{j,i_j}} d\left(\prod_{i_l\geq 0}\left(d^{i_l}x_l\right)^{\alpha_{l,i_l}}\right)\prod_{j=l+1}^{n}\prod_{i_j\geq 0}\left(d^{i_j}x_j\right)^{\alpha_{j,i_j}}$$

ahol a $d\prod\limits_{i_j\geq 0}\left(d^{i_j}x_l\right)^{\alpha_{l,i_l}}$-et külön definiáljuk:

$$d\prod_{i_l\geq 0}\left(d^{i_l}x_l\right)^{\alpha_{l,i_l}} =$$

$$\sum_{m_l\geq 0}\alpha_{l_{m_l}}\left(\prod_{i_l=0}^{m_l-1}\left(d^{i_l}x_l\right)^{\alpha_{l,i_l}}\right)\left(d^{m_l}\right)^{\alpha_{l,m_l}-1}\left(d^{m_l+1}x_l\right)^{\alpha_{l,m_l}+1}\left(\prod_{i_l\geq m_l+2}\left(d^{i_l}x_l\right)^{\alpha_{l,i_l}}\right).$$

$P(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ egy differenciálpolinomon a $P_{(\alpha_{1,i_1})(\alpha_{2,i_2})\ldots(\alpha_{n,i_n})} \in R$, $i_1 \geq 0$, $i_2 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0$, együtthatókkal képezett következő összeget értjük:

$$\sum P_{(\alpha_1,i_1)(\alpha_2,i_2)\ldots(\alpha_n,i_n)}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i_j\geq 0}\left(d^{i_j}x_j\right)^{\alpha_{j,i_j}}.$$

A d deriválást a differenciálpolinomokra is kiterjesztjük a következő értelmezéssel:

$$d\,P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\left[d\left(P_{\alpha_{1,i_1}\cdots(\alpha_{n,i_n})}\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{i_j\geq 0}\right)\left(d^{i_j}x_j\right)^{\alpha_{j,i_j}} + \right.$$

$$+P_{(\alpha_{1,i_1})\dots(\alpha_{n,i_n})}d\left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{i_j\geq 0}\left(d^{i_j}x_j\right)^{\alpha_{j,i_j}}\right)\Bigg].$$

Ha az összes, R fölötti $x_1, x_2, \dots, x_n$ differenciál-határozatlanokkal definiált differenciálpolinomok halmazát, $R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$-et a természetes módon ellátjuk a $+$, $\cdot$, d műveletekkel, az ellentett és a 0 differenciálpolinomokat a szokásos módon definiáljuk, akkor a $(R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, d)$ differeniálgyűrűvé válik, az R-fölötti $x_1, x_2, \dots, x_n$ differenciál-határozatlanú differenciálpolinomjainak a differenciálgyűrűjévé.

Az R differenciálgyűrűt $\mathbb{Z}$-modulussá, (mintha $\mathbb{Z}$-fölötti vektortér lenne) lehet tenni, ha $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, akkor minden $r \in R$ esetén definiálható az

$$nr = \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n\text{-szer}}$$

szorzat. Ha $n = 0$, akkor $0r = 0 \in R$. Ha n negatív, akkor $-n$ pozitív egész ezért legyen

$$nr = -\underbrace{(r + r + \ldots + r)}_{-n\text{-szer}}.$$

Ezzel egy szorzást definiálhatunk $\mathbb{Z}$ és R elemei között.

Könnyen beláthatók a következő asszociativitási szabályok:

$$(n_1n_2)r = n_1(n_2r) = n_2(n_1r),$$

$$n(r_1r_2) = (nr_1)r_2 = r_1(nr_2),$$

továbbá a disztibutivitási szabályok,

$$(n_1 + n_2)r = n_1r + n_2r,$$

$$n(r_1 + r_2) = nr_1 + nr_2,$$

valamint

$$-(nr) = (-n)r.$$

Ha R egységelemes és minden nem nulla $n \in \mathbb{Z}$ esetén $n \cdot 1$ invertálható, akkor a racionális számokkal való szorzás is definiálható, és mivel $\mathbb{Q}$ test, ezért $R\,\mathbb{Q}$ fölötti vektortérré válik, de erre nem sokszor lesz szükségünk.

Még egy utolsó megjegyzés: ha $\mathbb{R}$ fölötti vektortérré akarjuk tenni az R differenciálgyűrűt (a „differenciál” jelző el is hagyható), akkor ezt csupán algebrai tulajdonságok feltételezésével, mint fentebb az $n \cdot 1 (n \neq 0)$ elemek invertálhatóságának feltételezésével, már nem tehetjük meg. Ekkor már topológiai, folytonossági, ill. teljességi kritériumokat kell feltennünk. Az alkalmazások döntő részében ezek természetes módon teljesülnek.

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_s \in R$ kiválasztott elemek. Ezeket az időtől függő együtthatóknak, „paramétereknek” tekintjük. (Ez természetes, ha R alkalmas függvénygyűrű).

Legyenek most $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ differenciál-határozatlanok. Ezekkel a $(\mathbb{Z}, 0)$ differenciálgyűrű fölötti differenciál-polinomok differenciál-gyűrűjét, a $\mathbb{Z}\{\alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_s\}$-t definiálhatjuk.

Ha ezt a differenciál-polinom-gyűrűt R-ben kiértékelem, behelyettesítve az α_i határozatlan helyébe az $a_i \in R$ elemet, akkor az R egy rész differenciál-gyűrűjét kapom, amelyet

$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \subset R$-el jelölök. R-et tekinthetem $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ fölötti differenciál-gyűrűnek, amelyet az

$$R = R_{\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}}$$

jelöléssel fejezem ki.

Most megmutatom a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ differenciál-határozatlanok differenciál-polinomjait a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ differenciál-gyűrű fölött:

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}.$$

Majd kiválasztom $u_1, u_2, \ldots, u_l \in R$ elemeket.

A $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$-et kiértékelem R-ben akkor a

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\} \subset R$$

rész-differenciálgyűrűt kapom. Az $u_1, u_2, \ldots, u_l$ elemek differenciál-algebrailag függetlenek, ha bármely $0 \neq P(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l) \in \mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$ esetén

$$P(u_1, u_2, \ldots, u_l) \neq 0.$$

azaz a kiértékelés injektív homomorfizmus.

A továbbiakban felteszem, hogy $u_1, u_2, \ldots, u_l$ differenciál-algebrailag független a

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\} \subset R$$

rész-differenciálgyűrűben.

Azt is felteszem, hogy R bármely r eleme algebrai a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\} \subset R$ fölött, azaz mindig létezik

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$$

együtthatós (nem-differenciál) polinom, amelynek r megoldása.

Feltételezem, hogy létezik véges sok $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ elem, amely nemdifferenciál-polinomjaként ($\mathbb{Z}\{a, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ fölött) minden $r \in R$ elem kifejezhető.

Már választottam $u_1, u_2, \ldots, u_l \in R$ elemeket, amelyek differenciál-algebrailag függetlenek $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ fölött. Ezeket az elemeket a továbbiakban irányításoknak, bemeneteknek nevezem.

Az előbb kiválasztott $x_1, x_2, , \ldots, x_n \in R$ elemeket, amelyek (nemdifferenciál-algebrailag) generálják az egész R differenciálgyűrűt a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ fölött, állapotoknak nevezzük.

Válasszunk további, $y_1, y_2, \ldots, y_m \in R$ elemeket is, amelyeket kimeneteknek nevezünk.

Mivel az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ elemek generálják az egész R gyűrűt, ezért a $dx_1 dx_2, \ldots, dx_n$ és az $y_1, y_2, \ldots, y_m$ elemek kifejezhetők az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (nem-differenciál) polinomjaiként a

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\} = \mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}\text{-beli}$$

együtthatókkal: azaz léteznek olyan

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

polinomok $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}$-beli együtthatókkal, amelyekre

$$\begin{aligned} dx_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ dx_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ dx_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_1 &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ y_m &= g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Használva az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \qquad \mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$$

vektorjelöléseket,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

tömörebb alakot nyerem.

Tudható, hogy az f_i, g_j polinomok együtthatói a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ differenciál-gyűrűből valók, ezért léteznek olyan

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \ldots) \in R^n,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \ldots) \in R^m,$$

polinomiális „függvények”, amelyekre

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \ldots). \\ \mathbf{y} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \ldots). \end{aligned}$$

Ezt időtől függő együtthatós, vagy paraméteres irányítási, bemenet-kimenet rendszernek nevezzük. Természetesen, ebben a tisztán algebrai tárgyalásban semmiféle idő nem szerepel.

Konkrétabb formában írhatom le a lineáris rendszereket, azaz azokat amelyek lineárisak az x állapotokban és az u bemenetekben és azok deriváltjaiban, azaz amelyek alakja mátrix-vektor írásmódban

$$d\mathbf{x} = H(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)\mathbf{x} + \sum_{i \geq 0} K_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots) d^i\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots)\mathbf{x} + \sum_{i \geq 0} M_i(\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots) d^i\mathbf{u}.$$

Érdekessége a kapott formának, hogy mind a „dinamika”, mind a kimenet függhetnek a bemenettől és annak véges sok deriváltjától, valamint az „időtől” függő együtthatók, ill. paraméterek is előfordulhatnak a deriváltjaikkal együtt. Ez nevezhető az ilyen rendszerek kanonikus alakjának. Ez jóval általánosabb a megszokott

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = H(\mathbf{a}(t))\mathbf{x} + K(\mathbf{a}(t))\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y}(t) = L(\mathbf{a}(t))\mathbf{x} + M(\mathbf{a}(t))\mathbf{u},$$

formánál. Szokásos ezt a Fliess-féle kanonikus alaknak is nevezni [29], míg a klasszikus, ismertebbet a Kalman-féle kanonikus alaknak nevezzük.

A

$$H(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), \quad K_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots) \qquad (i \geq 0),$$

$L(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)$ és az $M_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)$ $(i \geq 0)$ mátrixokat ki lehet fejezni $\mathbb{Z}^{n\times n}$-beli, $\mathbb{Z}^{n\times l}$-beli, $\mathbb{Z}^{m\times n}$-beli és $\mathbb{Z}^{m\times l}$-beli „konstans” mátrixok lineáris kombinációiként:

$$H(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots) = h_1(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)H_1 + h_2(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)H_2 + \ldots + h_P(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)H_P,$$

$$K_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots) = k_{i1}(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)K_{i1} + k_{i2}(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)K_{i2} + \ldots + k_{iJ_i}(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)K_{iJ_i}, \ i \geq 0,$$

$$L(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots) = l_1(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)L_1 + l_2(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)L_2 + \ldots + l_Q(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)L_Q,$$

$$M_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots) = m_{i1}(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)M_{i1} + m_{i2}(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)M_{i2} + \ldots + m_{iR_i}(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)M_{iR_i}, \ i \geq 0,$$

ahol

$$H_1, H_2, \ldots, H_P \in \mathbb{Z}^{n\times n}, K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{iJ_i} \in \mathbb{Z}^{n\times l},$$

$$L_1, L_2, \ldots, L_Q \in \mathbb{Z}^{m\times n}, M_{i_1}, M_{1_2}, \ldots, M_{iR_i} \in \mathbb{Z}^{m\times l}.$$

Feltehetjük a mátrixainkról, hogy csoportonként minimális számúak, amelyek előállítják a $H(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), K_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), L(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)$ és az $M_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)$ mátrixokat, azonban $\mathbb{Z}$ fölött nem jelenti azt, hogy a mátrixok lineárisan függetlenek lennének. Ha azonban R egységelemes differenciál-gyűrű és az $n1 \in R$ $(n \in \mathbb{R},\ n \neq 0)$ elemek invertálhatók, akkor, mint láttuk $R\,\mathbb{Q}$ fölötti vektortér. Ekkor a minimalitás és lineáris függetlenség ekvivalensek. Az együtthatók és $h_1(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), \ldots, h_p(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), k_{i1}(a, d\mathbf{a}, \ldots) \ldots k_{iI_i}(a, d\mathbf{a}, \ldots)$, $l_1(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), \ldots,$ $l_Q(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)$ $m_{i1}(\mathbf{a}, d\mathbf{a} \ldots), \ldots, m_{iR_i}(\mathbf{a}, d\mathbf{a} \ldots)$ az $\mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a}, \ldots$ polinomjai, ezért az $(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2\mathbf{a} \ldots)$ sorozat véges, de nem specifikált hosszúságú sorozat. Erre bevezethető a következő jelölés:

$$d^{[\infty)}\mathbf{a}.$$

A jelölést az motiválja, hogy használják az $(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, d^k\mathbf{a}) = d^{[k]}\mathbf{a}$ jelölést $\mathbf{a}$ k-adik felemeltre. Ezzel

$$d\mathbf{x} = H(d^{[\infty)}\mathbf{a})\mathbf{x} + \sum_{i\geq 0} K_i(d^{[\infty)}\mathbf{a})d^i\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = L(d^{[\infty)}\mathbf{a})\mathbf{x} + \sum_{i\geq 0} M_i(d^{[\infty)}\mathbf{a})d^i\mathbf{u},$$

$$H(d^{[\infty)}\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{I} h_i(d^{[\infty)}\mathbf{a})H_i,$$

$$K_i(d^{[\infty)}\mathbf{a}) = \sum_{j_i=1}^{I_i} k_{ij_i}(d^{[\infty)}\mathbf{a})K_{ij_i},$$

$$L(d^{[\infty)}\mathbf{a}) = \sum_{r=1}^{R} l_r(d^{[\infty)}\mathbf{a})L_r,$$

$$M_i(d^{[\infty)}\mathbf{a}) = \sum_{s_i=1}^{S_i} m_{is_i}(d^{[\infty)}\mathbf{a})M_{is_i},$$

ahol $H_i \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $K_{ij_i} \in \mathbb{Z}^{n\times l}, L \in \mathbb{Z}^{m\times n}, M_{i,s_i} \in \mathbb{Z}^{m\times l}$. Ezzel a következő kanonikus alakot kapjuk az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ időtől függő paraméter, vagy együtthatós lineáris rendszerrel

$$d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{I} h_i(d^{[\infty)}\mathbf{a})H_i\mathbf{x} + \sum_{i\geq 0}\sum_{j_i=1}^{I_i} k_{ij_i}(d^{[\infty)}\mathbf{a})K_{ij_i}d^i\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \sum_{r=1}^{R} l_r(d^{[\infty)}\mathbf{a})L_r\mathbf{x}\sum_{i\geq 0}\sum_{s_i=1}^{S_i} m_i s_i(d^{[\infty)}\mathbf{a})M_{is_i}d^i\mathbf{u}.$$

Ez általánosabb a szokott kanonikus alaknál abban az értelemben, hogy az időtől függő együtthatók és deriváltjai is megjelennek a konstans mátrixok együtthatóiként, ezek az előbbieknek polinomjai, továbbá az irányítások is és deriváltjaik is szerepelnek az egyenletekben.

Lineáris paraméter-változós rendszerek

A kitűzött feladat tárgyalásához nem szükségképpen kellene időtől függő együtthatókat is figyelembe venni, mi azonban ebben az általános formában tárgyaljuk a változó paramétert is tartalmazó rendszereket. Ezért részben megismételjük az előző pont konstrukcióit.

Legyen R differenciálgyűrű, amelyet mint láttuk $\mathbb{Z}$-modulusként is tekinthetünk. Legyenek

$$a_1, a_2, \ldots, a_s \in R$$

kiválasztott elemek, az időtől függő együtthatók. Válasszuk ki az $u_1, u_2, \ldots, u_l \in R$ bemeneteket is. Láttuk, hogy definiálható az R-ben a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ részdifferenciálgyűrű, amely feletti modulusnak is tekinthetjük az R differenciálgyűrűt, ui. $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \subset R$ differenciálgyűrű, ezért definiálva van az R elemeinek a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ elemeivel való szorzata. Tekintsük a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$ differenciálpolinom-gyűrűt a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ differenciálhatározatlanokkal, amelyet kiértékelünk az R-beli $\beta_i = u_i$ elemekkel. Ezzel a

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\} = \mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s, u_i, u_2, \ldots, u_l\} \subset R$$

részdiffreneciálgyűrűt kapjuk. Most is feltesszük az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ elemek differenciálalgebrai függetlenségét a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \subset R$ részdifferenciálgyűrű fölött, azaz, ha

$$p \neq 0 \qquad p \in \mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\},$$

akkor $p(a_1, a_2, \ldots, a_s, u_1, u_2, \ldots, u_l) \neq 0$, azaz a kiértékelés-homomorfizmus

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\} \to \mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\} \subset R$$

injektív.

Továbbá feltesszük, hogy $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \dots, a_s, u_1, u_2, \dots, u_l\} \subset R$ fölött algebrai, sőt végesen generált: azaz léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ elemek, amelyekre fennáll, hogy

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \dots, a_s, u_1, u_2, \dots, u_l\}[x_1, x_2, \dots, x_n] = R,$$

azaz minden $r \in R$-hez létezik olyan

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nemdifferenciál-polinom a

$$\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \dots, a_s, u_1, u_2, \dots, u_l\}$$

fölött, hogy

$$r = P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

További, $y_1, y_2, \dots, y_m$ kiválasztásával definiáltuk a

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \dots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \dots),$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \dots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \dots)$$

bemenet-kimenet rendszert.

Most válasszunk további elemeket, amelyeket változó paramétereknek nevezem:

Legyenek $0 < n_1, n_2, \dots, n_k$ természetes számok, amelyekre $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Válasszuk ki a $k-1$-edik csoportba a

$$P_{k-1,1}, P_{k-1,2}, \dots, P_{k-1,n_k} \in R$$

elemeket „változó paramétereket” úgy, hogy az

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}}, P_{k-1,1}, P_{k-1,2}, \dots, P_{k-1,n_k}$$

elemek generálják R-et a $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \dots, a_s, u_1, u_2, \dots, u_l\}$ fölött, az az

$$R = \mathbb{Z}\{a_1, \dots, a_s, u_1, \dots, u_l\}\left[x_1, x_2, \dots, x_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}}, P_{k-1,1}, P_{k-1,2}, \dots, P_{k-1,n_k}\right]$$

A $k-2$-ik csoportba válasszunk

$$P_{k-2,1+n_k}, P_{k-2,2+n_k}, \dots, P_{k-2,n_{k-1}+n_k} \in R$$

elemeket amelyekre szintén fennáll, hogy

$$R = \mathbb{Z}\{a_1, \dots, a_s, u_1, \dots, u_l\}$$
$$[x_1, x_2, \dots, x_{n_1+n_2+\dots+n_{k-2}}, P_{k-2,1+n_k}, P_{k-2,2+n_k}, \dots, P_{k-2,n_{k-1}+n_k}],$$

és végül az 1. csoportba válasszunk

$$P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,n_2+n_3+\dots+n_k} \in R$$

elemeket, amelyekre fennáll, hogy

$$R = \mathbb{Z}\{a_1, \dots, a_s, u_1, \dots, u_l\}$$
$$[x_1, x_2, , \dots, x_{n_1}, P_{1,1}P_{1,2}, \dots, P_{1,n_2+n_3+\dots+n_k}].$$

Vagyis, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ állapotokat szisztematikusan kicseréljük a $P_{i,j} \in R$ elemekre, a változó paraméterekre úgy, hogy a maradék állapotokhoz hozzávéve a „változó paramétereket”, mindig generálják az R differenciálgyűrűt a $\mathbb{Z}\{a_1, \ldots, a_s, u_1, \ldots, u_l\}$ fölötti nem-differenciálgyűrűként.

Az $y_1, y_2, \ldots, y_m$ kimeneteket is k csoportra bontjuk. Ehhez feltesszük – a komplikációk elkerülése végett, – hogy léteznek olyan $0 < m_1, m_2, \ldots, m_k$ egész számok, amelyekre $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$ ami természetesen csak a $k \leq m$ teljesülése esetén lehetséges.

A $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n_1}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{m_1}$ elemeket tekintsük a

$$\mathbb{Z}\{a_1, \ldots, a_s, u_1, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, P_{1,1}, P_{1,2} \ldots P_{1,n_2+n_3+\ldots+n_k}] = R$$

differenciálgyűrű elemeiként. Vezessük be a következő vektoriális írásmódot:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), \\
\mathbf{x}_2 &= (x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+n_2}), \ldots, \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_k &= (x_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}, x_{n_1+\ldots+n_{k-1}+2}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_k}), \\
\mathbf{F}_1 &= (F_1, F_2, \ldots, F_{n_1}), \\
\mathbf{F}_2 &= (F_{n_1+1}, F_{n_1+2}, \ldots, F_{n_1+n_2}), \ldots, \\
&\vdots \\
\mathbf{F}_k &= (F_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}, F_{n_1+\ldots+n_{k-1}+2}, \ldots, F_{n_1+\ldots+n_k}), \\
\mathbf{y}_1 &= (y_1, y_2, \ldots, y_{m_1}), \\
\mathbf{y}_2 &= (y_{m_1+1}, y_{m_1+2}, \ldots, y_{m_1+m_2}), \ldots, \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_k &= \left(y_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}, y_{m_1+\ldots+m_{k-1}+2}, \ldots, y_{m_1+\ldots+m_k}\right) \\
\mathbf{G}_1 &= (G_1, G_2, \ldots, G_{m_1}), \\
\mathbf{G}_2 &= (G_{m_1+1}, G_{m_1+2}, \ldots, G_{m_1+m_2}), \ldots, \\
&\vdots \\
\mathbf{G}_k &= (G_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}, G_{m_1+\ldots+m_{k-1}+2}, \ldots, G_{m_1+\ldots+m_k}),
\end{aligned}$$

továbbá,

$$
\begin{aligned}
n &= (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) \\
\mathbf{P}^1 &= (P_{1,1}, P_{1,2}, \ldots, P_{1,n_2+n_3+\ldots+n_k}), \\
\mathbf{P}^2 &= (P_{2,1}, P_{2,2}, \ldots, P_{2,n_2+n_3+\ldots+n_k}), \\
&\ldots \\
\mathbf{P}^{k-2} &= \left\{P_{k-2,1,P_{k-2,2}}, \ldots, P_{k-2,n_{k-1}+n_k}\right\}, \\
\mathbf{P}^{k-1} &= (P_{k-1,1}, P_{k-1,2}, \ldots, P_{k-1,n_k}).
\end{aligned}
$$

Ekkor az előző paragrafushoz hasonlóan

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{x}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{P}^1, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\
d\mathbf{x}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{P}^2, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\
\ldots \\
d\mathbf{x}_{k-1} &= \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{P}^{k-1}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\
dx_k &= F_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1 \mathbf{P}^1, \mathbf{a}, da, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{P}^2, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\
\ldots \\
\mathbf{y}_{k-1} &= G_{k-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{P}^{k-1}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\
\mathbf{y}_k &= G_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)
\end{aligned}
$$

általános vertikum-típusú rendszert kapjuk a $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \ldots, \mathbf{P}^{k-1}$ változó paraméterekkel. Ha a paramétereket, az R elemeit ebben a formában reprezentálom, egyetlen generátorrendszerben sem fejezem ki, úgy tekinthetőek, hogy a „változó paraméterek” az „időnek” a függvényei, azaz újabb időtől függő paraméternek tekinthetők. Megjegyezem, hogy ekkor az időtől függő $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \ldots, \mathbf{P}^{k-1}$ deriváltjai nem szerepelnek a rendszert leíró egyenletekben. Ez megkülönbözteti a valódi „időfüggő” együtthatóktól. Az is különbség, hogy a megfelelő állapotokkal együtt a paraméterek generátorrendszert alkotnak a $\mathbb{Z}\{a_1, \ldots, a_s, u_1, \ldots, u_l\}$ fölött, míg az $a_1, \ldots, a_s$-re ilyesféle kikötéseim nem voltak.

Ha a $P_{ij} \in R$ elemeket a

$$P_{ij} \in \mathbb{Z}\{a_1, \ldots, a_s, u_1, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

elemeként reprezentálom, akkor a rendszerünk változó paramétere állapot- és bemenetfüggővé válik:

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{x}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{P}^1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),\\
d\mathbf{x}_2 &= \mathbf{F}_2(x_1, x_2, \mathbf{P}^1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),\\
&\ldots\\
d\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),\\
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{P}^1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),\\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{P}^2(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),\\
&\ldots\\
\mathbf{y}_k &= \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots).
\end{aligned}
$$

Most tegyük fel, hogy egy $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n$ generátorrendszerrel és az $\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \ldots, \widehat{y}_k$ kimenetekkel az

$$R = \mathbb{Z}\{a_1, \ldots, a_s, u_1, \ldots, u_l\}[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n]$$

reprezentációban egy másik,

$$d\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)$$

$$\widehat{y} = \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)$$

rendszert definiáltunk. Ekkor a $P_{ij} \in R$ paramétereket

$$\mathbb{Z}\{a_1, \ldots, a_s, u_1, \ldots, u_l\}[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n]\text{-ben}$$

előállítva, egy a paraméterek segítségével előállított csatolt rendszert kapunk:

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{x}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{P}^1(\widehat{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)\\
d\mathbf{x}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{P}^2(\widehat{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, , \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),\\
&\ldots\\
d\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)\\
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{P}^1(\widehat{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),\\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{P}^2(\widehat{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)\\
&\ldots\\
\mathbf{y}_k &= \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots).
\end{aligned}
$$

Míg az előző, az állapotfüggő paraméterezéssel a rendszer vertikum-struktúrája megszűnik, az $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n$ állapotok csatolásakor a rendszer $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ben megtartja a vertikum-struktúráját.

Most teljes általánosságban beszélünk a változó-paraméterű „időtől" is függő bemenet-kimenet típusú irányítási rendszerekről.

Tekintsük az R differenciál-gyűrűt az $u_1, u_2, \ldots, u_l$ bemenetekkel, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ állapotokkal és az $y_1, y_2, \ldots, y_k$ kimenetekkel, azaz reprezentálom az R differenciál-gyűrűt az $R = \mathbb{Z}\{u_1, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ alakban, az

$$y_1, y_2, \ldots, y_k \in \mathbb{Z}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

kimenetekkel. Eddig mindig feltettem, hogy az $u_1, u_2, \ldots, u_l \in R$ elemek, a bemenetek differenciál-algebrailag függetlenek, és hogy $\mathbb{Z}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ fölött (nemdifferenciál-algebrailag) R végesen generált.

Hogy teljes általánosságban beszélhessek változó paraméteres rendszerekről, nem követelem meg a differenciál-algebrai függetlenséget az $u_1, \ldots, u_l$ bemenetektől, de azt igen, hogy R (nem-differenciál-algebrailag) végesen generált a $\mathbb{Z}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ fölött. Ez azt jelenti, hogy kevesebb bemenetre van szükségünk, ui. az összefüggést jelentő differenciál-algebrai egyenletből egy bemenetet eliminálhatunk, „kifejezhetünk” a többi segítségével, így gyakorlati szempontból ez a bemenet elhagyható. Algebrai szempontból ennek nincs semmi értelme ui. egy bemenet-kimenet rendszer bemeneteiről a kimeneteire való leképezés

$$(u_1, u_2, \ldots, u_l) \xmapsto{\Sigma_1} (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

sohasem tekinthető azonosnak egy

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}) \xmapsto{\Sigma_2} (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

leképezéssel, még akkor sem, ha

$$u_l = q(u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}) \qquad \text{és} \qquad (u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}) \xmapsto{\Sigma_2} (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

ugyanaz, mint

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}, q(u_1, u_2, \ldots, u_{l-1})) \xmapsto{\Sigma_1} (y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Gyakorlati szempontból egy aktuátort helyettesíthetek a többi hatásának a kombinációjával.

Ezek után legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_s$ differenciál-határozatlanok és tekintsük a $P_1, P_2, \ldots, P_s$ határozatlanú differenciál-polinomokat

$$R = \mathbb{Z}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]\text{-beli}$$

együtthatókkal, azaz tekintsük az

$$\begin{aligned} R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\} = \\ &= \mathbb{Z}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]\{P_1, P_2, \ldots, P_s\} = \\ &= \mathbb{Z}\{P_1, P_2, \ldots, P_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_i, x_2, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

differenciál-gyűrűt, amelyet változó paraméteres bemenet-kimenet rendszernek nevezek, $u_1, u_2, \ldots, u_l$ bemenetekkel és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ állapotokkal. Tekintsük az $y_1, y_2, \ldots, y_k \in R\{P_1, \ldots, P_s\}$ elemeket a rendszer ugyancsak paraméterfüggő kimeneteinek.

$R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ (nemdifferenciál-algebrailag) végesen generált, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ állapotokkal. Ebből következően $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_l$ most is kifejezhető $\mathbb{Z}\{P_1, P_2, \ldots, P_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ együtthatós $x_1, x_2, \ldots, x_n$-beli nemdifferenciál-polinomok segítségével, amiből megkapom a paraméterfüggő

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, d\mathbf{P}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, d\mathbf{P}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)$$

bemenet-kimenet reprezentációt.

Tekintsük most az R gyűrű $a_1, a_2, \ldots, a_s$ elemeit, és a $P_1, P_2, \ldots, P_s$ differenciál-határozatlanokat tartalmazó $R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ differenciálgyűrűt. Az R-együtthatós differenciál-polinomgyűrűt értékelem ki az $a_1, a_2, \ldots, a_s \in R$ elemekkel, azaz tekintsük az

$$R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\} \to R\{a_1, a_2, \ldots, a_s\},$$

$$R\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} = \mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_s]$$

R-beli rész-differenciálgyűrűt.

Ezt időtől-függő együtthatós (paraméteres) rendszernek nevezek, melynek a reprezentációja

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots).$$

Most tekintsük a $\mathbb{Z}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset R = \mathbb{Z}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ differenciálpolinom-gyűrűből a

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, P_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

differenciál-polinomokat (speciális esetként $P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \ldots, P_s(\mathbf{x})$ lehet nemdifferenciál-polinom is). Ezt követően definiálom a $P_1, P_2, \ldots, P_s$ differenciál-határozatlanos polinomok $R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ differenciál-gyűrűjén a

$$P_1 = P_1(\mathbf{x}),\ P_2 = P_2(\mathbf{x}), \ldots, P_s = P_s(x)$$

által definiált,

$$R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\} \to R\{P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \ldots, P_s(\mathbf{x})\} \subset R$$

értékelés-homomorfizmust:

$$\begin{aligned} &R\{P_1(\mathbf{x}_1), P_2(\mathbf{x}), \ldots, P_s(\mathbf{x})\} = \\ &= \mathbb{Z}\{P_1(\mathbf{x}_1), P_2(\mathbf{x}_2), \ldots, P_s(\mathbf{x}), u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subset R \end{aligned}$$

Ezt állapotváltozós paraméterű bemenet-kimenet rendszernek nevezem, melynek a reprezentációja

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\big(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), d(\mathbf{P}(\mathbf{x})), d^2(\mathbf{P}(\mathbf{x})), \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\big),$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\big(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), d(\mathbf{P}(\mathbf{x})), d^2(\mathbf{P}(\mathbf{x})), \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\big).$$

A $d(\mathbf{P}(\mathbf{x})), d^2(\mathbf{P}(\mathbf{x})), \ldots$ deriváltak kiszámítása még nem-differenciálpolinomok esetén is meglehetősen körülményes, ui. az összetett függvény deriválási szabályának sokszori alkalmazását igényli, ráadásul x deriváltjai is szerepelnek implicit módon a jobboldali függvényekben. Ezek egyidejű kifejezése nem lehetséges, ezért a rendszerleíró egyenletek implicit, magasabbrendű differenciálegyenletek lesznek. Csak ha a $P_1(\mathbf{x}, P_2(\mathbf{x})), \ldots, P_s(\mathbf{x})$ nemdifferenciál-polinomok és a paraméteres rendszert leíró differenciálegyenletben

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \ldots)$$

az $\mathbf{F}$ csak $\mathbf{P}$-től függ, annak deriváltjaitól, $d\mathbf{P}, d^2\mathbf{P}, \ldots$-től nem, akkor továbbra is explicit elsőrendű egyenletet kapnunk

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \ldots\right),$$

sőt az is elérhető, hogy a $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), d(\mathbf{P}(\mathbf{x})), \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u} \ldots)$ kimenetet leíró függvény helyett olyan

$$y = \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)$$

függvényt kapjunk, amelyben $dx, d^2x, \ldots$ már nem szerepel:

$$\begin{aligned} d\big(\mathbf{P}(\mathbf{x})\big) &= \partial\mathbf{P}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \\ &= \partial\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots), \\ d^2(\mathbf{P}(\mathbf{x})) &= \partial^2\mathbf{P}(\mathbf{x})\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x})), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\right); \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots)\right) + \\ &+ \partial\mathbf{P}(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\right)\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\right) + \\ &+ \partial\mathbf{P}(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\right)\partial\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\right) + \\ &+ \partial\mathbf{P}(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{u}}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\right)d\mathbf{u} + \\ &+ \partial\mathbf{P}(\mathbf{x})\partial_{d\mathbf{u}}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x})\,\mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots\right)d^2\mathbf{u} + \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Így a kimenetből eliminálhatók az állapotok deriváltjai is.

Az összetett függvények polinomokra vonatkozó, imént alkalmazott deriválási szabályát algebrai módon a szorzat deriválási szabályából lehet bebizonyítani.

Pl.

$$\begin{gathered} d(x^3) = d(x \cdot x^2) = (dx)x^2 + x(dx^2) = \\ = (dx)x^2 + x\left((dx)x + xdx\right) = (dx)x^2 + x(dx)x + x^2(dx). \end{gathered}$$

Ha R kommutatív, akkor ez a jól ismert

$$d(x^3) = (3x^2)dx = \frac{d}{dx}\left(x^3\right)dx = \partial\left(x^3\right)dx.$$

Itt meg kell különböztetni az R gyűrűbeni d deriválást és a nem R-beli közönséges „apokrif” $\frac{d}{dx}$ deriválást. Ha „többváltozós” polinom vektorról van szó, pl. az $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}, u, du, \ldots\right)$ polinomról, akkor pl. $\partial_x\mathbf{F}(\mathbf{x}, \ldots)$ jelentése a jólismert

$$\partial_x F(x, \ldots) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \ldots), & \partial_{x_2}\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \ldots), \ldots, \partial_{x_n}\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \ldots) \\ \partial_{x_1}\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \ldots), & \partial_{x_2}\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \ldots), \ldots, \partial_{x_n}\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \ldots) \\ \ldots & \\ \partial_{x_1}\mathbf{F}_n(\mathbf{x}, \ldots), & \partial_{x_2}\mathbf{F}_n(\mathbf{x}, \ldots), \ldots, \partial_{x_n}\mathbf{F}_n(\mathbf{x}, \ldots) \end{bmatrix}$$

Jacobi-féle mátrix, amely szintén nem az R-beli d deriválást jelenti.

Még egy fontos további megjegyzést teszek. Nem véletlen, hogy éppen a változó paraméteres rendszerek tárgyalása előtt tettem engedményt az $u_1, u_2, \ldots, u_l$, bemenetek differenciál-algebrai függetlenségét illetően. Ui, feltéve, hogy $\mathbb{Z}\left\{P_1, P_2, \ldots, P_s\right\}$ fölött az $u_1, u_2, \ldots, u_l$ differenciál-algebrailag függetlenek, ebből nem következik általában, hogy egy valamilyen módon kiértékelt differenciálgyűrűben,

pl. a

$$\mathbb{Z}\left\{a_1, a_2, \ldots, a_s\right\}$$

fölött is differenciál-algebrailag függetlenek lesznek az $u_1, u_2, \ldots, u_l$ R-beli bemenetek. Azt feltenni, hogy csak olyan $a_1, a_2, \ldots, a_s$-beli értékeléseket tekintünk, amelyekre teljesül az u-k differenciál-algebrai függetlensége, nagy és szükségtelen megszorítás lenne.

Mivel az
$$R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\} \to R\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$$
kiértékelések ráképzések (szuperjektívek), ezért abból, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ek generálja az $R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ differenciál-gyűrűt $\mathbb{Z}\{P_1, P_2, \ldots, P_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ fölött, és $R = R\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, ezért az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ együttes az egész R-et generálja.

Csatolt rendszereket is megnézek ebben a tárgyalásmódban. Tekintsük az $R = \mathbb{Z}\{u_1, u_2, , \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ rendszert az $y_1, y_2, \ldots, y_k \in R$ kimenetekkel és az $R \supseteq \widehat{R}$ részdifferenciál-gyűrűn definiált
$$\widehat{R} = \mathbb{Z}\left\{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \ldots, \widehat{u}_{\widehat{l}}\right\}[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_{\widehat{n}}]$$
rendszert az $\widehat{y}_1, \widehat{y}_{,2}, \ldots, \widehat{y}_{\widehat{k}} \in \widehat{R}$ kimenetekkel.

Tekintsük továbbá az
$$R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\} = \mathbb{Z}\{u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n]\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$$
változó paramétert tartalmazó rendszert.

A $\mathbb{Z}\{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, , \ldots, \widehat{x}_{\widehat{n}}\} \subset \widehat{R} \subset R$ differenciálgyűrűből vett $\widehat{P}_1(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{P}_2(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, \widehat{P}_s(\widehat{\mathbf{x}})$ differenciálpolinomok segítségével definiálható az
$$R\{P_1, P_2, \ldots, P_s\} \to R\left\{\widehat{P}_1(\widehat{x}), \widehat{P}_2(\widehat{x}), \ldots, \widehat{P}_s(\widehat{x})\right\} \subset R$$
értékelés-homomorfizmus, melynek a képe
$$R\left\{\widehat{P}_1(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{P}_2(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, \widehat{P}_s(\widehat{\mathbf{x}})\right\} =$$
$$= \mathbb{Z}\left\{\widehat{P}_1(\widehat{x}), \ldots, \widehat{P}_s(\widehat{x}), u_1, u_2, \ldots, u_l\right\}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subset R$$
állapotcsatolást létesít az $\widehat{R}$ rendszerből az $R\{P_1, P_2, \ldots, P_2\}$ változó paraméterű rendszerbe.

Hasonlóan járhatunk el, ha kimenetcsatolást létesítünk a
$$\mathbb{Z}\left\{\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \ldots, \widehat{y}_{\widehat{l}}\right\} \subset \widehat{R} \subset \mathbb{R}$$
részdifferenciálgyűrűből kiindulva.

Tárgyaljuk speciális esetként a lineáris rendszereket. Legyen
$$R = \mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s, u_1, u_2, \ldots, u_l\}[x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad y_1, y_2, \ldots, y_k \in R$$
olyan speciális rendszer, hogy a megfelelő
$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots),$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{u}, d\mathbf{u}, \ldots).$$
reprezentációban az $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ polinomjai lineárisak az $\mathbf{x}$ állapotokban, az $\mathbf{u}$ bemenetekben és a $d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \ldots$ deriváltjaikban. Mivel $\mathbb{Z}$ fölötti polinom-gyűrűként reprezentálom R-et, ezért a megfelelő
$$d\mathbf{x} = A(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)\mathbf{x} + \sum_{i \geq 0} B_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)d^i\mathbf{u},$$
$$y = C(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)\mathbf{x} + \sum_{i \geq 0} D_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)d^i\mathbf{u}$$

egyenletekben az

$$A(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), B_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), C(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots), D_i(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, \ldots)$$

mátrixok elemei $\mathbb{Z}\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$-beli differenciál-polinomok. Mivel differenciál-polinomokról van szó, a $\sum\limits_{i \geq 0}$ összegzés mindig véges.

Az $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ végtelen vektor jelölésére vezetem be az $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{[\infty)}$ szimbólumot, ha az α_i komponensek mind 0-k valamilyen $I \geq 0$ indextől, azaz, ha $i > I$ esetén $\alpha_i = 0$. Így pl. az $(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, d^2a, \ldots) = d^{[\infty)}\mathbf{a}$-t írhatok, tudván, hogy a sorozatban csak véges sok derivált szerepel.

Elég problematikus az $A(d^{[0,\infty)}\mathbf{a})$, konstans mátrixok $\mathbb{Z}$-fölötti mátrixok lineáris kombinációként való felírása, ui. a lineáris függetlenség, maximális elemszám stb. nem garantálják az összes mátrix $\mathbb{Z}$ fölötti lineáris kombinációként történő előállítását. Pl. legyenek

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 6 & 21 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}.$$

Ezek lineárisan függetlenek, azonban, pl. a $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix $\mathbb{Z}$ fölötti lineáris kombinációként történő felírhatósága azt jelentené, hogy léteznek olyan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ egészek, amelyekre

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 14 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 9 & -7 \end{pmatrix},$$

az

$$\begin{aligned} -1 &= 2a + 6b + 8c - 4d, \\ 4 &= 5a - 5b + 5c - 10d, \\ 2 &= -3a + 6b + 12c + 9d, \\ 5 &= 7a + 21b + 14c - 7d, \end{aligned}$$

ami implikálja, hogy -1 többszöröse a 2-nek $(2 = lnko(2, 6, 8, -4))$, 4 többszöröse az 5-nek $(5 = lnko(5, -5, 5, 10))$, 2 többszöröse a 3-nak $(3 = lnko(-3, 6, 12, 9))$, és 5 többszöröse a 7-nek $(7 = lnko(7, 21, 14, 7))$, ami lehetetlen.

Ezért, a továbbiakban felteszem, hogy R egységelemes, és hogy az $n1$ alakú elemeknek van inverze, minden 0-tól különböző $n \in \mathbb{Z}$ egészre. Ekkor szorozhatunk a racionális számokkal is R-ben, és R $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér lesz. Ekkor a fenti típusú anomáliák nem léphetnek fel. Ezért léteznek olyan $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (akár lineárisan független) mátrixok, amelyekre

$$A\left(d^{[0,\infty)}\mathbf{a}\right) = \sum \alpha_j \left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) A_j,$$

olyan $B_{ij} \in \mathbb{Q}^{n\times k}$ mátrix, amelyekre

$$B_i\left(d^{[0,\infty)}\mathbf{a}\right) = \sum_j \beta_{i,j}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) B_{ij},$$

olyan $C_j \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ mátrixok, amelyekre

$$C(d^{[0,\infty)}\mathbf{a}) = \sum_j \gamma_j \left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) C_j,$$

és olyan $D_{ij} \in \mathbb{Q}^{m\times m}$ mátrixok, amelyekre

$$D_i \left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) = \sum_j \delta_{i,j}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) D_{ij},$$

alkalmas differenciálpolinom-együtthatókkal:

$$\alpha_j \left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) \in \mathbb{Q}\left\{a_1, a_2, \ldots, a_s\right\} \subset R,$$
$$\beta_{i,j} \left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) \in \mathbb{Q}\left\{a_1, a_2, \ldots, a_s\right\} \subset R,$$
$$\gamma_j \left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) \in \mathbb{Q}\left\{a_1, a_2, \ldots, a_s\right\} \subset R,$$
$$\delta_{i,j} \left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) \in \mathbb{Q}\left\{a_1, a_2, \ldots, a_s\right\} \subset R.$$

Most átírom a változó paraméterű vertikum-típusú lineáris rendszert is hasonló módon

$$d\mathbf{x}_1 = A_{11}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^1\right)\mathbf{x}_1 + \sum_{i\geq 0}\beta_{1,i}\left(d^{\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^1\right) d^i\mathbf{u},$$

$$d\mathbf{x}_2 = A_{21}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^2\right)\mathbf{x}_1 + A_{22}\left(d^{[\infty)}\mathbf{p}^2\right)\mathbf{x}_2 + \sum_{i\geq 0} B_{2,i}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^2\right) d^i\mathbf{u},$$

$$\ldots$$

$$d\mathbf{x}_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1j}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^{k-1}\right)\mathbf{x}_j + \sum_{i\geq 0} B_{k-1}, i\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^{k-1}\right) d^i\mathbf{u},$$

$$d\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^{k} A_{k,j}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) + \sum_{i\geq 0} B_{k,i}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) d^i\mathbf{u},$$

$$y_1 = C_{1,1}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^1\right)\mathbf{x}_1 + \sum_{i\geq 0} D_{1,i}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^1\right) d^i\mathbf{u},$$

$$y_2 = C_{2,1}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^2\right)\mathbf{x}_1 + C_{2,2}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^2\right)\mathbf{x}_2 + \sum_{i\geq 0} D_{2i}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^2\right) d^i\mathbf{u}$$

$$\ldots$$

$$y_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1,j}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^{k-1}\right)\mathbf{x}_j + \sum_{i\geq 0} D_{k-1,i}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^{k-1}\right) d^i\mathbf{u},$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{k-1} C_{k,j}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right)\mathbf{x}_j + \sum_{i\geq 0} D_{k,i}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}\right) d^i\mathbf{u}.$$

Ebben az esetben is átírhatók az $A_{h,j}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^l\right)$, $j \leq h$, $B_{h,i}\left(d^{[\infty)}\mathbf{a}, \mathbf{p}^l\right)$, $i \leq 0$, együttható mátrixok, mint konstans $\mathbb{Q}^{k_h\times k_j}$, ill. $\mathbb{Q}^{k_h\times l}$ mátrixok lineáris kombinációi.

Parciális differenciálgyűrűk

Tekintsünk egy egységelemes R gyűrűt és ezen n számú $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \ldots, \partial_n$ szimbólumokkal jelölt differenciálást úgy, hogy az (R, ∂_i) differenciálgyűrű minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ráadásul ezek a differenciálások teljesítik a $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ kommutativitási feltételt.

Ekkor az $(R, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ gyűrűt parciális differenciálgyűrűnek nevezzük a ∂_i parciális differenciálásokra nézve [10].

Az állapotfüggő paraméteres lineáris rendszerek esetén az elérhetőséghez megkívánt gerjesztési feltételeket csak parciális differenciálpolinom-egyenletek formájában tudjuk kifejezni, ezért néhány egyszerű tényt megemlítünk, a differenciálgyűrűkre elmondottak analógjaként.

Az eddig elmondottak szerint a következő axiómákat fogalmazhatom meg:

$$\begin{aligned} \partial_i(r_1 + r_2) &= \partial_i r_1 + \partial_i r_2, \\ \partial_i(r_1 \cdot r_2) &= (\partial_i r_1)r_2 + r_1(\partial_i r_2), \\ (\partial_i\partial_j)r &= \partial_i(\partial_j r) = \partial_j(\partial_i r) = (\partial_j\partial_i)r. \end{aligned}$$

Ezekből további egyszerű tulajdonságok bizonyíthatók, pl.

$$\partial_i 1 = 0, \qquad \partial_i 0 = 0, \qquad \partial_i(r^k) = kr^{k-1}\partial_i r \qquad \text{(kommutatív esetben)} \qquad \text{stb.}$$

Tekintsünk egy $(R, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ differenciálgyűrűt és egy P parciális differenciálhatározatlant, ami azt jelenti, hogy minden $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ esetén van egy (ugyanazokkal a parciális differenciálási szimbólumokkal jelölt) $\partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\ldots\partial_n^{k_n}P$ nemdifferenciálhatározatlanunk, minden $k_i \geq 0$ egészre. Tehát egy parciális differenciál határozatlan végtelen sok nem-diffenciálhatározatlant jelent. Ezekkel tekintsük az

$$R[\ldots, \partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\ldots\partial_n^{k_n}P_1\ldots]$$

(nemdifferenciál) polinomgyűrűt az R gyűrű fölött. A $\partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\ldots\partial_n^{k_n}P$ összetett parciális deriváltat rövidítve, jelöljük a $\partial^{\mathbf{k}}P$ vektori jelöléssel. Ezzel egy általános egytagot (monom) a

$$\left(\partial^{\mathbf{k}_1}P\right)^{l_1}\left(\partial^{\mathbf{k}_2}P\right)^{l_2}\ldots\left(\partial^{\mathbf{k}_m}P\right)^{l_m}$$

jelöléssel írhatom le. Ezekkel a jelölésekkel egy polinom $R\left[\ldots, \partial^{\mathbf{k}}P, \ldots\right]$-ban monomok lineáris kombinációjaként adódik R-beli

$$f_{(\mathbf{k}_1,l_1)(\mathbf{k}_2,l_2)\ldots(\mathbf{k}_m,l_m)} \in R$$

együtthatókkal:

$$f(P) = \sum_{(\mathbf{k}_i,l_i)} f_{(\mathbf{k}_1,l_1)(\mathbf{k}_2,l_2)\ldots(\mathbf{k}_m,l_m)}\left(\partial^{\mathbf{k}_1}P\right)^{l_1}\left(\partial^{\mathbf{k}_2}P\right)^{l_2}\ldots\left(\partial^{\mathbf{k}_m}P\right)^{l_m}$$

alakban.

Így $R[\ldots, \partial^{\mathbf{k}}P, \ldots]$-ben most definiáljuk (több lépésben) a ∂_i parciális deriválást, amelyet az R-beli ∂_i parciális deriválás kiterjesztésének lehet tekinteni, a következőképpen:

$$\left(\partial_i f\right)(P) = \sum_{(\mathbf{k}_i,l_i)} \partial_i\left(f_{(\mathbf{k}_1,l_1)(\mathbf{k}_2,l_2)\ldots(\mathbf{k}_m,l_m)}\left(\partial^{\mathbf{k}_1}P\right)^{l_1}\left(\partial^{\mathbf{k}_2}P\right)^{l_2}\ldots\left(\partial^{\mathbf{k}m}P\right)^{l_m}\right)$$

majd

$$\partial_i\left(f_{(\mathbf{k}_1,l_1)(\mathbf{k}_2,l_2)\dots(\mathbf{k}_m,l_m)}\left(\partial^{\mathbf{k}_1}P\right)^{l_1}\left(\partial^{\mathbf{k}_2}P\right)^{l_2}\dots\left(\partial^{\mathbf{k}_m}P\right)^{l_m}\right)=$$

$$=\partial_i\left(f_{(\mathbf{k}_1,l_1)(\mathbf{k}_2,l_2)\dots(\mathbf{k}_m,l_m)}\right)\left(\partial^{\mathbf{k}_1}P\right)^{l_1}\left(\partial^{\mathbf{k}_2}P\right)^{l_2}\dots\left(\partial^{\mathbf{k}_m}P\right)^{l_m}+$$

$$+f_{(\mathbf{k}_1,l_1)(\mathbf{k}_2,l_2)\dots(\mathbf{k}_m,l_m)}\partial_i\left((\partial^{\mathbf{k}_1}P)^{l_1}(\partial^{\mathbf{k}_2}P)^{l_2}\dots(\partial^{\mathbf{k}_m}P)^{l_m}\right).$$

Ezután az egytag deriváltja

$$\partial_i\left((\partial^{\mathbf{k}_1}P)(\partial^{\mathbf{k}_2}P)\dots(\partial^{\mathbf{k}_m})\right)^{l_m}=\partial_i\left((\partial^{\mathbf{k}_1}P)^{l_1}(\partial^{\mathbf{k}_2}P)\right)^{l_2}\dots(\partial^{\mathbf{k}_m}P)^{l_m}+$$

$$+\sum_{j=2}^{m-1}(\partial^{\mathbf{k}_1}P)^{l_1}\dots\partial_i\left((\partial^{\mathbf{k}_j}P)^{l_j}\right)\dots(\partial^{\mathbf{k}_m}P)^{l_m}+$$

$$+(\partial^{\mathbf{k}_1}P)^{l_1}(\partial^{\mathbf{k}_2}p)^{l_2}\dots(\partial^{\mathbf{k}_{m-1}}P)^{l_{m-1}}\partial_i\left((\partial^{\mathbf{k}_m}P)^{l_m}\right).$$

Ezekután csak a $\partial_i\left((\partial^{\mathbf{k}_j}P)^{l_j}\right)$ $(j=1,2,\dots,m)$ deriváltat kell definiálni:

$$\partial_i\left((\partial^{\mathbf{k}_j}P)^{l_j}\right)=l_j(\partial^{\mathbf{k}_j}P)^{l_j-1}\partial_i(\partial^{k_j}P)=$$

$$=l_j(\partial^{\mathbf{k}_j}P)^{l_j-1}\partial_i\left(\partial_1^{k_{j,1}}\partial_2^{k_{j,2}}\dots\partial_n^{k_{j,n}}P\right)=$$

$$=l_j(\partial^{\mathbf{k}_j}P)^{l_j-1}\partial_1^{k_{j,1}}\partial_2^{k_{j,2}}\dots\partial_i^{k_{j,i}+1}\dots\partial_n^{k_{j,n}}P.$$

A formula $l_j=0$-ra is érvényes, ui ekkor $(\partial^{\mathbf{k}_j}P)^0=1$ és így $\partial_i\left(\partial^{\mathbf{k}_j}P\right)^0=\partial_i 1=0$, míg a végeredményként kapott egy tag együtthatója, l_j egyenlő 0-val.

Egyszerű, de hosszadalmas számolással adódik, hogy $R[\dots,\partial^{\mathbf{k}}P,\dots]$ a definiált parciális deriválásokkal, egy parciális differenciál-gyűrűvé válik, amelyet

$$(R\{P\},\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_n)=R\{P\}\text{-vel}$$

jelölök és ezt az R parciális differenciál-gyűrűből vett együtthatós, P egyhatározatlanú parciális differenciál-polinomok parciális differenciál-gyűrűjének nevezem.

Hasonló módon definiálhatók a több parciális differenciál-határozatlanú parciális differenciál-polinomjainak, egy R parciális differenciálgyűrű fölötti parciális differenciál-gyűrűje is. Ehhez egy általános egytagot kell felírni, majd lépésről-lépésre kiterjeszteni a parciális differenciálásokat, a fentiekhez hasonlóan.

A $P_1,P_2,\dots,P_I$ parciális differenciál-határozatlanok helyett tekintjük a végtelen sok

$$\dots\partial_1^{k_{1,1}}\partial_2^{k_{1,2}}\dots\partial_n^{k_{1,n}}P_1=\partial^{\mathbf{k}_1}P_1,\dots;\dots,\partial_1^{k_{2,1}}\partial_2^{k_{2,2}}\dots\partial_n^{k_{2,n}}P_2=\partial^{\mathbf{k}_2}P_2,\dots;\dots;\dots$$

$$\partial_1^{k_{I,1}}\partial_2^{k_{I,2}}\dots\partial_n^{k_{I,n}}P_I,\dots,k_{1,1},k_{1,2},\dots,k_{1,n},k_{2,1},k_{2,2},\dots,k_{2,n},\dots,k_{I,1},k_{I,2},\dots,k_{I,n}$$

(nemdifferenciál) határozatlant. Itt $k_{i,j}$ befutja az összes nemnegatív egész számot. Ezekkel definiálható az R-fölötti (nemdifferenciál) polinomok

$$R[\dots,\partial_1^{\mathbf{k}_1}P_1,\dots,\partial^{\mathbf{k}_2}P_2,\dots,\partial^{\mathbf{k}_I}P_I]$$

gyűrűje majd ezen vezethető be az R-beli $\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_n$ parciális deriváltak kiterjesztésének tekinthető parciális deriválások. Elkerülendő az elemi, de hosszadalmas konstrukciót, a következő rekurzív konstrukciót is alkalmazhatjuk. Mivel már ismerjük, hogy egy általános $(R, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ parciális differenciálgyűrű és egyetlen P parciális differenciálhatározatlan esetén hogyan kell az R-fölötti egyhatározatlanú parciális differenciálpolinomok parciális differenciálgyűrűjét konstruálni, ezt alkalmazzuk lépésenként egyenként hozzátéve a parciális differenciálhatározatlanokat.

Legyen $R_0 := R$ parciális differenciálgyűrű a $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ parciális deriválásokkal. Ekkor a P_1 parciális differenciálhatározatlannnal megadható a P_1-határozatlanú $(R_0, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ fölötti parciális differenciálpolinomok

$$R_1 = (R_0\{P_1\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$$

parciális differenciálgyűrűje. A következő lépésben definiálható

$$\begin{aligned} R_2 &= (R_1\{P_2\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = (R_0\{P_1\})\{P_2\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n = \\ &= (R_0\{P_1\}\{P_2\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = (R_0\{P_1, P_2\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) \end{aligned}$$

parciális differenciálgyűrű, melynek elemei az $R_0 = R$ együtthatós két parciális differenciálhatározatlanú differenciálpolinomok.

Általában, ha már definiáltuk

$$R_i = (R_{i-1}\{P_i\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = (R_0\{P_1, P_2, \ldots, P_i\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$$

$P_1, P_2, \ldots, P_i$ parciális differenciálhatározatlanú parciális differenciálpolinomok parciális differenciálgyűrűjét, akkor legyen

$$R_{i+1} = (R_i\{P_{i+1}\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = (R_0\{P_1, P_2, \ldots, P_{i+1}\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n),$$

és végül

$$\begin{aligned} R_I &= (R_{I-1}\{P_I\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = (R_0\{P_1, P_2, \ldots, P_I\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n) = \\ &= (R\{P_1, P_2, \ldots, P_I\}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n). \end{aligned}$$

Tekintsünk egy $F(P_1, P_2, \ldots, P_I) \in R\{P_1, P_2, \ldots, P_I\}$ parciális differenciálpolinomot; akkor az

$$F(P_1, P_2, \ldots, P_I) = 0$$

egyenlet egy $P_1, P_2, \ldots, P_I$ ismeretlenes parciális differenciálegyenlet.

Ha $(\mathcal{R}, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ az $(R, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ parciális differenciálgyűrű egy kiterjesztése, $R \subset \mathcal{R}$, akkor felvethető az a kérdés, hogy az

$$F(P_1, P_2, \ldots, P_I) = 0$$

parciális differenciálegyenletnek van-e megoldása az $\mathcal{R}$ differenciálgyűrűben.

Ha léteznek $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_I \in \mathcal{R}$ elemek, amelyekre az $F(P_1 P_2, \ldots, P_I) \in R\{P_1, P_2, \ldots, P_I\} \subset \mathcal{R}\{P_1, P_2, \ldots, P_I\}$ polinomba a $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_I \in \mathcal{R}$ elemeket behelyettesítve

$$F\left(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_I\right) = 0$$

adódik.

Ha minden $F(P_1, P_2, \ldots, P_I) \in R\{P_1, P_2, \ldots, P_I\}$ parciális differenciálegyenletnek van az $\mathcal{R} \supset R$ kiterjesztett parciális differenciálgyűrűben megoldása, akkor az $F(P_1, P_2, \ldots, P_I) = 0$ parciális differenciálegyenletek megoldhatók az $\mathcal{R}$ kiterjesztett parciáldifferenciálgyűrűben.

Ez ahhoz hasonló, hogy a valós együtthatós polinomok a $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ komplex testre való kiterjesztése esetén a $p(x) = 0$ valós polinomegyenleteknek van megoldása. Az alábbiakban ennél sokkal komplexebb példát is mutatok.

Legyen $R = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ n-határozatlanú $\mathbb{R}$-fölötti polinomgyűrű. $\mathbb{R}$-et tekinthetjük triviális $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ parciális deriválásokkal ellátott parciális differenciálgyűrűnek. A ∂_i deriválásokat az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ határozatlanokra a $\partial_i x_j = \delta_{ij}$ segítségével definiáljuk, majd kiterjesztjük az egész $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűre.

Tekintsük most a $P_1, P_2, \ldots, P_I$ parciális differenciálhatározatlanokat, és ezek parciális differenciálpolinomjait az $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ fölött. Ezek alkotják az $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]\{P_1, P_2, \ldots, P_I\}$ parciális differenciálgyűrűt. Egy

$$F(\mathbf{P}) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]\{P_1, P_2, \ldots, P_I\}$$

polinomra felírt $F(\mathbf{P}) = 0$ egyenleteket részletesen kiírva a következő $\mathbb{R}^n$-beli $P_1, P_2, \ldots, P_I$ ismeretlenes

$$F(\mathbf{x}, \ldots, \partial^{\mathbf{k}_1} P_1(\mathbf{x}), \ldots, \partial^{\mathbf{k}_2} P_2(\mathbf{x}), \ldots, \ldots, \ldots, \partial^{\mathbf{k}_I} P_I(\mathbf{x})) = 0 \qquad (*)$$

parciális differenciálegyenletnek tekinthetjük. Mivel $(*)$ polinomiális függvényre felírt parciális differenciálegyenlet a $P_1, P_2, \ldots, P_I$ ismeretlen függvényekre, ezért analitikus is, ezért a Caucky-Kovalevszkaja-féle egzisztencia tétele értelmében létezik analitikus megoldása. Természetesen, mivel állításunk csak illusztrációként szolgál, nem idéztem a pontos tételbeli fontos körülményeket, a kezdeti feltételeket, stb. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ gyűrűből kiindulva, mely az $\mathbb{R}^n$-beli polinomiális függvények parciális differenciálgyűrűjét jelenti, ennek az $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ analitikus függvényekből álló parciális differenciálgyűrűre való kiterjesztéseként foghatjuk fel, ezért azt állíthatom, hogy az idézett tétel szerint véve az $R = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-nek az $\mathcal{R} = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kiterjesztését, a $(*)$ parciális differenciálegyenletnek létezik R-beli megoldása, míg polinomiális $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-beli megoldása nem várható.

Durván szólva, a $(*)$ egyenletnek a $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_I(x)$ $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-beli polinomiális függvényei nem lesznek megoldásai, de ne felejtsük el, hogy egy „általában" állítás nem bizonyítható, de gyakorlatilag első tesztnek tekinthető.

Természetesen előfordul, sőt én is konstruáltam egy olyan példát, amelyre polinomiális együtthatós parciális differenciálegyenletnek lesz polinomiális megoldása. Azonban a konstrukciónak a nagyon erőltetett, szinguláris volta is inkább azt sugallja, hogy általában egy polinomiális parciális differenciálegyenletnek nincs polinomiális, csak analitikus (nempolinomiális) megoldása, ahogy azt a Cauchy-Kovalevszkaja-tétel is állítja.

1.1. Példa. *Felhasználhatunk egy egyszerű tényt, hogy az* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$*-beli vektorra merőleges alteret az*

$$(x_2x_3, -2x_1x_3, x_1x_2, x_5, -x_4),$$

$$(x_2x_4, -2x_1x_4, x_5, x_1x_2, -x_3),$$

$$(x_2x_5, -2x_1x_5, x_4, -x_3, x_1x_2),$$

$$(x_2, -x_1, x_4x_5, -2x_3x_5, x_3x_4)$$

vektorok kifeszítik és az altér elemeit előállíthatjuk $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *valós együtthatós lineáris kombinációjaként.*

Tegyük fel, hogy a $P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), P_3(\mathbf{x}), P_4(\mathbf{x}), P_5(\mathbf{x}) \neq 0$ $R[x_1, x_2]$-beli polinomokra teljesülnek a

$$\partial_{x_2} P_3 = P_2, \partial_{x_1} P_4 = P_2,\ \partial_{x_1} P_5 = P_3, \partial_{x_2} P_5 = P_4,\ \partial_{x_1}\partial_{x_2} P_5 = P_2,$$
$$(\partial^2_{x_1}\partial_{x_2} P_3)^2 = P_1,\ (\partial^2_{x_1} P_2)^2 = P_1,\ (\partial^3_{x_1} P_4)^2 = P_1,\ (\partial^3_{x_1}\partial_{x_2} P_5)^2 = P_1$$

relációk teljesülnek, és $q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), q_3(\mathbf{x}), q_4(\mathbf{x})$ tetszőleges polinomok. Ekkor az u-ra vonatkozó

$$\begin{aligned}
&(q_1(\mathbf{x})P_2(\mathbf{x})P_3(\mathbf{x}) + q_2(\mathbf{x})P_2(\mathbf{x})P_4(\mathbf{x}) + q_3(\mathbf{x})P_2(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x}) + q_4(\mathbf{x})P_2(\mathbf{x}))\left(\partial^3_{x_1}\partial_{x_2} u(\mathbf{x})\right)^2 + \\
&+ (q_1(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x})P_2(\mathbf{x}) + q_2(\mathbf{x})P_5(\mathbf{x}) + q_3(\mathbf{x})P_4(\mathbf{x}) + q_4(\mathbf{x})P_4(\mathbf{x})P_5(\mathbf{x}))\,\partial_{x_1} u(\mathbf{x}) - \\
&- (2q_1(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x})P_3(\mathbf{x}) + 2q_1(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x})P_4(\mathbf{x}) + 2q_3(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x})P_5(\mathbf{x}) + q_4(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x}))\,\partial_{x_1}\partial_{x_2} u(\mathbf{x}) + \\
&+ (q_1(\mathbf{x})P_5(\mathbf{x}) + q_2(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x})P_2(\mathbf{x}) - q_3(\mathbf{x})P_3(\mathbf{x}) - 2q_4(\mathbf{x})P_3(\mathbf{x})P_5(\mathbf{x}))\,\partial_{x_2} u(\mathbf{x}) + \\
&+ (-q_1(\mathbf{x})P_4(\mathbf{x}) - q_2(\mathbf{x})P_3(\mathbf{x}) + q_3(\mathbf{x})P_1(\mathbf{x})P_2(\mathbf{x}) + q_4(\mathbf{x})P_3(\mathbf{x})P_4(\mathbf{x}))\,u(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned}$$

parciális differenciálegyenletnek a fenti merőlegességi kritérium alapján $u(\mathbf{x}) = P_5(\mathbf{x})$ a megoldása. Belátható, hogy ekkor

$$P_4(\mathbf{x}) = \partial_{x_2} u(\mathbf{x}), P_3(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} u(\mathbf{x}),\ P_2(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}\partial_{x_2} u(\mathbf{x}) \text{ és } P_1(\mathbf{x}) = \left(\partial^3_{x_1}\partial_{x_2} u(\mathbf{x})\right)^2,$$

és

$$\lambda_1 = q_1(\mathbf{x}), \lambda_2 = q_2(\mathbf{x}), \lambda_3 = q_3(\mathbf{x}), \lambda_4 = q_1(\mathbf{x}).$$

Látszik nagyon esetleges, hogy egy komplikáltabb polinomiális együtthatójú parciális differenciálegyenletnek legyen polinomiális megoldása. Erre pontos választ az egyenletek komplikált volta miatt aligha adhatunk általános esetben.

2. Lineáris időtől függő rendszerek rendszertulajdonságai

Rendszertulajdonságokon a bemenet-kimenet rendszerek 0-ból való elérhetőségét, 0-ba irányíthatóságát, megfigyelhetőségét és rekonstruálhatóságát, valamint valamilyen típusú stabilitását értjük. Ez utóbbival nem foglalkozunk átfogóan, mert a klasszikus Ljapunov-féle módszerek, vagy a Riccati-egyenletes jellemzések lényegében megoldják a problémát ebben a rendszerosztályban. Az 5. fejezetben a stabilitást egy speciális összefüggésben, a rendszerek kapcsolási rendszerekkel történő approximációjai szempontjából vizsgálom.

A klasszikus kanonikus alakú

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

időtől függő együtthatós rendszerekre R. Kalman minden alapkérdést megoldott [31], [35], [34], [39], [48]. Bebizonyította, az általa definiált alapvető fogalmakat illetően (elérhetőség, irányíthatóság, megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság) az elérhetőség és megfigyelhetőség, illetve az irányíthatóság és rekonstruálhatóság közötti dualitást, valamint a folytonos idejű (2.1 alakú) rendszerekre fennálló elérhetőség és irányíthatóság, valamint megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság párok ekvivalenciáját. Ennek értelmében csak egyetlen rendszertulajdonsággal, az elérhetőséggel fogunk foglalkozni.

Tekintsük az (2.1) rendszer elérhetőségét egy fix $[0, T]$ intervallumon, ahol feltesszük, hogy a

$$A : [0, T] \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad B : [0, T] \to \mathbb{R}^{n\times k}$$

$$C : [0, T] \to \mathbb{R}^{l\times n}, \qquad D : [0, T] \to \mathbb{R}^{l\times k},$$

függvények legalább folytonosak.

R. Kalman az elérhetőséget az ún. elérhetőségi Kalman-Gram-féle mátrix invertálhatóságával jellemezte. Ehhez szükségünk van az (2.1) rendszer alapmátrixának a fogalmára.

Tekintsük az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(\tau) = I \tag{2.2}$$

kezdetiérték-problémát. Folytonos együtthatómátrix esetén ennek egyetlen, az egész $[0, T]$ intervallumon értelmezett

$$t \mapsto \Phi(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

megoldása van, amelyik folytonosan differenciálható mint kétváltozós (t, τ)-függvény, amelyre $\Phi(t, \tau)$ invertálható minden (t, τ) párra. Ehhez tekintsük az

$$\dot{Y}(t) = -Y(t)A(t), \quad Y(\tau) = I$$

kezdetiérték problémának az egész $[0, T]-n$ értelmezhető $t \mapsto \Psi(t, \tau)$ megoldását. Ekkor

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\Psi(t,\tau)\Phi(t,\tau)\right) = \dot{\Psi}(t,\tau)\Phi(t,\tau) + \Psi(t,\tau)\dot{\Phi}(t,\tau) = \\ &= \left(-\Psi(t,\tau)A(t)\Phi(t,\tau) + \Psi(t,\tau)\left(A(t)\Phi(t,\tau)\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

azaz $\Psi(t,\tau)\Phi(t,\tau) = I$, ami $\mathbb{R}^n$-ben elegendő ahhoz, hogy $\Psi(t,\tau) = \Phi\ (t,\tau)^{-1}$ legyen. Továbbá $\Phi(t,\tau) = \Phi(t,0)\Phi(\tau,0)^{-1}$, mivel $t \mapsto \Phi(t,0)\Phi(\tau,0)^{-1}$ megoldása az $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ egyenletnek, és $\Phi(\tau,0)\Phi(\tau,0)^{-1} = I$. Felcserélve az a t és τ változók szerepét

$$\Phi(\tau,t) = \Phi(\tau,0)\ \Phi(t,0)^{-1} = \Phi(\tau,0)\ \Psi(t,0),$$

azaz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(\tau,t) &= \Phi(\tau,0)\frac{d}{dt}\Psi(t,0) = \Phi(\tau,0)\left(-\Psi(t,0)A(t)\right) = \\ &= -\Phi(\tau,0)\Phi(t,0)^{-1}A(t) = -\Phi(\tau,t)A(t), \Phi(\tau,\tau) = I.\end{aligned}$$

Tehát

$$\Phi(t,\tau)^{-1} = \Phi(\tau,t).$$

Ezen előkészítést követően R. Kalman után definiáljuk az elérhetőségi Kalman-Gram-féle mátrixot:

$$R[0,T] = \int_0^T \Phi(T,t)B(t)B(t)^*\Phi(T,t)^*dt$$

A Kalman-féle elérhetőségi tétel [6]

Az (2.1) rendszer elérhető a 0 állapotból akkor és csak akkor, ha az elérhetőségi Kalman-Gram-féle mátrix invertálható, vagy ami ezzel ekvivalens, ha pozitív definit.

Megemlítjük, hogy az irányíthatóságra is hasonló tétel igaz. Ehhez az irányíthatósági Kalman-Gram-féle mátrixot a következőképpen definiáljuk:

$$C[0,T] = \int_0^T \Phi(0,t)B(t)B(t)^*\Phi(0,t)^*dt.$$

Ha értelmezzük az (2.1)-rendszer duális rendszerét

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)^*x(t) + C(t)^*u(t) \\ y(t) &= B(t)^*x(t) + D(t)^*u(t),\end{aligned} \tag{2.3}$$

jelölhetnénk az (2.3) rendszerben a bemenetet y-nal, a kimenetet u-val, ezzel is jelezve, hogy szerepük felcserélődik.

A Kalman-féle dualitási tétel [6]

(2.1) irányítható akkor és csak akkor, ha (2.3) rekonstruálható, és (2.1) elérhető akkor és csak akkor, ha (2.3) megfigyelhető.

Mivel a duális rendszer duálisa az eredeti rendszer, ezért az is igaz, hogy (2.1) megfigyelhető akkor és csak akkor, ha (2.3) elérhető, továbbá (2.1) rekonstruálható, akkor és csak akkor, ha (2.3) irányítható.

A megfigyelhetőségi Kalman-Gram-féle mátrix

$$O[0,T] = \int_0^T \Phi(T,t)^*C(t)^*C(t)\Phi(T,t)dt,$$

míg a rekonstruálhatóság ekvivalens a

$$R_e[0,T] = \int_0^T \Phi(0,t)^* C(t)^* C(t)\Phi(0,t)dt$$

rekonstruálhatósági Kalman-Gram-féle mátrix invertálhatóságával, illetve pozitív definitségével.

A továbbiakban az (2.1) rendszer elérhetőségével, illetve az ennél általánosabb

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + \sum_j B_j(t)u^{(j)} \\ y(t) &= C(t)x(t) + \sum_j D_j(t)u^{(j)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

általános kanonikus alakú rendszerek elérhetőségével foglalkozunk. Az (2.1) rendszert több cikk is vizsgálja [34], . . . ,[39]. Ezekből kiindulva az általános kanonikus alakú (2.4) rendszerre fókuszáljuk a vizsgálatainkat, különös tekintettel az elméletben fontos szerepet játszó perzisztens gerjesztési feltétel elvi megkonstruálhatóságára.

Néhány új fogalomra is szükségünk lesz. Ezeket most definiáljuk [7].

Legyen L egy $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, amelyen még egy szorzásszerű műveletet is definiálunk, az ún. Lie-szorzást vagy Lie zárójelet: Ha $l_1, l_2 \in L$, akkor $[l_1, l_2] \in L$, $l_1 \mapsto [l_1, l_2]$ és $l_2 \mapsto [l_1, l_2]$ lineáris leképezések és

1. $[l, l] = 0$, minden $l \in L$ esetén
2. $[l_1, l_2] + [l_2, l_1] = 0$, minden $l_1, l_2 \in L$ esetén,
3. $\big[l_1, [l_2, l_3]\big] + \big[l_2, [l_3, l_1]\big] + \big[l_3, [l_1, l_2]\big] = 0$,

minden $l_1, l_2, l_3 \in L$ esetén.

2. szerint $[l_1, l_2] = -[l_2, l_1]$ az antikommutativitás kifejezője, míg
3. a nemasszociativitás mértéke.

Valóban

$$\begin{aligned} \big[l_1, [l_2, l_3]\big] &= -\big[l_2, [l_3, l_1]\big] - \big[l_3, [l_1, l_2]\big] = \\ &= \big[[l_1, l_2], l_3\big] - \big[l_2, [l_3, l_1]\big], \end{aligned}$$

ui, ha $\big[l_2, [l_3, l_1]\big] = 0$, akkor a fennmaradó

$$\big[l_1, [l_2, l_3]\big] = \big[[l_1, l_2], l_3\big]$$

egyenlet éppen az asszociativitást jelenti.

Példák:

1. Legyen $L = \mathbb{R}^{n\times n}$, $[A, B] = AB - BA$. Az így definiált Lie szorzással $(\mathbb{R}^{n\times n}, [\cdot, \cdot])$ Lie-algebrává válik.

2. Tekintsük egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ analitikus függvények $\mathbb{R}$ vektorterét fölött. A Lie-zárójelet definiáljuk a következő módon:
$$[f, g](x) = f'(x)g(x) - g'(x)f(x). \tag{2.5}$$
$A(\Omega)$-val jelöljük az összes analitikus $\mathbb{R}^n$ értékű függvények (Ω-n az analitikus vektormezők) $\mathbb{R}$ fölötti vektorterét az (2.5) Lie-szorzással.

   Ekkor az $(A(\Omega), [\cdot,\cdot])$ Lie-algebrát kapjuk.

3. Hasonlóan eljárva, egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett C^∞ vektormezők $C^\infty(\Omega)$ $\mathbb{R}$ fölötti vektorterén definiáljuk (2.5) segítségével a Lie-szorzatot. Ekkor a $(C^\infty(\Omega), [\cdot,\cdot])$ Lie algebrát kapjuk.

Most térjünk vissza az (2.4) rendszerünkhöz. Tekintsük az
$$\{A(t) : t \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$$
részhalmaz által generált $L \subset \mathbb{R}^{n\times n}, (L, [\cdot,\cdot])$ rész-Lie-algebrát, azaz azt a legkisebb $L \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ Lie-algebrát, amelyre $\{A(t) : t \in [0, T]\} \subset L$ teljesül. Ilyen létezik, ui. a tartalmazó rész Lie-algebrák halmaza nem üres, $\mathbb{R}^{n\times n}$ benne van, ezért ennek van minimális eleme pl. az összes ilyen rész-Lie-algebra metszete, ezt nevezzük az $\{A(t)\}$-k által generált $L = L(A(t)) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ Lie-algebrának. Mivel $\mathbb{R}^{n\times n}$ n^2, azaz véges dimenziós, ezért az $L \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ rész-Lie-algebrája is véges dimenziós. Tekintsük L-nek egy $A_1, A_2, \dots, A_I \in L$ bázisát.

Ebben a bázisban
$$A(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t)A_i$$
Fejezzük ki az $A_1, A_2, \dots, A_I$ bázisban az $[A_i, A_j] \in L$ Lie-szorzatot:
$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^{I} \Gamma^k_{ij} A_k.$$
Minthogy az $X \mapsto [A_i, X] = AdA_i(X)$ egy lineáris leképzés az L vektortéren (amely Lie-algebra is), így az AdA_i-nek az $A_1, A_2, \dots, A_I$ bázisban való mátrixreprezentációja kifejezhető a Γ^k_{ij} számokkal.

Legyen $X = \sum\limits_{j=1}^{I} x_j A_j$; ekkor
$$[A_i, X] = \left[A_i, \sum_{j=1}^{I} x_j A_j\right] = \sum_j x_j \left(\sum_{h=1}^{I} \Gamma^h_{ij}\right) A_h,$$
ahol a $\sum\limits_j \Gamma^h_{ij} x_j$ a
$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{i1} & \Gamma^1_{i2} & \dots & \Gamma^1_{iI} \\ \Gamma^2_{i1} & \Gamma^2_{i2} & \dots & \Gamma^2_{iI} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma^I_{i1} & \Gamma^I_{i2} & \dots & \Gamma^I_{iI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_I \end{pmatrix} = \Gamma_i \mathbf{x}$$
mátrix-vektor szorzat h-adik komponense, azaz az $AdA_iX \leftrightarrow \Gamma_i\mathbf{x}$, $X \leftrightarrow \mathbf{x}$ megfelelések miatt Γ_i az AdA_i mátrix reprezentációja az $A_1A_2 \dots A_I \in L$ bázisban. Azt tudjuk, hogy

az (2.1) rendszer $x(0) = \xi$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása a Cauchy-féle formula alapján

$$x(t) = \Phi(t,0)\xi + \int_0^t \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

sőt, az általánosított kanonikus alakú (2.4) rendszerre is hasonló áll fenn

$$x(t) = \Phi(t,0)\xi + \int_0^t \Phi(t,\tau)\left(\sum_j B_j(\tau)u^j(\tau)\right)d\tau.$$

Ez így szép, viszont a $\Phi(t,\tau)$ alapmátrixot csak kevés esetben tudjuk kiszámítani. Az állandó együtthatós rendszerekre az alaprendszer az

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(\tau) = I$$

megoldása, vagyis,

$$\Phi(t,\tau) = \exp A(t-\tau).$$

Sőt, ha a rendszer $A(t)$ struktúramátrixa $A(t) = a(t)A$ alakú, ekkor az alaprendszer $\Phi(t,\tau) = \exp A \int_\tau^t a(s)ds$.

Általános időtől függő struktúrájú

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1} a_i(t)A_i x + \sum_j B_j(t)u^{(j)}(t)$$

rendszerre az alaprendszer

$$\Phi(t,\tau) = \exp A_1 g_1(t,\tau) \exp A_2 g_2(t,\tau) \dots \exp A_I g_I(t,\tau)$$

alakú. Most is feltesszük, hogy az $A(t)$-k által generált $\mathcal{L}$ Lie-algebrában az $A_1, A_2, \dots, A_I$ egy bázis, és az AdA_i mátrix reprezentációja a $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{I\times I}$ mátrix. Ekkor a fenti reprezentáció létezésére vonatkozik a

Wei-Norman-tétel. [4]

Legyen $\gamma(t) = g(t,\tau) \in \mathbb{R}^k$ *megoldása a nemlineáris*

$$\left(\sum_{i=1}^I \exp\Gamma_1\gamma_1 \exp\Gamma_2\gamma_2 \dots \exp\Gamma_{i-1}\gamma_{i-1}E_{ii}\right)^{-1}\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{a}$$
$$\gamma(\tau) = 0 \tag{2.6}$$

ún. Wei-Norman diffeerenciálegyenletnek. (*Ennek a megoldása lokálisan létezik, ui. a* $\gamma(\tau) = 0$ *kezdeti-feltétel miatt az invertálandó mátrix* $\tau = 0$*-ban az identitás, így invertálható, amiért* τ *egy alkalmas környezetében is invertálható, ezért* (2.6) *explicitté tehető.*)

Ekkor

$$\Phi(t,\tau) = \exp A_1 g(t,\tau) \exp A_2 g(t,\tau) \dots \exp A_I g(t,\tau)$$

exponenciális szorzat alakú.

Azt ismertnek feltételezzük, hogy az

$$\exp A_i g_i(t,\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} q_{ij}\big(g_i(t,\tau)\big) A_i^j \tag{2.7}$$

alakú, polinomiális A_i-ben melynek legfeljebb $n-1$ a foka, kvázipolinomiális $g(t,\tau)$-ban, azaz, polinomiális $g_i(t,\tau)$-ban $\sin \alpha_l g_i(t,\tau)$, $\cos \beta_l g_i(t,\tau)$-ban és $\exp \lambda_l g_i(t,\tau)$-ban, ahol a λ_l az A_i sajátértékeinek valós részei, míg α_l, β_l a sajátértékek imaginárius részei. Az erre vonatkozó alapvető eredmények megtalálhatók a mátrixelmélet és a közönséges differenciálegyenletek klasszikus monográfiáiban, pl. Gantmacher [1],....

Az (2.7) előállítást az exponenciális szorzatelőállításba beírva azt kapjuk, hogy

$$\Phi(t,\tau) = \sum_{\mathbf{n}} Q_{\mathbf{n}}\left(\mathbf{g}(t,\tau)\right) A_1^{n_1} A_2^{n_2} \dots A_I^{n_I},$$

ahol a $Q_{\mathbf{n}}$ a $\mathbf{g}(t,\tau) = (g_1(t,\tau), g_2(t,\tau), \dots, g_I(t,\tau))$ kvázipolinomjai (a $g_{ij}\left(g_i(t,\tau)\right)$ kvázipolinomok bizonyos szorzatai).

Tekintsük most az általánosított időfüggő együtthatós lineáris rendszer (az (2.4) rendszer) végállapotait az $x(0)=0$ kezdeti feltétel esetén. A Cauchy-féle formula alapján

$$x(T) = \int_0^T \Phi(T,t)\left(\sum_j B_j(t) u^{(j)}(t)\right) dt. \tag{2.8}$$

Kezelhetőbbé tesszük az (2.8) formulát egy parciális integrálási procedúra alkalmazásával. Ha a legmagasabb rendű előforduló u-derivált $u^{(J)}(t)$, akkor feltesszük, hogy minden $j=0,1,2,\dots,J-1$ esetén teljesülnek az $u^{(j)}(0)=0$, $u^{(j)}(T)=0$ peremfeltételek. Ez a feltétel nem befolyásolja az elérhető végállapotok alterét az $\mathbb{R}^n$-ben.

$$x(T) = \int_0^T \Phi(T,t)B_0(t)u(t)dt + \sum_{j=1} \int_0^T \Phi(T,t)B_j(t)u^{(j)}(t)dt =$$

$$= \int_0^T \Phi(T,t)B_0 u(t)dt + \sum_{j\geq 1} [\Phi(T,t)B_j(t)u^{j-1}(t)]_0^T -$$

$$- \sum_{j=1} \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\Phi(T,t)B_j(t)\right) u^{(j-1)}(t)dt = \int_0^T \Phi(T,t)B_0(t)u(t)dt +$$

$$+ \int_0^T \Phi(T,t)\left(A(t)B_1(t) - B_1'(t)\right) u(t)dt + \sum_{j\geq 2} \int_0^T \Phi(T,t)\Big(A(t)B_j(t) - B_j'(t)\Big) u^{(j-1)}(t)dt.$$

Ezt az utolsó tagra ismételve kapjuk a következő lépés egyenleteit:

$$\sum_{j\geq 2} \int_0^T \Phi(T,t)\Big(A(t)B_j(t) - B_j'(t)\Big) u^{(j-1)}(t)dt = \sum_{j\geq 2} \Big[\Phi(T,t)\big(A(t)B_j(t) - B_j'(t)\big) u^{(j-2)}(t)\Big]_0^T -$$

$$- \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\Phi(T,t)\big(A(t)B_2(t) - B_2'(t)\big)\Big) u(t)dt - \sum_{j\geq 3} \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\Phi(T,t)\big(A(t)B_j(t) - B_j'(t)\big)\Big) u^{(j-2)}(t)dt =$$

$$= \int_0^T \Phi(T,t)\left(A(t)^2 B_2(t) - 2A(t)B_2'(t) - A'(t)B_2(t) + B''(t)\right)u(t)dt+$$

$$+\sum_{j\geq 3}\int_0^T \Phi(T,t)\left(A(t)^2 B_j(t) - 2A(t)B_j'(t) - A'(t)B_j(t) + B_j''(t)\right)u^{(j-2)}(t)dt.$$

Az utolsó tagra ismét alkalmazva a parciális integrálást, hasonló egyenletet kapunk:

$$\sum_{j\geq 3}\int_0^T \Phi(T,t)\Big(A(t)^2 B_j(t) - 2A(t)B_j'(t) - A'(t)B_j(t) + B_j''(t)\Big)u^{(j-2)}(t)dt =$$

$$= \int_0^T \Phi(T,t)\Big(A(t)^3 B_3(t) - 2A(t)A(t)'B_3(t) - A'(t)A(t)B_3(t) - 3A(t)^2 B_3'(t) + 3A'(t)B_3'(t)+$$

$$+ 3A(t)B_3''(t) - B_3'''(t)\Big)u(t)dt+$$

$$+\sum_{j\geq 4}\int_0^T \Phi(T,t)\Big(A(t)^3 B_j(t) - 3A(t)^2 B_j'(t) - 2A(t)A'((t))B_j(t)+$$

$$+ 3A(t)B_j''(t) - A'(t)A(t)B_j(t) + 3A'(t)B_j'(t) + A''(t)B_j(t) - B_j'''(t)\Big)u^{(j-3)}(t)dt.$$

Ezt folytatva, a J-edik lépés után már az integrálban nem szerepel $u(t)$ deriváltja. Összegezhetjük a számításaink eredményeit. Ehhez bevezetünk néhány rövidítő jelölést.

Legyenek $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\gamma$, $1 \leq \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\gamma$ egész számok. Ekkor vektorális írásmódot használva bevezetjük az $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\gamma)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\gamma)$ jelöléseket, a γ dimenziót nem tüntetve fel. Bevezetjük az $\mid \alpha \mid = \sum \mid \alpha \mid$ normajelölést is.

Ekkor az $\left(A(t)^{(\alpha_1)}\right)^{\beta_1}\left(A(t)^{(\alpha_2)}\right)^{\beta_2}\ldots\left(A(t)^{(\alpha_\gamma)}\right)^{\beta_\gamma}$ szorzatra az $\left(A^{(\boldsymbol{\alpha})}(t)\right)^{\boldsymbol{\beta}}$ rövidítést vezetjük be. Így

$$x(T) = \int_0^T \Phi(T,t)B_0(t)u(T)dt + \int_0^T \Phi(T,t)\Big(A(t)B_1(t) - B_1'(t)\Big)u(t)dt+$$

$$+\int_0^T \Phi(T,t)\Big(A(t)^2 - A'(t)B_2(t) - 2A(t)B_2'(t) + B_2''(t)\Big)u(t)dt+$$

$$+\int_0^T \Phi(T,t)\Big(\big(A(t)^3 - 2A(t)A(t)' - A(t)'A(t)\big)B_3(t)-$$

$$- \left(3A(t)^2 - 3A'(t)\right)B_3'(t) + 3A(t)B_3'' - B_3'''\Big)u(t)dt+$$

$$+ \ldots =$$

$$= \int_0^T \Phi(T,t) \left[\sum_{j=0}^{J} \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=j-\widehat{j}} C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \left(A^{(\boldsymbol{\alpha})}(t)\right)^{\boldsymbol{\beta}} \right) B_j^{(\widehat{j})}(t) \right] u(t)dt.$$

Pl, a 3. tagban a $B_3(t)$ együtthatója esetén a lehetséges $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ indexek az $(0,3), (1,1) + (0,1)$, amelyekre $\mid \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \mid = 3 - 0$.

A $B_3'(t)$ együtthatója a lehetséges $(0,2), (1,1)$ indexeknek megfelelően teljesíti az $\mid \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \mid = 3 - 1 = 2$ feltételt, a $C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ együtthatók, mindig egészek. A klasszikus Kalman-féle tárgyalásnak megfelelően bevezethetjük az elérhetőségi Kalman-Gram-féle mátrixot az általánosított rendszerekre is:

$$R[0,T] =$$

$$\int_0^T \Phi(T,t) \left[\sum_{j=0}^{J} \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=j-\widehat{j}} C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \left(A^{(\boldsymbol{\alpha})}(t)\right)^{\boldsymbol{\beta}} \right) B_j^{(\widehat{j})}(t) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{j=0}^{J} \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=j-\widehat{j}} C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \left(A^{(\boldsymbol{\alpha})}(t)\right)^{\boldsymbol{\beta}} \right) B_j^{(\widehat{j})}(t) \right]^T \Phi(T,t)^T dt,$$

és megfogalmazhatjuk a következő tételt.

2.1. Tétel. *Az általánosított időfüggő együtthatós lineáris rendszer a $[0,T]$-intervallumon teljesen elérhető akkor és csak akkor, ha a $G_{Rea}[0,T]$ Kalman-Gram-féle mátrix invertálható, vagy ami ezzel ekvivalens, ha pozitív definit.*

A bizonyítás ezek után nem különbözik a klasszikus időfüggő lineáris rendszerek esetétől.

Legyen L az $\{A(t); t \in [0,T]\} \subset R^{n\times n}$ által generált Lie-algebra, és $A_1, A_2, \ldots, A_I \in L$ ennek egy bázisa, mint azt már korábban említettük. Ebben a bázisban

$$A(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t) A_i.$$

Járjunk el hasonlóan a $B_0(t), B_1(t), \ldots, B_J(t)$ mátrixok esetén is. Ha $V = V\{B_0(t), B_1(t), \ldots, B_J(t) : t \in [0,T]\} \subset R^{n\times k}$ az $R^{n\times k}$ vektorterének a $B_j(t)$-k által kifeszített altere, akkor választható V-ben egy $B_1, B_2, \ldots, B_{\widehat{I}}$ bázis, amelyben

$$B_j(t) = \sum_{i=1}^{\widehat{I}} b_{\widehat{j}\widehat{i}}(t) B_{\widehat{i}}.$$

Mivel $\Phi(T,t)$ felírható az $A_1, A_2, \ldots, A_I$ polinomjaként, a Wei-Norman-féle egyenlet $g_1, g_2, \ldots, g_I$ megoldásainak kvázi-polinomjaként és az $x(T)$ integrálelőállításában szereplő $\sum_{j=0}^{J} \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=j-\widehat{j}} C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \left(A^{(\boldsymbol{\alpha})}(t)\right)^{\boldsymbol{\beta}} \right) B_j^{(\widehat{j})}(t)$ magfüggvény pedig felírható az $A_1, A_2, \ldots, A_I$

és $B_1, B_2, \ldots, B_{\widehat{I}}$ polinomjaként az $a_i(t)$ és a $b_{j\hat{i}}(t)$ differenciálpolinomjaként (egész együtthatókkal és elsőfokú $B_{\hat{i}}$-kkel). Ebből, felhasználva, hogy az A_i hatványai szomszédos cserékkel a természetes sorrendbe rendezhetők ($A_1^{m_1}, A_2^{m_2}, \ldots, A_I^{m_I}$ alakúak, ahol az összes m_i-re teljesül, hogy $0 \leq m_i < n$, vagy vektori írásmóddal, $\mathbf{0} \leq \mathbf{m} < \mathbf{n}$) az $A_{i_1}A_{i_2} = A_{i_2}A_{i_1} + \sum\limits_{h=1}^{I} \Gamma_{i_1 i_2} A_h$, valamint az $A_i^n = \sum\limits_{\hat{i}=0} C_{i\,\hat{i}} A_i^{\hat{i}}$ egyenlőségek segítségével, feltéve, hogy A_i-k karakterisztikus polinomja $\lambda^n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{i\,\hat{i}}\, \lambda^i$ alakú.

Így a következőt kapjuk:

$$x(T) = \sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{m}<\mathbf{n}} \sum_{ki_2=0}^{\widehat{I}} A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_I^{m_I} B_{ki_2} \int_0^T P_{\mathbf{m},\,ki_2} \Big(\mathbf{g}(T,t), a^{[\infty)}(t), b_1^{[\infty)}(t), \ldots, b_J^{[\infty)}(t)\Big)\, u(t)dt.$$

Itt a $P_{\mathbf{m},\,ki_2}\Big(\mathbf{g}(T,t), \mathbf{a}^{[\infty)}(t), \ldots, b_j^{[\infty)}(t), \ldots\Big)$-k a $g_1(T,t), g_2(T,t), \ldots, g_I(T,t)$-ben kvázi polinomok és az $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_I(t)$,

$$b_{11}(t), b_{12}(t), \ldots, b_{1\widehat{I}}(t),\ b_{21}(t), \ldots, b_{2\widehat{I}}(t), \ldots, b_{J1}(t), b_{J2}(t), \ldots, b_{J\widehat{I}}(t)\text{-kben}$$

differenciálpolinomok.

Ebből látszik, hogy az általánosított rendszer elérhető altere a $[0,T]$-n benne kell, hogy legyen az

$$\mathrm{Im}\Big\{\ldots, A_1^{m_1}, A_2^{m_2}, \ldots, A_I^{m_I} B_{ki_2}, \ldots\Big\} \tag{2.9}$$

képtérben, ami ugyanaz, mint a klasszikus kanonikus rendszer esetén, látszólag nem bővítve az elérhetőségi alteret azáltal, hogy a deriváltak is bemenetként szerepelnek.

Valójában a bővítést a következő módon tekinthetjük át:

Legyenek $V_0 = V\Big\{B_0(t);\ t \in [0,T]\Big\} \subset \mathbb{R}^{n\times k}$,

$$V_J = V\Big\{B_0(t), B_1(t), \ldots, B_J(t);\ t \in [0,T]\Big\} \subset \mathbb{R}^{n\times k'}$$

a megfelelő $B_J(t)$ mátrixokkal generált vektorterek. Válasszuk meg úgy a V_J bázisát, hogy az első $\widehat{I}_0$ eleme legyen a V_0 bázisa:

$$V_0 = V\left\{B_1, B_2, \ldots, B_{\widehat{I}_0}\right\},$$

$$V_J = V\left\{B_1, B_2, \ldots, B_{\widehat{I}_0},\ B_{\widehat{I}_0+1}, B_{\widehat{I}_0+2}, \ldots, B_{\widehat{I}_J}\right\}$$

Ebből már nyilvánvaló, hogy a megfelelő általánosított Kalman-Gram-féle mátrixokra (a továbbiakban röviden Kalman-féle mátrixokra) az általánosított rendszer esetén teljesül, hogy ennek a képtere tartalmazza a klasszikus rendszer általános Kalman-féle mátrixának képterét.

Ezek után már követhető a klasszikus rendszerre megfogalmazott bizonyításokból, hogy mi a gerjesztési feltétel arra, hogy az általánosított rendszer elérhetőségi altere egybeessék a rendszerhez rendelt általános Kalman-féle mátrix képterével. Tegyük fel, hogy ξ egy olyan vektor, amely az

$$K_{\text{ált}} = Im\left\{\ldots, A^{m_1} A^{m_2} \ldots A^{m_I} B_i, \ldots\right\},$$

Kalman-féle mátrix képterében van.

$K_{\text{ált}}$ nem azonos az általánosított rendszer $[0, T]$ fölötti elérhető alterével akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\xi \neq 0$, $\xi \in K_{\text{ált}}$, amelyre $\langle \xi, x(T) \rangle = 0$ minden lehetséges $u(t)$ bemenetre.

Ez azt jelenti, hogy

$$0 = \langle \xi, x(T) \rangle =$$

$$= \left\langle \xi, \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{m} < \mathbf{n}} \sum_{ki_2 = 0}^{\widehat{I}} A_1^{m_1} A_2^{m_2}, \ldots, A_I^{m_I} B_{ki_2} \int_0^T P_{\mathbf{m},\, ki_2} \left(\mathbf{g}(T, t), \mathbf{a}^{[\infty)}(t), \ldots, b_j^{[\infty)}, \ldots \right)(t) u(t) dt \right\rangle =$$

$$= \int_0^T \left\langle \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{m} < \mathbf{n}} \sum_{ki_2 = 0}^{\widehat{I}} P_{\mathbf{m},\, ki_2} \left(\mathbf{g}(T, t), \mathbf{a}^{[\infty)}(t), \ldots, b_j^{[\infty)}, \ldots \right)(t) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(A_I^T\right)^{m_I} \left(A_{I-1}^T\right)^{m_{I-1}} \ldots \left(A_1^T\right)^{m_1} B_{ki_2}^T \xi, u(t) \right\rangle dt.$$

A klasszikus Lagrange-féle lemmából következik, hogy ha ez minden „jó”, pl. folytonos függvényre teljesül, akkor

$$\begin{gathered} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{m} < \mathbf{n}} \sum_{ki_2 = 0}^{\widehat{I}} P_{\mathbf{m}, ki_2} \left(g(T, t), \mathbf{a}^{[\infty)}(t), \ldots, b_j^{[\infty)}, \ldots \right) \cdot \\ \cdot \left(A_I^T\right)^{m_I} \left(A_{I-1}^T\right)^{m_{I-1}} \ldots \left(A_1^T\right)^{m_1} B_{ki_2}^T \xi = 0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

A $P_{\mathbf{m},\, ki_2}$ kvázipolinomokban szereplő $\exp \lambda g, \cos \alpha g, \sin \alpha g$ típusú analitikus függvények helyett bevezethetők az új $\overline{g} = \exp \lambda g$, $\widehat{g} = \cos \alpha g$, $\breve{g} = \sin \alpha g$ változók. A megfelelő differenciálegyenleteket könnyen megkaphatjuk:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{g}} &= \lambda \dot{g} \exp \lambda g = \lambda \dot{g} \overline{g}, \quad \text{illetve} \\ \dot{\widehat{g}} &= -\alpha \dot{g} \sin \alpha g = -\alpha \dot{g} \breve{g}, \\ \breve{g} &= \alpha \dot{g} \cos \alpha g = \alpha \dot{g} \widehat{g}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

amelynek segítségével polinomiális együtthatókat kapunk.

Látható, hogy ezek még nem explicit differenciálegyenletek, mindkét oldalon található derivált. Tekintsük most a Wei-Norman-féle differenciálegyenletet:

$$\left(\sum_{i=1}^{I} \exp \Gamma_1 g_1 \exp \Gamma_2 g_2 \ldots \exp \Gamma_{i-1} g_{i-1} E_{ii} \right) \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{a}, \ \mathbf{g}(0) = \mathbf{0},$$

ahol

$$E_{ii} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}.$$

Ebben is exponenciális szorzatok vannak, de ezek a $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{I-1}$ Lie-algebra szorzótábla exponenciálisai (a Cristoffel szimbólumok) [33]. Ezekben, hasonlóan az előbbiekhez, elvégezhetők az $\exp \lambda g$, $\cos \alpha g, \sin \alpha g$ alakú nem polinomiális tagok új változóként való bevezetése, amely ismét (2.11) típusú további differenciálegyenletek hozzáadását jelenti, amelyek már polinomiálisak, valamint a Wei-Norman egyenlet is polinomiális, de nem explicit egyenletté válik.

Innen, ha akarjuk, invertálással explicitté tehető a $\dot{g}$ eredeti deriváltakban:

$$\dot{g} = \left(\sum_{i=1}^{I} \exp \Gamma_1 g_1 \exp \Gamma_2 g_2 \ldots \exp \Gamma_{i-1} g_{i-1} E_{ii} \right)^{-1} \mathbf{a},$$

amiből a (2.11) egyenletek is explicitté válnak, de tört nevezővel:

$$\det \left(\sum_{i=1}^{I} \exp \Gamma_1 g_1 \exp \Gamma_2 g_2 \ldots \exp \Gamma_{i-1} g_{i-1} E_{ii} \right).$$

Ezekkel az explicitté vált egyenletrendszert beszorozva végül is a $\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{g}}, \breve{\mathbf{g}}$ típusú változókban egy implicit polinomiális differenciálegyenletet kapunk, minden egyenletben egyetlen deriváltat tartalmazó taggal, azaz ez egy reguláris differenciálegyenlet, mely explicitté tehető a deriváltakban (tört jobb oldalakkal).

Ezáltal a $P_{\mathbf{m},ki_2}\left(\mathbf{g}(T,t), \mathbf{a}^{[\infty)}(t), \mathbf{b}_1^{[\infty)}(t), \mathbf{b}_2^{[\infty)}(t), \ldots, \mathbf{b}_I^{[\infty)}(t)\right)$ kvázi polinomok helyett a

$$\overline{P}_{\mathbf{m},ki_2}\left(\mathbf{g}(T,t), \overline{\mathbf{g}}(T,t), \widehat{g}(T,t), \breve{g}(T,t), \mathbf{a}^{[\infty)}(t), \mathbf{b}_1^{[\infty)}(t), \mathbf{b}_2^{[\infty)}(t), \ldots, \mathbf{b}_I^{[\infty)}(t)\right)$$

polinomokat kapjuk a $\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{g}}, \breve{\mathbf{g}}$ változókban és differenciálpolinomokat az $\mathbf{a}(t)$ $\mathbf{b}_0(t), \mathbf{b}_1(t), \ldots, \mathbf{b}_J(t)$ függvényekben.

A fentebb kapott implicit polinomiális differenciálegyenletet átírjuk, bevezetve a vektorfolytonosan írt $\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{g}}, \breve{\mathbf{g}}$ változókat, mint $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, az $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_J$-t mint $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_K)$, ekkor

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots) = 0.$$

A (2.10) egyenletet is átírjuk az $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ segítségével

$$\sum_{\mathbf{0} \le \mathbf{m} < \mathbf{n}} \sum_{ki_2=0}^{I} \overline{P}_{bm,ki_2}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots) \left(A_I^T\right)^{m_I} \left(A_{I-1}^T\right)^{m_{I-1}} \ldots \left(A_1^T\right)^{m_1} B_{ki_2}^T \xi = 0.$$

Definiáljuk ebből az

$$y = \sum_{\mathbf{0} \le \mathbf{m} < \mathbf{n}} \sum_{ki_2=0}^{I} \overline{P}_{\mathbf{m},\mathbf{ki_2}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ldots,) \left(A_I^T\right)^{m_I} \left(A_{I-1}^T\right)^{m_{I-1}} \ldots \left(A_1^T\right)^{m_1} B_{ki_2}^T \xi = G\left(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \ldots, \xi\right)$$

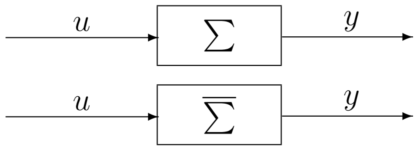
kimeneti egyenletet. Ezzel egy

$$\begin{aligned} F\left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \xi\right) &= 0 \\ \mathbf{y} &= G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \xi) \end{aligned} \qquad (\textstyle\sum)$$

bemenet-kimenet rendszert kapunk, mely polinomiális és $\dot{x}$ deriváltjaiban implicit, $\partial_{\dot{x}} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathrm{u}}, \ldots, \xi) \neq 0$ regularitási feltétellel. Itt az $\mathbf{u}$-k a bemenetek, az $\mathbf{x}$-ek az állapotok és az $\mathbf{y}$-ok a kimenetek. Tekintsünk egy másik reprezentációt, esetleg különböző állapotokkal, de ugyanazokkal a bemenetekkel és ugyanazokkal a kimenetekkel:

$$\begin{aligned} \overline{F}\left(\overline{\mathbf{x}}, \dot{\overline{\mathbf{x}}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \xi\right) &= 0 \\ y &= \overline{G}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \xi). \end{aligned} \qquad (\overline{\textstyle\sum})$$

$(\sum)$-t és $\left(\overline{\sum}\right)$-t tekintsük mint bemenet-kimenet rendszert. Ezeket ekvivalensnek tekintjük, ha minden (u, y) bemenet-kimenet párra igaz, hogy $(\sum)$-nek akkor és csak akkor létezik $\mathbf{x}$ megoldása, amikor $(\overline{\sum})$-nek létezik $\overline{\mathbf{x}}$ megoldása. Ez azt jelenti, hogy ekkor a



két rendszer ugyanúgy működik. $\sum$, illetve $\overline{\sum}$ még tömörebben is írható, megengedve az y kimenetek deriváltjait is,

$$J(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi) = 0, \qquad (2.12)$$

illetve

$$\bar{J}(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi) = 0.$$

Diop azt bizonyította [28], hogy létezik egy olyan véges, tisztán algebrai algoritmus, amellyel megadhatók olyan

$$\widehat{J}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi)$$

$$\widehat{G}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi)$$

differenciálpolinomok, amelyekre, ha tekintjük az

$$\begin{aligned} \widehat{J}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi) &= 0 \\ \widehat{G}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi) &\neq 0 \end{aligned} \qquad (2.13)$$

implicit egyenletet és nem-egyenlőségi feltételt, akkor az ezzel definiálható $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{y}$ bemenet-kimenet rendszer az előbbi rendszer-ekvivalencia értelmében ekvivalens az (2.12) rendszerrel. Látható ez utóbbinak nincs $\mathbf{x}$ állapotváltozója, ezért mondhatjuk, hogy a Diop-féle algoritmus állapot-eliminációs algoritmus. A továbbiakban megmutatom, hogy hasonló eredményt lehet megfogalmazni az általam bevezetett algebrai eszközökkel, amit „perzisztens gerjesztés” feltétel megfogalmazásával adtam meg, így ebben az esetben nem kell használni a Diop-féle eliminációt [28].

Megismételem az ekvivalencia definícióját.

(2.12) és (2.13) összefüggések ekvivalens bemenet-kimenet rendszert definiálnak, ha egy (u, y) bemenet-kimenet párra (2.12)-nak létezik megoldása az $\mathbf{x}$ állapotra nézve, azaz az (x, u, y) hármas megoldása (2.12)-nek, amennyiben (u, y) megoldása a

$$\widehat{J}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi) = 0$$

polinomiális egyenletnek és teljesül, hogy

$$\widehat{G}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi) \neq 0.$$

Ez utóbbit úgy kapjuk, hogy az algoritmusban lépésenként osztani kell egy differenciálpolinommal, amely természetesen nem lehet 0, ezért ezt meg kell követelni. Ezek szorzatai adják a $\widehat{G}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \xi)$ differenciálpolinomokat. Ha ez a szorzat $\neq 0$, akkor egyik tényezője sem lehet 0.

Visszatérve az eredetileg kapott $(\sum)$ bemenet-kimenet rendszerünkre, ebben véve az általunk sorfolytonosan rendezett $\mathbf{u} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J)$ „bemenetet”, azt kapjuk, hogy

$$F\big(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_j), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_j), \ldots, \xi\big) = 0,$$

$$G\big(\mathbf{x}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_j), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_j), \ldots, \xi\big) = 0.$$

A $(\sum)$ rendszerből kapott állapoteliminált rendszerbe beírva az $\big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), 0\big)$ bemenet-kimenet párra a rendszer-ekvivalenciából következő

$$\begin{aligned} \widehat{J}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots, 0, 0, 0, \ldots, \xi\Big) &= 0 \\ \widehat{G}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots, 0, 0, 0, \ldots, \xi\Big) &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

összefüggéseket úgy tekintjük, mint annak az elégséges feltételét, hogy minden $\mathbf{u}$ bemenetre az $x(T)$ végállapot merőleges legyen az adott

$$\xi \in \operatorname{Im}\{\ldots, A_1^{m_1}, A_2^{m_2}, \ldots, A_I^{m_I} B_j, \ldots\} \tag{2.15}$$

vektorra.

2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J$ *időfüggő együtthatók perzisztensen gerjesztik a rendszerünket, ha ez elérhető állapotok altere egybeesik az általánosított Kalman-féle mátrix képterével, azaz a lehetséges legnagyobb altér lesz. Egyenleteink értelmében, ha az együtthatókra fennállnak az* (2.14) *feltételei, akkor a* ξ *állapotnak* 0*-nak kell lennie.*

Az a speciális eset a legérdekesebb, amikor az általánosított Kalman-féle mátrix képtere az egész $\mathbb{R}^n$. Ekkor az adódik, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J$ együtthatók perzisztensen gerjesztik a rendszert akkor és csak akkor, ha a rendszer teljesen elérhető a $[0, T]$ intervallumon.

Tehát amennyiben az együtthatók nem gerjesztik perzisztensen a rendszert, akkor

$$\widehat{J}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots, 0, 0, 0, 0, \ldots, \xi\Big) = 0$$

$$\widehat{G}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots, 0, 0, 0, 0, \ldots, \xi\Big) \neq 0$$

$$\xi \neq 0$$

megoldható. Az egyenletet ξ-re implicit függvénynek tekintve megoldható a ξ-re,

$$\boldsymbol{\xi} = \widehat{f}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots, \Big), \tag{2.16}$$

ezt a két nem-egyenlőségbe beírva azt kapjuk, hogy a „perzisztensen nem-gerjesztés" feltétele két nem-egyenlőség együttes fennállása:

$$0 \neq \widehat{G}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots, 0, 0, \ldots,$$

$$\widehat{f}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots\Big)$$

$$0 \neq \widehat{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J) \ldots\Big)$$

Ennek a tagadása a perzisztens gerjesztés feltétele:

$$0 = \widehat{G}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots, 0, 0, \ldots,$$
$$\widehat{f}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J), \ldots\Big)$$

vagy

$$0 = \widehat{f}\Big((\mathbf{a}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_J), (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}_0, \dot{\mathbf{b}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{b}}_J) \ldots\Big).$$

Visszatérünk a ξ-re vonatkozó implicit függvény megoldhatóságára, hogy megkaphassuk (2.16)-et.

Ehhez is használható a Diop-féle eliminációs tétel (algoritmus). Ehhez, tekintsük a $\boldsymbol{\xi}$ vektort állapotnak, amely eliminálható. Ehhez szükségünk lenne egy állapotegyenletre, dinamikára, azaz a $\boldsymbol{\xi}$-re vonatkozó differenciálegyenletre. De ehhez tekintsük $\boldsymbol{\xi}$ konstans voltát, azaz a dinamika egyszerűen csak a $\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$.

Az előzőekben ismertetett eredményeket a 2.1-ből kiindulva a 2.2. Tételben fogalmazom meg, a fejezet fő eredményeként.

A 2.4 rendszert specifikáljuk a következő módon.

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adott struktúra mátrixok, az 1-dimenziós bemenet „mátrixa" $B \in \mathbb{R}^n$. Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t) A_i x + b(t) B u \tag{2.17}$$

LTV rendszert. Erre a fentieket figyelembe véve adódik a

2.2. Tétel. *Ha a* (2.17) *rendszerre teljesül az általánosított Kalman-féle feltétel, azaz* (2.9) *az egész* $\mathbb{R}^n$, *és teljesül a Diop-féle eljárással kapott* (2.14) *ún. gerjesztési feltétel, akkor* (2.17) *elérhető.*

3. Állapottól függő paraméterű lineáris rendszerek

Műszaki szempontból sokan vizsgáltak LPV rendszerekkel kapcsolatos konkrét kérdéseket, de szisztematikus átfogó vizsgálatokat nem végeztek.

Most az előző fejezetben nyert eredményekhez hasonló állításokat adok meg LPV rendszerekre.

A továbbiakban részletesen is megvizsgálom az állapottól függő paraméterű lineáris rendszerek rendszertulajdonságait (az ekvivalenciák és a dualitások miatt csak az elérhetőségét).

A vizsgált rendszer annyiban speciális, hogy azt az esetet tekintem át, amikor egy bemenetünk van, azaz a rendszer

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{I} p_i(x) A_i x + q(x) B u \tag{3.1}$$

alakú, ahol $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$

A parciális differenciálalgebrákra nem ismeretes a Diop-féle eliminációs tétel megfelelője ezért ebben az esetben másképp járok el.

Vizsgáljuk először az

$$\dot{x} = p(x)Ax + q(x)Bu \tag{3.2}$$

rendszer elérhetőségét.

Tegyük fel, hogy teljesül a

1. Kalman-féle feltétel:

$$\operatorname{rang}\left\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right\} = n; \tag{3.3}$$

   továbbá az a gerjesztési feltétel, hogy

2. egy alkalmas parciális differenciálegyenletnek $p(x)$ nem megoldása, és $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$. Ekkor (3.2) generikusan elérhető, azaz egy szinguláris felület a kiegészítő halmazaként adódó nyílt és sűrű halmazon (3.2) lokálisan elérhető.

Az, hogy a globális elérhetőség igaz legyen, nem is várható, ui. a kivételt képező szinguláris felület az R^n-et több nyílt komponensre vághatja, és az egyik nyílt komponensből a másikba való átmenetet nem lehet bebizonyítani. Célom egy olyan gerjesztési feltétel kiszámítása, amely ezt az átmenetet biztosítja.

Végül a 2. fejezetben szereplő módszert sok hasonlóság mellett a (3.1) rendszerre is átviszem, teljesen analóg eredményt kapva.

Formálisan megfogalmazva:

1. Az általánosított Kalman-féle feltétel:

$$\operatorname{rang}\left\{B, \ldots, A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_I^{n_I} B, \ldots, A_1^{n-1} A_2^{n-1} \ldots A_I^{n-1} B\right\} = n, \tag{3.4}$$

2. Alkalmas parciális differenciálegyenlet-rendszereket nem szabad kielégítenie a $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_I(x)$ paramétereknek a $q(x) \neq 0$ feltétel mellett, ami teljesen analóg az időtől függő paraméterek esetére kapott gerjesztési feltétellel.

Mivel most nincs Diop-féle eliminációs tételünk, nem az „egyetlen" gerjesztési feltételt kapjuk. A mi gerjesztési feltételünk konstrukciófüggő, ezért nem egyetlen, a sokféle lehetséges esetből kiválasztottunk egyet; ezért egy érdekes algebrai probléma vetődik fel: hogyan karakterizálhatók a gerjesztési feltételek, és van-e közöttük „egyetlen" kitüntetett, minimális (maximális) valamilyen strukturális értelmében. Pl. ha egy $F\left(\mathbf{x},\ldots,\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}p_i(x),\ldots\right)\neq 0$ alakban kifejezett gerjesztési feltételt kapunk, akkor minden olyan $G\left(\mathbf{x},\ldots,\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}p_i(x),\ldots\right)$ differenciálpolinomra, amelyre

$$F(\mathbf{x},\ldots,\partial_{x_1}^{k_1},\ldots,\partial_{x_n}^{k_n}p_i(x),\ldots)G(\mathbf{x},\ldots,\partial_{x_1}^{k_1},\ldots,\partial_{x_n}^{k_n}p_i(x),\ldots)\neq 0$$

teljesül, a fenti szorzat is egy gerjesztési feltétel, ui. ha $\mathbf{p}(x)$-re a szorzat nem nulla, akkor egyik tényezője sem, így az

$$F\left(\mathbf{x},\ldots,\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}p_i(x),\ldots\right)\neq 0$$

feltétel is teljesül.

Tekintsük a (3.2) változó paraméterű lineáris rendszert állapottól függő $p(x), q(x)$ paraméterekkel.

Mivel a rendszer az állapottól függő paraméterek miatt nemlineáris rendszer, természetesnek látszik az

$$f(x)=p(x)Ax,\ \ g(x)=q(x)B$$

vektormezők által kifeszített irnyíthatósági disztribúció, a

$$D=L\left\{g,[f,g],[f,[f,g]],\ldots\right\},$$

néhány elemének a kiszámítása. A (3.2) elérhetőségében a D disztribúció hasonló szerepet játszik, mint az állandó együtthatós rendszerek esetén a Kalman-féle elérhetőségi mátrix

$$\left[B,AB,\ldots,A^{n-1}B\right] \tag{3.5}$$

Ez egy véges, mátrixok nyelvére írt kritérium, míg a D disztribúció végtelen sok vektormezőt tartalmaz. Ezért azt a célt tűztük magunk elé, hogy a D disztribúció helyett véges sok objektummal is karakterizálhassuk a (3.1) és a (3.2) rendszerek elérhetőségét és ha ez lehetséges, akkor csak mátrixokat használjunk a leírásukra.

A D elérhetőségi disztribúció helyett egy másik, véges vektormező-sereget adok meg, amelynek a rangja (a kifeszített vektorterek dimenziója) megegyezik a D rangjával. Amennyiben a $p(x), q(x)$ teljesítenek bizonyos feltételeket, akkor a feltétel a (3.5) Kalman-féle feltételekre is redukálhatónak bizonyul, amely már könnyen ellenőrizhető. Ennek a jelentősége óriási, ui. egy végtelen objektum helyett a klasszikus Kalman-féle feltételt kell csak ellenőriznünk.

Rekurzív definícióval kezdjük a konstrukciónkat.

Legyenek

$$P_0(x)=0,\quad Q_0(x)=q(x).$$

Ekkor

$$f_0(x)=Q_0(x)B=q(x)B$$

Nyilvánvaló, hogy

$$f_0(x)=g(x)$$

Az $[f, f_0](x)$ vektormezőre azt kapom, hogy

$$[f, f_0](x) = (p'(x)(B)Q_0(x))\, Ax + p(x)Q_0(x)AB$$

az $[f, g](x)$ vektormezőre pedig az adódik, hogy $[f, g](x) = (p'(x)(B)Q_0(x))\, Ax + p(x)Q_0(x)AB - (p(x)Q_0'(x)(Ax))\, B$. Bevezetem a

$$P_1(x) = p'(x)(B)Q_0(x), Q_1(x) = p(x)Q_0(x),$$

$$R_1(x) = p(x)Q_0'(x)(Ax)$$

jelöléseket, ill. ezekkel adom meg az $f_1(x)$ vektormezőt:

$$f_1(x) = P_1(x)Ax + Q_1(x)AB.$$

Ebből,

$$[f, g](x) = P_1(x)Ax + Q_1(x)AB - R_1(x)B =$$

$$= f_1(x) - R_1(x)B.$$

Összefoglalom a legfontosabb összefüggéseket, amelyeket általánosíthatunk:

$$g(x) = f_0(x),$$

$$[f, g](x) = f_1(x) - R_1(x)B.$$

Tegyük fel, hogy az $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)$-et már definiáltuk, az $f_k(x) = P_k(x)Ax + Q_k(x)A^kB$ általános alakban. Az $[f, f_k](x)$ Lie szorzatot számoljuk ki:

$$[f, f_k](x) = \big(p'(x)(Ax)P_k(x) - p(x)P_k'(x)(Ax) + p'(x)(A^kB)Q_k(x)\big)\, Ax +$$

$$+ (p(x)Q_k(x))\, A^{k+1}B - (p(x)Q_k'(x)(Ax))\, A^kB.$$

Legyenek

$$P_{k+1}(x) = p'(Ax)P_k(x) - p(x)P_k'(x)(Ax) + p'(x)(A^kB)Q_k(x),$$

$$Q_{k+1}(x) = p(x)Q_k(x)$$

$$R_{k+1}(x) = p(x)Q_k'(x)(Ax).$$

Így az $f_{k+1}(x)$ vektormezőre:

$$f_{k+1}(x) = P_{k+1}(x)Ax + Q_{k+1}(x)A^{k+1}B,$$

fennáll a következő rekurzív egyenlet:

$$[f, f_k](x) = f_{k+1}(x) - R_{k+1}(x)A^kB. \tag{3.6}$$

A D disztribúció $k+1$-edik tagját a kapott jelölésemmel és egyenlőtlenségeimmel átalakítom a bizonyításom megkönnyítése érdekében. Ha

$$\left[\underbrace{f, \dots, [f,\ [f,\ [f,}_{k+1\text{-szer}}\ g]\ ]\ ]\dots\right](x) = \left[\underbrace{f,\ \dots, [f,\ [f,}_{k\text{-szor}} f_1 - R_1B\ ]\ ]\dots\right] =$$

$$= \left[\underbrace{f, \dots, [\ f,}_{k-1} f_2 - R_2AB\ ]\dots\right](x) - \left[\underbrace{f, \dots, [f,}_{k\text{-szor}} R_1B]\dots\right](x) = \dots =$$

$$= f_{k+1}(x) - R_{k+1}(x)A^kB - \left[f, R_kA^{k-1}B\right](x) - \dots -$$

$$- \left[\underbrace{f, \dots, [f,}_{k} R_1B\ ]\dots\right](x),$$

azaz

$$\Big[\underbrace{f,\ldots,[f,g}_{k+1}\,]\ldots\Big](x) = f_{k+1}(x) - \sum_{\kappa=0}^{k}\Big[\underbrace{f,\ldots,[\,f,}_{k-\kappa}R_{\kappa+1}A^{\kappa}B\,]\ldots\Big](x) \tag{3.7}$$

1. $\operatorname{rang}\{g(x)\} = \operatorname{rang}\{f_0(x)\}$
2. $\operatorname{rang}\{g(x),[f,g](x)\} = \operatorname{rang}\{f_0(x), f_1(x) - R_1(x)B\} = \operatorname{rang}\{f_0(x), f_1(x)\}$.

Ez utóbbi abból következik, hogy $f_0(x) = q(x)B$, és $q(x) \neq 0$ esetén az $f_0(x)\ \dfrac{R_1(x)}{q(x)}$-szeresét hozzáadva a 2-dik vektormezőhöz a két vektormező rangja nem változik.

Tehát

$$\operatorname{rang}\{g(x),[f,g](x)\} = \operatorname{rang}\{f_0(x), f_1(x)\}\,.$$

Most tegyük fel, hogy k-ra

$$\operatorname{rang}\left\{g(x),[f,g](x),\ldots,\Big[\underbrace{f,\ldots,[f,}_{k\text{-szor}}\ g\,]\ldots\Big](x)\right\} = \operatorname{rang}\Big\{f_0(x), f_1(x),\ldots,f_k(x)\Big\}.$$

Ekkor,

$$\operatorname{rang}\left\{g(x),[f,g](x),\ldots,\Big[\underbrace{f,\ldots,[f,}_{k\text{-szor}}\ g\,]\ldots\Big](x),\ \Big[\underbrace{f,\ldots,[f,}_{k+1\text{-szer}}\ g\,]\ldots\Big](x)\right\} =$$
$$= \operatorname{rang}\left\{f_0(x),\ldots,f_k(x), f_{k+1}(x) - \sum_{\kappa=0}^{k}\Big[\underbrace{f,\ldots,[f,}_{k-\kappa}\ R_{\kappa+1}A^{\kappa}B\,]\ldots\Big](x)\right\}$$

a (3.7) egyenlőség alapján.

Az nem olyan nyilvánvaló, hogy a

$$\sum_{\kappa=0}^{k}\Big[\underbrace{f,\ldots,[f,}_{k-\kappa}\ R_{\kappa+1}A^{\kappa}B]\ldots\Big](x)$$

elhagyása lehetséges, hogy a kívánt

$$\begin{aligned}\operatorname{rang}\left\{f_0(x), f_1(x),\ldots,f_k(x), f_{k+1}(x) - \sum_{\kappa=0}^{k}[f,\ldots,[f,R_{k+1}A^{\kappa}B]\ldots](x)\right\} &= \\ = \operatorname{rang}\{f_0(x), f_1(x),\ldots,f_k(x), f_{k+1}(x)\}&\end{aligned} \tag{3.8}$$

egyenlőséget megkapjuk. Ehhez a $p(x)$ és a $q(x)$ az eddigi

$$p(x) \neq 0, \quad q(x) \neq 0 \tag{3.9}$$

feltételek mellé újabb, sokkal komplexebb parciális differenciál-egyenlőtlenséget kell, hogy kielégítsen. Tekintsük az

$$f_0(x), f_1(x),\ldots,f_k(x), f_{k+1}(x) - \sum_{\kappa=0}^{k}\Big[\underbrace{f,\ldots,[f,}_{k-\kappa}\ R_{\kappa+1}A^{\kappa}B]\ldots\Big](x)$$

oszlopokból álló $n \times (k+2)$-típusú mátrixot.

Ez maximális dimenziós lesz, akkor és csak akkor, ha van (vannak) $(k+2) \times (k+2)$-es invertálható aldeterminásaik.

Ennek a determinánsa nem lehet 0, ami annak a feltétele, hogy invertálható.

Tekintsük az ugyanehhez a $(k+2) \times (k+2)$-es $[f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x), f_{k+1}(x)]$-hez tartozó aldeterminánst és ezek szorzatát, ez nem lehet 0, ami éppen annak a feltétele, hogy egyszerre lesznek invertálhatóak, azaz a rangjuk ugyanaz.

Ez egy olyan analitikus feltétel a $p(x)$ és $q(x)$ együtthatókra, amely garantálja, hogy a két vektormező-sereg együttesen maximális rangú. Ezt a feltételt (ezeket a feltételeket) gerjesztési feltételeknek nevezzük.

Ezzel igazoltam a következő tételt.

3.1. Tétel. *Ha a* (3.2) *rendszer esetén a nyilvánvaló* (3.9) *feltételeken kívül még az ún. gerjesztési feltétel is teljesül, akkor a* $\left\{ g(x), [f,g](x), \dots, \left[\underbrace{f, \dots, [f,}_{n-1}\ g\,] \dots \right](x) \right\}$ *csonkított elérhetőségi disztribúció rangja és az ezt helyettesítő*

$$\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$$

vektormezők rangja egyenlő és megegyezik tér dimenziójával, n-nel.

Megjegyzés:

Ezek után tekintsük az

$$\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$$

vektormezőket, azaz, a

$$Q_0(x)B, P_1(x)Ax + Q_1(x)AB, \dots, P_{n-1}(x)Ax + Q_{n-1}(x)A^{n-1}B \tag{3.10}$$

vektormezőket. Ezekből alakítsuk ki az alábbi két $n \times n$-es mátrixot,

$$M(x) = \left[Q_0(x)B, P_1(x)Ax + Q_1(x)AB, \dots, P_{n-1}(x)Ax + Q_{n-1}(x)A^{n-1}B\right],$$

és az

$$N(x) = \left[Q_0(x)B, Q_1(x)AB, \dots, Q_{n-1}(x)A^{n-1}B\right].$$

Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $M(x)$ és az $N(x)$ mátrixok egyidejűleg legyenek invertálhatók, hogy

$$\det M(x) \cdot \det N(x) \neq 0. \tag{3.11}$$

Ekkor a megfelelő vektormezők együttesen feszítik ki, generálják az $\mathbb{R}^n$-et. Így megfogalmazható a következő tétel.

3.2. Tétel. *Ha a* (3.2) *rendszerre teljesülnek a* (3.9)*, és a* (3.11) *ún. gerjesztési feltételek, akkor a* (3.10) *és a*

$$\left\{Q_0(x)B, Q_1(x)AB, \dots, Q_{n-1}(x)A^{n-1}B\right\} \tag{3.12}$$

vektorok is az egész $\mathbb{R}^n$ teret feszítik ki.

Tekintsük most az $N(x)N(x)^*$ szorzat-mátrixot:

$$N(x)N(x)^* = [Q_0(x)B, Q_1(x)AB, \ldots, Q_{n-1}(x)A^{n-1}B] \begin{bmatrix} Q_0(x)B^* \\ Q_1(x)B^*A^* \\ \vdots \\ Q_{n-1}(x)B^*(A^*)^{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(x)^2 A^k BB(A^*)^k.$$

A (3.9) garantálja, hogy a $Q_k(x)^2 = p^{2p}(x)q^2(x) \neq 0$. Legyen a p, q függvények értelmezési tartományán

$$\min_k \inf_x p^{2k}(x)q^2(x) = c > 0.$$

Ekkor

$$\det \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(x)^2 A^k BB^*(A^*)^k > c \det \sum_{k=0}^{n-1} A^k BB^*(A^*)^k > 0$$

így a klasszikus Kalman-féle rangfeltétel is teljesül.

Ez utóbbi megjegyzésünket és a 3.1. és 3.2. tételben megfogalmazottakat összefoglalva az adódik, hogy amennyiben a $p(x), q(x)$ együtthatók teljesítik a kirótt feltételeket, akkor a csonkított elérhetőségi disztribúció

$$D_{n-1}\left\{ g(x), [f,g](x), \ldots, \left[[\underbrace{f, \ldots, f,}_{n-1}\, g\,]\,(x) \right] \right\}$$

és a (3.3) ekvivalensek, azaz

$$\text{rang}\left\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right\} = \text{rang} D_{n-1} = n,$$

ami a (3.2) rendszer elérhetőségének szükséges és elégséges feltétele.

A (3.1) rendszer esetét hasonló módszerekkel tárgyaljuk, mint a (3.2)-ét. A hasonlóság kidomborítása érdekében bevezetek néhány egyszerűsítő jelölést. A sokszor szereplő mátrix szorzatokra, pl. az $A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_I^{n_I}$ esetére az $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_I)$ vektorális jelölésmóddal a következő

$$\mathbb{A}^{\mathbf{n}} = A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_I^{n_I}$$

írható. Az $\mathbb{A}^{\mathbf{n}}$ monom fokán az $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 + \ldots + n_I$ értendő. Az $\mathbb{N}^I$ nemnegatív egészek I-dimenziós terét értjük. Az i-edik egységvektort $\mathbf{e}_i \in \mathbb{N}^I$-vel jelöltük, azaz

$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0).$$

A rekurzió áttekinthetőségének az érdekében most is a (3.2) esetén alkalmazott jelöléseimet vesszük alapul.

Legyenek

$$P_{0i}(x) = 0, \quad 1 = 1, 2, \ldots, I, \quad Q_0(x) = q(x)$$

Ekkor most is

$$f_0(x) = Q_0(x)B = q(x)B$$

adódik, míg innen

$$f_0(x) = g(x).$$

Számoljuk ki az $[f, f_0](x)$ vektormezőt.

$$[f, f_0](x) = \left[\sum_{i=1}^{I} p_i(x) A_i x, Q_0(x) B\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} p_i'(x)(B) Q_0(x) A_i x + \sum_{i=1}^{I} p_i(x) Q_0(x) A_i B -$$

$$- \sum_{i=1}^{I} p_i(x) Q_0(x)'(x)(A_i x) B.$$

Ebből definiáljuk a

$$P_{1i}(x) = p_i'(x)(B) Q_0(x), \quad i = 1, 2, \ldots, I,$$

$$Q_{1i}(x) = p_i(x) Q_0(x), \quad i = 1, 2, \ldots, I,$$

$$R_1(x) = -\sum_{i=1}^{I} p_i(x) Q_0'(x)(A_i x).$$

Ezekután legyen az

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{I} p_i(x) A_i x + \sum_{i=1}^{I} Q_{1,i}(x) A_i B.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$[f, f_0](x) = f_1(x) + R_1(x) B.$$

Még egy lépést kiszámolunk, hogy érthetőbb legyen az algoritmus.

$$[f, f_1] = \left[\sum_{i_1} p_i(x) A_{i_1} x, \ \sum_{i_2} P_{1,i_2}(x) A_{i_2} x + \sum_{i_2} Q_{1i_2}(x) A_{i_2} B\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{i_1} p_i'(x)(A_{i_1} x) P_{1,i_1}(x) - p_{i_1}(x) P_{1i}'(x)(A_{i1} x) + p_i'(x)(A_{i_1} B) Q_{1i_1}(x) \right) A_i x +$$

$$+ \sum_{i_1}^{I} \sum_{i_2}^{I} p_{i_1}(x) P_{1i_2}(x) \left(A_{i_1} A_{i_2} - A_{i_2} A_{i_1}\right) x +$$

$$+ \sum_{i_1} \sum_{i_2} p_{i_1}(x) Q_{1i_2}(x) A_{i_1} A_{i_2} B - \sum_{i=1}^{I} \sum_{i_1=1}^{I} p_{i_1}(x) Q_{1i}'(x)(A_{i_1} x) A_i B$$

Tovább alakítjuk az eredményünket az

$$A_{i_1} A_{i_2} - A_{i_2} A_{i_1} = \sum_{i=1}^{I} \Gamma^i_{i_1 i_2} A_i$$

szorzási formulák segítségével. Így

$$[f, f_1](x) = \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{i_1} p_i'(x)(A_{i_1}) P_{1i_1}(x) - p_{i_1}(x) P_{i_1}'(x)(A_{i_1}(x)) + \right.$$

$$\left. + p_i'(x)(A_{i_1} B) Q_{1i_1}(x) + \sum_{i_1} \sum_{i_2} \Gamma^i_{i_1 i_2} p_{i_1}(x) P_{1i_2}(x) \right) A_i x +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{I} \sum_{i_2=1}^{I} p_{i_1}(x) Q_{1i_2}(x) A_{i_1} A_{i_2} B - \sum_{i=1}^{I} \sum_{i_1} p_{i_1}(x) Q_{1i}'(x)(A_{i_1} x) A_i B.$$

Az $A_{i_1}A_{i_2}B$ szorzatot az i_1i_2 indexek szerint lexikografikusan rendezve az $i_1 < i_2$ teljesülése esetén az $\mathbf{n} = (0, \ldots, i_1, \ldots, i_2, \ldots, 0)$ vektor átírható $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{i_1} + \mathbf{e}_{i_2}$ alakba. Hogyan írható át az $A^{\mathbf{e}_{i_1}+\mathbf{e}_{i_2}}B$ együtthatója az $[f, f_1](x)$ kifejezésében? Azaz, írjuk fel a $\sum_{i_1=1}^{I}\sum_{i_2=1}^{I} p_{i_1}(x)Q_{1i_2}(x)A_{i_1}A_{i_2}B$ tagokat vektoriálisan, figyelembe véve, hogy $i_1 > i_2$ esetén

$$A_{i_1}A_{i_2} = A_{i_2}A_{i_1} + \sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{i_1}\sum_{i_2}\Gamma^i_{i_1i_2}\right)A^i,$$

$$\sum_{i_1=1}^{I}\sum_{i_2=1}^{I} p_{i_1}(x)Q_{1i_2}(x)A_{i_1}A_{i_2}B = \sum_{i=1}^{I} p_i(x)Q_1(x)A_i^2B+$$

$$+\sum_{i_1<i_2}\Big(p_{i_1}(x)Q_{1i_2}(x) + p_{i_2}(x)Q_{1i_1}(x)\Big)A_{i_1}A_{i_2}B+$$

$$+\sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{i_1<i_2}\Gamma^i_{i_1i_2}\right)p_{i_1}(x)Q_{1i_2}(x)A_iB = \sum_{i=1}^{I} p_i(x)Q_{1i}(x)\mathbb{A}^{2\mathbf{e}_i}B+$$

$$+\sum_{i_1<i_2}\big(p_{i_1}(x)Q_{1i_2}(x) + p_{i_2}(x)Q_{1i_1}(x)\big)\mathbb{A}^{\mathbf{e}_{i_1}+\mathbf{e}_{i_2}}B + \sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{i_1>i_2}\Gamma^i_{i_1i_2}\right)A_iB,$$

így

$$Q_{2,\mathbf{n}}(x)\sum_{i=1}^{I}\sum_{\substack{|\mathbf{n}|=2\\ \mathbf{n}-\mathbf{e}_i\in\mathbb{N}^I}} p_i(x)Q_{1,\mathbf{n}-\mathbf{e}_i}(x)\mathbb{A}^nB,$$

$$R_{2,i}(x) = \sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{i_1>i_2}\Gamma^i_{i_1i_2}p_{i_1}(x)Q_{1i_2}(x) - \sum_{i_1}p_{i_1}(x)Q'_{1i}(x)\left(A_{i_1}x\right)\right)\mathbb{A}^{\mathbf{e}_i}B$$

$$P_{2i}(x) = \sum_{i=1}^{I}\Bigg(\sum_{\mathbf{i}_1}p'_1(x)(A_{i_1}x)P_{1i_1}(x) - p_{i_1}(x)P'_{1i}(x)(A_{i_1})+$$

$$+p'_1(x)(A_{i_1}B)Q_{1i_1}(x) + \sum_{i_1}\sum_{i_2}\Gamma^i_{i_1i_2}p^{(x)}_{i_1}P_{1i_2}(x)\Bigg)A_ix.$$

Tehát,

$$[f, f_1](x) = \sum_{i=1}^{I} P_2i(x)A_ix + \sum_{|\mathbf{n}|=2} Q_{2,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B + \sum_{\mathbf{n}<2} R_{2,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B.$$

Ha az $f_2(x)$ vektormezőt a következőképpen definiáljuk,

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{I} P_{2i}(x)A_i(x) + \sum_{\mathbf{n}=2} Q_{2,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B,$$

akkor

$$[f, f_1](x) = f_2(x) + \sum_{\mathbf{n}<2} R_{2,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B.$$

A rekurziónk általános lépését is számoljuk ki. A vektoriális írásmód segítségével

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{I} P_{k,i}(x)A_ix + \sum_{|\mathbf{n}|=k} Q_{k,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B,$$

akkor számoljuk ismét az $[f, f_k](x)$ vektormezőt.

$$[f, f_k](x) = \left[\sum_{i_1=1}^{I} p_{i_1}(x)A_{i_1}x,\ \sum_{i_2} P_{k,i_2}(x)A_{i_2}(x) + \sum_{|\mathbf{n}|=k} Q_{k,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{I}\left[\sum_{|\mathbf{n}|=k} p_i'(x)(\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B)Q_{k,i}(x) + \sum_{i_1}\sum_{i_2}\Gamma^i_{i_1 i_2}p_{i_1}(x)P_{k,i_2}(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i_1}\left(p_i'(x)(A_{i_1}x)P_{k,i_1}(x) - p_{i_1}(x)P_{k,i}'(x)(A_{i_1}x)\right)\right] A_i x +$$

$$+ \sum_{i_1}\sum_{|\mathbf{n}|=k} p_{i_1}(x)Q_{k,\mathbf{n}}(x)A_{i_1}\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B - \sum_{|\mathbf{n}|=k}\left(\sum_{i_1} p_{i_1}(x)Q_{k,\mathbf{n}}'(x)(A_i x)\right)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B.$$

Most is jelöljük a kapott együtthatókat a megszokott módon.

$$P_{k+1,i}(x) = \sum_{|\mathbf{n}|=k} p_i'(x)\left(\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B\right)Q_{k,i}(x) + \sum_{i_1}\sum_{i_2}\Gamma^i_{i_1 i_2}P_{k,i_2}(x) +$$

$$+ \sum_{i_1}\left(p_i'(x)(A_{i_1}x)P_{k,i_1}(x) - p_{i_1}(x)P_{k,i}'(x)(A_{i_1}x)\right),$$

$$Q_{k+i,\mathbf{n}}(x) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_i\in\mathbb{N}^I} p_i(x)Q_{k,\mathbf{n}-\mathbf{e}_i}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B.$$

A $Q_{k+1,\mathbf{n}}(x)$-re kapott formula némi magyarázatra szorul. Az $A_i\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B$ szorzatokban az $A_i\mathbb{A}^{\mathbf{n}} = A_iA_i^{n_1}\ldots A_I^{n_I}$ maximális $k+1$-edfokú tagokra a szorzás „kommutatív", a k-nál nem-nagyobb fokú tagok lineáris kombinációval való korrekcióját is figyelembe véve. Ezért definiálhatjuk a $Q_{k+1,\mathbf{n}}(x)$ együtthatót az alábbi módon. Természetesen, hogy az

$$[f, f_k](x) = \sum_{i=1}^{I} P_{k+1,}(x)A_i(x) + \sum_{|\mathbf{n}|=k+1} Q_{k+1,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B +$$

$$+ \sum_{|\mathbf{n}|\le k} R_{k+1,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B$$

formula csak akkor állhat fenn, ha a mátrix szorzásban a „kommutálás" hiánya miatt kisebbfokú tagokkal korrigálunk. Ebben az $R_{k+1,\mathbf{n}}(x)$ együtthatók polinomiális függvényei lesznek az $[f, f_k](x)$- kiszámításával adódó együtthatóknak, amelyek a $p(x)$ és a $g(x)$ együtthatóknak differenciál-polinomjai. Természetesen, gyakorlatilag kiszámíthatatlanul komplikált függés áll fenn rájuk.

Ezzel a megjegyzéssel tehát fennáll az

$$[f, f_k](x) = \sum_{i=1}^{I} P_{k+1,i}(x)A_i(x) + \sum_{|\mathbf{n}|=k+1} Q_{k+1,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B + \sum_{|\mathbf{n}|\le k} R_{k+1,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B$$

formula ebben az esetben is. De mivel $Q_{k+1,\mathbf{n}}(x)$ explicit módon számolható, a maradék tagok nem befolyásolják az

$$f_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{I} P_{k+1,i}(x)A_i x + \sum_{|\mathbf{n}|=k+1} Q_{k+1,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B$$

rekurzív definíciónkat.

Ezzel ebben az esetben is fennáll az

$$[f, f_k](x) = f_{k+1}(x) + \sum_{|\mathbf{n}|\le k} R_{k+1,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B \tag{3.13}$$

egyenlőség.

Ezek után tekinthetjük a problémánkat.

A csonkított $D_k = \left\{ g(x), [f,g](x), \dots, [\underbrace{f, \dots, [f,}_{k} g\,] \dots](x) \right\}$ és az

$$\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

vektormező sereg rangja bizonyos gerjesztési feltételek teljesülése esetén azonos rangú.

Követjük a (3.2) rendszer vizsgálatának gondolatmenetét, felismerve a (3.6) és a (3.13) formulák analógiáját, akkor

$$f_0 = Q_0 B = g(x),$$

$$[f, f_0](x) = f_1(x) + R_1(x)B,$$

$$\dots$$

$$[f, f_{k-1}](x) = f_k(x) + \sum_{|\mathbf{n}|<k} R_{k,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B,$$

így

$$\left[\underbrace{f, \dots, [f,}_{k} g\,] \dots \right](x) = \left[\underbrace{f, \dots, [\,f,}_{k-1}\, f_1\right] \dots\,](x) +$$

$$+ \left[\underbrace{f, \dots, [\,f,}_{k-1}\, R_1 B\,]\right](x) = \dots = f_k(x) +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{|\mathbf{n}|<\kappa} \left[\underbrace{f, \dots, [\,f,}_{k-\kappa}\, R_{\kappa,\mathbf{n}}\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B\,] \dots \right](x).$$

A rekurziónk értelmében az indukciós bizonyítás a következő

1. rang $\{g(x)\}$ = rang $\{f_0(x)\}$
2. rang $\{g(x)[f,g]\}$ = rang $\{f_0(x), f_1(x) - R_1(x)B\}$ = rang $\{f_0(x), f_1(x)\}$,

ugyanis $f_0(x) = q(x)B$, és a $q(x) \ne 0$ feltétel teljesülése esetén az $f_0(x)\,\dfrac{R_1(x)}{q(x)}$-szeresét hozzáadva a 2. vektormezőhöz, a két vektormező ugyanazt az x-től függő 2-dimenziós alteret feszíti ki, ha

$$\sum_{i=1}^{I} p_i'(x)(B)q(x)A_i x \ne q(x)B.$$

Ez utóbbi a gerjesztési feltétel explicit alakja.

Most tegyük fel, hogy a $k-1$-edik lépésre

$$\operatorname{rang}\left\{g(x),[f,g](x),\ldots,\left[\underbrace{f,\ldots,[\,f,}_{k-1\text{-szer}}\,g\,]\ldots\right](x)\right\}=$$
$$=\operatorname{rang}\{f_0(x),f_1(x),\ldots,f_{k-1}(x)\}$$

teljesül. Ekkor

$$\operatorname{rang}\left\{g(x)[f,g](x),\ldots,\left[\underbrace{f,\ldots,[\,f,}_{k\text{-szor}}\,g\,]\ldots\right](x)\right\}=$$
$$=\operatorname{rang}\{g(x),[f,g](x),\ldots,[f,\ldots,[f,g]\ldots](x),f_k(x)+$$
$$\left.+\sum_{\kappa=0}^{k}\sum_{|\mathbf{n}|<k}\left[\underbrace{f,\ldots,[\,f,}_{k-\kappa}\,R_{\kappa,\mathbf{n}}\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B\,]\ldots\right](x)\right\}=$$
$$=\operatorname{rang}\left\{f_0(x),\ldots,f_{k-1}(x),f_k(x)+\sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{|\mathbf{n}|<k}\left[\underbrace{f,\ldots,[\,f,}_{k-\kappa}\,R_{\kappa,\mathbf{n}}\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B\,]\ldots\right](x)\right\}.$$

Az utóbbi vektorokból alkossuk meg az

$$M_k(x)=\left[f_0(x),\ldots,f_{k-1},f_k(x)+\sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{|\mathbf{n}|<k}\left[\underbrace{f,\ldots,[\,f,}_{k-\kappa}\,R_{\kappa,\mathbf{n}}\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B\,]\ldots\right](x)\right]$$

mátrixot. Ennek vegyük bármely $(k+1)\times(k+1)$-szeres részmátrixát, mely invertálható. Hogy ilyen van, ill. hogy mindegyik részmátrix invertálható legyen, kifejezhetjük azzal a feltétellel, hogy a $(k+1)\times(k+1)$ aldeterminánsok szorzata nem nulla. Ez az egyenlőtlenség egy polinomiális parciális differenciálpolinom-egyenlőtlenség a $p_i(x)$ és a $g(x)$ együttható függvényekre.

Járjunk el ugyanúgy a

$$N_k(x)=[f_0(x),\ldots,f_k(x)]$$

mátrixokra is. Ezekután tetszőleges nem-nulla aldeterminánst véve az $M_k(x)$ mátrixból és az $N_k(x)$ mátrixból, azok szorzata nem-nulla volta egy polinomiális parciális differenciálegyenlőtlenség a $p(x),g(x)$ együttható függvényekre, amelyeket gerjesztési feltételeknek lehet tekinteni. Ezek fennállása esetén teljesül, hogy

$$\operatorname{rang}\{g(x),[f,g](x),\ldots,[f,\ldots,[f,g]\ldots](x)\}=$$
$$\operatorname{rang}\{f_0(x),f_1(x),\ldots,f_k(x)\}=k+1.$$

Ez az állítás a 3.2. Tételnek megfelelő állítás.

Ezek után tekintsük a (3.10)-nek megfelelő $f_0(x),f_1(x)\ \ldots,f_k(x)$ vektormezőket. Tegyük fel, hogy létezik olyan k, hogy az $f_0(x),f_1(x),\ldots,f_k(x)$ rangja a maximális n. Ez csak $k \geq n-1$ esetén állhat fenn. A megfelelő

$$Q_0(x), \sum_{i=1}^{I} P_{k,i}(x)A_i(x) + \sum_{i=1}^{I} Q_{1i}(x)A^iB, \dots,$$
$$\sum_{i=1}^{I} P_{k,i}(x)A_ix + \sum_{|\mathbf{n}|=k} Q_{k,\mathbf{n}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}}B$$

vektormezőkből válasszunk ki olyan $n \times n$-es

$$N_k(x) = \left[\dots, \sum_{i=1}^{I} P_{k_j,i}(x)A_ix + \sum_{|\mathbf{n}|=k_j} Q_{k_j,\mathbf{n}_{k_j}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}_{k_j}}B, \dots\right]$$

aldeteminánst, amelynek a rangja n.

$$\det N_k(x) \cdot \det\left[\dots, Q_{k_j,\mathbf{n}_{k_j}}\mathbb{A}^{\mathbf{n}_{k_j}}B, \dots\right] \neq 0$$

egy parciális differenciál-egyenlőtlenség az együttható függvényekre. Ennek a teljesülése egy gerjesztési feltételnek tekinthető, amelynek a fennállása esetén a

$$\left[\dots, Q_{k_j}, \mathbf{n}_{k_j}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}_{k_j}}B, \dots\right]$$

$n \times n$-es aldeteminάns nem-zéró.

Most tekintsük az invertálható $n \times n$-es mátrixnak és a transzponáltjának a szorzatát

$$\begin{aligned}\left[\dots, Q_{k_j,\mathbf{n}_{k_j}}(x)\mathbb{A}^{\mathbf{n}_{k_j}}B, \dots\right] \begin{bmatrix} \vdots \\ Q_{k_ji\mathbf{n}_{k_j}}(x)B^*\mathbb{A}^{*\mathbf{n}_{k_j}} \\ \vdots \end{bmatrix} &= \\ = \sum_{j=1}^{n} Q_{k_j\mathbf{n}_{k_j}}(x)^2 \parallel \mathbb{A}^{\mathbf{n}_{k_j}}BB^*\mathbb{A}^{*\mathbf{n}_{k_j}} \parallel .\end{aligned} \tag{3.14}$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $c > 0$, hogy

$$\min_j \inf_x Q_{k_j}, \mathbf{n}_{k_j}(x)^2 \geq c.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} Q_{k_j,\mathbf{n}_{k_j}}(x)^2 \parallel \mathbb{A}^{\mathbf{n}_{k_j}}BB^*\mathbb{A}^{*\mathbf{n}_{k_j}} \parallel \geq \\ \geq c\sum_{j=1}^{n} \parallel \mathbb{A}^{\mathbf{n}_{k_j}}BB^*\mathbb{A}^{*\mathbf{n}_{k_j}} \parallel .\end{aligned} \tag{3.15}$$

Megjegyezzük, hogy az $(\mathbb{A}^n)^* = (A_1^{n_1}A_2^{n_2}\dots A_I^{n_I})^* = (A_I^*)^{n_I}\dots(A_2^*)^{n_2}(A_1'^*)^{n_1}$. Ezért az általánosított Kalman-féle mátrixnak találtunk n olyan oszlopát, az $\mathbf{n}_{k_j}$ multi-indexnek megfelelőket, amelyek lineárisan függetlenek. Tehát, a

$$\text{rang}\left\{B, \dots, A_1^{n_1}A_2^{n_2}\dots A_I^{n_I}B, \dots, A_I^{n-1}B\right\} = n.$$

Ezzel bebizonyítottam, hogy a (3.1) rendszer D elérhetőségi disztribúciónak létezik olyan k-adik csonkítása, amelynek a rangja n, ha teljesülnek a fentebb konstruált parciális differenciál egyenlőtlenségek a $p_i(x), q(x)$ együtthatókra, ahol k az

$$\{|n| \leq I(n-1),\ n_i \leq n-1\}$$

egyenlőtlenség megoldásainak a számát jelöli. Ez a szám azonban a (3.1) rendszerre csökkenthető. A klasszikus Kalman-féle mátrix rangja maximális csak akkor lehet, ha az A mátrix karakterisztikus polinomja egyben a minimálpolinomja. Ha a minimál polinom rangja $n_{\min} < n$, akkor

$$\operatorname{rang}\left\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right\} = \operatorname{rang}\left\{B, AB, \ldots, A^{n_{\min}-1}B\right\} < n.$$

Az általánosított Kalman-féle feltétel esetén azonban az A_i minimál-polinomjának a foka nem feltétlenül lesz n. Ha A_i minimál polinomjának a fokát $\mathrm{gradmin}_i$ jelöli, akkor elég az

$$\{\mathbf{n} : n_1 < \mathrm{gradmin}_1,\ n_2 < \mathrm{gradmin}_2, \ldots, n_i < \mathrm{gradmin}_I\} \tag{3.16}$$

egyenlőtlenségek megoldásainak a számát tekinteni k-nak, és a D elérhetőségi disztribúció k-adik csonkításának rangja is lehet a maximális n, amennyiben teljesülnek a megfelelő gerjesztési feltételek. Tehát igazoltam az alábbi állítást.

3.3. Tétel. *Ha* (3.1) *rendszerre a $p_i(x)$ és a $q(x)$ együtthatókra teljesülnek a megfelelő gerjesztési feltételek, a fenti módon megkapható differenciál-polinomiális egyenlőtlensé-gek, ekkor létezik olyan k egész, hogy D elérhetőségi rendszer k-adik csonkításának a rangja ugyanúgy a maximális n, mint az általánosított Kalman-féle mátrix rangja. Ezt a k-pozitív egészet választhatjuk a* (3.15) *egyenlőtlenségek megoldásai számának is.*

4. LPV rendszerek approximációja állandó együtthatós kapcsolási rendszerekkel

Lineáris irányítási rendszerek optimalizálása a lineáris programozáshoz hasonlóan viselkedik. Ezt már Pontryagin és tanítványai [3] is észrevették. Gamkrelidze [9] az optimális irányítás minőségi tulajdonságainak elemzéséből kiindulva az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = \xi, \tag{4.1}$$

LTV rendszert tekintette az $u(t) \in \overset{k}{\underset{1}{\times}}[0,1]$ kockából vett kontrollokra. Bebizonyította, hogy amennyiben $u : [0,T] \to \overset{n}{\underset{k=1}{\times}}[0,1] = \mathcal{U}$ szakaszonként folytonos, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $v : (0,t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként konstans kontroll, amelynek az értékei az $\mathcal{U}$ kocka csúcsai lesznek és az

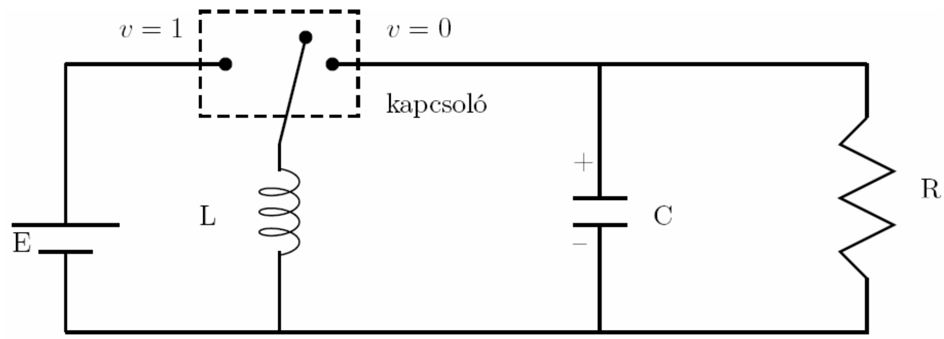
$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), \quad y(0) = \xi \tag{4.2}$$

megoldásra teljesül, hogy

$$\| x(t) - y(t) \| < \varepsilon.$$

Tehát az $u(t)$ és a $v(t)$ irányítások pontonként ugyan nagy eltérést mutathatnak, a megfelelő trajektóriák mégis egyenletesen közel maradnak egymáshoz. Most egy ismert mérnöki példán mutatom be az itt felvetett approximációs problémát.

Tekintsük az ún. Buck-Boost konverter [71] áramkörét:



A $v(t)$ szakaszonként $0,1$-et felvevő függvény írja le a kapcsoló állását, ahogy az az ábrán is látható. A valamilyen szempontból ideális viselkedést egy szakaszonként folytonos $u : (0,t) \to [0,1]$ függvénnyel jellemezhetjük, amelyet az

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= (1-u)x_2 + uE \\ C\dot{x}_2 &= -(1-u)x_1 - \frac{x_2}{R} \end{aligned} \tag{4.3}$$

differenciálegyenlettel írjuk le. Itt a x_1 a tekercsen átfolyó áramerősségét, x_2 a kondenzátoron eső feszültséget jelöli.

Az ideális viselkedést leíró u függvényt természetesen a kapcsoló ide-oda kapcsolásával nem lehet előállítani, csak esetleg jó megközelítéssel érhető el célunk. Pl, adott $\varepsilon > 0$ pontossághoz előállítható egy olyan kapcsolás-sorozatot leíró $v(t)$ függvény, hogy az

$$\begin{aligned} L\dot{y}_1 &= (1-v)y_2 + vE \\ C\dot{y}_2 &= -(1-v)y_1 - \frac{y_2}{R} \end{aligned} \tag{4.4}$$

egyenletből adódó y_1, y_2-re teljesül, hogy

$$\big|x_1(t) - y_1(t)\big| < \varepsilon, \big|x_2(t) - y_2(t)\big| < \varepsilon.$$

Látható, hogy az „egyszerű” példánk nemlineáris, nincs kapcsolatban az optimális irányítással, egy tipikusan rendszerelméleti probléma, azonban matematikailag nagyon hasonló természetű, mint a Gamkrelidze által tekintett approximációs probléma. Ebből kiindulva egy nagyon általános approximációs problémát tekintek és oldok meg, mely megalapozza az ún. kapcsolási „switching” rendszerek további vizsgálatát, egybefogva nagyon különböző jellegű rendszerelméleti problémákat. A Buck-Boost konvertert tekintjük a „switching” rendszerek paradigmájának, mely ezeknek a rendszereknek a nevét is adta.

Az LPV rendszerek bevezetése a Buck-Boost konverterből kiindulva: A (4.3) rendszer nemlineáris, ezért a Gamkrelidze-féle approximációs tétel kereteibe nem illeszthető [71]. Linearizálás helyett egy paramétert vezetek be a $\binom{x_1}{x_2}$ állapot helyébe, amivel formailag „lineárissá” válik a rendszer. Az L és a C fizikai állandókkal leosztva (4.3) átírható a következőképpen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{L}x_2 + \left(\frac{E}{L} - p_2\frac{1}{L}\right)u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 + \frac{1}{C}p_1 u, \end{aligned} \tag{4.5}$$

vagy mátrixos alakba átírva,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & \dfrac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L}p_2 \\ \dfrac{1}{C}p_1 \end{pmatrix} u. \tag{4.6}$$

A $\binom{p_1}{p_2}$ paraméter-vektort az $\binom{x_1}{x_2}$ állapotváltozónak tekintve, a (4.4) nemlineáris rendszert kapjuk. Innen máris felvethető az a probléma, hogy hogyan vihető át a Gamkrelidze-féle approximációhoz hasonló tétel az LPV, sőt LPTV rendszerekre is, hogy ez egyben a Gamkrelidze-féle approximáció általánosítása is legyen. Látható, hogy az így megfogalmazott probléma indíttatása már teljesen rendszerelméleti és nem optimumszámítási. Az approximáló rendszereket, melyek szakaszonként konstans együtthatós lineáris rendszerek lesznek, ugyancsak kapcsolási rendszereknek nevezzük, hasonlóan a Buck-Boost kapcsolóhoz.

Legyen az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{k_1}$ konvex poliéder, és a $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{k_1}$ kompakt halmaz. Feltesszük, hogy az

$$\begin{aligned} A &: \mathcal{P} \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n} \\ B &: \mathcal{P} \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times k_1} \end{aligned}, \quad \text{és a}$$

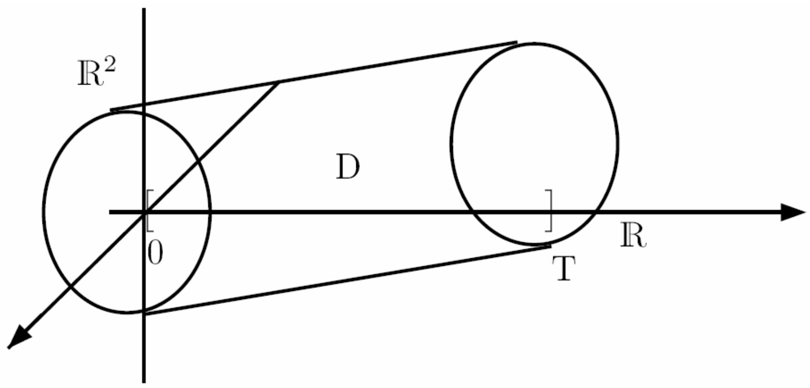
teljesítik a t-ben egyenletes Lipschitz-féle feltételt rendre az L_1 és az L_2 állandókkal.

Az

$$\dot{x} = A(p,t)x + B(p,t)u \tag{4.7}$$

LPTV rendszer p paraméterébe egy állapot-idő-függő paramétert helyettesítünk. Ehhez tekintsünk egy $D \subset \mathbb{R}^n \times [0,T]$-ben nyílt halmazt, valamint a $p : D \to \mathcal{P}$ paraméterfüggvényt. A p függvényről is feltesszük, hogy a t-ben egyenletesen teljesíti a Lipschitz-féle feltételt az L_3 Lipschitz-féle állandóval. Hogy könnyen elképzelhessük egy ilyen D halmaz szerkezetét, tekintsük a következő ábrát:

A hengerszerű test alapja és a fedőlapja a D-értelmezési tartományhoz tartozik, de a „henger” alkotói az $\mathbb{R}^2 \times [0,T]$-ben való nyíltság következtében nem tartoznak D-hez.



4.1. Approximációs tétel. *Tegyük fel , hogy egy $u : (0,t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként folytonos irányításra és egy $p : D \to \mathcal{P}$, t-ben egyenletes globális Lipschitz-feltételt teljesítő, állapotidő-függő paraméterfüggvényre és $\xi \in \mathbb{R}^n$ kezdeti állapotra létezik az $x : (0,t) \to \mathbb{R}^n$ megoldás az*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A\left(p(x(t),t),t\right)x(t) + B\left(p(x(t),t),t\right)u(t), \\ &x(0) = \xi \end{aligned} \tag{4.8}$$

kezdetiérték-problémára. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden ε-ra, amelyre fennáll, hogy $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, létezik olyan

a) $\delta > 0$

b) *olyan szakaszonként konstans $v : (0,t) \to \mathcal{U}$, melynek az értékei az $\mathcal{U}$ konvex poliéder csúcsai, továbbá*

c) *$q : D \to \mathcal{P}$ szakaszonként konstans állapotidő függő paraméterfüggvény, hogy minden $\eta \in \mathbb{R}^n$, a $\parallel \xi - \eta \parallel < \delta$ feltételt kielégítő kezdeti állapotra, az*

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = A\left(q(y(t),t),t\right)y(t) + B\left(q(y(t),t),t\right)v(t), \\ &y(0) = \eta \end{aligned} \tag{4.9}$$

kezdetiérték-probléma megoldása az egész $(0,t)$ intervallumon értelmezve van, és ott

$$\parallel x(t) - y(t) \parallel < \varepsilon.$$

A következő interpolációs tételhez tegyük fel, hogy a $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{k_2}$ is konvex poliéder. Az $A : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ és a $B : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times k_1}$ függvényekről feltesszük, hogy a p-ben lineárisak, azaz a $p \mapsto A(p,t)$, és a $p \mapsto B(p,t)$ függvények minden t-re lineárisak. Innen fix t esetén a Lipschitz-féle feltétel teljesül, ezért csak a t-ben egyenletességet, folytonosságot kell feltennünk.

Ezek mellett a plusz feltételek mellett egy nagyfokú élesítést tudtam bizonyítani az előző állításhoz képest.

4.2. Approximációs tétel. *Tegyük fel, hogy egy $u : (0,t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként folytonos irányításra és egy $p : D \to \mathcal{P}$, t-ben egyenletes globális Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő állapot-idő-függő paraméterfüggvényre, és $\xi \in \mathbb{R}^n$ kezdeti állapotra, létezik a (4.8) kezdetiérték-problémának az egész $(0,t)$-n értelmezett $x : (0,t) \to \mathbb{R}^n$ megoldása. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden ε-ra, amelyre teljesül, hogy $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, léteznek olyan*

a) $\delta > 0$,

b) *olyan szakaszonként konstans* $v : [0,T] \to \mathcal{U}$, *melynek az értékei az* $\mathcal{U}$ *konvex poliéder csúcsai, továbbá olyan*

c) $q : D \to \mathcal{P}$ *szakaszonként konstans állapotidő paraméterfüggvény, amelynek az értékei a* $\mathcal{P}$ *konvex poliéder csúcsai, hogy minden* $\eta \in \mathbb{R}^n$, *amelyre* $\| \xi - \eta \| < \delta$, *az* $y(0) = \eta$ *kezdeti feltétel teljesülése esetén a (4.9) kezdetiérték-probléma megoldása az egész* $(0,t)$ *intervallumon értelmezve van, és ott teljesül, hogy*

$$\| x(t) - y(t) \| < \varepsilon.$$

Az 4.1. tétel esetén az u kontroll approximációja pontonként nagy hibát tartalmazhat, ui. az approximáló v kontroll az $\mathcal{U}$ konvex poliéder csúcspontjaiból veszi az értékeit, de a megfelelő trajektóriák egyenletesen közel vannak. A 4.2. tétel ennél lényegesen többet állít. Nemcsak az u-t approximáló v kontroll veszi az értékeit az $\mathcal{U}$ konvex poliéder csúcsaiból, és ezért a pontonkénti approximáció nagy hibát tartalmazhat, hanem a p paraméter függvényt approximáló q paraméter függvény is a $\mathcal{P}$ konvex poliéder csúcsaiból veszi az értékeit, és ennek ellenére a trajektóriák approximációja egyenletes. A Gamkrelidze-féle approximáció nem alkalmazható a Buck-Boost kapcsolóra, míg az approximációs tételeink igen. Mivel egy a paraméterben lineáris LPV rendszerről van szó, ezért a 4.2. tételt is megkíséreljük alkalmazni. Ehhez azt kellene biztosítani, hogy legalábbis korlátos $(0,t)$ intervallumon a $p = \binom{P_1}{P_2}$ paramétereket egy konvex poliéderben tudjuk tartani, ha $p = \mathbf{x}$. Tekintsük a (4.3) egyenletet és integráljuk a $[0,t) \subset (0,t)$ részintervallumon.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \xi_1 + \frac{E}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau + \frac{1}{L}\int_0^t (1-u(\tau))\, x_2(\tau)d\tau \\ x_2(t) &= \xi_2 + \frac{1}{C}\int_0^t (u(\tau)-1)\, x_1(\tau)d\tau - \frac{1}{RC}\int_0^t x_2(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10)-ben az első egyenletből helyettesítsük $x_1(t) - t$ a 2. egyenletbe, majd ebből $x_2(t)$ az így kapott egyenletbe, szukcesszíven:

$$\begin{aligned} x_2(t) = \xi_2 + \frac{1}{C}\int_0^t (u(\tau_1)-1)\left[\xi_1 + \frac{E}{L}\int_0^{\tau_1} u(\tau_2)d\tau_2 + \frac{1}{L}\int_0^{\tau_1}(1-u(\tau_2))\, x_2(\tau_2)d\tau_2\right] d\tau_1 - \\ -\frac{1}{RC}\int_0^t x_2(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_0^t (u(\tau_1)-1)\, d\tau_1\xi_1 + \xi_2 + \frac{E}{LC}\int_0^t (u_1(\tau_1)-1)\int_0^{\tau_1} u(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \\ +\frac{1}{LC}\int_0^t \left((u(\tau_1)-1)\int_0^{\tau_1}(1-u(\tau_2))\, x_2(\tau_2)d\tau_2\right) d\tau_1 - \frac{1}{RC}\int_0^t x_2(\tau)d\tau = \\ = \frac{1}{C}\int_0^t (u(\tau_1)-1)\, d\tau_1\xi_1 + \xi_2 + \frac{E}{LC}\int_0^t (u_1(\tau_1)-1)\int_0^{\tau_1} u(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \\ +\int_0^t \left[\frac{1}{LC}(1-u(\tau_1))\int_{\tau_1}^t (u(\tau_2)-1)\, d\tau_2 - \frac{1}{RC}\right] x_2(\tau_1)d\tau_1. \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^t (u(\tau_1) - 1)\, d\tau_1,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{E}{LC}\int\limits_0^t (u_1\tau_{-1})\int\limits_0^{\tau_2} u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \quad \text{és}$$

$$\varphi_3(\tau_1) = \frac{1}{LC}\,(1 - u(\tau_1))\int\limits_{\tau_1}^t (u(\tau_2) - 1)\, d\tau_2 - \frac{1}{RC}.$$

Ekkor

$$x_2(t) = \varphi(t)\xi_1 + \xi_2 + \varphi_2(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau) x_2(\tau) d\tau.$$

Innen

$$x_2(t) = \varphi_1(t)\xi_1 + \xi_2 + \varphi_2(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\left[\varphi_1(\tau_1)\xi_1 + \xi_2 + \varphi_2(\tau_1) + \int\limits_0^{\tau_1} \varphi_3(\tau_2)x_2(\tau_2)d\tau_2\right] d\tau_1 =$$
$$= \left(\varphi_1(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau\right)\xi_1 + \left(1 + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)d\tau_1\right)\xi_2 + \varphi_2(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1} \varphi_3(\tau_2)x_2(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 = \left(\varphi_1(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau\right)\xi_1 +$$
$$+ \left(1 + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau)d\tau\right)\xi_2 + \left(\varphi_2(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(t)\varphi_2(\tau)d\tau +\right) +$$
$$+ \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}\varphi_3(\tau_2)\left[\varphi_1(\tau_2)\xi_1 + \xi_2 + \varphi_2(\tau_2) + \int\limits_0^{\tau_2}\varphi_3(\tau_3)x_2(\tau_3)d\tau_3\right] d\tau_2 d\tau_1 =$$
$$= \left[\varphi_1(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\varphi_1(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}\varphi_3(\tau_2)\varphi_1(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right]\xi_1 +$$
$$+ \left[1 + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}\varphi_3(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right]\xi_2 +$$
$$+ \left[\varphi_2(t) + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\varphi_2(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}\varphi_3(\tau_2)\varphi_2(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right] +$$
$$+ \int\limits_0^t \varphi_3(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}\varphi_3(\tau_2)\int\limits_0^{\tau_2}\varphi_3(\tau_3)x_2(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1.$$

Folytatva ezt az eljárást, azt kapjuk, hogy

$$x_2(t) = \left[\varphi_1(t) + \sum_{i=1}^{k} \int_0^t \varphi_3(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \varphi_3(\tau_2) \dots \int_0^{\tau_{k-2}} \varphi_3(\tau_{k-1}) \int_0^{\tau_{k-1}} \varphi_3(\tau_k)\varphi_1(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1\right] \xi_1 +$$
$$+ \left[1 + \int_0^t \varphi_3(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_0^t \varphi_3(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \varphi_3(\tau_2) \dots \varphi_3(\tau_{k-1}) \int_0^{\tau_{k-1}} \varphi_3(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1\right] \xi_2 +$$
$$+ \left[\varphi_2(t) + \sum_{i=1}^{k} \int_0^t \varphi_3(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \varphi_3(\tau_2) \dots \varphi_3(\tau_{k-1}) \int_0^{\tau_{k-1}} \varphi_3(\tau_k)\varphi_2(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1\right] +$$
$$+ \int_0^t \varphi_3(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \varphi_3(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \varphi_3(\tau_3) \dots \int_0^{\tau_{k-2}} \varphi_3(\tau_k) \int_0^{\tau_k} \varphi_3(\tau_{k+1})\varphi_2(\tau_{k+1}) d\tau_{k+1} d\tau_k \dots d\tau_1.$$

Ismételt parciális integrálással az integrálok átalakíthatók a következőképpen:

$$\int_0^t \varphi(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \varphi(\tau_2) \dots \varphi(\tau_{k-1}) \int_0^{\tau_{k-1}} \varphi(\tau_k)\psi(\tau_k) d\tau_k d\tau_{k-1} \dots d\tau_1 =$$
$$= \frac{1}{k!} \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \varphi(\tau_2) d\tau_2 \right)^k \psi'(\tau_1) d\tau_1, \quad \text{és}$$
$$\int_0^t \varphi(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \varphi(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \varphi(\tau_3) \dots \varphi(\tau_{k-1}) \int_0^{\tau_{k-1}} \varphi(\tau_k) d\tau_k d\tau_{k-1} \dots d\tau_1 =$$
$$= \frac{1}{k!} \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \varphi(\tau_2) d\tau_2 \right)^k d\tau_1, \quad \text{és} \quad \psi(t) = \int_0^t \psi'(\tau) d\tau.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$x_2(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \varphi_3(\tau_2) d\tau_2 \right)^i \varphi_1'(\tau_1) d\tau_1 \right) \xi_1 + \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \int_0^t \left(\int_0^t \varphi_3(\tau_2) d\tau_2 \right)^i d\tau_1 \right) \xi_2 +$$
$$+ \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \varphi_3(\tau_2) d\tau_2 \right)^i \varphi_2'(\tau_1) d\tau_1 \right) + \frac{1}{k+1} \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \varphi_3(\tau_2) d\tau_2 \right)^{k+1} \varphi_2'(\tau_1) d\tau_1,$$

majd a jobboldal határértékét véve, amikor $k \to \infty$, kapjuk, hogy

$$x_2(t) = \int_0^t \exp\left(\int_{\tau_1}^t \varphi_3(\tau_2) d\tau_2 \right) \varphi_1'(\tau_1) d\tau_1 \xi_1 + \int_0^t \exp\left(\int_{\tau_1}^t \varphi_3(\tau_2) d\tau_2 \right) d\tau_1 \xi_2 +$$
$$+ \int_0^t \exp\left(\int_{\tau_1}^t \varphi_3(\tau_2) d\tau_2 \right) \varphi_2'(\tau_1) d\tau_1. \tag{4.11}$$

(4.11)-ből $x_2(t)$-t a(4.10) első egyenletébe helyettesítve

$$
\begin{aligned}
x_1(t) = \xi_1 + \frac{E}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau + \frac{1}{L}\int_0^t (1-u(\tau_1))\int_0^{\tau_1} \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1}\varphi_3(\tau_3)d\tau_3\right)\varphi_1'(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\xi_1 + \\
+\frac{1}{L}\int_0^t (1-u(\tau_1))\int_0^{\tau_1} \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1}\varphi_3(\tau_3)d\tau_3\right) d\tau_2 d\tau_1\xi_2 + \\
+\frac{1}{L}\int_0^t (1-u(\tau_1))\int_0^{\tau_1} \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1}\varphi_3(\tau_3)d\tau_3\right)\varphi_2'(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1, \quad \text{azaz} \\
x_1(t) = \left[1 + \frac{1}{L}\int_0^t (1-u(\tau_1))\int_0^{\tau_1} \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1}\varphi_3(\tau_3)d\tau_3\right)\varphi_1'(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right]\xi_1 + \\
+\frac{1}{L}\int_0^t (1-u(\tau_1))\int_0^{\tau_1} \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1}\varphi_3(\tau_3)d\tau_3\right) d\tau_2 d\tau_1\xi_2 + \\
+\frac{E}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau + \frac{1}{L}\int_0^t (1-u(\tau_1))\int_0^{\tau_1} \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1}\varphi_3(\tau_3)d\tau_3\right)\varphi_2'(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

A fizikai állandókból, a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ definíciójából, valamint abból, hogy $0 \le u(t) \le 1$, megbecsülhető egy olyan $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ poliéder, esetünkben egy $\mathcal{P} = [-M, M] \times [-M, M]$ négyzet, amelyben a $p = \mathbf{x}$ paraméterfüggvény a $(0, t)$-n mindvégig benne marad. A 4.2. tételünk erre az esetre érdekes, de fizikailag nem realizált áramköri közelítő modellt garantál a Buck-Boost konverterre. A (4.3) modell helyett olyan, szakaszonként definiált modelleket használhatunk, amelyekben a bilineáris tagban a tekercs áramerőssége, x_1 helyett $\pm M$-et, a kondenzátoron az x_2 feszültség helyett is $\pm M$-et írhatunk:

$$
\begin{aligned}
L\dot{x}_1 &= x_2 + (E \pm M)u, \\
C\dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{1}{R}x_2 \pm Mu.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Ez azt jelenti, hogy a négyzet négy csúcsának megfelelő négy lineáris rendszermodell szakaszonkénti váltogatása lesz a bilineáris rendszer „linearizálása”, melynek nem sok közös vonása van a hagyományos értelemben vett linearizálással.

Most, mielőtt a két tétel bizonyítására térnék, egy approximációs lemmát bizonyítok, amelyet a hagyományos normabecslések helyett alkalmazok a tételeim bizonyítására.

4.1. Approximációs lemma. *Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{k_1}$ konvex korlátos poliéder, $u : (0, t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként folytonos függvény, továbbá $B : (0, t) \to \mathbb{R}^{n \times k_1}$ szakaszonként folytonos mátrixfüggvény. Ekkor tetszőleges $\bar{\varepsilon} > 0$-hoz létezik olyan $v : (0, t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként konstans approximáló függvény, amely az értékeit az $\mathcal{U}$ csúcspontjaiban veszi fel, és*

$$
\left\| \int_0^t B(\tau)\left(u(\tau) - v(\tau)\right) d\tau \right\| < \bar{\varepsilon} \tag{4.14}
$$

Bizonyítás. Legyen $d_{\mathcal{U}}$ az $\mathcal{U}$ poliéder átmérője, azaz $d = \max \parallel u_{l_1} - u_{l_2} \parallel$, ahol u_{l_1}, u_{l_2} az $\mathcal{U}$ poliéder csúcsain futnak végig, továbbá

$$
|B| = \sup_{t \in (0,t)} \parallel B(t) \parallel .
$$

Mivel az u és B szakaszonként folytonosak, ezért minden $\bar{\varepsilon} > 0$-hoz, léteznek a $(0,t)$-ben olyan $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T$ osztópontok, hogy a $[t_{i-1}, t_i) \subset (0,t)$ részintervallumokon mind az u, mind a B folytonosak, és

$$\begin{aligned}
&\| u(t) - u(t_{i-1}) \| < \frac{\bar{\varepsilon}}{3T|B|}, \quad \text{ha} \quad t \in [t_{i-1}, t_i),\\
&\| B(t) - B(t_{i-1}) \| < \frac{\bar{\varepsilon}}{3Td_{\mathcal{U}}}, \quad \text{ha} \quad t \in [t_{i-1}, t_i),\\
&(t_i - t_{i-1})|B|d_{\mathcal{U}} < \frac{\bar{\varepsilon}}{3T}.
\end{aligned}$$

Legyenek az $\mathcal{U}$ poliéder csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_L$.

Tekintsük az $u(t_{t-1}) \in \mathcal{U}$ pontot. Mivel $\mathcal{U}$ konvex poliéder, ezért létezik az $u_1, u_2, \ldots, u_L$ csúcspontoknak egy olyan konvex kombinációja (nem egyértelmű), amelyre

$$u(t_{i-1}) = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l^i u_l \qquad \left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l^i = 1, \ \lambda_l^i \geq 0 \right).$$

A $[t_{i-1}, t_i)$ intervallumot osszuk fel $\lambda_1^i, \lambda_2^i \ldots \lambda_L^i$ arányban részintervallumokra, melyek között 0 hosszúságút is megengedünk: $t_{i-1} = t_{i0} \leq t_{i1} \leq \ldots t_{iL} = t_i$ ahol

$$t_{il} = t_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \left(\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_{l_1}^i \right).$$

Definiáljuk az approximáló függvényt a $v : (0,t) \to \mathcal{U} - t$ a $t \in [t_{il-1}, t_{il}) \subset [t_{i-1}, t_i)$ részintervallumon a $v(t) = u_l$ csúcsbeli értékkel. Legyen $t \in [0,T)$ tetszőleges, ekkor $t \in [t_{i-1}, t_i)$ valamely i-edik részintervallumra.

Ekkor, $t < T$ esetén,

$$\left\| \int_0^t B(\tau)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| \leq \left\| \int_{t_{i-1}}^t B(\tau) \left(u(\tau) - v(\tau) \right) d\tau \right\| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(\tau) \left(u(\tau) - v(\tau) \right) d\tau \right\|.$$

Külön becsüljük az első és az összegben szereplő tagokat:

$$\left\| \int_{t_{i-1}}^t B(\tau) \left(u(\tau) - (\tau) \right) d\tau \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^t \| B(\tau) \| \cdot \| u(\tau) - v(\tau) \| \, d\tau \leq$$
$$\leq (t - t_{i-1})|B|d_{\mathcal{U}} \leq (t_i - t_{i-1})|B|d_{\mathcal{U}} < \frac{\bar{\varepsilon}}{3}.$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{i-1}\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(\tau)\,(u(\tau)-v(\tau))\,d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i-1}\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (B(\tau)-B(t_{j-1}))\,(u(\tau)-v(\tau))\,d\tau \right\| +$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(t_{j-1})\,(u(\tau)-v(\tau))\,d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| B(\tau)-B(t_{j-1}) \| \cdot \| u(\tau)-v(\tau) \| \, d\tau +$$

$$+\left\| \sum_{j=1}^{i-1}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} B((t_{j-1}))u(\tau)d\tau - \sum_{l=1}^{L}\int_{t_{jl-1}}^{t_{jl}} B(t_{j-1})v(\tau)d\tau \right) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i-1}(t_j-t_{j-1})d_{\mathcal{U}}\frac{\bar\varepsilon}{3Td_{\mathcal{U}}}+$$

$$+\left\| \sum_{j=1}^{i-1}B(t_{j-1})\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)d\tau - \sum_{l=1}^{L}\int_{t_{jl-1}}^{t_{jl}} u_l d\tau \right) \right\| \leq \frac{\bar\varepsilon t_{i-1}}{3T}+$$

$$+\left\| \sum_{j=1}^{i-1}B(t_{j-1})\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)d\tau - (t_j-t_{j-1})\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l^j u_l \right) \right) \right\| \leq \frac{\bar\varepsilon}{3}+$$

$$+|B|\sum_{j=1}^{i-1}\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (u(\tau)-u(t_{i-1}))d\tau \right\| \leq \frac{\bar\varepsilon}{3}+|B|\sum_{j=1}^{i-1}(t_j-t_{j-1})\frac{\bar\varepsilon}{3T|B|} \leq$$

$$\leq \frac{\bar\varepsilon}{3}+|B|t_{i-1}\frac{\bar\varepsilon}{3T|B|} \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Összevetve ezt és a maradék $[t_{i-1},t)$ intervallumon kapott becsléssel, a

$$\left\| \int_0^t B(\tau)(u(\tau)-v(\tau))d\tau \right\| \leq \bar\varepsilon$$

becslést kapjuk, amivel bebizonyítottuk az approximációs lemmánkat. ■

4.1. Approximációs tétel bizonyítása. Legyen most

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{és} \quad \| \xi - \zeta \| < \frac{\varepsilon}{6}\exp(-LT),$$

ahol L konstans az

$$|A| = \sup \| A(p,t) \|, |B| = \sup \| B(p,t) \|, |u| = \sup \| u(t) \| \;\; |A| = \sup A(p,t) \|,$$

$$|B| = \sup \| B(p,t) \|, \; |u| = \sup \| u(t) \|, |x| = \sup \| x(t) \|$$

segítségével definiálható:

$$L = L_1L_3|x| + L_2L_3|u| \cdot |A|,$$

ahol L_1, L_2, L_3 rendre a A, B, P függvényre vonatkozó, korábban bevezetett globális, t-ben egyenlet, és Lipschitz-állandó.

A feltételeink szerint a (4.8) kezdetiérték-problémának az egész $(0, t)$-n létezik megoldása. Mivel a $D \subset \mathbb{R}^n \times (0, t)$-ben nyílt, ezért létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre a $x : (0, t) \to \mathbb{R}^n$ ε_0 sugarú zárt környezete a D-nek részhalmaza. Ekkor a $(0 < \varepsilon)$-t tetszőlegesen választható az $\varepsilon < \varepsilon_0$ feltétellel. Legyen v egyelőre tetszőleges irányítás, amelyre tekintsük a

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(p(z(t), t), t)z(t) + B(p(z(t), t), t)v(t), \\ z(0) &= \zeta \end{aligned} \tag{4.15}$$

problémát. Ennek a z megoldását, melynek az értelmezési tartománya a $(0, t)$ félig nyílt részintervalluma, $[0, T_0)$, összehasonlíthatjuk a (4.8) $x : (0, t) \to \mathbb{R}^n$ megoldásával. E célból integráljuk a (4.8) és a (4.15) egyenleteket és becsüljük a megoldások eltérését,

$$\begin{aligned}
&\parallel x(t) - z(t) \parallel \leq \parallel \xi - \zeta \parallel + \\
&+ \left\| \int_0^t \Big(A(p(x(\tau), \tau), \tau)x(\tau) - A(p(z(\tau)(\tau), \tau)z(\tau) \Big) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| \int_0^t \Big(B(p(x(\tau), \tau), \tau)u(\tau) - B(p(z(\tau)(\tau), \tau)v(\tau) \Big) d\tau \right\| \leq \\
&\leq + \parallel \xi - \zeta \parallel \left\| \int_0^t \Big(A(p(x(\tau), \tau), \tau)x(\tau) - A(p(z(\tau)(\tau), \tau)x(\tau) \Big) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| \int_0^t \big(A(p(z(\tau), \tau), \tau \big) \left(x(\tau) - z(\tau) \right) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| \int_0^t \Big(B(p(x(\tau), \tau), \tau)u(\tau) - B(p(z(\tau)(\tau), \tau)u(\tau) \Big) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| \int_0^t \Big(B(p(z(\tau), \tau) \left(u(\tau) - v(\tau) \right) d\tau \right\|.
\end{aligned}$$

Becsüljük az utóbbi négy tagot külön-külön.

$$\left\|\int_0^t \Big(A(p(x(\tau),\tau),\tau) - A(p(z(\tau)(\tau),\tau)\Big)x(\tau)d\tau\right\| \leq$$
$$\leq \int_0^t \left\|A\left(p(x(\tau),\tau),t\right) - A\left(p(z(\tau),z),\tau\right)\right\| \cdot \| x(\tau) \| \, d\tau \leq$$
$$\leq L_1 L_3 |x| \int_0^t \| x(\tau) - z(\tau) \| \, d\tau.$$

$$\left\|\int_0^t A(p(z(\tau),\tau),\tau)\left(x(\tau) - z(\tau)\right)d\tau\right\| \leq |A| \int_0^t \left\|x(\tau) - z(\tau)\right\| d\tau.$$

$$\left\|\int_0^t \big(B(p(x(\tau),\tau),\tau) - B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right)\big)u(\tau)d\tau\right\| \leq$$
$$\leq \int_0^t \left\|B\left(p(x(\tau),\tau),\tau\right) - B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right)\right\| \cdot \left\|u(\tau)\right\| d\tau \leq$$
$$\leq L_2 L_3 |u| \int_0^t \left\|x(\tau) - z(\tau)\right\| d\tau.$$

Az utolsó tagot nem becsülhetjük ilyen egyszerűen, hogy az approximációs tételünket igazoljuk. Bevezetjük a következő jelölést:

$$L = L_1 L_3 |x| + L_2 L_3 |u| + |A|,$$
$$\psi(t) = \left\|\int_0^t B\left(p(z(\tau),\tau)\right)\left(u(\tau) - v(\tau)\right)d\tau\right\|,$$
$$\varphi(t) = \| x(t) - z(t) \| .$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + L\int_0^t \varphi(\tau)d\tau + \psi(t) \tag{4.16}$$

A kapott egyenlőtlenségbe a $\varphi(\tau)$ helyett helyettesítsük (4.16)-ot:

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + L\int_0^t \left(\varphi(0) + L\int_0^t \varphi(\tau_2)d\tau_2 + \psi(\tau_1)\right)d\tau_1 + \psi(t).$$

Ezt ismételjük a kapott egyenlőtlenséggel,

$$\varphi(t) \leq (1+Lt)\varphi(0) + \left(\psi(t) + L\int_0^t \psi(\tau_1)d\tau_1\right) + L^2\int_0^t\int_0^{\tau_1}\varphi(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 =$$
$$= (1+Lt)\varphi(0) + \left(\psi(t) + L\int_0^t \psi(\tau_1)\right) + L^2\int_0^t (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \leq$$
$$\leq (1+Lt)\varphi(0) + \left(\psi(t) + L\int_0^t \psi(\tau_1)d\tau_1\right) +$$
$$+L^2\int_0^t (t-\tau_1)\left(\varphi(0) + L\int_0^{\tau_1}\varphi(\tau_2)d\tau_2 + \psi(\tau_1)\right)d\tau_1 =$$
$$= (1 + Lt + \frac{1}{2}L^2t^2)\varphi(0) + \left(\psi(t) + L\int_0^t \psi(\tau_1)d\tau_1 + L^2\int_0^t (t-\tau_1)\psi(\tau_1)d\tau_1\right) +$$
$$+L^3\int_0^t \frac{(t-\tau)}{2!}\varphi(\tau)d\tau \leq \ldots \leq \left(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}(Lt)^i\right)\varphi(0)+$$
$$+\left(\psi(t) + L\int_0^t\sum_{i=0}^{k-1}\frac{L^i}{i!}(t-\tau_1)^i\psi(\tau_1)d\tau_1\right) +$$
$$+L^{k+1}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{k+1}}{(k+1)!}\varphi(\tau)d\tau \stackrel{k\to\infty}{\to}$$
$$\stackrel{k\to\infty}{\to} \exp(Lt\varphi(0) + \psi(t)) + L\int_0^t \exp L(t-\tau)\psi(\tau)d\tau,$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\| x(t) - z(t) \| \leq \exp Lt \| \xi - \zeta \| + \\ &+\left\|\int_0^t B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right)\left(u(\tau) - v(\tau)\right)d\tau\right\| + \\ &+L\int_0^t \exp L(t-\tau_1)\left\|\int_0^{\tau_1} B\left(p(z(\tau_2)),\tau_2\right)\left(u(\tau_2) - v(\tau_2)\right)d\tau_2\right\|d\tau_1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Feltéve, hogy

$$\| \xi - \zeta \| < \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{6}\exp(-LT), \quad \text{azaz} \quad \bar{\delta} < \frac{\varepsilon}{3}\exp(-LT)$$
$$\psi(t) = \left\|\int_0^t B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right)\left(u(\tau) - v(\tau)\right)d\tau\right\| < \frac{\varepsilon}{6},$$

és, hogy a harmadik tag is kisebb legyen $\frac{\varepsilon}{6}$-nál, az kell, hogy

$$\psi(t) = \left\|\int_0^t B\left(p(z(\tau),\tau)\tau\right)\left(u(\tau) - v(\tau)\right)d\tau\right\| \leq \frac{\varepsilon}{6(\exp LT - 1)}$$

is teljesüljön. Alkalmazva az approximációs lemmánkat a

$$B(t) = B\left(p(z(t), t), t\right)$$

függvénnyel, létezik olyan $v : (0, t) \to \mathcal{U}$ melynek az értékei csak az $\mathcal{U}$ konvex poliéder csúcspontjai lehetnek, szakaszonként konstans és $\psi(t) < \dfrac{\varepsilon}{6}$.

Tehát

$$\psi(t) < \min\left\{\frac{\varepsilon}{6(\exp LT - 1)},\ \frac{\varepsilon}{6}\right\},$$

ahonnan

$$\| x(t) - z(t) \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebből következik a megoldások határtól határig folytathatósága következtében, hogy a szakaszonként konstans $v : (0, t) \to \mathcal{U}$ irányításra, melynek az értékei csak a $\mathcal{U}$ konvex poliéder csúcsaiban vannak, hogy a megfelelő $z : (0, t) \to \mathbb{R}^n$ az egész $(0, t)$-n értelmezve van. Tehát azt kell megvizsgálni, hogy létezik-e az approximációs tételben állított $v : (0, t) - \mathcal{U}$, amelyre a

$$\psi(t) = \left\| \int\limits_0^t B\left(p(z(\tau), \tau), \tau\right)\left(u(\tau) - v(\tau)\right) d\tau \right\| \leq$$
$$\leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{6(\exp LT - 1)},\ \frac{\varepsilon}{6}\right\}$$

teljesül. Ehhez, alkalmazzuk az approximációs lemmát a

$$t \mapsto B\left(p(z(t), t), t\right) = B(t)$$

függvényre és az

$$\bar{\varepsilon} = \min\left\{\frac{\varepsilon}{6(\exp LT - 1)},\ \frac{\varepsilon}{6}\right\}$$

számra, amiből következik, hogy a konstruált v irányítással a (4.8) és a (4.15) kezdetiérték-problémák x, és z megoldásaira teljesül, hogy $\| x(t) - z(t) \| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, így z is értelmezve van az egész $(0, t)$-n.

Most hasonlítsuk össze a (4.9) és a (4.15) kezdetiérték-problémák y és z megoldásait. Azt szeretnénk, hogy a (4.9) egyenletben szereplő $q : D \to \mathcal{P}$ szakaszonként konstans paraméter-függvényt meg lehessen úgy választani, hogy $\| y(t) - z(t) \| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, feltéve, hogy $\| \eta - \xi \| < \bar{\bar{\delta}}$ valamely $\bar{\bar{\delta}} > 0$ mellett, amelynek $\bar{\delta}$-nál kisebbnek kell lennie. Ekkor az 1. approximációs tételbeli $\delta > 0$ számot választhatjuk $\delta = \min\left\{\bar{\delta}, \bar{\bar{\delta}}\right\}$-nek. Tehát a szokásos módon kezdjük a becslést:

$$\| z(t)-y(t) \| \leq \| \xi-\eta \| + \left\| \int_0^t A\big(p(z(\tau),\tau),\tau\big) z(\tau) - A\big(q(y(\tau),\tau),\tau\big) y(\tau) d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t \big(B\left(p(z(\tau),z),\tau\right) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right)\big) v(\tau) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \| \zeta-\eta \| + \int_0^t \left\| A\big(p\left(z(\tau),\tau\right),\tau\big) - A\big(p\left(y(\tau),\tau\right),\tau\big) \right\| \| z(\tau) \| d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left\| A\big(p\left(y(\tau),\tau\right),\tau\big) - A\big(q\left(y(\tau),\tau\right),\tau\big) \right\| \| z(\tau) \| d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left\| A\big(q\left(y(\tau),\tau\right),\tau\big) \right\| \| z(\tau) \| d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left\| B\big(p\left(z(\tau),\tau\right),\tau\big) - B\big(p\left(y(\tau),\tau\right),\tau\big) \right\| \| v(\tau) \| d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left\| B\big(p\left(y(\tau),\tau\right),\tau\big) - B\big(q\left(y(\tau),\tau\right),\tau\big) \right\| \| v(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq \| \zeta-\eta \| \; L_1 L_3 \left(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_0^t \| z(\tau) - y(\tau) \| d\tau +$$

$$+ L_1 (|x| + \frac{\varepsilon}{2}) \int_0^t \| p\left(y(\tau),\tau\right) - q\left(y(\tau),\tau\right) \| d\tau +$$

$$+ |A| \int_0^t \| z(\tau) - y(\tau) \| d\tau + L_2 L_3 |v| \int_0^t \| z(\tau) - y(\tau) \| d\tau +$$

$$+ L_2 |v| \int_0^t \| p\left(y(\tau),\tau\right) - q\left(y(\tau),\tau\right) \| d\tau.$$

Legyen $\| \zeta-\eta \| < \bar{\bar{\bar{\delta}}}$, és

$$\| p(x,t) - q(x,t) \| < \bar{\varepsilon}, \qquad \forall (x,t) \in D.$$

Ekkor a $\varphi(t) = \| z(t) - y(t) \|$ függvényre és az

$$\begin{aligned} L &= L_1 L_3 \left(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \right) + L_2 L_3 |v| + |A|, \\ M &= \left(L_1 (|x| + \frac{\varepsilon}{2}) + L_2 |v| \right) T \end{aligned}$$

konstansokra a

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + L \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + M \tag{4.18}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A már többször alkalmazott iteratív eljárással

$$\varphi(t) \leq (\varphi(0) + M\xi) \exp - LT$$

adódik. Ez már majdnem a Gronwall-Bellman-féle lemma eredeti formája. Ha azt akarjuk, hogy ez az eltérés kisebb legyen, mint $\frac{\varepsilon}{2}$, akkor $\bar{\bar{\delta}} < \frac{\varepsilon}{4}\exp(-LT)$, és

$$\bar{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{4M}\exp(-LT)$$

korlátokat kell választanunk. Ezzel az

$$\| x(t) - y(t) \| \leq \| x(t) - z(t) \| + \| z(t) - y(t) \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenségből következik az 1. approximációs tételünk. ■

4.2. Approximációs tétel bizonyítása. Ezt ugyanúgy strukturáljuk, mint az 4.1. tételt. Látható, hogy az első rész bizonyításában, azaz az $\| x(t) - z(t) \|$ eltérés becslésében a $q : D \to \mathcal{P}$ nem játszik semmilyen szerepet, így elég az 4.1. tétel bizonyításának erre a részére hivatkozni.

A 2. rész a $\| z(t) - y(t) \|$ becsléséhez a $q : D \to \mathcal{P}$ konstrukciójára van szükség a plusz feltételeink figyelembe vételével. Tehát $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{k_2}$ konvex poliéder, és $p \mapsto A(p,t)$, illetve $p \mapsto B(p,t)$ lineáris függvény minden fix t esetén. Az t-ben egyenletes Lipschitz-féle feltételnek ebben az esetben is teljesülnie kell. A 4.1. tétel bizonyításakor használt jelöléseket itt is átvesszük.

Egy geometriai konstrukcióval kezdem. Az a gondolat vezérli a konstrukciókat, hogy a D belsejében kis kockák uniójával előállítunk egy „fogazott határú” kisebb tartományt, amelynek a lezárása is D-ben van. Ebben definiáltam a kívánt, szakaszonként konstans q állapot-idő-változós függvényt, amely csak a $\mathcal{P}$ konvex poliéderből veszi az értékeit. Egy halmaz határát, pl. D határát FrD-vel jelölök. Legyen $FrD_{(0,T)} = FrD \cap (\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Tetszőleges $\delta_0 > 0$ számra $N_{\delta_0}(FrD_{(0,T)}) \subset \mathbb{R}^n \times (0,t)$ a határ δ_0-sugarú környezetét jelöli az $\mathbb{R}^n \times (0,t)$ sávban. Legyen most $\delta > 0$ olyan szám, amelyre csak az $(n+1)\delta < \delta_0$ az egyetlen feltétel. A $(0,t)$ intervallumnak tekintsük egy $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_{I-1}, t_I)$ felosztását, $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_{I-1} < t_I = T$, amelyre teljesül a $t_i - t_{i-1} < \delta$ feltétet minden i-re. Tekintsük $\mathbb{Z}^n = \{\mathbf{m} : \mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n), m_j \in \mathbb{Z}\}$ pontrácsot. $Q_{\delta\mathbf{m}}$ jelölje a felülről nyitott 2δ élhosszúságú, $\delta\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ középpontú kockát:

$$Q_{\delta\mathbf{m}} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in \times\big[(m_j - 1)\delta, (m_j + 1)\delta\big), \quad j = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Az említett „fogazott” halmaz, $D_{\delta_0,\delta,\mathbf{t}} \subset D$ definíciója:

$$D_{\delta_0,\delta,\mathbf{t}} = \mathbb{R}^n \times (0,t) \cap \left(\bigcup_{Q_{\delta\mathbf{m}} \times [t_{i-1,t_i}] \cap N_{\delta_0}(FrD_{(0,T)}) \neq \emptyset} Q_{\delta\mathbf{m}} \times [t_{i-1,t_i}] \right).$$

Tekintsük az állapot-idő változós p paraméterfüggvény értékeit az $(\delta\mathbf{m}, t_{i-1})$ pontokban: $p(\delta\mathbf{m}, t_{i-1}) \in \mathcal{P}$. Mivel $\mathcal{P}$ konvex poliéder a $P_1, P_2, \ldots, P_M$ csúcsokkal, ezért létezik (legalább) egy konvex kombinációjuk, amelyre

$$p(\delta\mathbf{m}, t_{i-1}) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m^{\mathbf{m},i} P_m.$$

Most tekintsük a t_{i-1}, t_i intervallumnak a $\lambda_m^{\mathbf{m},i}$ arányokban való felosztását:

$$t_{i-1} = t_{i0} \leq t_{i1} \leq \ldots \leq t_{iM-1} \leq t_{iM} = t_i,$$

$$t_{i1} - t_{i0} : t_{i2} - t_{i1} : \ldots : t_{iM} - t_{iM-1} = \lambda_1^{\mathbf{m},i} : \lambda_2^{\mathbf{m},i} : \ldots : \lambda_M^{\mathbf{m},i},$$

azaz

$$t_{im} = t_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \left(\sum_{\eta=1}^{m} \lambda_{\eta}^{\mathbf{m},i} \right).$$

Ezekután, definiálható a $q : D_{\delta_0\delta,\mathbf{t}} \to P$ függvény a következőképpen:

Ha $(x, t) \in D_{\delta_0,\delta,\mathbf{t}}$, akkor létezik olyan $Q_{\delta\mathbf{m}} \times [t_{i-1}, t_i)$, amelyre $(x, t) \in Q_{\delta\mathbf{m}} \times [t_{i-1}, t_i)$ minden $t < T$-nek, és (x, T)-re létezik olyan $Q_{\delta\mathbf{m}}$, amelyre $(x, T) \in Q_{\delta\mathbf{m}} \times [t_{I-1}, t_I]$. A $p(\delta\mathbf{m}, t_{i-1}) \in \mathcal{P}$-hez fixálva egy

$$p(\delta_{\mathbf{m}}, t_{i-1}) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m^{\mathbf{m},i} P_m$$

konvex kombinációt, minden $t \in [t_{im-1}, t_{im})$ intervallumon, amelyre $t_{im} - t_{im-1} > 0$, és $t_{im} \neq T$ esetén definiáljuk, hogy legyen

$$q(x, t) = P_m, \qquad \text{ha} \qquad (x, t) \in Q_{\delta\mathbf{m}} \times [t_{im-1}, t_{im}),$$

és

$$q(x, T) = P_M, \qquad \text{ha} \qquad (x, T) \in Q\delta_m.$$

A feltételeink szerint a (4.8) kezdetiérték-problémának az egész $(0, t)$-n létezik megoldása. Egy további megszorítást teszünk az x megoldásra, kapcsolatot teremtve a $q : D_{\delta_0,\delta,\mathbf{t}} \to \mathcal{P}$ konstrukciójában szereplő $\delta_0, \delta, \mathbf{t}$ és az x ε_0-sugarú környezete a $D_{\delta_0,\delta,\mathbf{t}}$ „fogazott" tartományban van. Ez az x megoldás és a $\delta_0, \delta, \mathbf{t}$, ε_0 közötti együttes feltétel. Tehát a 4.2. tétel első résznek a bizonyítását erre végezzük. Eszerint minden, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ számra létezik olyan $\bar{\delta} > 0$, amelyre minden $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\| \xi - \zeta \| < \bar{\delta}$-re és az első részben konstruált $v : (0, t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként konstansra, mely $\mathcal{U}$ csúcsaiból vette az értékeit, a (4.8) és a (4.15) megoldásainak az eltérése az egész $(0, t)$-n teljesíti, hogy $\| x(t) - z(t) \| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Most hasonlítsuk össze a (4.9) és a (4.15) kezdetiérték-problémák megoldásait, esetleg további kikötést téve a $\mathbf{t}$, δ_0, δ választására, mely az első részben szükséges feltételeknél is szigorúbb.

A szokásos módon kezdjük az összehasonlítást.

$$\| z(t) - y(t) \| \leq \| \zeta - \eta \| + \left\| \int_0^t \Big(A\left(p(z(\tau), \tau\right), \tau) z(\tau) - A\left(q(y(\tau), \tau)\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\| +$$
$$+ \left\| \int_0^t \Big(B\left(p(z(\tau), \tau\right), \tau) - B\left(q(y(\tau), \tau)\tau\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| \leq \| \xi - \eta \| +$$
$$+ \left\| \int_0^{t_{i-1}} \Big(A\left(p(z(\tau), \tau\right), \tau) z(\tau) - A\left(q(y(\tau), \tau)\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{i-1}}^{t} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau)\,,\tau\right) z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau)\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{0}^{t_{i-1}} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau)\,,\tau\right) - B\left(q(y(\tau),\tau)\tau\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{i-1}}^{t} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau)\,,\tau\right) - B\left(q(y(\tau),\tau)\tau\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\|,$$

minden $t \in [t_{i-1}, t_i)$ esetén. A $[t_{i-1}, t)$ „maradék” intervallumon mindkét tagot külön becsüljük. Az A-t, illetve B-t tartalmazó tagokat is egyenként becsüljük, felbontva a $[0, t_{i-1})$ intervallumot a $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \ldots, i-1$, intervallumok uniójára:

$$[0, t_{i-1}) = \bigcup_{j=1}^{i-1} [t_{j-1}, t_j).$$

$$\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau)\,,\tau\right) z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau)\,,\tau\right) z(\tau) - A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) \Big) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(y(\tau),\tau)\,,\tau\right) z(\tau) - A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) z(t_{j-1}) \Big) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(y(\tau),\tau)\,,\tau\right) z(t_{j-1}) - A\left(p(y(\tau),\tau), t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) \Big) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(y(\tau),\tau)\,, t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) - A\left(q(y(\tau),\tau), t_{j-1}\right) \Big) z(t_{j-1}) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(q(y(\tau),\tau)\,, t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) \Big) z(t_{j-1}) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(q(y(\tau),\tau)\,,\tau\right) z(t_{j-1}) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) \Big) d\tau \right\| +$$

$$+\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(q(y(\tau),\tau)\,,\tau\right) z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\|.$$

Ehhez hasonlóan bontjuk fel a B-t tartalmazó tagokat is:

$$\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau\right),\tau) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right)\Big) v(\tau)d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau\right),\tau) - B\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right)\Big) v(\tau)d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau\right),\tau) - B\left(p(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right)\Big) v(\tau)d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau\right),t_{j-1}) - B\left(q(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right)\Big) v(\tau)d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(q(y(\tau),\tau\right),t_{j-1}) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right)\Big) v(\tau)d\tau \right\|.$$

A maradék integrálok becslése:

$$\left\| \int_{t_{j-1}}^{t} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau\right),\tau)z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right)y(\tau)\Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau\right),\tau)z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right)z(\tau)\Big) d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(A\left(q(z(\tau),\tau\right),\tau)z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right)y(\tau)\Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| A\left(p(z(\tau),\tau\right),\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) \right\| \parallel z(\tau) \parallel d\tau +$$

$$+ \int_{t_{i-1}}^{t} \left\| A\left(q(y(\tau),\tau\right),\tau) \right\| \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau \leq$$

$$L_1 L_3 (t_i - t_{i-1})(|x| + \frac{\varepsilon}{2}) \int_{t_{i-1}}^{t} \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau + |A| \int_{t_{i-1}}^{t} \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau =$$

$$= \Big(L_1 L_3 (t_i - t_{i-1})(|x| + \frac{\varepsilon}{2}) + |A| \Big) \int_{t_{i-1}}^{t} \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau.$$

Másrészt

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau)\,,\tau\right) v(\tau) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) v(\tau) \Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel B\left(p(z(\tau),\tau)\,,\tau\right) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) \parallel v(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq L_2 L_3 |v| \int\limits_{t_{i-1}}^{t} \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau.$$

Az $\parallel z(\tau) - z(t_{j-1}) \parallel$-re egyszerű becslés adható az integrált differenciálegyenletből:

$$\parallel z(\tau) - z(t_{j-1}) \parallel \leq \int\limits_{t_{j-1}}^{t} \Big(\parallel A(p(z(\tau),\tau),\tau) \parallel \parallel z(\tau) \parallel + \parallel B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) \parallel \parallel v(\tau) \parallel \Big) d\tau \leq$$

$$\leq \left(|A| \left(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \right) + |B||v| \right) (t - t_{j-1})$$

Az A és a B egyenletesen folytonos, ezért minden $\bar{\bar{\varepsilon}} > 0$-hoz létezik olyan $\bar{\bar{\delta}} > 0$, amelyre

$$\parallel A(p,t) - A(p,t_{j-1}) \parallel < \bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad t - t_{j-1} < \bar{\bar{\delta}}, \quad \text{és}$$
$$\parallel B(p,t) - B(p,t_{j-1}) \parallel < \bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad t - t_{j-1} < \bar{\bar{\delta}}.$$

Az A-t tartalmazó tagok becslésének a negyedik, a B-t tartalmazó tagok becslésének a harmadik tagja kivételével egyszerű normabecslést alkalmazva kapjuk a következő egyenlőtlenségeket:

a)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) - A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) \Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\| A\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) - A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) \Big\| z(\tau) \parallel d\tau \leq$$

$$\leq L_1 L_3 \left(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau.$$

b)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) z(t) - A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) z(t_{j-1}) \Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \| A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) \| \| z(\tau) - z(t_{j-1}) \| \, d\tau \leq$$

$$\leq |A| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \| z(\tau) - z(t_{j-1}) \| \, d\tau \leq$$

$$\leq |A| \Big(|A|(|x| + \frac{\varepsilon}{2}) + |B||v| \Big) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} (\tau - t_{j-1}) d\tau \leq$$

$$\leq |A| \Big(|A| \Big(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \Big) + |B||v| \Big) (t_j - t_{j-1}) \bar{\bar{\delta}}.$$

c)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) - A\left(p(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) \Big) z(t_{j-1}) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \Big(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \Big) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \| A\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) - A\left(p(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) \| \, d\tau \leq$$

$$\leq \Big(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \Big) (t_j - t_{j-1}) \bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad t_j - t_{j-1} < \bar{\bar{\delta}}.$$

d)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(q(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) z(t_{j-1}) \Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \Big(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \Big) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \| A\left(q(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) - A\left(q(y(\tau),\tau),z(t)\right) \| \, d\tau \leq$$

$$\leq \Big(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \Big) (t_j - t_{j-1}) \bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad t_j - t_{j-1} < \bar{\bar{\delta}}.$$

e)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) z(t_{j-1}) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) \Big) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \| A\left(q(y(\tau),\tau),z(t)\right) \| \| z(t_{j-1}) - z(\tau) \| \, d\tau \leq$$

$$\leq |A| \Big(|A| \Big(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \Big) + |B| \, |v| \Big) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} (\tau - t_{j-1}) d\tau \leq$$

$$\leq |A| \Big(|A| \Big(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \Big) + |B| \, |v| \Big) (t_j - t_{j-1}) \bar{\bar{\delta}}.$$

f)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\| \le$$
$$\le \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) \parallel \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau \le$$
$$\le |A| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau.$$

g)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) - B\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| \le$$
$$\le |v| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) - B\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) \parallel d\tau \le$$
$$\le |v| L_2 L_3 \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel z(\tau) - y(\tau) \parallel d\tau.$$

h)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau),\tau\right) - B\left(p(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| \le$$
$$\le |v| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) - B\left(p(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) \parallel d\tau \le$$
$$\le |v|(t_j - t_{j-1})\bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad t_j - t_{j-1} < \bar{\bar{\delta}}.$$

Hasonlóan,

i)

$$\left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(q(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| \le$$
$$\le |v|(t_j - t_{j-1})\bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad t_j - t_{j-1} < \bar{\bar{\delta}}.$$

A negyedik A-t tartalmazó tag, és a harmadik B-t tartalmazó tag becslése hasonlóan történik, felhasználva a v és a q definícióját a $[t_{j-1}, t_j)$ intervallum tovább osztásával. Feltesszük, hogy a két szakaszonként konstans függvény definiálásakor már ugyanazt a $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_{I-1}, t_I)$ felosztást használjuk.

j)

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(y(\tau),\tau)t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right)\Big) z(t_{j-1}) d\tau \right\| = \\
&= \left\| \sum_{m=1}^{M} \left(\int_{t_{jm-1}}^{t_{jm}} A\left(p(y(\tau),\tau)t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) d\tau - \int_{t_{jm-1}}^{t_{jm}} A\left(q(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) \right) d\tau \right\| = \\
&= \left\| \sum_{m=1}^{M} \left(\int_{t_{jm-1}}^{t_{jm}} A\left(p(y(\tau),\tau)t_{j-1}\right) z(t_{j-1})) d\tau - \int_{t_{jm-1}}^{t_{jm}} A\left(P_m,t_{j-1}\right) d\tau \, z(t_{j-1}) \right) \right\| = \\
&= \left\| \sum_{m=1}^{M} \left(\int_{t_{jm-1}}^{t_{jm}} A\left(p(y(\tau),\tau)t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) d\tau - \left(t_i - t_{i-1}\right) \lambda_m^{i,\mathbf{t}} A(P_m,t_{j-1}) z(t_{j-1}) \right) \right\| = \\
&\left\| \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} A\left(p(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) d\tau - \left(t_i - t_{i-1}\right) A\left(\sum_{m=1}^{M} \lambda_{P_m}^{i,\mathbf{t}}, t_{i-1} \right) z(t_{j-1}) \right) \right\| = \\
&\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(y(\tau),\tau)t_{j-1}\right) z(t_{j-1}) - A\left(p(y(t_{j-1}),t_{j-1}),t_{j-1}\right) z(t_{j-1})\Big) d\tau \right\| \le \\
&\le \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \Big(A\left(p(y(\tau),\tau),t_{j-1}\right) - A\left(p(y(t_{j-1}),t_{j-1}),t_{j-1}\right)\Big) \right\| \; \| \, z(t_{j-1}) \, \| \; \Big\| \le \\
&\le \left(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \right) (t_j - t_{j-1}) \bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad t_j - t_{j-1} < \bar{\bar{\bar{\delta}}},
\end{aligned}
$$

az A egyenletes folytonossága következtében.

Hasonlóan járunk el a B-t tartalmazó harmadik tag becslésekor is. De ebben a tagban két szakaszonként konstans függvénnyel való approximáció is szerephez jut: a

$$
\begin{aligned}
&v : (0,t) \to \mathcal{U} \quad \text{és a} \\
&q : D_{\delta_0,\delta,\mathbf{t}} \to \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

approximáló függvények.

Legyen $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_I)$ a kiinduló felosztás, amelyet az A, B egyenletes folytonossága és az u szakaszonként egyenletes folytonossága következményeként adott $\varepsilon > 0$-hoz választhatunk. Ezekből kiindulva definiáljuk a v szakaszonként konstans függvényt az $\mathcal{U}$ konvex poliéder csúcsaiban felvett értékekkel. E célból osztjuk tovább a $[t_{i-1}, t_i)$ részintervallumot az

$$
u(t_{i-1}) = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l u_l, \quad \sum_{l=1}^{L} \lambda_l = 1, \quad \lambda_l \ge 0
$$

konvex kombinációnak megfelelően, a

$$
t_{il} = t_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \left(\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \right)
$$

osztópontokkal. Ekkor

$$v(t) = u_l, \quad \text{ha} \quad t \in [t_{il-1}, t_{il}), \quad \text{és} \quad v(T) = u_2.$$

Most a $[t_{il-1}, t_{il})$ intervallumot is tovább bontjuk.

Ha $(x,t) \in Q_{\delta m} \times [t_{il-1}, t_{il})$, akkor a

$$p(\delta_{m,t_{i-1}}) = \sum_{m=1}^{M} \mu_m^{\delta m} P_m, \sum_{m=1}^{M} \mu_m^{\delta m} = 1, \quad \mu_m^{\delta m} \geq 0$$

konvex kombinációinak megfelelően

$$t_{ilm} = t_{il-1} + (t_{il} - t_{il-1}) \left(\sum_{k=1}^{m-1} \mu_k^{\delta m} \right)$$

lesznek $[t_{il-1}, t_{il})$ osztópontjai. Ennek a felosztásnak megfelelően

$$q(x,t) = P_m, \quad \text{ha} \quad (x,t) \in Q_{\delta m} \times [t_{i-1}, t_i) \quad \text{és} \quad t \in [t_{ilm-1}, t_{ilm}),$$
$$q(x,T) = P_M, \quad \text{ha} \quad x \in Q_{\delta m}.$$

Ezek után a

k)

$$\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) - B\left(q(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{ilm-1}}^{t_{ilm}} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) - B\left(q(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{ilm-1}}^{t_{ilm}} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) v(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{ilm-1}}^{t_{ilm}} B\left(q(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{ilm-1}}^{t_{ilm}} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) v(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{ilm-1}}^{t_{ilm}} B\left(p_m, t_{i-1}\right) \Big) u_l \, d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(B\left(P(y(\tau),\tau), t_{i-1}\right) v(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^{L} (t_{il} - t_{il-1}) B \left(\sum_{m=1}^{M} \mu_m^{\delta m} p_m, t_{i-1} \right) \right) u_l \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(B\left(P(y(\tau),\tau),t_{i-1}\right) v(\tau) d\tau - B\left(p(y(t_{i-1}),t_{i-1}),t_{i-1}\right) \sum_{l=1}^{L} (t_{il} - t_{il-1}) \right) u_l \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(B\left(p(y(\tau),\tau),t_{i-1}\right) v(\tau) d\tau - B\left(p(y(t_{i-1}),t_{i-1}),t_{i-1}\right) \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(\tau) d\tau \right) \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(B\left(p(y(\tau),\tau),t_{i-1}\right) - B\left(p(y(t_{i-1}),t_{i-1}),t_{i-1}\right)\Big) v(\tau) d\tau \right\| \le$$

$$\le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\| B\left(p(y(\tau),\tau),t_{i-1}\right) - B\left(p(y(t_{i-1}),t_{i-1}),t_{i-1}\right) \parallel v(\tau) \parallel d\tau \right\| \le$$

$$\le L_2 |v| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \parallel p(y(\tau),\tau) - p(y(t_{i-1}),t_{i-1}) \parallel d\tau \le L_2 |v| \bar{\bar{\varepsilon}} (t_i - t_{i-1}),$$

ahol $\bar{\bar{\varepsilon}} > 0$-hoz létezik $\bar{\bar{\delta}} > 0$, hogy a p és az y egyenletes folytonossága következtében $t_i - t_{i-1} < \bar{\bar{\delta}}$ teljesülése esetén

$$p\left(y(\tau),\tau\right) - p\left(y(t_{i-1}),t_{i-1}\right) < \bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \text{ha} \quad \tau \in [t_{i-1}, t_i).$$

Ezek után összegezhetjük a betűkkel jelölt becsléseinket.

$$\begin{aligned}
&\parallel z(t) - y(t) \parallel \le \parallel \zeta - \eta \parallel + \\
&+ \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\| + \\
&+ \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| \int_{t_{i-1}}^{t} \Big(A\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) z(\tau) - A\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) y(\tau) \Big) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| \int_{t_{i-1}}^{t} \Big(B\left(p(z(\tau),\tau),\tau\right) - B\left(q(y(\tau),\tau),\tau\right) \Big) v(\tau) d\tau \right\| \le \\
&\le L_1 L_3 \left(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \parallel z(\tau) \overbrace{-}^{a)} y(\tau) \parallel d\tau + \\
&+ |A| \Big(|A| \Big(|x| \overbrace{+ \frac{\varepsilon}{2}}^{b)} \Big) + B|v| \Big) \bar{\bar{\delta}} \sum_{j=1}^{i-1} (t_j - t_{j-1}) + \left(|x| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \bar{\bar{\varepsilon}} \overbrace{\sum_{j=1}^{i-1}}^{c)} (t_j - t_{j-1}) +
\end{aligned}$$

$$+\Big(\overbrace{x+}^{d)}\frac{\varepsilon}{2}\Big)\bar{\bar{\varepsilon}}\sum_{j=1}^{i-1}(t_j-t_{j-1})+|A|\Big(|A|\left(|x|+\overbrace{\frac{\varepsilon}{2}}^{e)}\right)+|B|\,|v|\Big)\bar{\bar{\delta}}\sum_{j=1}^{i-1}(t_j-t_{j-1})+$$

$$+|A|\sum_{j=1}^{i-1}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\parallel z(\overbrace{\tau)-}^{f)}y(\tau)\parallel d\tau+L_2L_3|v|\sum_{j=1}^{i-1}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\parallel z(\overbrace{\tau)-}^{g)}y(\tau)\parallel d\tau+$$

$$+\overbrace{|v|}^{h)}\bar{\bar{\varepsilon}}\sum_{j=1}^{i-1}(t_j-t_{j-1})+|v|\bar{\bar{\varepsilon}}\sum_{j=1}^{i-1}(t_j\overbrace{-t_{j-1}}^{i)})+\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)\overbrace{\bar{\bar{\varepsilon}}\sum_{j=1}^{i-1}}^{j)}(t_j-t_{j-1})+$$

$$+\overbrace{L_2|v|}^{k)}\bar{\bar{\varepsilon}}\sum_{j=1}^{i-1}(t_j-t_{j-1})=\parallel\xi-\eta\parallel+$$

$$+\left(L_1L_3\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+L_2L_3|v|+|A|\right)\int\limits_0^{t_{i-1}}\parallel z(\tau)-y(\tau)\parallel d\tau+$$

$$+\left(L_1L_3\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+L_2L_3|v|+|A|\right)\int\limits_{t_{i-1}}^{t}\parallel z(\tau)-y(\tau)\parallel d\tau+$$

$$+2|A|\left(|A|\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+|B|\,|v|t_{i-1}\right)\bar{\bar{\delta}}+$$

$$+\left(3\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+2|v|+L_2|v|\right)t_{i-1}\bar{\bar{\varepsilon}}+L_2|v|t_{i-1}\bar{\bar{\varepsilon}}=$$

$$=\parallel\zeta-\eta\parallel+\left(L_1L_3\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+L_2L_3|v|+|A|\right)\int\limits_0^{t}\parallel z(\tau)-y(\tau)\parallel d\tau+$$

$$+2|A|\left(|A|\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+|B|\,|v|t_{i-1}\right)\bar{\bar{\delta}}+L_2|v|t_{i-1}\bar{\bar{\varepsilon}}+$$

$$+\left(3\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+2|v|+L_2|v|\right)t_{i-1}\bar{\bar{\varepsilon}}.$$

Jelöljük az $\mathcal{U}$ konvex poliéder csúcspontjai normájának a maximumát $|\mathcal{U}|$- val.

Vezessük be az

$$L=L_1L_3\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+L_2L_3|\mathcal{U}|+|A|,$$
$$K_1=2|A|\Big(A|\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+|B|\,|\mathcal{U}|T\Big)$$
$$K_2\left(3\left(|x|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+2|\mathcal{U}|+L_2|\mathcal{U}|\right)T$$
$$K_3=L_2|\mathcal{U}|T,$$

illetve a

$$\varphi(t)=\parallel z(t)-y(t)\parallel$$

jelöléseket. Ekkor a kapott egyenlőtlenségeket átírható a

$$\varphi(t)\leq\varphi(0)+L\int\limits_0^t\varphi(\tau)d\tau+K_1\bar{\bar{\delta}}+K_2\bar{\bar{\varepsilon}}+K_3\bar{\bar{\varepsilon}}$$

egyenlőséggé. Erre az eddigiekhez hasonlóan eljárva a Gronwall-Bellman -szerű egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\| z(t) - y(t) \| \leq \| \zeta - \eta \| \exp Lt + K_1 \bar{\bar{\bar{\delta}}} \exp Lt +$$

$$+ K_2 \bar{\bar{\varepsilon}} \exp Lt + K_3 \bar{\bar{\varepsilon}} \exp Lt.$$

Azt szeretnénk, hogy a jobboldal minden tagja legyen kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{8}$, így az összeg kisebb lesz, mint $\frac{\varepsilon}{2}$.

1. Az A, p és az y egyenletes folytonossága következtében a $t \mapsto A\left(p(y(t), t), t_{i-1}\right)$ is egyenletesen folytonos, ezért a δ-nak olyan kicsinek kell lenni, hogy teljesüljön a következő feltétel.

   Ha $t_i - t_{i-1} < \delta$, akkor

   $$\| A\big(p(y(t), t), t_{i-1}\big) - A\big(p(y(t_{i-1}), t_{i-1}), t_{i-1}\big) \| < \frac{\varepsilon}{8K_2} \exp(-2T)$$

   minden $t \in [t_{i-1}, t_i)$ esetén.

2. A p és y egyenletes folytonossága következtében a $t \mapsto p(y(t), t)$ is egyenletesen folytonos, ezért ha $t_i - t_{i-1} < \delta$ teljesülni kell, hogy

   $$\| p(y(t), t) - p(y(t_{i-1}), t_{i-1}) \| < \frac{\varepsilon}{8K_3} \exp(-LT),$$

   minden $t \in [t_{i-1}, t_i)$ esetén.

3. A további tagok kisebbek lesznek $\frac{\varepsilon}{8}$-nál, ha a δ-ra teljesülnek, hogy

   $$\delta < \frac{\varepsilon}{8} \exp(-LT) \quad \text{és} \quad \delta < \frac{\varepsilon}{8K_1} \exp(-LT).$$

Mindezek teljesülése esetén

$$\| z(t) - y(t) \| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{így}$$

$$\| x(t) - y(t) \| \leq \| x(t) - z(t) \| + \| z(t) - y(t) \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezzel a 4.2. approximációs tételt is igazoltam. ■

Vegyük észre, hogy annak ellenére, hogy az A és a B mátrixfüggvényektől megköveteltük a paramétertől való lineáris függést, minden, a simasági feltételeknek eleget tevő $(x, t) \mapsto A(x, t)$, $(x, t) \mapsto Bx(t)$ esetén LPV rendszerré alakíthatjuk az

$$\dot{x} = A(x, t)x + B(x, t)u$$

rendszert. Ehhez tekintsük az

$$A(x, t) = \left(a_{ij}(x, t)\right)_{i,j=1}^{n}, \; B(x, t) = \left(b_{ij}(x, t)\right)_{i=1,j=1}^{n,k_1}$$

mátrixokat. Az $a_{ij}(x, t)$ helyett írjuk be a p_{ij} paramétereket, a $b_{ij}(x, t)$ helyébe pedig a q_{ij} paramétereket. Ezzel definiáltuk az $A(p)$ és a $B(q)$ paraméter-változós mátrixokat, amelyek nyilvánvalóan lineárisak a p, q paraméterekben, ami nem más, mint a mátrix-összeadás linearitása. Ezzel az

$$\dot{x} = A(p)x + B(q)u$$

LPV rendszert kapjuk. A $p_{ij} = a_{ij}(x,t)$ és a $q_{ij} = b_{ij}(x,t)$ helyettesítéssel nyilván visszakapjuk az eredeti rendszert. Természetesen, nem sokat nyerünk ezzel az LPV-sítéssel, a rendszer ilyen általános körülmények között nem fog semmi érdekes tulajdonságot mutatni.

A konverteres példánk jól illusztrálja az approximációs tételeink lehetőségeit éppen a konkrét alkalmazások terén.

További rendszerelméleti vizsgálatok tekintetében is sokat ígérnek ezek a tételek, így a stabilitási, irányítási és megfigyelési vizsgálatokban, különösen a 4.2. tétel, ui. ott csak a $\mathcal{P}$ konvex poliéder csúcsaihoz rendelt állandó együtthatós lineáris rendszerek kapcsolgatásával közelíthetünk tetszőleges rendszertulajdonságot.

5. Approximáló rendszerek irányíthatósága

Az előző fejezet approximációs tételeit figyelembe véve visszatérek a 2. és 3. fejezetben tárgyalt rendszerek vizsgálatára.

Ezeknek az irányítási rendszerek vizsgálatának a célja, – legyen az műszaki, közgazdasági, biológiai, pl. populáció-dinamikai rendszer, – mindig az, hogy előkészítsen döntéseket, döntés sorozatokat (irányításokat) melyekkel úgy lehet befolyásolni az adott rendszert, hogy az stabilan működjön, megvalósítva a kívánt célt. Ennek érdekében fontos ún. rendszer-tulajdonságokat kell vizsgálni. Ezek legfontosabbika a rendszerek irányíthatósága, megfigyelhetősége. Ezen tulajdonságok részletes és pontos vizsgálatára szükségünk van akkor, amikor a rendszer optimális működésével kapcsolatos döntéseket meghozzuk.

A rendszerek pillanatnyi állapotának ismeretére támaszkodva hozzuk ezeket a döntéseket, amelyekre mérések eredményeinek kiértékelésével „megfigyelők" alkalmazásával juthatunk. A megfigyelők is csak bizonyos rendszertulajdonságok teljesülése esetén készíthetők. Ezek a tulajdonságok nevezetesen az irányíthatóság és a megfigyelhetőség a rendszerek belső tulajdonsága és nem a pillanatnyi állapot függvénye, a rendszer modellek paramétereinek az ismeretében állapítható meg. Az első eredményeket a rendszertulajdonságok fontosságát illetően, L. Sz. Pontryagin [3] és R.E. Kalman [6] érték el, illetve ismerték fel lényegében egyidőben, egymástól függetlenül. Érdekes módon az eredményeket (n-dimenziós állapottér esetében) egymással duális formában fogalmazták meg a következő alakban:

$$\mathrm{rang}(\mathrm{B}, \mathrm{AB}, \dots, \mathrm{A}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{B}) = \mathrm{n}, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{rang}(\mathrm{C}^*, \mathrm{A}^*\mathrm{C}^*, \dots, \mathrm{A}^{*\mathrm{n}-1}\mathrm{C}^*) = \mathrm{n}, \tag{5.2}$$

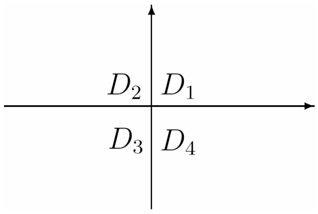
formában. Ezek közül az (5.1) az

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned} \tag{5.3}$$

megfigyelt irányítási rendszer irányíthatósági, míg a (5.2) a megfigyelhetőségi rangfeltétel. Látható, hogy csak az A, B, C rendszermátrixok, paraméterek szerepelnek benne sem az x állapot, sem az u irányítás, sem a kezdő, illetve végállapot, nem játszik semmiféle szerepet benne. Ezeket a klasszikus fogalmakat, az irányíthatóságot, illetve a megfigyelhetőséget kívánom megvizsgálni a kapcsolási rendszerekre, illetve az LPV rendszerekre, amelyeket az előző fejezetben éppen kapcsolási rendszerekkel approximáltam. Nekünk az approximációs tételek lesznek azok a technikai eszközeink, amelyeket használni fogunk ezeknek a rendszerfogalmaknak a vizsgálatára.

Szeretnék rámutatni, hogy mennyire óvatosan kell eljárnunk, hogy nem olyan nyilvánvaló, hogy az ide-oda kapcsolt rendszerek jó rendszertulajdonságai automatikusan átöröklődnek. Ugyan a stabilitási vizsgálatok nem a fő célja az értekezésemnek, de mégis igen jól rámutat arra, hogy a kapcsolási rendszerek felmutathatnak anomáliákat nem kellően gondos tárgyalásmód esetén.

Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-nek a D_1, D_2, D_3, D_4 kvadránsokra való felbontását az ábra szerint:



ahol $D_1 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2); \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 > 0\}$,

$$D_2 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2); \quad x_1 < 0, \quad x_2 \geq 0\}\,,$$

$$D_3 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2); \quad x_1 \leq 0, \quad x_2 < 0\}\,,$$

$$D_4 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2); \quad x_1 > 0, \quad x_2 \leq 0\}\,.$$

Látható, hogy ezzel az $\mathbb{R}^2$-nek az $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{0}\} \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ páronként diszjunkt felbontását kapjuk. Definiáljuk most a $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, illetve $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ állapot-változós paraméter-függvényeket a következőképpen:

$$p_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \mathbf{x} = 0, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{x} \in D_1 \cup D_3, \\ 1, & \text{ha} \quad \mathbf{x} \in D_2 \cup D_4, \end{cases}$$

$$p_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \mathbf{x} = 0, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{x} \in D_2 \cup D_4, \\ 1, & \text{ha} \quad \mathbf{x} \in D_1 \cup D_3. \end{cases}$$

Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[p_1 \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

illetve az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[p_1 \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

rendszereket. Így az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

és az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

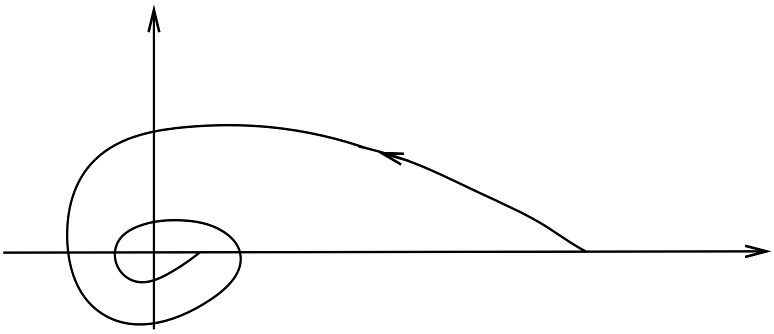
állandóegyütthatós rendszerek kétféle kapcsolási stratégiával adódó rendszerről van szó. A (5.6) fázisterét

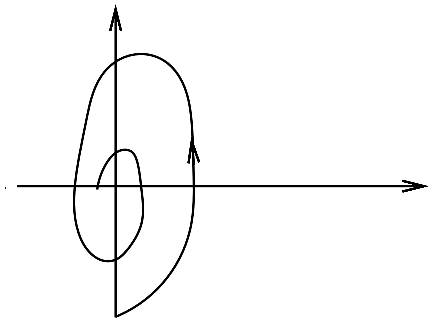
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 0.5\sin t \end{pmatrix} e^{-t}$$

míg a (5.7) fázisterét, az

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0.5\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} e^{-t}$$

jellegű spirálok alkotják melyeket rendre a következő ábrákon láthatjuk:





Mindkét rendszer aszimptotikusan stabilis, míg (5.4) kapcsolt rendszer aszimptotikusan stabilis, addig az (5.5) kapcsolt rendszer instabilis. Az approximációs tételeink következményeként tudjuk, hogy az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} == \left[p_1 \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

LPV rendszerek a $\dot{p}_1 \in [0,1]$, $p_2 \in [0,1]$ négyzeten, mint paramétertartományon szakaszonként approximálható a $\mathcal{P} = [0,1] \times [0,1]$ négyzet csúcsaihoz tartozó állandóegyütthatós rendszerekkel. Láttuk, hogy a stabilitás nem öröklődik a (5.8) típusú rendszerre $u = 0$ kontroll esetén. Most az irányíthatósággal kapcsolatos tulajdonságokat vizsgáljuk a (5.8) rendszer esetére. A sima időfüggő paraméterek esetén tanulmányozhatjuk a rendszer lényegét; ezt lehet átvinni az állapotváltozós paraméterek esetére, majd a kapcsolási rendszerekre is.

A szokásos definíció szerint teljesen irányítható egy irányított rendszer, ha bármely kezdőállapotból bármely végállapotba átvihető a rendszer az irányítás alkalmas megválasztásával. Majd a differenciálegyenletek elméletéből ismert integrálási eljárások követésével jellemezhető az irányíthatóság a rendszer paraméterei segítségével, azaz az irányíthatóság a rendszer belső tulajdonsága, amelyben az állapot fogalma nem játszik szerepet, sem az integrálási eljárás mibenléte. Pommaret [43] eredeti módon interpretálja az irányíthatóságot a gyakorlati irányítási szakember szemszögéből. A rendszer műszerei méréseket végeznek, amelyek a rendszer és a mérőműszerek dinamikájának megfelelően az irányításoktól és azok deriváltjaitól függnek. Akkor irányítható a rendszer, ha tetszőleges mérés esetén mért függvényre igaz, hogy csak az irányítás segítségével előállítható. Ez nyilvánvalóan nincs így, ha egy mérés kielégíthet egy olyan differenciálegyenletet, amelyik független az irányításoktól, azaz ilyenkor a rendszer nem irányítható. Lineáris rendszerekre ebből az irányítási fogalomból levezethetők a szokásos rangfeltételek. De ez a megközelítés nagymértékben általánosítható parciális differenciálegyenletekkel leírható, nemlineáris rendszerekre is, a megfelelő matematikai apparátus segítségével.

Az irányíthatósági kérdések tárgyalása olyan eszközökkel történik, amely simaságot feltételez a rendszert definiáló függvényekről, míg a vizsgálataink fő célját képező kapcsolási rendszerek esetén ez nem teljesül. Természetesnek tűnő gondolat, hogy sima rendszerek irányíthatóságából következtessünk a „közeli" kapcsolási rendszerek irányíthatóságára. Erre úgy tűnik, hogy van is eszközünk , hiszen az előző fejezetben az approximációs tételeink éppen sima (sőt, általánosabb) rendszereket approximálnak kapcsolási rendszerekkel. A most következő részben az LPV rendszerek irányíthatóságát tesszük vizsgálatunk tárgyává az approximációs tételek és más klasszikus eredmények együttes alkalmazásával. R.E. Kalman [6] az időtől függő struktúramátrixok esetére vizsgálta az

$$\dot{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \tag{5.9}$$

rendszerek irányíthatóságát, elérhetőségét. A $\Phi(t,\tau)$ alapmátrix segítségével, definiálta az irányíthatósági és az elérhetőségi Gram-féle mátrixokat: a $C[0,T]$, $R[0,T]$ mátrixokat, ahol $[0,T]$-n definiáltuk a rendszert:

$$C[0,T] = \int_0^T \Phi[T,\tau]B(\tau)B(\tau)^*\Phi[T,\tau]d\tau \tag{5.10}$$

$$R[0,T] = \int_0^T \Phi[0,\tau]B(\tau)B(\tau)^*\Phi(0,\tau)^*d\tau \tag{5.11}$$

A $C[0,T]$ és az $R[0,T]$ invertálhatósága ekvivalensek, ugyanis

$$R[0,T] = \Phi(T,0)^{-1}C[0,T]\left(\Phi(T,0)^*\right)^*.$$

Itt a $\Phi(t,\tau)$ a rendszer alapmátrixa, amely megoldása a

$$\dot{\Phi}(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau), \quad \Phi(\tau,T) = I$$

mátrix differenciálegyenletek. Kalman azt bizonyította, hogy a (5.9) rendszer irányíthatósága ekvivalens a $C(T,0)$, míg az elérhetősége az $R(T,0)$ mátrix invertálhatóságával, ezért a rendszer irányíthatósága és az elérhetősége egymással is ekvivalensek. Hasznos lesz számunkra, ha tekintjük a $[0,t] \subset [0,T]$ részintervallumokra leszűkített rendszer irányíthatósági Gram-féle mátrixát is

$$C(t) = \int_0^t \Phi(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^*\Phi(t,\tau)^*d\tau. \tag{5.12}$$

A $t := T$ helyettesítéssel éppen a (5.9) rendszer irányíthatósági mátrixát kapjuk. Az időt tekintsük paraméternek, amely szerint deriválunk a paraméteres integrálok deriválási szabálya szerint. Így bizonyítható, hogy a $C(t)$ mátrix függvény megoldása az un. mátrix Riccati-féle egyenletnek:

$$\dot{C}(t) = A(t)C(t) + C(t)A(t)^* + B(t)B(t)^*, \quad C(0) = 0 \tag{5.13}$$

Az így kapott egyenlet lineáris inhomogén mátrix differenciálegyenlet a $C(t)$-re nézve.

Tekintsük most az

$$\dot{x} = A(\mathbf{p},t)x + B(\mathbf{p},t)\mathbf{u} \tag{5.14}$$

LPV rendszert a $\mathbf{p}$ időfüggő paraméterrel.

Ezzel az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mathbf{p}(t),t)\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{p}(t),t)\mathbf{u}(t) \tag{5.15}$$

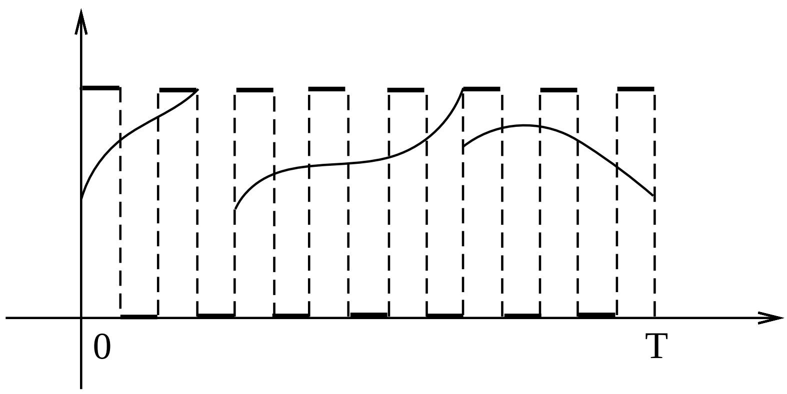
LTV rendszert kapjuk.

5.1. Tétel. (Az approximáló kapcsolási rendszerek irányíthatósága.): *Tegyük fel, hogy az A, B folytonosak és a t változóban egyenletes globális Lipschitz-féle feltételt elégítenek ki. A $\mathbf{p}$ paraméter időfüggéséről feltesszük, hogy szakaszonként folytonos (így tetszőleges szomszédos szakadási pont között egyenletesen is folytonos). Így a* (5.15) *rendszerre teljesülnek az 4.1.4.1. approximációs tétel feltétele. Az approximációs tétel által garantált approximáló*

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{A}(t)\widehat{x}(t) + \widehat{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{5.16}$$

kapcsolási rendszerben szereplő ε_0, δ_0 paraméterek, melyek az approximáció finomságát jellemzik, úgy is megválaszthatók, hogy minden ennél finomabb approximáció esetén (5.16) *is irányítható lesz, ha a* (5.15) *rendszer irányítható volt.*

Ez azt jelenti, hogy az 4.1. approximációs tétel által leírt approximációra nézve, az irányítható rendszereket közelítő rendszerek is irányíthatóak. Nehéz lenne a rendszerek objektumában topológiát bevezetve arról beszélni, hogy erre nézve az irányítható rendszer elég kis környezetében levő rendszerek is irányíthatók, ezért beszélünk az approximációs tétel szerinti közelség terminusában. Ennek a megjegyzésnek fokozottan nagy a jelentősége, amikor a 4.2. approximációs tétel szerinti approximáló kapcsolási rendszerekről bizonyítjuk azok irányíthatóságát, ui. abban a $\mathbf{p}$ paraméterfüggvény approximációját szakaszonként konstans, csak egy konvex poliéder csúcsaiból vett értékekkel approximáljuk, ami pontonként nem approximálja jól a $\mathbf{p}$ szakaszonként folytonos $\mathbf{p}(t)$ függvényt, lásd a következő ábrát.



Tekintsük a (5.15) LTV rendszerhez rendelt Riccati-féle differenciálegyenletet, mint egy új irányítási differenciálegyenletet az $\widehat{\mathcal{U}} = \{1\}$ egy pontból álló konvex poliéder esetén az $\hat{u}(t) = 1$ konstans irányítással, mint ilyen $\hat{u}$ ez az egyetlen:

$$\dot{C}(t) = A(\mathbf{p}(t), t)C(t) + C(t)A(\mathbf{p}(t), t)^* + B(\mathbf{p}(t), t)B(\mathbf{p}(t), t)^*\hat{\mathbf{u}}(t),\ C(0) = 0. \tag{5.17}$$

Ez nyilvánvalóan nem más, mint a (5.15) rendszerhez rendelt Riccati-féle mátrix egyenlet, amely csak formálisan lesz irányítási rendszer, hogy így közvetlenül alkalmazható legyen az 1. approximációs tétel. Eszerint minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan δ-nál finomabb a p paraméter szakadási pontjait is tartalmazó $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{I-1}, t_I),\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{I-1} < t_I = T$ felosztása az

$$\widehat{A}(t) = A(\mathbf{p}(t_{i-1}), t_{i-1}),\ \widehat{B}(t) = (\mathbf{p}(t_{i-1}), t_{i-1}),\ t \in [t_{i-1}, t_i),$$
$$\widehat{A}(T) = A(\mathbf{p}(t_{I-1}), t_{I-1}), \widehat{B}(T) = B(\mathbf{p}(t_{I-1}), t_{I-1})$$

segítségével definiált

$$\dot{\widehat{C}}(t) = \widehat{A}(t)\widehat{C}(t) + \widehat{C}(t)\widehat{A}(t)^*(t)^* + \widehat{B}(t)\widehat{B}(t)^*\hat{\mathbf{u}}(t)$$
$$\widehat{C}(0) = 0$$

rendszerre teljesül, hogy

$$\parallel C(t) - \widehat{C}(t) \parallel < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.18}$$

Most azt vizsgáljuk, hogy hogyan kell megválasztani az ε számot, hogy a (5.18) teljesülése esetén a $C(T)$ invertálhatósága maga után vonja a $\widehat{C}(t)$ invertálhatóságát, azaz a (5.15) LTV rendszer irányíthatósága maga után vonja az approximáló (5.16) kapcsolási rendszer irányíthatóságát is. Ehhez tekintsük a következő elemi azonosságot:

$$\widehat{C}(t)^{-1} = C(t)^{-1} - C(t)^{-1}\Big(\widehat{C}(t) - C(t)\Big)\widehat{C}(t)^{-1},$$

amiből normabecsléssel azt kapjuk, hogy

$$\parallel \widehat{C}(t) \parallel^{-1} \leq \parallel C(t)^{-1} \parallel + \parallel C(t)^{-1} \parallel \cdot \parallel \widehat{C}(t) - C(t) \parallel \cdot \parallel \widehat{C}(t)^{-1} \parallel .$$

Ezért, feltéve, hogy

$$\parallel \widehat{C}(t) - C(t) \parallel < \frac{1}{2 \parallel C(t)^{-1} \parallel}, \tag{5.19}$$

akkor

$$\parallel \widehat{C}(t)^{-1} \parallel < 2 \parallel C(t)^{-1} \parallel .$$

tehát a $\widehat{C}(t)^{-1}$ norma végessége miatt a $\widehat{C}(t)$ invertálható. Tehát a tételünk az $\varepsilon = \dfrac{1}{2 \parallel C(T)^{-1} \parallel}$ választással adódik, az 5.1. approximációs tétel értelmében.

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}$ paramétertartomány egy konvex poliéder, az $A(\mathbf{p}, t)$ és a $B(\mathbf{p}, t)$ függvények lineárisak a p változóban. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}$ poliéder $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_M$ csúcsaira a $t \mapsto A(\mathbf{p}_m, t)$ függvények szakaszonként folytonosak. Ebből már következik, hogy az $A(\mathbf{p}, t)$, $B(\mathbf{p}, t)$ függvények teljesítik a 4.2.4.2. approximációs tétel feltételeit. Ezt úgy láthatjuk be, hogy felhasználva a paraméter tartomány konvexitását, léteznek minden $\mathbf{p}(t) \in \mathcal{P}$ esetén olyan $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_M(t)$ számok, melyekre

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(t)\mathbf{p}_m$$

a poliéder csúcsok konvex kombinációja.

Látható, hogy amennyiben $p(t)$ szakaszonként folytonos, akkor a $\lambda_m(t)$ függvények is szakaszonként folytonosak, amelyeknek a szakadási pontjai legfeljebb a $p(t)$ szakadási pontjai lehetnek. Ebből, az

$$A(\mathbf{p}(t), t) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(t)A(\mathbf{p}_m, t) \tag{5.20}$$

előállítás adódik, amiből látható, hogy az $A(\mathbf{p}, t)$, $B(\mathbf{p}, t)$ teljesítik a 4.2.4.2. approximációs tételben megkövetelt feltételeket minden szakaszonként folytonos $\mathbf{p}(t)$ paraméter függvény esetén. Ezután az előkészítés után megfogalmazhatjuk a második tételünket.

5.2. Tétel. (Az approximáló kapcsolási rendszerek irányíthatósága.): *Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}$ paraméter tartomány konvex poliéder a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_M$ csúcspontokkal. Az $A(\mathbf{p}, t)$ és a $B(\mathbf{p})$ függvények legyenek lineárisak a p változójukban, és a $t \mapsto A(\mathbf{p}_m, t)$, függvények szakaszonként folytonosak. Az időváltozós $t \mapsto \mathbf{p}(t)$ paraméterfüggvényről is feltesszük, hogy szakaszonként folytonos. Adott $\varepsilon_0 > 0$-hoz található olyan $\delta_0 > 0$, hogy minden δ_0-nál finomabb, az $A(p_m, t)$ szakadási pontjait is tartalmazó $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_I)$ felosztáshoz a 4.2.4.2. approximációs tétellel konstruált $\widehat{A}(t), \widehat{B}(t)$ mátrixok, amelyek szakaszonként rendre az $A(p_m, t_{i-1})$, illetve $B(p_m)$ értéket veszik fel, és olyan kapcsolási rendszert definiál,*

$$\dot{x}(t) = \widehat{A}(t)x(t) + \widehat{B}(t)u(t),$$

amelyhez rendelt

$$\dot{\widehat{C}}(t) = \widehat{A}(t)\widehat{C}(t) + \widehat{C}(t)\widehat{A}(t)^* + \widehat{B}(t)\widehat{B}(t)^*$$

mátrix Riccati egyenlet megoldása invertálható lesz a $\widehat{C}(T)$ irányítási Gram-féle mátrix, ha a $C^*(T)$ is invertálható volt, amiből következik, hogy ha a (5.15) *LTV rendszer irányítható, akkor a* (5.16) *kapcsolási rendszer is irányítható lesz.*

Megjegyzés.

Vegyük észre, hogy a B mátrixfüggvény a tételben független az időtől. Ennek az az oka, hogy közvetlenül akarjuk alkalmazni a 4.2. approximációs tételünket, amelyet akkor alkalmazhatunk, ha az irányítások mátrixa is lineáris a $\mathbf{p}$ paraméterben. A BB^* pedig $\mathbf{p}$-ben a feltételeink szerint bilineáris. Ezért két lépésre bontva a $C(t)^{-1}, \widehat{C}(t)^{-1}$, távolságnak a becslését, amivel „lineáris"-nak tekinthetők a Riccati egyenletből definiált rendszerek, de ehhez az kell, technikailag, hogy az $\bigcup\limits_{t \in (0,t)} B(\mathcal{P}, t)$ halmaz is konvex poliéder legyen ugyanazokkal a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_M$ csúcsokkal. Ez a $B(\mathbf{p}, t)$ t-től való függetlensége esetén teljesül. Az approximációs tételt a $B(\mathbf{p}, t)$-nek a p-ben való bilinearitása esetére is be lehetne bizonyítani, hogy a mátrix Riccati egyenletre is lehessen alkalmazni, de ezzel még komplikáltabbá tennénk a már amúgyis elég hosszú bizonyítást. Ilyen megszorítás esetén pedig két lépésben alkalmazva a 4.2. approximációs tételt és az abban leírt konstrukciót már egyszerűen igazolható a 5.2. Tétel.

Bizonyítás. Tekintsük a Riccati-féle differenciál-egyenlet újra fogalmazásával kapott irányítási rendszert.

$$\dot{C}(t) = A(\mathbf{p}(t), t)C(t) + C(t)A(\mathbf{p}(t), t)^* + B(\mathbf{p}(t))u(t), C(0) = 0, \tag{5.21}$$

ahol $u(t) = B(p(t))^* \in B^*(\mathcal{P})$, és $B^*(\mathcal{P})$ olyan konvex poliéder, melynek a csúcsai a $\{B^*(\mathbf{p}_m) : m = 1, 2, \ldots, M\}$ halmaznak részhalmaza. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $0 < \delta \leq \delta_1$ esetén teljesül, hogy minden olyan

$$\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_{I-1}, t_I),\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{I-1} < t_I = T$$

felosztásra, mely tartalmazza az $A(p_m, t), p(t)$ függvények szakadási pontjait is, a 4.2.4.2. approximációs tétel konstrukciójával megadott $\widehat{\mathbf{p}}(t)$ függvényre, mely szakaszonként a $\mathcal{P}$ csúcsaiból veszi az értékeit, a $\mathbb{V}(t) = B(\widehat{\mathbf{p}}(t))^* \in B^*(\mathcal{P})$ irányításra, amely ugyanúgy szakaszonként a $B^*(\mathcal{P})$ csúcsaiból, azaz a $\{B^*(\mathbf{p}_m)\}$ halmazból veszi az értékeit, és a

$$\dot{\check{C}}(t) = A(\mathbf{p}(t), t)\check{C}(t) + \check{C}(t)A(\mathbf{p}(t), t)^* + B(\mathbf{p}(t))\mathbb{V}(t),\ \check{C}(0) = 0 \tag{5.22}$$

$\check{C}(t)$ megoldására teljesül, hogy

$$\| C(t) - \check{C}(t) \| < \varepsilon. \tag{5.23}$$

Tekintsük az így konstruált $\widehat{\mathbf{p}}(t)$ függvény segítségével megadható, szakaszonként definiált $\widehat{A}(t) = A(\widehat{\mathbf{p}}(t), t_{i-1})$, ha $t \in [t_{i-1}, t_1)$, illetve $\widehat{A}(T) = A(\widehat{\mathbf{p}}(t_{I-1}), t_{I-1})$ függvényt és a

$$\dot{\widehat{C}}(t) = \widehat{A}(t)\widehat{C}(t) + \widehat{C}(t)\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t)\mathbb{V}(t), \quad \widehat{C}(0) = 0 \tag{5.24}$$

irányítási rendszert, ugyanazzal a $\mathbb{V}(t)$ irányítással. A 4.2.4.2. approximációs tétel 2. résznek bizonyításából azt kapjuk esetünkben, hogy az $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta_2 > 0$, amelyre minden $0 < \delta < \delta_2$ esetén egy tetszőleges δ-nál finomabb $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_I)$ felosztáson konstruált $\hat{p}(t)$ esetén teljesül, hogy

$$\| \check{C}(t) - \widehat{C}(t) \| < \varepsilon. \tag{5.25}$$

Válasszuk most a $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ számot. Erre teljesül, hogy minden $0 < \delta < \delta_0$ esetén tetszőleges δ-nál finomabb $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_I)$ felosztáson konstruált $\hat{p}(t)$ szakaszonként konstans, a $\{P_m\}$ halmazbeli értékeket felvevő approximáció esetén mind (5.23), mind (5.25), teljesül, így $\| C(t) - \widehat{C}(t) \| < 2\varepsilon$. Ezek után, ha (5.21) irányítható, akkor az irányítási Gram-féle mátrix $C(0, t)$ invertálható. Most legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, amelyre

$$\varepsilon < \frac{1}{4 \| C(T)^{-1} \|}$$

teljesül, erre fennáll, hogy $\| \widehat{C}(T)^{-1} \| < 2 \| C(T)^{-1} \|$, amiből következik, hogy a (5.24) irányítási Gram-féle mátrix is invertálható, tehát a (5.15) irányíthatóságából következik a (5.16) irányíthatósága. Ezzel a 5.2. Tételt bebizonyítottam. ■

A B függvényről feltettük, hogy csak a p paramétertől függ. De bebizonyítható a 5.2. Tétel eredménye akkor is, ha a B p-től és t-től is függ, a 5.2. approximációs tétel hosszadalmas becslési technikájának az alkalmazásával, sőt, maga az approximációs tétel is kiterjeszthető arra az esetre, amikor a $p \mapsto B(p, t)$ bilineáris függvény. Ezzel a kiterjesztett approximációs tétellel a 5.2. Tétel egyszerűbben bebizonyítható.

A továbbiakban szeretnénk a Riccati egyenlet segítségével kapott irányíthatósági feltétel és a Kalman típusú mátrix rangfeltételek kapcsolatára rámutatni. Ehhez vizsgáljuk az

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{p})\mathbf{x} + B(\mathbf{p})\mathbf{u} \tag{5.26}$$

LPV rendszer irányíthatóságát abban az esetben, amikor az $A(\mathbf{p})$ és a $B(\mathbf{p})$ $\mathbf{p}$-ben lineáris, a $\mathbf{p}$ pedig hozzátartozik a $\mathcal{P}$ konvex poliéderhez, melynek a csúcspontjai $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_M$ vektorok. Ekkor egy időváltozós p paraméter-függvény felírható a $\mathcal{P}$ konvexitása folytán

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(t)\mathbf{p}_m, \quad \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(t) = 1, \quad 0 \leq \lambda_m(t) \tag{5.27}$$

konvex kombinációját. Ráadásul, ha p szakaszonként folytonos ez az előállítás olyan $\lambda_m(t)$ függvényekkel is megkapható, hogy ezek is szakaszonként folytonosak. Az LPV rendszerünket (5.27) segítségével átírhatjuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(t) \left(A(\mathbf{p}_m)\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{p}_m)\mathbf{u}(t) \right) \tag{5.28}$$

alakú LTV rendszerré.

Az $A(p_1), A(p_2), \ldots, A(p_M)$ által generált asszociatív algebrát előállíthatjuk a következő konstrukcióval. Tekintsük az $A(p_1), A(p_2), \ldots, A(p_M)$ által generált Lie-féle algebrát: azaz az $L \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ a legkisebb lineáris altér, amelyik zárt az $[X, Y] = XY - YX$ un. Lie-féle szorzásra nézve is. Tekintsük ennek egy lineáris bázisát:

$$A_1, A_2, \ldots, A_K \in L \subset \mathbb{R}^{n\times n},$$

azaz minden $A \in L$ lineáris kombinációja az $A_1, A_2, \ldots, A_K$ mátrixoknak, a Lie-féle szorzást pedig kifejezhetjük a bázis elemeken a következőképpen:

$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^{K} \Gamma_{ij}^k A_k.$$

A Lie szorzás bilinearitásából nyilvánvalóan kifejezhető tetszőleges $A, \widehat{A} \in L$ mátrix Lie féle szorzata is az $A_1, A_2, \ldots, A_K$ lineáris kombinációjaként.

5.1. Állítás. *Az $A(p_1), A(p_2), \ldots, A(p_M)$ által generált asszociatív algebra az*

$$\{A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_K^{n_K} : 0 \le n_1 \le n-1, 0 \le n_2 \le n-1, \ldots, 0 \le n_K \le n-1\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mátrixok lineáris kombinációiként állítható elő.

Bizonyítás. Azonnal meg kell jegyeznem, hogy általában ezek a szorzatok nem lesznek az asszociatív algebra bázisai. Legyen α az $A(p_1), A(p_2), \ldots, A(p_M)$ által generált asszociatív algebra. Ezért ezek lineáris kombinációi is elemei az α algebrának, továbbá az

$$[A(p_{m_1}), A(p_{m_2})] = A(p_{m_1})A(p_{m_2}) - A(p_{m_2})A(p_{m_1})$$

Lie szorzat eleme az α-nak. Így a generált L Lie algebra is altere, az α asszociatív algebra lineáris altere. Innen, az $A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_K^{n_k} \in \alpha$. Bebizonyítható (az $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$-ra vonatkozó indukcióval), hogy az ilyen alakú elemek szorzata is az ilyen alakúak lineáris kombinációjaként írható fel. A Cayley-Hamilton-tételből következően feltételezhető, hogy az n_k kitevők kisebbek, mint n .

Véve egy szorzatot, $\big(A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K}\big)\big(A_1^{\hat{n}_1} \ldots A_K^{\hat{n}_K}\big)$-t, ez az $A_1^{m_1} \ldots A_K^{m_K}$ alakúak lineáris kombinációiként írható fel. Ui, ha van két szomszédos szorzat, amelynek az alakja $A_{k_1}^{n_{k_1}} A_{k_2}^{n_{k_2}}$, és $k_1 > k_2$, akkor

$$\begin{aligned}
A_{k_1}^{n_{k_1}} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_2}^{n_{k_2}-1} &= \sum_{k=1}^{K} \Gamma_{k_1k_2}^k A_{k_1}^{n_{k_1}-1} A_k A_{k_2}^{n_{k_2}-1} + A_{k_1}^{n_{k_1}-1} A_{k_2} A_{k_1} A_{k_2}^{n_{k_2}-1} = \\
&= \sum_{k=1}^{K} \Gamma_{k_1k_2}^k A_{k_1}^{n_{k_1}-1} A_k A_{k_2}^{n_{k_2}-1} + \sum_{\hat{k}_1=1}^{K}\sum_{\hat{k}_2=1}^{K} \Gamma_{k_1k_2}^{\hat{k}_1} A_{k_1}^{n_{k_1}-2} A_{\hat{k}_1} A_{\hat{k}_2} A_{k_2}^{n_{k_2}-2} + \\
&+ A_{k_1}^{n_{k_1}-2} A_{k_2} (A_{k_1} A_{k_2}) A_{k_1} A_{k_2}^{n_{k_2}-2} = \sum (\text{tagok hossza} < n_{k_1} + n_{k_2}) + \\
&+ \sum_{k=1}^{K} A_{k_1}^{n_{k_1}-2} A_2 \Gamma_{k_1k_2}^k A_k A_{k_1} A_{k_2}^{n_{k_2}-2} + A_{k_1}^{n_{k_1}-2} A_{k_2}^2 A_{k_1}^2 A_{k_2}^{n_{k_1}-2} + \ldots \\
&\ldots + \sum (\text{tagok hossza} < n_{k_1} + n_{k_2}) + A_{k_2}^{n_{k_2}} A_{k_1}^{n_{k_1}}.
\end{aligned}$$

Így a tagokban lévő a szorzatok hosszára vonatkozó indukcióval

$$(A_1^{n_1}\dots A_K^{n_k})\left(A_1^{\hat{n}_1}\dots A_K^{\hat{n}_k}\right)=\sum_{\mathbf{n}}\alpha^{\check{\mathbf{n}}}_{\mathbf{n},\hat{\mathbf{n}}}A_1^{\check{n}_1}A_2^{\check{n}_2}\dots A_K^{\check{n}},$$

ahol a $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\dots,n_K)$, $\hat{\mathbf{n}}=(\hat{n}_1,\hat{n}_2,\dots,\hat{n}_K)$, $\check{\mathbf{n}}=(\check{n}_1,\check{n}_2,\dots,\check{n}_K)$. Tehát az $A_1^{n_1}\dots A_K^{n_k}$ alakú elemek lineáris kombinációja az α asszociatív algebra.

A $B(p_1),B(p_2),\dots,B(p_M)$ elemek által generált vektortér bázisa legyen $B_1,B_2,\dots,B_L$. Így a (5.28) rendszert átírhatjuk az $A_1,A_2,\dots,A_K$, $B_1B_2,\dots,B_L$ bázisokban az

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\left(\sum_{k=1}^{K}a_k(t)A_K\right)\mathbf{x}(t)+\sum_{l=1}^{L}b_l(t)B_l\mathbf{u}(t),\ x(0)=0, \tag{5.29}$$

alakba. Ez egy ismert alak régebbi, az LTV rendszerek irányíthatóságára vonatkozó gondolatmenetekből ([4]). ∎

A (5.29) alapmátrixa, amely megkerülhetetlen szerepet játszik a Riccati mátrix egyenlet megoldásában, (a J. Wei és E. Norman [4]) előállítható mátrixexponenciálisok szorzataként, mintegy általánosítása a közismert ténynek, hogy az

$$\dot{x}=Ax,\quad x(\tau)=I$$

mátrixmegoldása az $\exp(t-\tau)A$ mátrix függvény.

$$\dot{x}(t)=\left(\sum_{k=1}^{K}a_k(t)A_k\right)x(t),\ x(\tau)=I \tag{5.30}$$

megoldása, azaz, a $\Phi(t,\tau)$ alapmátrix előállítható az exponenciális szorzat alakban

$$\Phi(t,\tau)=\exp(g_1(t,\tau)A_1)\exp(g_2(t,\tau)A_2)\dots\exp(g_k(t,\tau)A_K),$$

ahol maguk a $\mathbf{g}(t,\tau)=(g_1(t,\tau),\dots,g_k(t,\tau))$ függvények is kielégítenek az $A_1,A_2,\dots,A_K$ Lie-féle bázishoz és az $\mathbf{a}(t)=(a_1(t),a_2(t),\dots,a_K(t))$ együtthatókhoz rendelt differenciálegyenletet (lásd pl. [44] F. Szigeti, J. Bokor, A. Edelmayer). Így, (5.29) megoldása, a

$$\mathbf{x}(t)=\int_0^t\Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t\exp(g_1(t,\tau)A_1)\dots\exp(g_K(t,\tau)A_K)\left(\sum_{l=1}^{L}b_l(\tau)B_l\right)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

mindvégig az

$$K_C=|m\left(\dots,A_1^{n_1}A_2^{n_2}\dots A_K^{n_k}B_l,\dots,A_1^{n-1}A_2^{n-1}\dots A_K^{n-1}B_l\dots\right) \tag{5.31}$$

altérben marad. Ismert tény a mátrixexponenciálisról, sőt a mátrixok analitikus függvényeiről is, hogy azok mindig az $I,A_k,A_k^2,\dots,A_k^{n-1}$ lineáris kombinációi lesznek, így pl.

$$\exp(g_k(t,\tau)A_k)=\sum_{i=0}^{n-1}p_{k,i}\left(g_k(t,\tau)\right)A_k^i,$$

ahol a p_i függvények un. kvázi polinomok, alkalmas exponenciálisok, és trigonomertikusok, is szerepelhetnek a polinomokban. Ezek az A_k sajátértékei által megadható függvények (Hermite-Lagrange interpolációval kaphatók meg). Így az integrál alatti függvényekből látható, hogy

$$\begin{aligned}&\exp(g_1(t,\tau)A_1)\dots\exp(g_k(t,\tau)A_k)B(\tau)u(\tau)=\\&=\left(\sum_{i_1=0}^{n-1}p_{1,i_1}\left(g_1(t,\tau)\right)A_1^{i_1}\right)\dots\left(\sum_{i_K=0}^{n-1}p_{K,i_K}\left(g_K(t,\tau)\right)A_K^{i_k}\right)\left(\sum_{l=1}^{L}b_l(\tau)B_l\right)\left(\sum_m u_m(\tau)\mathbf{e}_m\right)\\&=\sum_m\sum_{\mathbf{i}}\sum_l p_{1,i_1}\left(g_1(t,\tau)\right)\dots p_{K,i_k}\left(g_K(t,\tau)\right)b_l(\tau)u_m(\tau)A_1^{i_K}\dots A_K^{i_K}B_l\mathbf{e}_m\in K_C.\end{aligned}$$

Így az integrálja is, azaz $x(t)\in K_C$, minden $t\in(0,t)$ esetén. Ez azt jelenti, hogy a 0-ból a $(0,t)$ intervallumon elérhető állapotok halmaza, azaz, az elérhetőségi altér, a K_C Kalman-féle elérhetőségi altér része, vagy az egész Kalman-féle altér lesz-e, erre a válasz sokkal nehezebb. Az F. Szigeti, J. Bokor és A. Edelmayer [44] erre keresve a választ a következő eredményt kapták. Bevezetve az un. nem teljes Kalman-féle altér fogalmát, azaz azt, hogy, ha

$$\widehat{A}_1,\widehat{A}_2,\dots,\widehat{A}_{\widehat{K}}\in V(A_1,A_2,\dots,A_K),$$

az $A_1,A_2,\dots,A_K$ Lie-algebra-bázis által generált vektortérnek, és $\widehat{K}<K$, úgy, hogy a szorzatok által kifeszített vektortér

$$V\left\{\dots,\widehat{A}_1^{n_1}\widehat{A}_2^{n_1}\dots\widehat{A}_{\widehat{K}}^{n_{\widehat{K}}},\ 0\le n_1<n,\dots,0\le n_{\widehat{K}}<n\right\}$$

nem feltétlenül asszociatív algebra, melyet $\widehat{A}_1,\dots,\widehat{A}_{\widehat{K}}$ generálnak, továbbá

$$\widehat{B}_1,\widehat{B}_2,\dots,\widehat{B}_{\widehat{L}}\in V(B_1,B_2,\dots,B_L),\quad \widehat{L}\le L,$$

akkor az

$$Im\left\{\widehat{A}_1^{n_1}\widehat{A}_2^{n_2}\dots\widehat{A}_{\widehat{K}}^{n_{\widehat{K}}}B_l,\ 0\le\mathbf{0}<\mathbf{n},\quad l=1,2,\dots,\widehat{L}\right\}\tag{5.32}$$

egy nem teljes Kalman-féle altér.

Az említett cikkben arra adnak választ a szerzők, hogy az együttható-függvényeknek, az $a_1,a_2,\dots,a_K$ és a $b_1,b_2,\dots,b_L$ függvényeknek milyen algebrai differenciál-egyenletet kell kielégíteniük, hogy egy adott, (5.32), esetleg nem teljes Kalman-féle altérhez tartozzanak a (5.29) irányítási differenciál-egyenlet megoldásai, azaz az irányíthatósági altér a (5.32) altérben legyen. Ezek az algebrai differenciálegyenletek, ha valamelyik teljesül, azt eredményezik, hogy a (5.31) Kalman-féle mátrixra vonatkozó rangfeltétel nem elégséges. Azt mondhatjuk régebbi szóhasználat alapján, hogy az együtthatók nem teljesítik a perzisztens gerjesztés feltételét, ui. rájuk teljesül, hogy K_C Kalman-féle altér valamely, esetleg nem teljes Kalman-féle altérhez (5.32) rendelt algebrai differenciálegyenlet fennáll, vagyis az együtthatók perzisztensen gerjesztik a rendszert, ha ezek az algebrai differenciál-egyenletek nem állnak fenn. Vegyük észre, hogy a perzisztens gerjesztést geometriai nyelvén is megtudtuk fogalmazni. Ha a valószínűségszámítás, speciálisan a sztochasztikus folyamatok nyelvezetével a fehér zajjal való gerjesztéshez hasonlíthatjuk, akkor azt mondhatjuk, hogy az együtthatók a rendszerünkre nézve „fehér"-ek, amikor perzisztensen gerjesztenek, és színesek, amikor nem. Ez azt jelenti, hogy véges sok paraméter, a rendszer által generált Lie-algebra $A_1,A_2,\dots,A_K$ bázisa és a $B_1,B_2,\dots,B_L$ vektortér bázisa határozzák meg azokat a feltételeket, a tiltott algebrai differenciál-egyenleteket, melyek nem teljesülése kell ahhoz, hogy az együtthatók „fehér"-ek legyenek. Ezt a szóhasználatot a szemléletessé tétel érdekében mi is követhetjük.

A továbbiakban ezt a problémát én is vizsgálom, de súlyos differenciál-algebrai eszközök helyett csak lineáris algebrát használva. Nézzük a példánkban szereplő (5.8) rendszernél alkalmazott módszert. Legyen $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, nullától különböző vektor. Ekkor deriváljuk a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorral definiált mérőt: (lásd Pommeret [43])

$$
\begin{aligned}
z &= \mathbf{c}^*\mathbf{x} \\
\dot{z} &= (\mathbf{c}^*\mathbf{x})^* = \sum_{k=1}^{K} a_k \mathbf{c}^* A_K \mathbf{x} + \sum_{l=1}^{L} b_l \mathbf{c}^* B_l \mathbf{u} \\
\ddot{z} &= \sum_{k_1}\sum_{k_2} a_{k_1} a_{k_2} \mathbf{c}^* A_{k_1} A_{k_2} \mathbf{x} + \sum_{k} \dot{a}_k \mathbf{c}^* A_k \mathbf{x} + \sum_{k}\sum_{l} \dot{a}_k b_l \mathbf{c}^* A_k b_l \mathbf{u} + \\
&+ \sum_{l} \dot{b}_l \mathbf{c}^* B_l \mathbf{u} + \sum_{l} b_l \mathbf{c}^* B_l \dot{\mathbf{u}} = \\
&= \sum_{k} \left(\dot{a}_k + \sum_{k_1<k_2} a_{k_1} a_{k_2}, \Gamma^k_{k_2 k_1} \right) \mathbf{c}^* A_k \mathbf{x} + \sum_{k} a_k^2 \mathbf{c}^* A_k^2 \mathbf{x} + \sum_{k_1<k_2} 2 a_{k_1} a_{k_2} \mathbf{c}^* A_{k_1} A_{k_2} \mathbf{x} + \\
&+ \sum_{l} \left(\sum_{k} a_k b_l \mathbf{c}^* A_k + \dot{b} \mathbf{c}^* \right) B_l \mathbf{u} + \sum_{l} b_l \mathbf{c}^* B_l \dot{\mathbf{u}}.
\end{aligned}
$$

Rekurzióval belátható, hogy

$$
\begin{aligned}
z^{(i)} = &\sum_{0 \le n_k < n-1} p_{\mathbf{0},\mathbf{i}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots) \mathbf{c}^* A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_k^{n_k} \mathbf{x} + \\
+ &\sum_{j=0}^{i-1} \sum_{l} \sum_{0 \le n_k < n} Q^i_{l,\mathbf{0},\mathbf{j}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots) \mathbf{c}^* A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_K^{n_k} B_l \mathbf{u}^{(j)}.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

A rekurzió bizonyításához felhasználhatjuk a Lie szorzásból, hogy

$$
[A_{k_1}, A_{k_2}] = A_{k_1} A_{k_2} - A_{k_2} A_{k_1} = \sum_{k} \Gamma^k_{k_1,k_2} A_k,
$$

majd esetleg a Cayley-Hamilton tételt, ha valamely A_k bázis elemének hatványa $n-1$ fölé nőne.

A rekurzió kezdő értékei a $\dot{z}$-ra adódó értékből

$$
\begin{aligned}
&P_{e_k,1}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots) = a_k, \quad \text{ahol} \quad e_k = (0 \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k, \\
&Q^1_{l,\mathbf{0},0}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots) = b_l.
\end{aligned}
$$

$$
P_{\mathbf{0},\mathbf{i+1}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots) = \frac{d}{dt} P_{\mathbf{0},\mathbf{i}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots) + \sum_{\hat{\mathbf{n}}} \sum_{k} \gamma^{\mathbf{0}}_{\hat{\mathbf{n}},k} a_k P_{\hat{\mathbf{n}},i}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots)
$$

Itt a $\gamma^{\mathbf{0}}_{\hat{\mathbf{n}},k}$ együtthatók az $A_1^{\hat{\mathbf{n}}_1} A_2^{\hat{\mathbf{n}}_2}, \ldots, A_K^{\hat{\mathbf{n}}_k} A_k$ előállításából adódnak:

$$
A_1^{\hat{\mathbf{0}}_1} A_2^{\hat{\mathbf{0}}_2}, \ldots, A_K^{\hat{\mathbf{0}}_k} A_k = \sum_{\hat{\mathbf{n}},\mathbf{u}} \gamma^{\mathbf{0}}_{\hat{\mathbf{n}},k} A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_k^{n_k}. \tag{5.34}
$$

$$Q^{i+1}_{l,\mathbf{n},\mathbf{n}}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots) = \frac{d}{dt}Q^{i}_{l,\mathbf{n},\mathbf{n}}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots),$$

$$Q^{i+1}_{l,\mathbf{n},j}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots) =$$

$$= \frac{d}{dt}Q^{i}_{l,\mathbf{n},j}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots) + Q^{i}_{l,\mathbf{n},j-1}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots),$$

$$Q^{i+1}_{l,\mathbf{n},i}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots) = Q^{i}_{l,\mathbf{n},i-1}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots).$$

Például, $Q^{i}_{l,\mathbf{n},i-1}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots) = \ldots = Q^{1}_{l,\mathbf{n},\mathbf{n}}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots \mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots) = b_l$

A bizonyítás a (5.33) deriválásaiból a (5.34)-ből, és a vázolt módon azonnal belátható.

Tekintsük most a (5.33) előállítást az $i = 0, 1, \ldots, I$ számokra, ha $I \geq n^K - 1$. Ekkor ezeket az egyenleteket egy lineáris egyenletrendszernek tekintve, a lexikografikusan elrendezett

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x}, \mathbf{c}^*A_1\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{c}^*A_1^{n-1}\mathbf{x}, \mathbf{c}^*A_2\mathbf{x}, \mathbf{c}^*A_1A_2\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{c}^*A_1^{n-1}\ldots A_K^{n-1}\mathbf{x}$$

ismeretlenekre, amelyből egy n^K-dimenziós vektort formálunk, majd az együtthatóiból egy $I \times n^K$ típusú mátrixot, melynek az elemei a (5.33) egyenleteiből kapott $P_{\mathbf{n},i}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)$ együtthatói lesznek az ismeretleneink rendezésének és a növekvő i deriváltrendnek megfelelően. Jelölje $\mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)$ az így kapott mátrixot. Az $\mathbb{R}^{I+1}$ tér i-edik egységvektorát jelöljük e_i-vel, a lexikografikusan elrendezett $\mathbb{R}^{n^K}$ tér $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n^K)$-adik egységvektorát $f_{\mathbf{0}}$-nel. Ezzel a lineáris egyenletrendszerünket átírhatjuk a következő alakba:

$$\sum_i e_i z^{(i)} = \mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)\sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}\mathbf{c}^*A_1^{n_1}A_2^{n_2}\ldots A_K^{n_K}\mathbf{x}+$$
$$\sum_{j=0}^{I-1}\left[\sum_l\sum_{\mathbf{n}}\left(\sum_{i=j}^{I}Q^{i}_{l,\mathbf{n},j}(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots,\mathbf{b},\dot{\mathbf{b}},\ldots)e_i\right)\mathbf{c}^*A_1^{n_1\cdots}A_K^{n_K}B_l\right]\mathbf{u}^{(j)}. \tag{5.35}$$

Tekintsük azt az esetet, amikor a $\mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)$ és a $\sum_{\mathbf{0}} f_{\mathbf{n}}\mathbf{c}^*A_1^{n_1},\ldots,A_K^{n_K}$ mátrixok teljes rangúak. Ekkor a (5.35)-et szorozzuk be előbb a

$$\det\left(\mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)^*\mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)\right)\left(\mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)^*\mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)\right)^{-1}\mathbb{P}_I(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots)^*$$

mátrixszal, majd a

$$\det\left[\left(\sum_{\mathbf{n}} f_n\mathbf{c}^*A_1^{n_1}\ldots A_K^{n_K}\right)^*\left(\sum_{\mathbf{n}} f_n\mathbf{c}^*A_1^{n_1}\ldots A_K^{n_K}\right)\right]$$
$$\left[\left(\sum_{\mathbf{n}} f_n\mathbf{c}^*A_1^{n_1}\ldots A_K^{n_K}\right)^*\left(\sum_{\mathbf{n}} f_n\mathbf{c}^*A_1^{n_1}\ldots A_K^{n_K}\right)\right]\left(\sum_{\mathbf{n}} f_n c^*A_1^{n_1}\ldots A_K^{n_K}\right)^*$$

mátrixszal. A determinánsokkal való beszorzásnak csak az a jelentősége, hogy az $\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}},\ldots$ együtthatóknak polinomiális kifejezései legyenek a kapott egyenletben az együtthatók. A jobboldalon az $\mathbf{x}$ állapotnak a

$$\det\left[\mathbb{P}_I(a,\dot{a},\ldots)^*\mathbb{P}_I(a,\dot{a},\ldots)\right]\det\left(\sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}c^*A_1^{n_1}\ldots A_K^{n_K}\right)^*\left(\sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}c^*A_1^{n_1}\ldots A_K^{n_K}\right) \tag{5.36}$$

szorzatát kapjuk. Így a kapott egyenletet $\mathbf{c}^*$-gal beszorozva a $z = \mathbf{c}^*\mathbf{x}$-nek kapjuk a (5.36) alatti tényezővel való szorzatát, amely az $\mathbf{a}\dot{\mathbf{a}},\ldots$ és a $\mathbf{c}$ a polinomjaiból áll. Ezért ezt a baloldalra átvive, a z mérésének és a deriváltjainak az $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots$ és a $\mathbf{c}$ polinomjai lesznek az együtthatói, azaz, $\sum_{i=0}^{I} \mathcal{P}_i(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{c}) z^{(i)}$ alakú. A jobboldalon viszont, a (5.36) alatt tényezővel való szorzás nem változtat az irányítást tartalmazó tagok struktúráján, ezért egy polinom-együtthatós

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{I} \mathcal{P}_i(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{c}) z^{(i)} = \\
&= \sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} \sum_{i} Q_{\mathbf{n},l,i}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) \mathbf{c}^* A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l \mathbf{u}^{(i)}
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

egyenletet kapunk a z mérő és a deriváltjai és az $\mathbf{u}$ irányítás és a deriváltjai között. Vegyük észre, hogy ezzel elimináltuk az $\mathbf{x}$ állapotot.

Az irányíthatóságnak az általánosított Kalman-féle rangfeltétel szükséges feltétele, ezért teljesül, hogy a következő mátrix invertálható:

$$
\sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_K^{n_K} B_l B_l^* A_K^{*n_K} \ldots A_2^{*n_2} A_1^{*n_1}
$$

A (5.37) formulába helyettesítsük be az $u^{(i)}$ helyébe a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i} Q_{\mathbf{n},l,i}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) u^{(i)} = \\
&= B_l^* A_K^{*n_K} \ldots A_1^{*n_1} \left(A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l B_l^* A_K^{*n_K} \ldots A_1^{*n_1}\right)^{-1} \frac{\mathbf{c}}{\| \mathbf{c} \|^2} \sum_{j=0}^{I} \mathcal{P}_j(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{c})^{(j)} z^{(j)}
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

egyenletből adódó értéket. Ha ez teljesíthető, azonnal látszik, hogy a z mérésre adódó kívánalmat az u irányítással el lehet érni, azaz a rendszer irányítható.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} \mathbf{c}^* A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l \left(\sum_{i} Q_{\mathbf{n},l,i}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) u^{(i)} \right) = \\
&= \sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} \mathbf{c}^* A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l B_l^* A^{n_K} \ldots A_1^{*n_1} \left(\sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l B_l^* A_K^{*n_K} \ldots A_1^{*n_1} \right)^{-1} \\
&\quad \frac{\mathbf{c}}{\| \mathbf{c} \|^2} \sum_{j=0}^{I} \mathcal{P}_j(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{c}) z^j = \mathbf{c}^* \sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} \left(A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l B_l^* A_K^{*n_K} A_1^{*n_1}\right) \\
&\quad \left(\sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l B_l^* A_K^{*n_K} \ldots A_1^{*n_1} \right)^{-1} \frac{\mathbf{c}}{\| \mathbf{c} \|^2} \sum_{j=0}^{I} \mathcal{P}_j(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{c}) z^j = \\
&\quad = \frac{\mathbf{c}^* \mathbf{c}}{\| \mathbf{c} \|^2} \sum_{j=1}^{I} \mathcal{P}_j(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{c}) z^{(j)}
\end{aligned}
$$

azaz teljesül (5.37). A (5.38) megoldhatóságának az a feltétele, hogy a

$$
\left(\sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} Q_{\mathbf{n},l,j}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) Q_{\mathbf{0},\mathbf{l},\mathbf{j}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) \right)_{i,j=0}^{I-1}
$$

mátrix legyen invertálható. Ez ekvivalens azzal, hogy a

$$
\det \left(\sum_{\mathbf{u}} \sum_{l} Q_{\mathbf{n},l,j}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) Q_{n,l,i}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) \right) \neq 0 \tag{5.39}
$$

teljesüljön.

A (5.39) a (5.29) irányítási rendszerre vonatkozó gerjesztési feltétel. Ennek nem teljesülése az együtthatókra, ill. azok deriváltjaira, valamint $\mathbf{c}$ nem 0 $\mathbb{R}^n$-beli vektorokra vonatkozó, polinomiális egyenlet. A $\mathbf{c}$ konstans vektor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ koordinátáit egyszerű algoritmussal eliminálhatjuk. Tekintsük a c_1-ben legnagyobb fokú tago(ka)t:

$$D = \det(\ldots) = c_1^k D_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \widehat{\mathbf{c}}) + D_2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}), \tag{5.40}$$

ahol $\widehat{\mathbf{c}} = (0, c_2, c_3, \ldots, c_n)$, D_2 pedig c_1-ben k-nál alacsonyabb fokú. Deriváljuk a D-t

$$\begin{aligned} \dot{D} = c_1^k \frac{d}{dt} D_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \widehat{\mathbf{c}}) + \frac{d}{dt} D_2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{c}) \\ \dot{D} D_1 - D \frac{d}{dt} D_1 = \frac{d}{dt}(D_2) D_1 - D_2 \frac{d}{dt} D_1, \end{aligned} \tag{5.41}$$

ez már c_1-ben k-nál alacsonyabb fokú. Ezt ismételjük, addig, amíg a kapott polinom már nem függ c_1-től. Ezután folytatjuk a bemutatott algoritmust a c_2-re, majd a c_3-ra, és így tovább. Így végül, kapunk csak az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ együtthatókat, és azok deriváltjait tartalmazó

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots) = 0 \tag{5.42}$$

algebrai differenciálegyenletet, amely annak a feltétele, hogy az együtthatók nem „fehérek”, vagyis perzisztensen gerjesztők a (5.29) irányítási rendszerre vonatkozóan.

Ezek után megfogalmazható a következő tétel.

5.3. Tétel. *Ha a* (5.29) *irányítási rendszerre teljesül az*

$$Im\,\{\ldots, A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_K^{n_K} B_l, \ldots\} = \mathbb{R}^n$$

rangfeltétel, és az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *időfüggő együtthatókra teljesül a*

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots) \neq 0$$

gerjesztési feltétel, ahol $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots)$ *a* (5.42)*-beli differenciálpolinom, akkor a* (5.29) *irányítható.*

A fentiekben feltettük a $det\,(\mathbb{P}_I(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots)^* \mathcal{P}_I(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots))$ nem nulla voltát, azaz a mátrix invertálhatóságát. Ha ez nem teljesülne, akkor még egyszerűbb a dolgunk, ugyanis a $\mathcal{P}_I(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots)^* \mathcal{P}_I(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots)$ szimmetrikus, így a képterére merőleges a magtere, amiből a mátrix elemeiből kiszámítható a képteret annulláló, magtérre képező mátrix az $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \ldots$ polinomjaiból, amellyel beszorozva az egyenletet eliminálhatjuk az x állapotokat. Ugyanilyen érveléssel tekinthető az az eset is, amikor a $\sum_{\mathbf{n}} \sum_{l} A_1^{n_1} \ldots A_K^{n_K} B_l B_l^* A_K^{*n_K} \ldots A_1^{*n_1}$ mátrix nem invertálható, akkor is van olyan az A_K és B_l mátrixok elemeiből kiszámolható, a képteret annulláló mátrix, mely eliminálja az x állapotokat az egyenletből. A folytatás ugyanaz, mint amit a tétel bizonyításakor alkalmaztunk.

Tekintsük most a (5.26) LPV rendszert a p-ben lineáris $B(\mathbf{p})$ és $A(\mathbf{p})$ mátrixokkal, amelyre a $\mathcal{P}$ paraméter tartomány konvex poliéder a $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_M$ csúcsokkal. Ekkor, szakaszonként folytonos $x \mapsto p(x)$ állapotfüggő paraméterekre a (5.26) LPV irányítási rendszer felírható az

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(\mathbf{x}) A(\mathbf{p}_m) \mathbf{x} + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(\mathbf{x}) B(\mathbf{p}_m) \mathbf{u} \tag{5.43}$$

alakban. Elvégezve ugyanazt a báziskonstrukciót az $A(\mathbf{p}_m)$ és a $B(\mathbf{p}_m)$, $m = 1, 2, \ldots, M$, mátrixokkal, mint az időfüggő paraméteres esetben, a (5.29)-tel analóg

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{K} a_k(x) A_k x + \sum_{l=1}^{L} b_l(x) B_l u \tag{5.44}$$

nemlineáris irányítási rendszert kapjuk. A nemlineáris irányítási rendszerek elérhetőségi altere általában nem lineáris altér, hanem valamilyen felület. Így kevés előnynek látszik az (5.44) lineáris strukturáltsága. Végig követve a lineáris időváltozós esetben alkalmazott eljárást az (5.44) rendszerre is be lehet bizonyítani, hogy az általánosított Kalman-féle irányítási altér K_c, (5.31) tartalmazza az (5.44) irányítási rendszer elérhetőségi felületét. Innen pl. azonnal adódik, hogy az általánosított Kalman-féle rangfeltétel az elérhetőségnek szükséges feltétele. Lássunk egy példát. amikor az elérhetőségi altér nem lineáris altér. Tekintsük a 0-tól különböző pontból, pl. az $(1, 0, 0)^*$ pontból való elérhetőséget. Nyilván ezt változó transzformációval $(0, 0, 0)^*$-ba lehetne vinni, ehhez elég lenne az $x_1 \longleftrightarrow x_1 - 1 = \bar{x}_1$ új koordinátát bevezetni. Ez alig módosít az egyenleten:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ -x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_1 & x_3 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Kiszámítható, hogy bármilyen $\mathbf{u}$ irányításra az $\| \mathbf{x}(t) \| = \| \mathbf{x}(0) \| = \| (1, 0, 0)^* \| = 1$, azaz, a trajektóriák az egységgömbön mozognak: valóban,

$$\frac{d}{dt} \| x(t) \|^2 = 2\mathbf{x}^* \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ -x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^* \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_1 & x_3 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0,$$

azaz $\| x(t) \|^2$ konstans, így $\| x(t) \| = 1$. Azt is bemutatjuk, hogy a $z = c^* x$ mérőket hogyan kell deriválni az állapotfüggő paraméterek esetén. Egy lépést végzek csak el, ebből már látszik a processzus hasonlósága.

$$\begin{aligned}
z &= \mathbf{c}^* \mathbf{x}, \\
\dot{z} &= \sum_{k=1}^{K} a_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}^* A_k x + \sum_{l=1}^{L} b_l(\mathbf{x}) \mathbf{c}^* B_l \mathbf{u}, \\
\ddot{z} &= \sum_k a(\mathbf{x})^2 \mathbf{c}^* A_k^2 \mathbf{x} + \sum_{k_1 < k_2} 2 a_{k_1}(\mathbf{x}) a_{k_2}(\mathbf{x}) \mathbf{c}^* A_{k_1} A_{k_2} \mathbf{x} + \\
&+ \sum_{k_1} \sum_{k_2} a_{k_2}(\mathbf{x}) a'_{k_1}(\mathbf{x}) (A_{k_2} \mathbf{x}) \mathbf{c}^* A_{k_1} \mathbf{x} + \\
&+ \sum_{k_1} \sum_{k_1 < k_2} a_{k_1}(\mathbf{x}) a_{k_2}(\mathbf{x}) \Gamma^k_{k_1 k_2} \mathbf{c}^* A_k \mathbf{x} + \\
&+ \sum_k \sum_l b_l(\mathbf{x}) \mathbf{c}^* A_k \mathbf{x}\, a'_k(\mathbf{x}) (B_l \mathbf{u}) + \sum_k \sum_l a_k(\mathbf{x}) b_l(\mathbf{x}) c^* A_k B_l \mathbf{u} + \\
&+ \sum_k \sum_l a_k(\mathbf{x}) b'_l(\mathbf{x}) (A_k \mathbf{x}) \mathbf{c}^* B_l \mathbf{u} + \\
&+ \sum_{l_1} \sum_{l_2} b_{l_2}(\mathbf{x}) b'_l(\mathbf{x}) (B_{l_2} \mathbf{u}) \mathbf{c}^* B_{l_i} \mathbf{u} + \sum_l b_l(\mathbf{x}) \mathbf{c}^* B_l \dot{\mathbf{u}}.
\end{aligned}$$

Láthatóan, itt is $\mathbf{c}A_k^2\mathbf{x}$, $\mathbf{c}^*A_{k_1}A_{k_2}\mathbf{x}, \mathbf{c}^*A_k\mathbf{x}$ stb. tagokat kapunk, persze olyan együtthatókkal, amelyek állapotváltozósak, így $a'_k(\mathbf{x}) = (\partial_{x_1}a_k(\mathbf{x}), \partial_{x_2}a_k(\mathbf{x}), \ldots, \partial_{x_n}a_k(\mathbf{x}))$, $b'_l(\mathbf{x}) = (\partial_{x_1}b_l(\mathbf{x}), \partial_{x_2}b_l(\mathbf{x}), \ldots, \partial_{x_n}b_l(\mathbf{x}))$.

Így az időváltozós esethez hasonlóan lehet érvelni. Ekkor a gerjesztési feltétel egy parciális differenciálegyenlet, de ez azt garantálja csak, hogy az elérhetőségi felület generálja a Kalman alteret, de nem azonosak.

Most kapcsoljuk össze a sima rendszerekre kapott irányíthatósági eredményeinket a kapcsolási rendszerekkel való approximálhatósággal.

Láttuk, az approximációs tételek szerint minden szakaszonként folytonos és Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő rendszerek tetszőlegesen approximálhatók kapcsolási rendszerekkel. Azt is megmutattam, hogy ha egy simasági feltételeknek is elegettevő rendszer irányítható, akkor az alkalmas finomsággal approximáló kapcsolási rendszer irányítható lesz. Továbbá azt is bizonyítottam, hogy a Kalman-féle általánosított rangfeltétel szükséges feltétele az irányíthatóságnak, ez igaz a sima és az approximáló kapcsolási rendszerekre is. A sima rendszerekre, ha az együtthatók teljesítik az un. perzisztens gerjesztés feltételét, akkor a rangfeltétel elégséges is az irányíthatóságra. Ha egy kapcsolási rendszer esetén a Kalman-féle általánosított rangfeltétel teljesül, akkor persze az approximált sima rendszerre is teljesül, és a sima rendszer együtthatói perzisztensen gerjesztik a rendszert, akkor elég finom approximáció esetén a sima gerjesztési feltétel perzisztens gerjesztési feltétel lesz a kapcsolt rendszerre is. Sajnos csak az approximációs tétel közvetítésével tudunk gerjesztési feltételt megadni a kapcsolt rendszerre, mert az approximáció nem teszi lehetővé egy pl. differenciálegyenletek segítségével megfogalmazható gerjesztési feltétel megadását.

Még mutatok egy példát, amely további bizonyíték arra, hogy az állapotváltozós paraméterek esetén egy LPV rendszert approximáló kapcsolási rendszerek irányíthatósága nem elég ahhoz, hogy az approximált rendszer irányítható legyen:

Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_3 \\ -p_1 & 0 & p_2 \\ -p_3 & -p_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ -p_1 & p_3 \\ 0 & -p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{5.45}$$

LPV-rendszert. Jelöljük a struktúramátrixokat rendre a $A(p)$-vel és $B(p)$-vel. Először azt vizsgáljuk meg, hogy fix $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ paraméterek esetén (5.45) mikor lesz irányítható, elérhető. Ehhez az kell, hogy bármely $z = a^T x$ mérés megfigyelhető a $a \neq 0$ esetén teljesítse, hogy nem elégíthet ki u-tól független differenciálegyenletet. (Lásd, Pommaret [43]). Az $A(p)$ mátrix a Cayley-Hamilton tétel szerint megoldása egy harmadfokú polinomnak, hogy ezt megkapjuk számoljuk ki az $A(p)$ hatványait.

$$A(p)^2 = \begin{pmatrix} -(p_1 + p_3^2) & -p_2p_3 & p_1p_2 \\ -p_2p_3 & -(p_1^2 + p_2^2) & -p_1p_3 \\ p_1p_2 & -p_1p_3 & -(p_2^2 + p_3^2) \end{pmatrix},$$

$$A(p)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -p_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) & -p_3(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\ p_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) & 0 & -p_2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\ p_3(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) & p_2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)A(p),$$

azaz

$$A(p)^3 + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)A(p) = 0 \tag{5.46}$$

Ezek után tekintsük a $z = a^T x$ megfigyelő deriváltjait:

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= a^T \dot{x} = a^T A(p)x + a^T A(p)x + a^T B(p)u, \\
\ddot{z} &= a^T A(p)\dot{x} + a^T B(p)\dot{u} = \\
&= a^T A(p)^2 x + a^T A(p)B(p)u + a^T B(p)\dot{u}, \\
\dddot{z} &= a^T A(p)^2 \dot{x} + a^T A(p)B(p)\dot{u} + a^T B(p)\ddot{u} = \\
&= a^T A(p)^3 x + a^T A(p)^2 B(p)u + a^T A(p)B(p)\dot{u} + a^T B(p)\ddot{u},
\end{aligned}
$$

felhasználva az (5.45) differenciálegyenletet.

A (5.46) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\dddot{z} + (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)\dot{z} = \big((P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)a^T B(p) + a^T A(p)^2 B(p)\big)\, u + \\
+ a^T A(p)B(p)\dot{u} + a^T B(p)\ddot{u},
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

Ez csak akkor nem függ az u bemenettől, ha

$$
\begin{aligned}
&a^T B(p) = 0, \\
&a^T A(p)B(p) = 0, \\
&a^T A(p)^2 B(p) + (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)a^T B(p) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

azaz, ha

$$
\begin{aligned}
&a^T B(p) = 0, \\
&a^T A(p)B(p) = 0, \\
&a^T A(p)^2 B(p) = 0.
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

Részletezve,

$$
(a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} p_2 & 0 \\ -p_1 & p_3 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix} = (a_1 p_2 - a_2 p_1, a_2 p_3 - a_3 p_2) = (0, 0), \tag{5.50}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_3 \\ -p_1 & 0 & p_2 \\ -p_3 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 & 0 \\ -p_1 & p_3 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} -p_1^2 & p_1 p_3 - p_2 p_3 \\ -p_1 p_2 & -p_2^2 \\ p_1 p_2 - p_2 p_3 & -p_2 p_3 \end{bmatrix} = \\
= (a_3 p_1 p_2 - a_3 p_2 p_3 - a_1 p_1^2 - a_2 p_1 p_2,\ a_1 p_1 p_3 - a_1 p_2 p_3 - a_2 p_2^2 - a_3 p_2 p_3) = (0, 0),
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} -(p_1^2 + p_3^2) & -p_2 p_3 & p_1 p_2 \\ -p_2 p_3 & -(p_1^2 + p_2^2) & -p_1 p_3 \\ p_1 p_2 & -p_1 p_3 & -(p_2^2 + p_3^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ -p_1 & p_3 \\ 0 & -p_2 \end{pmatrix} = \\
= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 - p_1^2 p_2 - p_2 p_3^2 & -p_2 p_3^2 - p_1 p_2^2 \\ p_1^3 + p_1 p_2^2 - p_2^2 p_3 & p_1 p_2 p_3 - p_1^2 p_2 - p_2 p_3^2 \\ p_1 p_2 + p_1^2 p_3 & p_2^3 + p_2 p_3^2 - p_1 p_3^2 \end{pmatrix} = \\
= a_1(p_1 p_2 p_3 - p_1^2 p_2 - p_2 p_3^2) + a_2(p_1^3 + p_1 p_2^2 - p_2^2 p_3) + a_3(p_1 p_2^2 + p_1^2 p_3), \\
a_2(p_1 p_2 p_3 - p_1^2 p_3 - p_2^2 p_3) + a_3(p_2^3 + p_2 p_3^2 - p_1 p_3^2) - a_1(p_2 p_3^2 + p_1 p_3^2) = (0, 0).
\end{aligned}
\tag{5.52}
$$

A (5.50), (5.51), (5.52) egyenleteknek van nem 0 megoldása, akkor és csak akkor, ha a mátrixnak a rangja kisebb, mint 3.

$$\begin{pmatrix} p_2 & -p_1 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_1^2 & -p_1p_2 & p_1p_2 - p_2p_3 \\ p_1p_3 - p_2p_3 & p_2^2 & -p_2p_3 \\ p_1p_2p_3 - p_1^2p_2 - p_2p_3^2 & p_1^3 + p_1p_2^2 - p_2^2p_3 & p_1p_2^2 + p_1^2p_3 \\ -p_2p_3^2 - p_1p_2^2 & p_1p_2p_3 - p_1^2p_3 - p_2^2p_3 & p_2^3 + p_2p_2^3 - p_1p_2^3 \end{pmatrix}. \tag{5.53}$$

Néhány speciális $p = (p_1, p_2, p_3)$ érték vizsgálatával kezdjük.

$p_1 = 0$ esetén nézzük az első három sorból alkotott mátrix determinánsát.

$$\det \begin{vmatrix} p_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_2 \\ 0 & 0 & -p_2p_3 \end{vmatrix} = p_2^2p_2^3$$

Ez pedig akkor és csak akkor 0, ha $p_2 = 0$, vagy $p_3 = 0$. Ezekben az esetekben pedig az összes 3×3 részmátrix determinánsa is 0. Tehát a p_2 és a p_3 tengelyeken a mátrix nem teljes rangú. $p_2 = 0$ esetén a 6., az 1. és a 3. sorból alkotott mátrix determinánsát számoljuk ki:

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1^2p_3 & -p_1p_3^2 \\ 0 & p_1 & 0 \\ -p_1^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = p_1^4p_3^2,$$

ez pedig nulla lesz akkor és csak akkor, ha $p_1 = 0$, vagy $p_3 = 0$, de ekkor bármely 3×3-aldetermináns 0 lesz. Ez azt jelenti, hogy a p_1 és a p_3 koordináta-tengelyeken a mátrix rangja nem teljes. Tehát a mátrix a 3 koordináta-tengelyen nem lesz teljes rangú.

Most azt mutatjuk meg, hogy minden más $p = (p_1, p_2, p_3)$ paraméter esetén teljes rangú a mátrix. Ehhez szükségünk lesz az 1., a 2. és a 3. sorokból alkotott mátrix D_{123} determinánsára, az 1. 2. és a 4. sorok alkotta mátrix D_{124} determinánsára és végül az 1. a 3. és a 4. sorok alkotta D_{134} determinánsára:

$$D_{123} = p_2(p_1p_2p_3 - p_2p_3^2 - p_1p_2^2 - p_1^3),$$

$$D_{124} = p_2(p_1p_2p_3 - p_1^2p_3 - p_2p_3^2 - p_1^3),$$

$$D_{134} = p_2(p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^3 - p_2^3p_3 + p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_3^2 - p_1p_2p_3^2).$$

Mivel a koordináta-tengelyektől különböző pontokban vizsgáljuk a mátrix rangját, ezért azt oktánsonként végezhetjük. Az már eddigre kiderült, hogy a $p_2 = 0$ esetén teljes rangú a mátrix, ezért feltehető, hogy $p_2 \neq 0$. Így D_{123} esetén elég a

$$p_1p_2p_3 - p_2p_3^2 - p_1p_2^2 - p_1^3 \tag{5.54}$$

polinom gyökeit vizsgálni. Ha $p_1, p_2 > 0$, akkor $p_3 < 0$ esetén a (5.54) polinom előjele negatív, ezért ebben az ortánsban (5.54)-nek nincs gyöke. Ha $p_1, p_2 < 0$, és $p_3 > 0$, teljesen hasonlóan, (5.54) előjele pozitív, ezért ebben az ortánsban sincs (5.54)-nek gyöke.

A $p_2, p_3 > 0$ feltétel esetén a D_{124} polinom gyökhelyeit is elég a

$$p_1p_2p_3 - p_1^2p_3 - p_2p_3^2 - p_2^3 \tag{5.55}$$

gyökhelyeiként vizsgálni (egyszerűsíthető p_2-vel). Ha $p_1 < 0$, akkor a (5.55) negatív, ezért ebben az oktánsban sincs (5.55)-nek gyöke. Hasonlóan, a $p_2, p_3 < 0$, $p_1 > 0$ esetén (5.55) pozitív, ezért ebben az oktánsban is teljes rangú a mátrix.

A további 4 oktánsban a gyökök keresését a D_{134} vizsgálatára alapozzuk. Ebből a célból faktorizáljuk D_{134}-et:

$$D_{134} = p_2(p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^3 - p_2^3p_3 + p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2^3 - p_1p_2p_3^2) =$$

$$= p_2(p_2^2 + p_1p_3)(p_1p_3 + p_1p_2 - p_2p_3)$$

Láttuk, hogy $p_2 = 0$ esetén p_1p_3 nem 0, így a $p_1 = 0$ és $p_3 = 0$ kivételével az egész síkon teljes rangú a mátrix, ezért feltehetjük, hogy $p_2 \neq 0$. Ekkor elég a

$$(p_2^2 + p_1p_3)(p_1p_3 + p_1p_2 - p_2p_3) = 0$$

megoldásait keresni. Ha $p_1, p_3 > 0$, vagy $p_1, p_3 < 0$, akkor $p_2^2 + p_1p_3 > 0$, ezért csak a

$$p_1p_3 + p_1p_2 - p_2p_3 \tag{5.56}$$

gyökeit kell keresni. Legyen

$$p_2p_3 = p_1p_3 + p_1p_2,$$

ezt behelyettesítve (5.54)-ba, azt kapjuk, hogy ez a gyökhely nem lehet közös, ui.

$$p_1p_2p_3 - p_1p_3^2 - p_1p_2p_3 - p_1p_2^2 - p_1^3 = -p_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

Mivel $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > 0$, ezért $p_1 = 0$.

Azt pedig már láttuk, hogy ebben az esetben $p_2p_3 \neq 0$ esetén a mátrix teljes rangú.

Összefoglalva, az (5.45) paraméteres lineáris rendszer a p_1, p_2, p_3 koordináta-tengelyek kivételével, minden p paraméterre elérhető (irányítható).

Most, hogy tisztáztuk a példánkban bemutatott (5.45) paraméteres lineáris rendszerről, hogy mely konstans paraméterek esetén lesz irányítható, természetes lenne azt gondolni, hogy ha egy paraméteres lineáris rendszerben olyan állapotfüggő paraméter olyan értékeket vesz csak, amelyekre a konstans LPV-rendszer irányítható, maga is irányítható lesz. Tekintsük e célból az állapotfüggő $p(x)$ paraméterfüggvényt, amelyről feltesszük, hogy az értéke nincsenek a p_1, p_2, p_3 koordináta tengelyeken, ahol (5.45) nem irányítható.

Az így kapott

$$\dot{x} = A(p(x))x + B(p(x))u, \; x(0) = \xi \neq 0$$

állapotának, azaz $x(t)$-nek számítjuk ki, majd becsüljük meg a norma négyzetét. Ehhez számoljuk ki a $\frac{d}{dt}(\| x \|^2)$ deriváltakat:

$$\frac{d}{dt}(\| x \|^2) = 2x^T\dot{x} = 2\left(x^TA(p(x))x + x^TB(p(x))u\right) =$$

$$= 2(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & p_1(x) & p_3(x) \\ -p_1(x) & 0 & p_2(x) \\ -p_3(x) & -p_2(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2(x_1, x_2x_3)\begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ -p_1(x) & p_3(x) \\ 0 & -p_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\left(p_1(x)x_1x_2 + p_3(x)x_1x_3 + p_2(x)x_2x_3 - p_1(x)x_1x_2 - p_3(x)x_1x_3 - p_2(x)x_2x_3\right) +$$

$$+2\left(p_2(x)x_1u_1 + p_3(x)x_2u_2 - p_1(x)x_2u_1 - p_2(x)x_3u_2\right) =$$

$$= 2\left(p_2(x)x_1u_1 + p_3(x)x_2u_2 - p_1(x)x_2u_1 - p_2(x)x_3u_2\right).$$

Közelítsük a $(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ függvényt egy adott $\pi(x)$ esetén az $(x_1\pi(x), x_2\pi(x), x_3\pi(x))$ függvénnyel: ekkor a

$$\frac{d}{dt}(\parallel x \parallel^2) = 2\left(p_2(x)x_1u_1 + p_3(x)x_2u_2 - p_1(x)x_2u_1 - p_2(x)x_3u_2\right) =$$
$$= 2\left(p_2(x) - x_2\pi(x)\right)x_1u_1 + \left(p_3(x) - x_3\pi(x)\right)x_2u_2 - \left(p_1(x) - x_1\pi(x)\right)x_2u_1 -$$
$$-\left(p_2(x) - x_2\pi(x)\right)x_3u_2\left(x_2x_1u_1 + x_3x_2u_2 - x_1x_2u_1 - x_2x_3u_2\right) =$$
$$= 2\left(p_2(x) - x_2\pi(x)\right)x_1u_1 + \left(p_3(x) - x_3\pi(x)\right)x_2u_2 - \left(p_1(x) - x_1\pi(x)\right)x_2u_1 -$$
$$-\left(p_2(x) - x_2\pi(x)\right)x_3u_2$$

approximációt kapjuk. Integráljuk az így adódó egyenlőséget, hogy aztán megbecsülhessük az $(\parallel x \parallel^2)$-et:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}(\parallel x \parallel^2)d\tau = \parallel x(t) \parallel^2 - \parallel \xi \parallel^2 = 2\int_0^t \Big(\left(p_2(x) - x_2\pi(x)\right)x_1u_1 +$$
$$+\left(p_3(x) - x_3\pi(x)\right)x_2u_2 - \left(p_1(x) - x_1\pi(x)\right)x_2u_1 - \left(p_2(x) - x_2\pi(x)\right)x_3u_2\Big)d\tau.$$

$x(0) = \xi$, ezért, ameddig $\parallel x(t) \parallel^2 - \parallel \xi \parallel^2 < \parallel \xi \parallel^2$, addig $\parallel x(t) \parallel^2 \neq 0$, azaz az állapot nem éri el a 0 állapotot. Tegyük fel, hogy az $|u_1(t)|, |u_2(t)| \leq U$, azaz korlátosak a bemenetek. Az $\parallel x(t) \parallel^2 < 2 \parallel \xi \parallel^2$-nek is teljesülnie kell a fentiekből. Ezek után

$$\Big| \parallel x(t) \parallel^2 - \parallel \xi \parallel^2 \Big| \leq 2 \parallel \xi \parallel \cdot U \cdot \int_0^t \left(|p_2(x) - x_2\pi(x)| + |p_3(x) - x_3\pi(x)| +\right.$$
$$\left. + |p_1(x) - x_1\pi(x)| + |p_2(x) - x_2\pi(x)|\right) d\tau$$

becslést kapjuk. Tegyük fel, hogy az $(x_1\pi(x), x_2\pi(x), x_3\pi(x))$ állapotfüggő paraméterfüggvényekkel, hogy adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$|p_1(x) - x_1\pi(x)| < \varepsilon,$$
$$|p_2(x) - x_2\pi(x)| < \varepsilon,$$
$$|p_3(x) - x_3\pi(x)| < \varepsilon.$$

Így

$$\Big| \parallel x(t) \parallel^2 - \parallel \xi \parallel^2 \Big| < 8 \parallel \xi \parallel \cdot U \cdot \varepsilon \cdot t.$$

Tehát, hogy ez kisebb legyen, mint $\parallel \xi \parallel^2$, az kell, hogy

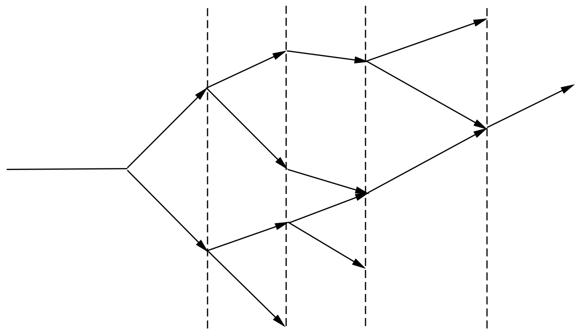
$$t < \frac{\parallel \xi \parallel}{8 \cdot U \cdot \varepsilon}.$$

Tehát, minél finomabb approximáljuk az $(x_1\pi(x), x_2\pi(x), x_3\pi(x))$ állapotváltozós paramétereket, annál hosszabb intervallumon nem érhetik el a 0-t, ($\varepsilon \to 0$ esetén a felső becslés $\dfrac{\parallel \xi \parallel}{8 \cdot U \cdot \varepsilon} \to \infty$).

6. Vertikum típusú rendszerek

A módszertani bevezetőben absztraktan már definiáltuk a vertikum típusú rendszerek speciális struktúráját. Egy a gráfok nyelvén is megfogalmazható hierarchiát jelent [25].

A feldolgozóipar folytonos folyamatai, de a feldolgozó, összeszerelő ipari objektumok is, pl. egy olajfinomító, sok részegységre részrendszerre bomlik, azzal a speciális struktúrával, hogy lényegében nincs visszatérő folyamat, a részben feldolgozott termékek lesznek a bemenetei egy következő folyamatnak, és így tovább. Ezt egy irányított gráffal lehet egyszerűen érzékeltetni:

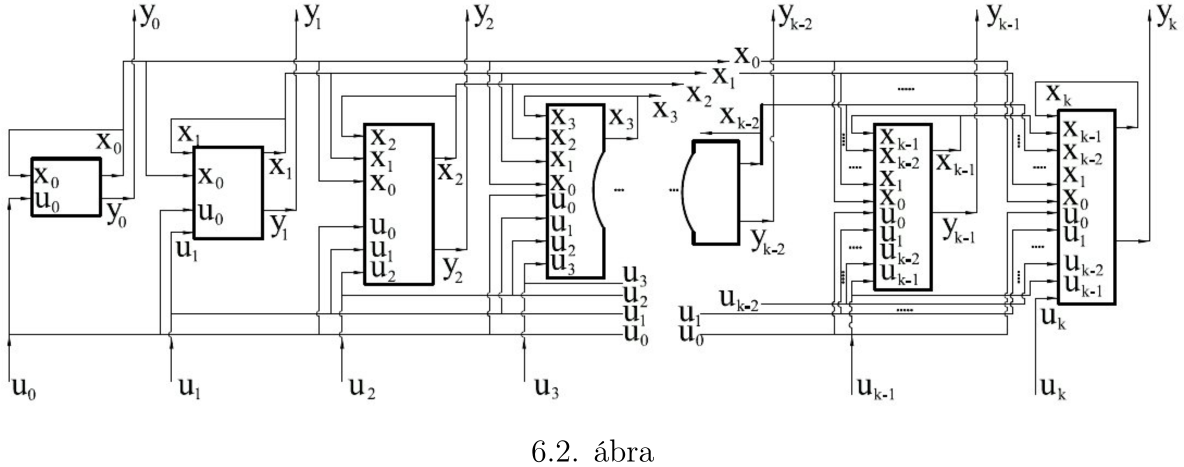


6.1. ábra

majd egy blokkséma segítségével (lásd 6.1. ábra) lehet pontosabban leírni. Amennyiben az egyes részrendszerek lineáris bemenet-kimenet rendszerek, amelyeket az n_i dimenziós euklideszi térben modelleztünk, akkor k részrendszer esetén $(n_1 + n_2 + \dots n_k = n)$ a következő blokk-mátrixos modellel adhatjuk meg:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} =$$

$$= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{6.1}$$



6.2. ábra

Ezekre a lineáris rendszerekre is megfogalmazhatók, felvethetők azok a kérdések (a gyakorlatban is előforduló esetek tanulmányozása során), mint amelyeket az általános lineáris rendszernél vizsgáltunk, lásd [21], [18], [19], [20], [25], [36], [40], [48]. A szokásos rendszertulajdonságok tanulmányozására alkalmazhatjuk az általánosan kapott kritériumokat, az elérhetőségre, az irányíthatóságra, megfigyelhetőségre és rekonstruálhatóságra. Elvárjuk azonban, hogy a specialitást kihasználva leegyszerűsödnek az eredményeim. Itt is természetes az időtől, állapottól függő együtthatós rendszerek esete. Ha diszkrét időre is gondolunk, pl. egy részrendszer leállása, legyen az hiba miatt vagy karbantartás céljából, azonnal felveti a több részrendszerből álló rendszer egyes részrendszereinek ki-be kapcsolásával kapott időfüggő együtthatók esetének a vizsgálatát.

Az egyszerűbb írásmód céljából vezessük be az alábbi tömörebb jelöléseket:

$$\mathbb{A}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & & & \\ i & \cdots & A_{ij} & \\ & & \vdots & \\ & & j & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & & & \\ i & \cdots & B_{ij} & \\ & & \vdots & \\ & & j & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor vizsgálhatjuk az

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{A}_{ij} \right) \mathbf{x} + \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{B}_{ij} \right) \mathbf{u}$$

időtől vagy állapottól függő együtthatójú vertikum típusú lineáris rendszert.

Példaként megemlítjük, hogy az i-edik részrendszer ki-be kapcsolásával, ill. a többi együttes ki-be kapcsolásával adódó kapcsolási rendszert két 0 és 1 értékeket felvevő, szakaszonként balról folytonos függvénnyel, a p, q-vel modellezhetjük:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = {} & p\left(\mathbb{A}_{ii}\mathbf{x} + \mathbb{B}_{ii}\mathbf{u}\right) + q\sum_{j_1 \neq i}\sum_{j_2 \neq i}\left(\mathbb{A}_{j_1 j_2}\mathbf{x} + \mathbb{B}_{j_1 j_2}\mathbf{u}\right) + \\ & + pq\left(\left(\sum_{j_1 < i}\mathbb{A}_{i j_1} + \sum_{j_2 > i}\mathbb{A}_{j_2 i}\right)\mathbf{x} + \left(\sum_{j_1 < i}\mathbb{B}_{i j_1} + \sum_{j_2 > i}\mathbb{B}_{j_2 i}\right)\mathbf{u}\right). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Valóban, $p = 1, q = 0$ esetén az i-edik részrendszert kapjuk:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}_{ii}\mathbf{x} + \mathbb{B}_{ii}\mathbf{u},$$

ha $p = 0$ $q = 1$, akkor az i-edik kivételével, az összes többi bekapcsolásával létrehozott

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\sum_{j_1 \neq i} \sum_{j_2 \neq i} \mathbb{A}_{j_1 j_2} \right) \mathbf{x} + \left(\sum_{j_1 \neq i} \sum_{j_2 \neq i} \mathbb{B}_{j_1 j_2} \right) \mathbf{u}$$

rendszert kapjuk, míg $p = 1,\ q = 1$ visszaadja az egész rendszert, a $p = 0,\ q = 0$ pedig a triviális $\dot{x} = 0$ rendszert.

A könnyebb leírhatóság érdekében bevezetjük még az egység mátrix blokkjaira az

$$I_{ii} = \underbrace{\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & I & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}}_{i}\ \underbrace{}_{i}$$

jelölést is.

Ezzel pl. fennáll az $\mathbb{A}_{ij} = I_{ii}AI_{jj}$ egyenlőség, ami a vertikum-típusú rendszerek blokk-trianguláris struktúra-mátrixai esetén azt eredményezi, hogy $i \geq j$ esetén lesz csak 0-tól különböző a szorzat. Hasonló alakban írható fel a B mátrix blokkjaiból a $\mathbb{B}_{ij}$ mátrixok is $\mathbb{B}_{ij} = I_{ii}BI_{jj}$ alakban, csak a jobboldali egységmátrix-blokkok dimenziója a B oszlopainak a blokkosításának megfelelőek.

Az (6.2) egyenlet jobboldalán lévő mátrixokat a következőképpen is átírhatjuk:

$$\dot{x} = [pI_{ii}AI_{ii} + q(A - I_{ii}A - AI_{ii}) + I_{ii}AI_{ii} + pq(I_{ii}A + AI_{ii} - I_{ii}AI_{ii})]\, x +$$
$$+ [pI_{ii}BI_{ii} + q(B - I_{ii}B - BI_{ii} + I_{ii}BI_{ii}) + pq(I_{ii}B + BI_{ii} - I_{ii}BI_{ii})]\, u$$

Bevezetem a következő jelölést

$$T_i(p,q)X = pI_{ii}XI_{ii} + q(X - I_{ii}X - XI_{ii} + I_{ii}XI_{ii}) + pq(I_{ii}X + XI_{ii} - I_{ii}XI_{ii}),$$

ahol az X egy tetszőleges dimenziós blokkosított mátrix

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & \dots & 0 \\ X_{21} & X_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kk} \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel az előző egyenletet az

$$\dot{x} = T_i(p,q)Ax + T_i(p,q)Bu \tag{6.3}$$

alakra hozhatjuk.

Legyenek most $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq k, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$ és tekintsük az X mátrix

$$T_{i1}(p_1 q_1)T_{i2}(p_2 q_2)\ldots T_{ik}(p_k, q_k)X$$

transzformáltját, amelyik függ nyilván az $\mathbf{i} = (i_1, i_2 \ldots, i_k)$ valamint a $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$ paraméterektől, illetve, elvben az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ rendezésétől is. Megmutatom, hogy ettől a rendezéstől eltekinthetünk, ui., igaz, hogy a

$$T_i(p,q)T_j(\bar{p},\bar{q})X = T_j(\bar{p},\bar{q})T_i(p,q)X. \tag{6.4}$$

Valóban,

$$T_i(p,q)T_j(\bar{p},\bar{q}X = \bar{q}qX + \bar{q}q(\bar{p}-1)I_{jj}X + \bar{q}q(\bar{p}-1)XI_{jj} +$$
$$+ \bar{q}q(p-1)I_{ii}X + \bar{q}q(p-1)XI_{ii} + (\bar{q}q(1-\bar{p}) + \bar{p}q)\, I_{jj}XI_{jj} +$$
$$+ (p\bar{q} + \bar{q}q(1-p))\, I_{ii}XI_{ii} + (1-\bar{p})(1-p)\bar{q}qI_{jj}XI_{ii} +$$
$$+ (1-\bar{p})(1-p)\bar{q}qI_{ii}XI_{jj} = T_j(\bar{p},\bar{q})T_i(p,q)X.$$

Tekintsük most az i_1-edik és az i_2-edik részrendszert, $i_1 < i_2$, valamint a p_1, p_2 és q_1, q_2 paramétereket. Ekkor

$$T_{i_1}(p_1,q_1)T_{i2}(p_2,q_2)A = q_1q_2A + q_1q_2(p_2-1)I_{i_2,i_2}A +$$
$$+ q_1q_2(p_2-1)AI_{i_2,i_2} + q_1q_2(p_1-1)AI_{i_1,i_1} + q_1q_2(p_1-1)AI_{i_1,i_1} +$$
$$+ (q_1q_2(1-p_2) + p_2q_1)\, I_{i_2,i_2}AI_{i_2,i_2} + (p_1q_2 + q_1q_2(1-p_1))\, I_{i_1,i_1}AI_{i_1,i_1} +$$
$$+ (1-p_2)(1-p_1)q_2q_1I_{i_2,i_2}AI_{i_1,i_1},$$

ui. $I_{i_1,i_1}AI_{i_2,i_2} = 0$, mivel az A mátrix blokk-trianguláris mátrix. Hasonló igaz a B mátrix esetén is.

Ezek után leírhatjuk a fenti rendszert is a $T_i(p,q)$ transzformációk segítségével, mint LPV rendszer a $\mathbf{p},\mathbf{q}$ paraméterekkel, amelyben az $i_1, i_2, \ldots, i_k$-adik részrendszereket kapcsolgatjuk: a

$$
\begin{aligned}
&T_{i_1}(p_1,q_1)\ldots T_{i_k}(p_k,q_k)A = \Pi(\mathbf{p},\mathbf{q})A+\\
&+\sum_{j=1}^{k}\Pi_j(\mathbf{p},\mathbf{q})(I_{ij,ij}A + AI_{ij,ij}) + \sum_{j=1}^{k}\overline{\Pi}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{ij,ij}AI_{i_j,i_j}+\\
&\sum_{j_1<j_2}\widehat{\Pi}_{j_1,j_2}(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{i_{j_2},i_{j_2}}AI_{i_{j_1},i_{j_1}}, \quad \text{és}\\
&T_{i_1}(p_1q_1)\ldots T_{i_k}(p_k,q_k)B = \Pi(\mathbf{p},\mathbf{q})B+\\
&+\sum_{j=1}^{k}\Pi_j(\mathbf{p},\mathbf{q})\left(I_{i_j,i_j}B + BI_{i_j,i_j}\right) + \sum_{j=1}^{k}\widehat{\Pi}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{i_j,i_j}BI_{i_j,i_j}+\\
&+\sum_{j_1<j_2}\widehat{\Pi}_{j_1,j_2}(\mathbf{p},\mathbf{q})I_{i_{j_2},i_{j_2}}BI_{i_{j_1},i_{j_1}},
\end{aligned}
$$

ahol Π, Π_j és $\widehat{\Pi}_{j_1,j_2}$ $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ polinomjai. Ezekkel az

$$
\dot{\mathbf{x}} = T_{i_1}(p_1,q_1)T_{i_2}(p_2,q_2)\ldots T_{i_k}(p_k,q_k)A\mathbf{x} + T_{i_1}(p_1,q_1)\ldots T_{i_k}(p_k,q_k)B\mathbf{u} \tag{6.5}
$$

egy polinomiális LPV-rendszer lesz az $A, I_{i_j,i_j}A + AI_{i_j,i_j}$, $I_{i_j,i_j}AI_{i_j,i_j}$, és az $I_{i_{j_2},i_{j_2}}AI_{i_{j_1},i_{j_1}}$ mátrixokkal. A polinomváltozós (6.5) rendszer struktúra mátrixai így polinomiálisak a $\mathbf{p},\mathbf{q}$ paraméterekre nézve, de még így is kellően jó tulajdonságokkal bírnak. Tekinthetjük az (6.5) rendszerben lévő paramétereket időfüggőnek, amely esetén a $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathop{\times}\limits_{1}^{k}\{0,1\} \subset \mathbb{Q}_k \subset \mathbb{R}^k$ k-dimenziós egység-kockájának a csúcsaiból véve az értékeit, egy kapcsolási rendszert formálunk. A $T_i(p,q)$ „kapcsoló”-k kommutálása folytán tekinthetjük (6.5) paraméterezését egy paraméterenkénti 2-állású kapcsolónak, azaz a rendszerbe beépítettünk egy 4^k-állású kapcsolót. Emlékeztetünk a bevezető fejezetben említett Buck-Boost konvertere (2-állású kapcsolóval), amellyel bevezetem az approximációs tételemet. A vertikum struktúrájú komplex ipari rendszerekben az egyes részrendszerek beállításával kapott rendszer a konverterrel analóg kapcsolási rendszernek tekinthető egy 4^k állású „kapcsoló”-val ellátva. Ennek az ipari komplexum esetén a célja az lehet, hogy az időben lefolyó ideális gazdaságpolitika, a nyereség maximálása, a szükségletek szezonális változásai megkívánják, hogy változó struktúrát, változtatható termelést tervezhessünk. Tekinthetjük azt az ideális esetet, amikor a $\mathbf{p},\mathbf{q}$ paraméterek időfüggőek, azaz $\mathbf{p}(t),\mathbf{q}(t)$) időfüggő paraméterekkel tekintjük az

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) = T_{i_1}\left(p_1(t),q_1(t)\right)\ldots T_{i_k}\left(p_k(t),q_k(t)\right)A\mathbf{x}(t)+\\
+T_{i_1}\left(p_1(t),q_1(t)\right)\ldots T_{i_k}\left(p_k(t),q_k(t)\right)B\mathbf{u}(t)
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

rendszert, amelynek az ideális működését szeretném meghatározni. Majd ezt approximáljuk a $\mathbb{Q}_k \subset \mathbb{R}^k$ kockán, mint konvex poliéderen egy olyan szakaszonként konstans kapcsolási rendszerrel, amelyben a $(\mathbf{p}(t),\mathbf{q}(t))$ értékei a $\mathbb{Q}_k$ csúcsai, azaz a p_j, q_j, $j = 1,2,\ldots,k$ értékei a 0, vagy 1 értékeket vehetik fel a meghatározott részintervallumokon, azaz részintervallumonként olyan vertikum-típusú rendszerrel approximáljuk, amely az eredeti vertikum bizonyos részrendszereink kikapcsolásával, leállításával adódnak. Hogy ilyen approximációt alkalmazhassunk, a 4.2. approximációs tételemet kellene tovább általánosítani a lineáris függés helyett polinomiális függésre. Ennek az általánosításnak elvi korlátai nincsenek, csak a 4.2. approximációs tétel módszerét kellene tovább finomítani, hogy azt polinomiális paraméter-függés esetére is általánosíthassuk. Látható, hogy a vertikum-típusú rendszerek és az approximációs tételünk összekapcsolása egészen újszerű nagyipari alkalmazást is lehetővé tesz. Ezek után tekintsünk egy vertikum típusú rendszert és vizsgáljuk annak a rendszertulajdonságait.

Az általános esetben láttuk, hogy az időtől függő rendszerek fundamentális mátrixának a kiszámításához ki kell számítani a rendszer struktúrájához rendelt Lie-algebrát, azaz az $\mathbb{A}_{ij}$ mátrixok által generált Lie-algebrát.

1. Minden lehetséges i, j párra
$$[\mathbb{A}_{ii}, \mathbb{A}_{jj}] = \mathbb{A}_{ii}\mathbb{A}_{jj} - \mathbb{A}_{jj}\mathbb{A}_{ii} = 0$$
legyen $i = j$, vagy $i \neq j$.

2. Most tekintsük általában az $\mathbb{A}_{ij}$ és az $\mathbb{A}_{lm}$ elemeket, legalább az egyik mátrix nem diagonálisbeli, azaz $i \neq j$, vagy $l \neq m$ teljesül. Ekkor
$$[\mathbb{A}_{ij}, \mathbb{A}_{lm}] = \mathbb{A}_{ij}\mathbb{A}_{lm} - \mathbb{A}_{lm}\mathbb{A}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j \neq l, \text{ és } m \neq i \\ \mathbb{A}_{ij}A_{jm}, & \text{ha} \quad j = l \\ -\mathbb{A}_{lm}A_{mj}, & \text{ha} \quad m = i \end{cases}$$

Mivel $i \geq j$ és $l \geq m$ teljesül, csak ezekre definiáltuk az $\mathbb{A}_{ij}$, $\mathbb{A}_{lm}$ mátrixokat, ezért $[\mathbb{A}_{ij}, \mathbb{A}_{lm}] \neq 0$ csak akkor lehetséges, ha $i \geq j = l \geq m$, vagy $l \geq m = i \geq j$ teljesül.

Ebből már sejthető, hogy egy szorzat csak akkor lehet nem 0, ha a tényezői átrendezhetők elemek (mátrixok) cseréjével, hogy így az indexek egy monoton csökkenő szorzatot alkossanak, és hogy egy mátrix második indexe legyen egyenlő a rákövetkező mátrix első indexével. Ebből könnyen látható, hogy akármilyen zárójelzéssel egy szorzat, ha teljesíti a fentieket, akkor
$$\pm\mathbb{A}_{i_1i_2}\mathbb{A}_{i_2i_3}\mathbb{A}_{i_3i_4}\dots\mathbb{A}_{i_{l-2}i_{l-1}}\mathbb{A}_{i_{l-1}i_l}$$
alakú, ahol $i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \ldots \geq i_{l-2} \geq i_{l-1} \geq i_l$, és legalább egy egyenlőtlenség szigorúan teljesül, az
$$\mathbb{A}_{ii}\mathbb{A}_{ii}\dots\mathbb{A}_{ii}$$
szorzat, mint láttuk az első pontban nem lehet eredménye Lie-zárójelnek. Ha a különböző indexű elemeket jelöljük csak különbözőknek, azaz
$$\mathbb{A}_{i_1i_2}, \mathbb{A}_{i_2i_3}, \dots, A_{i_{l-1}i_l},$$
teljesítve, hogy $i_1 > i_2,\ i_2 > i_3, \dots, i_{l-1} > i_l$, akkor a szorzatok általános alakja
$$\pm\mathbb{A}^{m_1}_{i_1i_1}\mathbb{A}_{i_1i_2}\mathbb{A}^{m_2}_{i_2i_2}\mathbb{A}_{i_2i_3}\mathbb{A}^{m_3}_{i_3i_3}\dots\mathbb{A}^{m_{l-1}}_{i_{l-1}i_{l-1}}\mathbb{A}_{i_{l-1}i_l}\mathbb{A}^{m_l}_{i_li_l}.$$

Ezt a szorzatok hosszára vonatkozó teljes indukcióval lehet bizonyítani. A kéttényezős $[\mathbb{A}_{i_1i_2}, \mathbb{A}_{i_3i_4}]$ Lie-zárójelre azt kapjuk, hogy ez $i_2 = i_3$ esetén $\mathbb{A}_{i_1i_2}\mathbb{A}_{i_2i_4}$ (i_4-et újra nevezhetjük i_3-nak), és $i_1 = i_4$ esetén $-\mathbb{A}_{i_3i_4}, \mathbb{A}_{i_4i_2}$ (itt is átindexezhetjük az indexeket). A lényeg ismét, hogy teljesül az $i_1 \geq i_2$ $i_2 \geq i_3 \geq i_4$, illetve $i_3 \geq i_4 = i_1 \geq i_2$ monotonitás az indexekre. Tegyük fel, hogy az M-tényezős Lie-zárójelekre (és a rövidebbekre) már tudjuk a fenti szabályt. Akkor, ha az utolsó Lie-zárójelezés két tényezőjét tekintjük, mindegyike M vagy kevesebb tényezős:

$$[A_1, A_2],$$

ahol

$$A_1 = \Big[[A_{iji_{j+1}}, \ldots][\cdot,\cdot]\Big]$$

$$A_2 = \Big[[A_{ij}, [[A_{i_1i_2}, A_{i_3i_4}], A]], \ldots\Big]$$

Ezek mindegyikére igaz, hogy

$$A_1 = \pm A_{i_1i_1}^{m_1} A_{i_1i_2} A_{i_2i_2}^{m_2} \ldots A_{i_li_{l-1}}^{m_{l-1}} A_{i_{l-1}i_l} A_{i_li_l}^{m_l}$$

$$A_2 = \pm A_{i_li_l}^{m_l} A_{i_li_{l+1}} A_{i_{l+1}i_{l+1}}^{m_{l+1}} \ldots A_{i_{l+\bar{l}-1}i_{l+\bar{l}-1}} A_{i_{l+\bar{l}-1}i_{l+\bar{l}}} A_{i_{l+\bar{l}}i_{l+\bar{l}}}^{\bar{m}_{l+\bar{l}}}.$$

Használhattuk az A_1, illetve az A_2 esetén is az i_l indexet mint utolsót, illetve mint elsőt. De ugyanúgy felcserélhető az A_1 és A_2 szerepe, azért az itt i_{l+l}-lel jelölt index is megegyezhetett volna az i_1-gyel, akkor is hasonló eredmény adódott volna természetesen átindexezve a mátrixokat. Innen,

$$[A_1, A_2] = \pm A_{i_1i_1}^{m_1} A_{i_1i_2} \ldots A_{i_{l-1}i_l} A_{i_li_l}^{m_l+\bar{m}_l} A_{i_li_{l+1}}, \ldots, A_{i_{l+\bar{l}}i_{l+\bar{l}}}^{\bar{m}_{l+\bar{l}}} .$$

Tehát az $L\{\mathbb{A}_{ij} : i \geq j\}$ generált Lie-algebra éppen az $\left\{\mathbb{A}_{i_1i_1}^{m_1} A_{i_1i_2} \mathbb{A}_{i_2i_2}^{m_2} \ldots \mathbb{A}_{i_{l-1}i_l} \mathbb{A}_{i_li_l}^{m_l}\right\}$ mátrixszorzatok által generált vektor-altér az $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben. A bázist válasszuk ki növekvő hossz szerint, a tényezők számának növekedő sorrendjében minden olyan báziselemre, amely fix i,j-re $\mathbb{A}_{ii}^{m_1} \mathbb{A}_{ii_2} \mathbb{A}_{i_2i_2}^{m_2} \ldots \mathbb{A}_{i_{l-1}j} \mathbb{A}_{jj}^{m_l}$ alakú. Ezeket így rendezve alkotják a bázis A_{ij} blokkját. Ezeket a blokkokat pedig rendezzük i-ben növekvően, j-ben csökkenően minden fix i-re.

Legyen $\mathcal{A}_{ii}$ vagy üres: ha $\mathbb{A}_{ii} = 0$, vagy egyelemű $\mathcal{A}_{ii} = \{\mathbb{A}_{ii}\}$ (ha $\mathbb{A}_{ii} \neq 0$). $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{i} \mathcal{A}_{ij}$.

Ebben a sorrendben felírható a Wei-Norman-egyenlet, amelyben az [4].

$$\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} = \mathbb{A}_{i_1i_1}^{m_1} \mathbb{A}_{i_2i_2}^{m_2} \ldots \mathbb{A}_{i_{l-1}i_l} \mathbb{A}_{i_l}^{m_l} i_l \in \mathcal{A}_{ij}$$

elemhez rendelhető a $g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)$ megoldás. Ennek segítségével az alaprendszer felírható exponenciálisok szorzataként

$$\Phi(t,\tau) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=i}^{1} \prod_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \exp\left(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau) \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\right).$$

Az $\mathbb{A}_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$ báziselemekre

$$\exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{ii}(t,\tau)^l}{l!} \mathbb{A}_{ii}^l = \sum_{l=0}^{n_i-1} \mathcal{P}_{il}\left(g_{ii}(t,\tau)\right) \mathbb{A}_{ii}^l,$$

ahol a $\mathcal{P}_{il}(g_{ii}(t,\tau))$ függvények a $g_{ii}(t,\tau)$-nak kvázipolinomjai.

Egyszerűbb kiszámítani a többi báziselem exponenciálisát, de a formulának vannak érdekes következményei.

Könnyű belátni, hogy minden $i > j$ esetén az $\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}$-re teljesül, hogy

$$(\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}})^2 = 0,$$

azaz

$$\exp(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}) = I + g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{m};$$

továbbá két báziselem, $\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}$ és $\mathbb{A}_{\widehat{\mathbf{i}}}^{\widehat{\mathbf{m}}} \in \mathcal{A}_{{ki_2}\widehat{j}}$ szorzata $i > j$ és $_{ki_2} > \widehat{j}$ esetén szintén 0:

$$\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{A}_{\widehat{\mathbf{i}}}^{\widehat{\mathbf{m}}} = 0.$$

Ha $\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} = \mathbb{A}_{i_1 i_1}^{m_1}\mathbb{A}_{i_1 i_2}, \ldots, \mathbb{A}_{i_{l-1}i_l}\mathbb{A}_{i_l i_l}^{m_l}$, akkor $i \neq i_1$ esetén

$$\exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} = \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}.$$

Így az exponenciális szorzatok lényegesen leegyszerűsödnek. Például

$$\prod_{j=i}^{l}\prod_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} \exp\left(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\right) =$$
$$\exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right)\left(I + \sum_{i>j}\sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\right).$$

Könnyen látható, hogy az (i,i) blokkban egyedül $\exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right)$ van, az (i,j) blokkban pedig

$$\sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} \exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right) g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \tag{6.7}$$

áll. A többi diagonális blokkban az egységmátrixok $n_l(l \neq i)$-dimenziós egységek, míg az összes többi blokkban 0-áll.

Majd a $\Phi(t,\tau)$-t úgy kapjuk, hogy ezeket mind összeszorozzuk. Ezzel minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra hasonlóképpen írjuk be a (6.7)-beli sorok blokkjait anélkül, hogy bármit módosulnának a sorok. Láttuk, hogy a Cauchy-féle formulában, ill a Kalman-féle elérhetőségi mátrixban a $\Phi(t,\tau)B(\tau)$ szorzatot kell számolni, amely esetünkben

$$\Phi(t,\tau)B(\tau) =$$
$$= \prod_{i=1}^{k}\exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right)\left(I + \sum_{i=1}^{i-1}\sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} b_{ij}(\tau)\mathbb{B}_{ij}\right).$$

Mielőtt folytatnánk a részletesebb tárgyalást, vizsgáljuk meg, hogy milyen specialitása van az $\exp g_{ii(t,\tau)}\mathbb{A}_{ii}$ exponenciálisoknak. Azt tudjuk, hogy általában a $\Phi(t,\tau)$ alapmátrixot kifejezhetjük a $\Psi(t) = \Phi(t,0)$ mátrix segítségével, amit ugyancsak alapmátrixnak neveznek, amely a speciális

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t), \qquad \Psi(0) = I$$

kezdetiérték-problémának a megoldása. Ezek szerint

$$\Phi(t,\tau) = \Psi(t)\Psi(\tau)^{-1}.$$

Vizsgáljuk meg, esetünkben ez mit jelent az átlóban levő $\mathbb{A}_{ii}$ blokkok exponenciálisaira. A $\Psi(t)$ átlóinak az exponenciálisaira azt kapjuk, hogy azok a definíció szerint éppen az $\exp\left(g_{ii}(t,0)\mathbb{A}_{ii}\right)$ mátrixok. $\Psi(t)^{-1}$-ben az $\exp\left(-g_{ii}(t,0)\mathbb{A}_{ii}\right)$ elemek állnak, mert az átlóban levő blokkok inverzei lesznek az inverz átlós blokkjai, annak következményeként, hogy a mátrixunk blokk-trianguláris. Tehát

$$\exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right) = \exp\left(g_{ii}(t,0)\mathbb{A}_{ii}\right)\exp\left(-g_{ii}(\tau,0)\mathbb{A}_{ii}\right)$$

$$= \exp\left(\left(g_{ii}(t,0) - g_{ii}(\tau,0)\right)\mathbb{A}_{ii}\right).$$

Legyen most $\alpha_{ii}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(g_{ii}(t,0)\right)$. Ekkor $\int\limits_{\tau}^{t}\alpha_{ii}(s)\mathrm{ds} = g_{ii}(t,0) - g_{ii}(\tau,0)$, azaz $g_{ii}(t,\tau) =$ $= g_{ii}(t,0) - g_{ii}(\tau,0)$, vagy ezt az exponenciálisba beírva

$$\exp\left(g_{ii}(t,\tau)\mathbb{A}_{ii}\right) = \exp\int\limits_{\tau}^{t}\alpha_{ii}(s)ds\mathbb{A}_{ii}.$$

Az $\alpha_{ii}(t)$ függvényről ennél több is mondható. Ehhez kiszámoljuk a $\Psi(t)$ alapmegoldás egy részét, a diagonálisban álló blokkokét a

$$\Psi_{j+1}(t) = I + \int\limits_{0}^{t} A(t_1)\Psi_j(t_1)dt_1$$

iterációból, a $\Psi_0(t) = I$ kezdőértékből kiindulva.

$$\Psi_1(t) = I + \int\limits_0^t A(t_1)dt_1,$$

$$\Psi_2(t) = I + \int\limits_0^t A(t_1)dt_1 + \frac{1}{2!}\left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right)^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^t\left[A(t_2), \int\limits_0^{t_2} A(t_1)dt_1\right]dt_2$$

Az utolsó tag integrál alatti Lie-zárójele abból adódik, hogy formula kiszámításában szerepet játszó

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right)^2 = A(t)\left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right) + \left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right)A(t) =$$
$$= 2A(t)\int\limits_0^t A(t_1)dt_1 + \left[\int\limits_0^t A(t_1)dt_1, A(t)\right]$$

deriválás esetén az $A(t)$ és $\int\limits_0^t A(t_1)dt_1$ nem felcserélhetőek ezért szükséges a $\left[\int\limits_0^t A(t_1)dt_1, A(t)\right]$ Lie-zárójeles korrekció, ugyanez a harmadik hatvány esetén

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right)^3 = A(t)\left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right)^2 + \int\limits_0^t A(t_1)dt_1 A(t)\int\limits_0^t A(t_1)dt_1 +$$
$$+\left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right)^2 A(t) = 3A(t)\left(\int\limits_0^t A(t_1)dt_1\right)^2 +$$
$$+2\left[\int\limits_0^t A(t_1)dt_1, A(t)\right]\int\limits_0^t A(t_1)dt_1 + \int\limits_0^t A(t_1)dt_1\left[\int\limits_0^t A(t_1)dt_1, A(t)\right],$$

ezért

$$A(t)\left(\int_0^t A(t_1)dt_1\right)^2 = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t A(t_1)dt_1\right)^3 -$$

$$-\frac{2}{3}\left[\int_0^t A(t_1)dt_1, A(t)\right]\int_0^t A(t_1)dt_1 - \frac{1}{3}\int_0^t A(t_1)dt_1\left[\int_0^t A(t_1)dt_1, A(t)\right].$$

Ezt a rekurzióba beírva

$$\Psi_3(t) = I + \int_0^t A(t_1)dt_1 + \int_0^t A(t_1)\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2dt_1 + \frac{1}{2!}\int_0^t A(t_1)\left(\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2\right)^2 dt_1$$

$$-\frac{1}{2!}\int_0^t A(t_1)\int_0^{t_1}\left[A(t_2), \int_0^{t_2} A(t_3)dt_3\right]dt_2dt_1 = I + \int_0^t A(t_1)dt_1 +$$

$$\frac{1}{2!}\int_0^t \frac{d}{dt_1}\left(\int_0^t A(t_2)dt_2\right)^2 dt_1 - \frac{1}{2!}\int_0^t\left[A(t_2), \int_0^{t_2} A(t_1)dt_1\right]dt_2 +$$

$$+\frac{1}{3!}\int_0^t \frac{d}{dt_1}\left(\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2\right)^3 dt_1 - \frac{1}{3}\int_0^t\left[\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2, A(t_1)\right]\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2dt_1$$

$$-\frac{1}{3!}\int_0^t\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2\left[\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2, A(t_1)\right]dt_1 =$$

$$= I + \int_0^t A(t_1)dt_1 + \frac{1}{2!}\left(\int_0^t A(t_1)dt_1\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\int_0^t A(t_1)dt_1\right)^3 +$$

$$+ [\text{Lie-zárójelet tartalmazó tagok}].$$

Indukcióval lehet igazolni, hogy

$$\psi_l(t) = \sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}\left(\int_0^t A(t_1)dt_1\right)^j + [\text{Lie-zárójelet tartalmazó tagok}].$$

A $\psi_l(t)$ egyenletes konvergenciája is igazolható minden kompakt intervallumon.

Ráadásul a

$$\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}\left(\int_0^t A(t_1)dt_1\right)^j$$

is egyenletesen konvergál az $\exp\int_0^t A(t_1)dt_1$ exponenciálishoz, azaz $\psi(t) = \lim_{l\to\infty}\psi_l(t) \neq \exp\int_0^t A(t_1)dt_1$ a nemkommutativitás miatt. Azonban a Lie-zárójeles tagok *ii* típusú diagonális blokkjai mind 0-k, ezért a $\psi(t)\ \exp g_{ii}(t,0)\mathbb{A}_{ii}$ blokkjaira igaz, hogy az $\exp \int\limits_0^t A(t_1)dt_1$ diagonális blokkjaival egyenlők. Ezekre azonban $\exp g_{ii}(t,0)\mathbb{A}_{ii} = \exp\left(\int\limits_0^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right)$, amiből $g_{ii}(t,0) = \int\limits_0^t a_{ii}(t_1)dt_1$, azaz $\alpha_{11}(t) = a_{ii}(t)$.

Most már visszatérhetünk az (6.7) alakításához.

$$\Phi(t,\tau)B(\tau) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \exp\left(\int\limits_0^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right)\left(I + \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} b_{ij}(\tau)\mathbb{B}_{ij}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \exp\left(\int\limits_\tau^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right)\left(b_{ii}(\tau)\mathbb{B}_{ii} + \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)b_{ij}(\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{B}_{ij}\right).$$

Tehát

$$x(t) = \int\limits_0^t \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \prod_{i=1}^{k}\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_0^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(b_{ii}(\tau)\mathbb{B}_{ii}u_i(\tau) + \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} b_{ij}(\tau)g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{B}_{ij}u_j(\tau)\right)d\tau$$

írja le a rendszer dinamikát. Ebből az i-edik sorban levő blokkmátrixnak megfelelő $\mathbf{x}_i$ állapotra a következő egyenletet kapjuk:

$$x_i(t) = \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_\tau^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right)\mathbb{B}_{ii}b_{ii}(\tau)u_i(\tau)d\tau +$$
$$+\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_\tau^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right)\left(\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}_{ij}} \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{B}_{ij}b_{ij}(\tau)g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)u_j(\tau)d\tau.\right)$$

Vajon ez milyen differenciálegyenlet megoldó képletének, Cauchy-féle formulájának tekinthető? Hogy ezt megkapjuk, deriváljuk a kapott egyenletet, felhasználva, hogy egy ún. paraméteres integrált, amelynek a paramétere az integrál felső határában is benne van, a

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t f(t,\tau)d\tau\right) = f(t,t) + \int\limits_0^t \partial_t f(t,\tau)d\tau$$

formula alapján deriválunk, ráadásul a mi esetünkben az integrandus szorzat, amelyet a szorzat deriválási szabályával deriválunk.

$$\dot{x}_i(t) = b_{ii}(t)\mathbb{B}_{ii}u_i(t) + \int_0^t a_{ii}(t)\mathbb{A}_{ii} \exp\left(\int_\tau^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\mathbb{B}_{ii}b_{ii}(\tau)u_i(\tau) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{B}_{ij}b_{ij}(\tau)\Big(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\Big)u_j(\tau)\right] d\tau +$$

$$+ \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right) \left[\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{B}_{ij}b_{ij}(\tau)\frac{d}{dt}\Big(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\Big)u_j(\tau)\right] d\tau =$$

$$= a_{ii}(t)\mathbb{A}_{ii}x_i(t) + b_{ii}(t)\mathbb{B}_{ii}u_i(t) + \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t a_{ii}(t_1)dt_1\mathbb{A}_{ii}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}_{ij}} \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{B}_{ij}b_{ij}(\tau)\frac{d}{dt}\Big(g_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(t,\tau)\Big)u_j(\tau)\right] d\tau.$$

Látható, hogy az eredeti, az i-edik részrendszer egyenletéhez hozzájárul egy az $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{i-1}(t)$ előző bemenetekből függő integrálos beavatkozó tag. Viszont az így kapott k részrendszernek az állapotfüggő dinamikája szétcsatolódott k darab független dinamikára. Az időtől függő együttható is maradt az eredeti $a_{ii}(t)$.

Az elérhető állapotok leírására is elég az elérhető $x_i(T)$ állapotokat leírni minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén. Ehhez definiáljuk az új B-k szerepét játszó mátrixokat:

$$\mathbf{B}_i = (\mathbb{B}_{ii}, \ldots, \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}\mathbb{B}_{ij}, \ldots),\ \mathbb{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}} \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{A}_{ij}.$$

Az i-edik Kalman-féle irányíthatósági-elérhetőségi mátrix az a következő:

$$\Big(\mathbf{B}_i, \mathbb{A}_{ii}\mathbf{B}_i, \ldots, \mathbb{A}_{ii}^{n_i-1}\mathbf{B}_i\Big), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

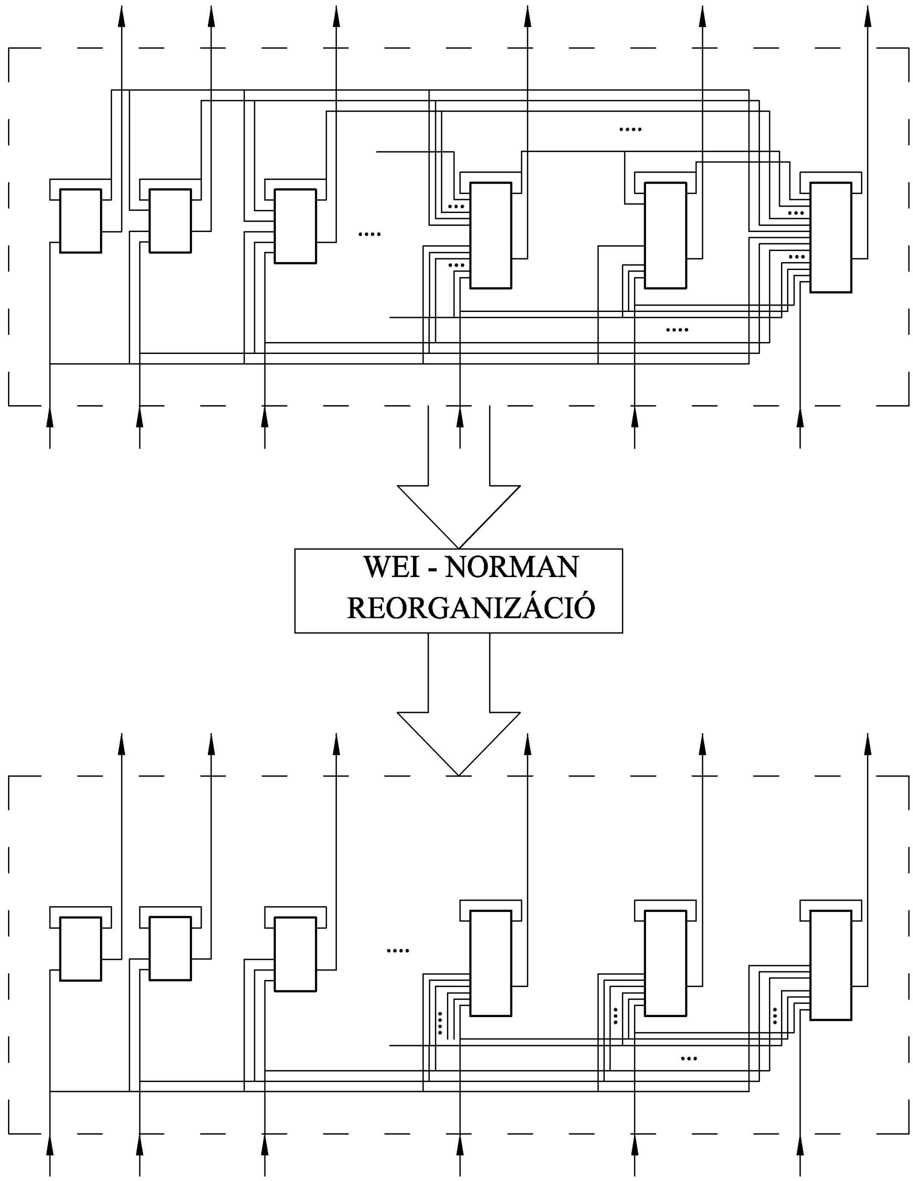
A perzisztens gerjesztés feltételeként nem tudunk semmi speciálist mondani, ugyanis a Wei-Norman-differenciálegyenlet megoldására az egyetlen speciális állításunk az, hogy $g_{ii}(t,\tau) = \int_\tau^t a_{ii}(t_1)dt_i$. Tehát létezik olyan gerjesztési feltétel, és ez generikusan teljesül, amely mellett az elérhetőségi altér az $\mathbf{x}_i$ állapotok elérhetőségi altereinek a direktösszege (a szétcsatolás miatt), és ez az

$$\mathrm{Im}(\mathbf{B}_i, \mathbb{A}_{ii}\mathbf{B}_i, \ldots, \mathbb{A}_{ii}^{n_1-1}\mathbf{B}_i)$$

alterek direktösszege.

Végül ábrán is szemléltetjük a rendszerek szétcsatolását.

Vertikum típusú rendszerek



Szétcsatolt dinamikájú rendszerek

6.3. ábra

7. Vertikum típusú rendszerek alkalmazásai

A dolgozatomban megfogalmazott absztrakt rendszerelméleti keret lehetővé teszi, hogy a korábban vizsgált vertikum típusú rendszerosztályt széles körben alkalmazzuk. Ebben a fejezetben rövid áttekintést adok egyes jellemző mérnöki és populációökológiai alkalmazásokról.

A vertikum típusú rendszereket bizonyos ipari rendszerek modellezése céljából vezettem be. Ezek a rendszerek hierarchizált lineáris „alrendszerekből" állnak oly módon, hogy az alrendszerek állapotváltozói a következő rendszer állapotváltozóira hatnak. A megfigyelhetőségre és irányíthatóságra szükséges és elégséges feltételeket adtam ilyen rendszerek esetében [19], további rendszerelméleti tulajdonságaikat vizsgáltam [19], [22], [20] és [25] szerint.

A vertikum típusú rendszerek egyik fontos jelenlegi alkalmazása a populációökológia területén található. A populációk kölcsönhatása jellemzően nemlineáris, de [67] megmutattam, hogy egy tipikus, erőforrás – termelő – elsődleges felhasználó – másodlagos fogyasztó láncot lehet egy konkrét ökológiai kölcsönhatásrendszerben vertikum-típusú rendszerként azonosítani. Ezzel pedig az eredeti modell megfigyelhetőségét lokálisan egy lineáris rendszer megfigyelhetőségére redukálhatjuk. A továbbiakban néhány fontos alkalmazást a témában írt cikkeim alapján tekintek át.

7.1. Környezeti változások monitorozása ökoszisztémákban

Az emberi (pl. szennyezés) tevékenységek hatásának detektálása és a környezet változásának (pl. klímaváltozás) megfigyelése fontos részét képezik a bioszféra mint összetett rendszer elemzésének. Feltesszük, hogy egy abiotikus változás a populáció-rendszer paramétereire gyakorol valamilyen hatást, ekkor egyidejűleg akarjuk becsülni a folyamatot és a paraméterek változását, megfigyelve bizonyos indikátorpopulációk denzitását. A probléma megoldásának fontos része a megfigyelhetőség, amely ebben a kontextusban azt jelenti, hogy egy vagy több (de nem az összes) állapotváltozó megfigyeléséből az egész populáció-rendszer állapotfolyamata elvben egyértelműen visszanyerhető (anélkül hogy konstruktív módszert adnánk a folyamat meghatározására). Amint egy létező egyensúly körüli lokális megfigyelhetőség igazolást nyer, szükség van az állapotfolyamat becslésének konstruktív módszerére, e célból pedig egy segédrendszert, ún. megfigyelőrendszert alkalmazhatunk. Ezt a megfigyelt adatokból állíthatjuk össze, és a teljes állapotfolyamathoz exponenciális sebességgel konvergáló becslést ad. Ekkor, ha emberi tevékenységből származó környezeti zavar (pl. szennyezés) jelentkezik a rendszerben, ez megváltoztathatja a populáció-rendszer modelljének paramétereit, amit e paraméterekhez hozzáadott ismeretlen (konstans vagy időtől függő) paraméterek segítségével fejezhetünk ki.

Két esetet különböztethetünk meg, az első esetben bizonyos biológiai paraméterek kapcsán (ismeretlen) additív konstansok jelenlétét feltételezzük, és megfigyelésekből becsüljük mind az ismeretlen paramétereket, mind a populáció-rendszer megoldását. A második esetben bizonyos biológiai paraméterek ismert dinamika szerint változnak, amelyet egy kiegészítő, ún. exorendszer ír le.

A következőekben ezt a két esetet tekintem át egy megfigyelőrendszer kialakításán és numerikus példán keresztül. Ha a fenti folyamatbecslési eljárást a populációdinamikát és exorendszert egyaránt tartalmazó összetett rendszerre alkalmazzuk, akkor nemcsak az állapotváltozók, de az abiotikus zavarokat jelző ismeretlen konstansok aszimptotikus becslésére is módszert adunk.

7.1.1. Megfigyelő konstruálása egy rendszerben bekövetkező ismeretlen környezeti változás esetén

A modell feltételezése szerint az adott ökoszisztémában egyrészt az adott élőhelyen több, egymással kölcsönhatásban levő populáció van jelen, másrészt egy abiotikus (nem biológiai jellegű) környezet.

Ez utóbbi klímabeli változásoknak (pl. évszakok) és/vagy emberi hatásoknak (mint pl. szennyezések) van kitéve, amelyek bizonyos rendszerparaméterek megváltozásában nyilvánulnak meg. A ragadozó-préda modellek esetében feltesszük, hogy az abiotikus paraméterek referenciaértéke ismeretlen (konstans) értékre változik. A változás hatását egy kis additív értékkel (zavarral) írjuk le bizonyos modellparaméterekben, amelyet $w \in R$ -rel jelölünk. A következő példa azt illusztrálja, hogy a rendszer részleges megfigyeléséből hogyan nyerhetjük vissza a teljes populáció-rendszer állapotfolyamatát és becsülhetjük az ismeretlen zavarokat a vonatkozó megfigyelői rendszer konstruálásával és megoldásával. Az első esetben mindegyik Malthus-i paraméterben, míg a második esetben a kölcsönhatási paraméterekben engedünk meg abiotikus zavaró hatást.

Tekintsük az alábbi populáció-rendszert, melyet egy w-re vonatkozó triviális egyenlettel egészítettünk ki:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(a_1 + c_1 w - b_{11}x_1 - b_{12}x_2)\\
\dot{x}_2 &= x_2(a_2 + c_2 w + b_{21}x_1 - b_{22}x_2 + b_{23}x_3)\\
\dot{x}_3 &= x_3(a_3 + c_3 w - b_{32}x_2 - b_{33}x_3)\\
\dot{w} &= 0
\end{aligned} \tag{7.1.1.1}$$

ahol $a_i,\ b_{ij},\ c_i > 0$ minden $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$ esetén.

Világos, hogy ha $x^* > 0$ az eredeti ($w = 0$ melletti) rendszer aszimptotikusan stabil egyensúlya, akkor az $(x^*, 0)$ a fenti rendszer egyensúlyát szolgáltatja.

A (7.1.1.1) rendszer mindkét (x, w) komponensének, vagyis az állapotfolyamat és az ismeretlen paraméter becsléséhez feltesszük, hogy a két zsákmányfaj denzitását figyeljük meg:

$$y = h(x) = (x_1 - x_1^*, x_3 - x_3^*).$$

Ekkor a h megfigyelési függvény és a (7.1.1.1) rendszer egyensúlybeli linearizációja:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -b_{11}x_1^* & -b_{12}x_1^* & 0 & c_1x_1^*\\ b_{21}x_2^* & -b_{22}x_2^* & b_{23}x_2^* & c_2x_2^*\\ 0 & -b_{32}x_3^* & -b_{33}x_3^* & c_3x_3^*\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.1.1.2}$$

Egyszerűen adódik, hogy $\mathrm{rang}[\mathrm{C}|\mathrm{CA}|\mathrm{CA}^2|\mathrm{CA}^3]^{\mathrm{T}} = 4$. Ekkor a rendszer lokálisan megfigyelhető az egyensúly környezetében, és egy megfelelő megfigyelő rendszer konstruálható.

Egy példán keresztül vizsgálható az az eset is, amikor valamilyen környezeti hatás lép fel minden fajközi kölcsönhatási paraméterben. Ekkor a rendszer a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(a_1 - b_{11}x_1 - (b_{12} + c_{12}w)x_2)\\
\dot{x}_2 &= x_2(a_2 + (b_{21} + c_{21}w)x_1 - b_{22}x_2 + (b_{23} + c_{23}w)x_3)\\
\dot{x}_3 &= x_3(a_3 - (b_{32} + c_{32}w)x_2 - b_{33}x_3)\\
\dot{w} &= 0
\end{aligned} \tag{7.1.1.3}$$

ahol a_i, b_{ij}, $c_{ij} > 0$ minden i, $j = 1$, 2, 3. esetén.

Ahogy az előző esetben is, itt is $x^* > 0$ esetén $(x^*, 0)$ a rendszer egyensúlya lesz. Ismét a két zsákmánypopulációt megfigyelve adódik

$$y = h(x) = (x_1 - x_1^*, x_3 - x_3^*).$$

Ekkor a linearizációból adódó

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -b_{11}x_1^* & -(b_{12} + c_{12}w)x_1^* & 0 & -c_{12}x_1^*x_2^* \\ (b_{21} + c_{21}w)x_2^* & -b_{22}x_2^* & (b_{23} + c_{23}w)x_2^* & c_{21}x_1^*x_2^* + c_{23}x_2^*x_3^* \\ 0 & -(b_{32} + c_{32}w)x_3^* & -b_{33}x_3^* & -c_{32}x_2^*x_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.1.1.4}$$

mátrixokból ismét azt kapjuk, hogy $\mathrm{rang}[\mathrm{C}|\mathrm{CA}|\mathrm{CA}^2|\mathrm{CA}^3]^{\mathrm{T}} = 4$. Felhasználva Lee és Markus eredményeit, adódik a megfigyelhetőség, és egy megfelelő megfigyelő rendszer ismét megkonstruálható [56].

7.1.2. Megfigyelő exorendszerrel leírt környezeti változások esetén

Ebben a szakaszban egy olyan populáció-rendszerhez tervezünk megfigyelőt, ahol feltesszük, hogy az abiotikus környezetben folyamatos változás van valamilyen dinamikus törvényszerűség szerint, amelyik érinti a populáció-rendszer bizonyos paramétereit.

Az abiotikus folyamat lehet például egy ipari üzemből származó szennyezés, egy szezonális hőmérsékletingadozás, vagy globális éghajlatváltozásból származó monoton növekvő hőmérsékleti trend.

A következő példában az egyes eltérő dinamikákat eltérő differenciálegyenletekkel írjuk le. A helyzetet egy összetett megfigyelési rendszer írhatja le, amely az abiotikus rendszert egy exorendszerként ábrázolja.

Feltehető, hogy α és δ ismert pozitív konstansok, és a külső rendszer

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \alpha w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\delta w_1 \end{aligned} \tag{7.1.2.1}$$

alakú. Ez olyan periodikus változást ír le, amely a zsákmány és ragadozó közötti interakció együtthatóit az alábbiak szerint befolyásolja:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a_1 - b_{11}x_1 - (b_{12} + c_{12}w_1)x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-a_2 + (b_{21} + c_{21}w_1)x_1 - b_{22}x_2 + (b_{23} + c_{23}w_1)x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(a_3 - (b_{32} + c_{32}w_1)x_2 - b_{33}x_3) \\ \dot{w}_1 &= \alpha w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\delta w_1, \end{aligned} \tag{7.1.2.2}$$

ahol az összes paraméter pozitív. Legyen továbbra is $x^* > 0$ a rendszer aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja. Mivel a nulla stabil egyensúlyi pontja a (7.1.2.1) rendszernek, ezért (ld. pl. Isidori, 1995) az $(x^*, 0)$ a (7.1.2.2) stabil egyensúlya. Ezzel az észrevétellel az $y = h(x) = (x_1 - x_1^*, x_3 - x_3^*)$ az előző példákhoz hasonlóan és Sundarapandian (2002) 8. tételét felhasználva a rendszer megfigyelőjét konstruálhatjuk.

Tegyük fel most, hogy a zsákmánypopuláció reprodukciós rátája és a ragadozók kihalási rátája a hőmérséklettel növekedő. Az ilyen abiotikus hatást leíró, összetett rendszer az alábbi lehet:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(a_1 + c_1 w - b_{11}x_1 - b_{12}x_2) \\
\dot{x}_2 &= x_2(-a_2 - c_2 w + b_{21}x_1 - b_{22}x_2 + b_{23}x_3) \\
\dot{x}_3 &= x_3(a_3 + c_3 w - b_{32}x_2 - b_{33}x_3) \\
\dot{w} &= \alpha(1 - \delta w),
\end{aligned} \tag{7.1.2.3}$$

ahol az összes paraméter pozitív.

Mivel $w^* := 1/\delta$ aszimptotikusan stabil egyensúlya a $\dot{w} = \alpha(1 - \delta w)$ egyenletnek, az (x^*, w^*) egyensúly Ljapunov-stabil lesz a (7.1.2.3) rendszerre nézve. Így az $y = h(x) = (x_1 - x_1^*, x_3 - x_3^*)$ megfigyelés esetén megfelelő megfigyelőt tudunk konstruálni.

A fenti eredmények az ökoszisztémák monitorozási módszertanának továbbfejlesztését adták környezeti változás esetén. Az alkalmazott módszertan nem csak a populáció állapotfolyamatának becslésére szorítkozik, vagy rendszermodell konstansaiban (belső növekedési rátában vagy predációs rátában) bekövetkezett változások detektálására alkalmas, hanem lehetővé teszi adott abiotikus tényezőkben bekövetkező folytonos változások (pl. ipari szennyezés, klímaváltozás) biológiai hatásának vizsgálatát.

A populáció-rendszer ismeretlen megoldásának megkeresése egyértelműen ekvivalens a vizsgálati időtartam kezdeti értékére vonatkozó információ birtoklásával, ezért a megfigyelő kezdeti értékét tetszőlegesen, de az egyensúlyhoz közel választjuk.

A fenti megközelítés természetesen kiterjeszthető a bemutatott egyszerű ökoszisztéma-modellen túl komplexebb modellekre, így nem Lotka-Volterra típusú modellekre is, ilyen pl. az erőforrás – termelő – elsődleges fogyasztó rendszer, ld. Shamandy (2005).

Valós gyakorlati alkalmazás során a modell diszkrét idejű kiterjesztése is szükséges lehet, például diszkrétidejű nemlineáris megfigyelő tervezésére ld. pl. Sundarapandian (2005).

7.2. Nemlineáris vertikum típusú rendszerek megfigyelésének alkalmazása ökológiai monitorozás területén

Ebben a szakaszban a 7.1. fejezetben megfogalmazott eredményeket általánosítom.

Először az általános (nemlineáris) vertikum típusú megfigyelési rendszer fogalmát vezetjük be. A vertikum típusú rendszerek több alrendszerből állnak, amelyek szekvenciálisan kapcsolódnak egymáshoz. Kapcsolatuk sajátossága abból fakad, hogy az adott alrendszer állapotváltozóinak egy része a következő rendszerben exogén változóként jelenik meg, amely tehát értelmezhető az exorendszer által generált irányításként. Ezért ezek az alrendszerek nem megfigyelési rendszerek, de formálisan irányítási-megfigyelési rendszerekként értelmezhetőek. Az ilyen rendszerek esetében a megfigyelhetőség kérdése az alrendszerek rangfeltételeire redukálható. A „nagy", vertikum típusú rendszer egyensúlyi megoldására tett Ljapunov-stabilitási feltétel mellett megmutatható, hogy a linearizált alrendszerekre teljesülő Kálmán-féle rangfeltételből következik az eredeti nemlineáris vertikum típusú rendszer megfigyelhetősége.

A fenti linearizálhatósági eredményt illusztrálandó, egy állapotstrukturált halászati modellt mutatok be tilalmi zónával (reserve area). Ennek a rendszernek a megfigyelhetősége a fenti linearizációs és dekompozíciós eredményből adódik. Továbbá megmutatható, hogy egy megfelelő megfigyelő kialakításával minden alrendszerre a kifejlett egyedek részpopulációja denzitásának megfigyeléséből a halászható méreten aluli, juvenilis egyedek denzitása is hatékonyan becsülhető.

A továbbiakban elégséges feltételeket adok a lokális megfigyelhetőségre, a bizonyítás egy természetes dekompozíció, amely Lee és Markus linearizációs módszerén alapszik. Ezek után egy nemlineáris vertikum típusú rendszer segítségével egy állapotstrukturált halászati modellt adok meg, ennek a monitorozási problémáját mutatjuk be, először a lokális megfigyelhetőséget elemezve az előző eredmény segítségével, majd Sundarapandian megfigyelőtervezési módszerét minden alrendszerre alkalmazva megmutatjuk, hogy a kitermelhető kifejlett egyedek denzitásából hatékonyan becsülhető a juvenilis egyedek denzitása.

7.2.1. Állapotstrukturált halászati modell tilalmi zónával

Az általános linearizációra vonatkozó eredmény illusztrálására a Guiro et al. [][2] által javasolt állapotstrukturált halászati modell egy módosított változatát tekintjük, feltételezve, hogy van egy halászati tilalmi zóna. A következőekben az N_{ij} denzitás első indexe a zónát jelöli, $i = 1$ esetén a tilalmi zónát, $i = 2$ esetén a szabad zónát, a második index a fejlődési fázisra utal, $j = 0$ a juvenilis egyedekre (ikrák, halivadékok, méreten alul kifejlett egyedek), $j = 1$ pedig a lehalászható egyedekre utal. A rendszer dinamikáját a következő autonóm differenciálegyenlet-rendszerrel modellezhetjük:

$$\dot{N}_{10} = -m_{10}N_{10} + f_{11}N_{11} - p_{11}N_{10}N_{11} - p_{10}N_{10}^2 \tag{7.2.1.1}$$

$$\dot{N}_{11} = \alpha_{11}N_{10} - m_{11}N_{11} - \beta N_{11} \tag{7.2.1.2}$$

$$\dot{N}_{20} = -m_{20}N_{20} + f_{21}N_{21} - p_{21}N_{20}N_{21} - p_{20}N_{20}^2 \tag{7.2.1.3}$$

$$\dot{N}_{21} = \alpha_{21}N_{20} - m_{21}N_{21} + \beta N_{11} - qEN_{21}, \tag{7.2.1.4}$$

ahol:

m_{ij} = az ij osztály természetes mortalitása,

α_{i1} = a juvenilis fázisból a halászható fázisba való átmenet rátája az $i = 1, 2$ zónában,

p_{i0} = a juvenilis egyedek kompetíciójára jellemző paraméter az $i = 1, 2$ zónákban,

f_{i1} = a halászható egyedek szaporodási rátája az $i = 1, 2$ területeken,

p_{i1} = a halászható egyedek predációs rátája a juvenilis egyedekre vonatkozóan az $i = 1, 2$ zónákban,

q = a halászható egyedek kitermelési rátája a nem védett zónában,

β = a halászható egyedek migrációs rátája a tilalmi zónából a szabad zóna felé,

E = állandó halászati intenzitás.

A következőekben feltesszük, hogy

$$f_{11}\alpha_{11} - m_{10}(m_{11} + \beta) > 0. \tag{7.2.1.2}$$

A fenti modellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy tilalmi zónával rendelkező állapot-strukturáltság nélküli halászati modellt tanulmányozott Gámez logisztikus növekedés feltétele mellett.

Pozitív egyensúly létezése

A (7.2.1.1) rendszer pozitív (tehát nemtriviális) egyensúlya a (7.2.1.2) feltétel mellett a fenti eredményeket figyelembe véve garantálható, és az egyensúly egyértelmű.

A pozitív egyensúly aszimptotikus stabilitása

A vertikum típusú rendszerben két, V_0 és V_1 alrendszert definiálhatunk a korábbiak szerint

7.2.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy* (7.2.1.2) *teljesül,*

$$f_{11} - p_{11}N_{10}^* < 0, \quad \textit{és} \quad f_{21} - p_{21}N_{20}^* < 0, \tag{7.2.1.3}$$

ekkor az N_1^{1*} és N_2^{1*} egyensúlyok aszimptotikusan stabilak rendre az alábbi rendszerekben:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{10} &= -m_{10}N_{10} + f_{11}N_{11} - p_{11}N_{10}N_{11} - p_{10}N_{10}^2 \\ \dot{N}_{11} &= \alpha_{11}N_{10} - m_{11}N_{11} - \beta N_{11} \end{aligned} \tag{7.2.1.4}$$

és

$$\begin{aligned} \dot{N}_{20} &= -m_{20}N_{20} + f_{21}N_{21} - p_{21}N_{20}N_{21} - p_{20}N_{20}^2 \\ \dot{N}_{21} &= \alpha_{21}N_{20} - m_{21}N_{21} + \beta N_{11} - qEN_{21} \end{aligned} \tag{7.2.1.5}$$

Az aszimptotikus stabilitás biológiai interpretációja mindkét fejlődési fázis stabilis koegzisztenciája mindkét területen.

7.2.1.2. Tétel. *Ha a* (7.2.1.2) *és* (7.2.1.4) *feltételek fennállnak, akkor* $N^{1*} = (N_1^{1*}, N_2^{1*})$ *aszimptotikusan stabil pozitív egyensúlya a* (7.2.1.1) *rendszernek.*

Mivel az aszimptotikus stabilitásból következik a Ljapunov-stabilitás, ezért a következő részben alkalmazhatjuk a megfelelő nemlineáris vertikum típusú megfigyelési rendszerre vonatkozó eredményünket.

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy a (7.2.1.5) rendszer triviális egyensúlya instabil, ha

$$f_{11}\alpha_{11} - m_{10}(m_{11} + \beta) > 0, \quad \text{és} \quad f_{21}\alpha_{21} - m_{20}(m_{21} - qE) > 0;$$

és aszimptotikusan stabil, ha az egyenlőtlenségek ellenkező irányúak.

7.2.2. Megfigyelhetőség és megfigyelő tervezése a modellben

Megfigyelhetőség

A $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ megfigyelési függvényt feltételezzük, amelyet az alábbi egyenlőség definiál:

$$y = h(N_1, N_2) = (N_{11} - N_{11}^*, qE(N_{21} - N_{21}^*)). \tag{7.2.2.1}$$

7.2.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* (7.2.1.2) *és* (7.2.1.4) *feltételek fennállnak. Ekkor a* $(7.2.1.4), (7.2.2.1)$ *megfigyelési rendszer lokálisan megfigyelhető az* $N^* = (N_1^{1*}, N_2^{1*})$ *egyensúly környezetében.*

Megfigyelő rendszer konstrukciója

A $(7.2.1.2), (7.2.1.4)$ megfigyelési rendszer esetén, Sundarapandian megfelelő megfigyelő konstrukcióját alkalmazva, elegendő egy olyan K^1 mátrixot találni, hogy $A_1 - K^1C_1$ Hurwitz-típusú legyen [56].

Diszkusszió

A populációökológiai modellezésben a vertikum típusú rendszerek két helyzetben fordulnak elő: egyrészt amikor fajok között egyoldalú hatás van, pl. kommenzalizmus (egy kommenzalista állatfaj például egy növényt használ élettereként, anélkül hogy kárt tenne benne). Másrészt, amikor egyirányú biomassza-áramlás van az egyik élőhely irányából a másik felé, a jelen szakaszban ez utóbbit tanulmányoztuk. Evégett szükséges volt a vertikum típusú rendszer általánosítása nemlineáris esetre is. Az ilyen rendszerek monitorozási problémájának dekompozíciójához a (lineáris rendszerekre létező) megfigyelhetőség elégséges feltételét terjesztettük ki a nemlineáris esetre. Szintén megmutattuk, hogy a rendszer részleges megfigyelésén alapuló hatékony állapotbecsléséhez egy Luenberger-típusú megfigyelő rendszert lehet létrehozni az alrendszerekre való dekompozícióval.

Az eredményeket egy tilalmi zónával rendelkező halászati modellen keresztül illusztráltuk, de kiterjeszthetőek egy bonyolultabb vertikum típusú populáció-rendszerre is, amely tartalmazhat abiotikus hatásokat és/vagy változó környezetet is.

7.3. Megfigyelők konstruálása táplálékhálózatban

A populációökológiában és a természetvédelem (konzerváció-ökológia) körében gyakran merül fel az adott populáció kívánatos egyensúlyi állapotba való irányításának feladata. Ezt megelőzően azonban a rendszer aktuális állapotának megfigyelése szükséges. Gyakran viszont az állapotvektornak csak bizonyos komponenseit tudjuk megfigyelni (gazdasági vagy technikai okokból). Dinamikus környezetben azonban a megfigyelt komponensekből az egész állapotfolyamatot elő kell állítani tudnunk. A matematikai rendszerek megfigyelhetősége lehetőséget ad elméletben az állapotfolyamat egyértelmű meghatározására a megfigyelésekből, de a vonatkozó eredmények nem adnak erre konstruktív módszert. Erre vonatkozóan javasoltunk egy megfigyelői rendszert (megfigyelőt) amelyik az indikátorfajok megfigyelésével az egész állapotfolyamat rekonstruálására alkalmas az egyensúly közelében, legalább aszimptotikusan.

Nemlineáris dinamikus rendszerek lokális megfigyelhetőségre általános elégséges feltételt találunk a szakirodalmi forrásokban. Ezt a feltételt később eredményesen használták különböző frekvenciafüggő populációgenetikai modellben, evolúciós modellekben és reakció kinetikai modellekben. Lotka-Volterra modellekbeli megfigyelhetőségre mutat példát, egyszerű táplálékláncra adva lokális megfigyelhetőségi feltételt.

A nemlineáris megfigyelési rendszerek tervezése főleg a mérnöki terület problémáiból fakadóan a matematikai rendszerelmélet széleskörben tanulmányozott része, a továbbiakban [47] által adott új eredményekre alapozva mutatunk alkalmazást lokális exponenciális megfigyelő kialakítására ötfajos tápláléklánc esetében.

Eredmények

A vizsgált tápláléklánchálózatban (a továbbiakban: hálóban) öt faj található, egy ragadozó, két növényevő és két növény, a kölcsönhatások az alábbiak: a ragadozó (3. faj) az A növényevőből táplálkozik (2. faj), amelyik az A növényből táplálkozik (1. faj). A ragadozó a második növényevőből (4. faj) is táplálkozik amely a B növényt fogyasztja (5. faj). Más kölcsönhatás nincs, és a fajokon belüli kölcsönhatás a ragadozó fajt leszámítva elhanyagolható.

A kölcsönhatási mátrix alakja:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{43} & 0 & \gamma_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{54} & 0 \end{bmatrix}$$

ahol $\gamma_{33} > 0$, $\gamma_{21}, \gamma_{32}, \gamma_{34}, \gamma_{45} < 0$ és $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{43}, \gamma_{54} > 0$.

Feltételezzük, hogy a fajok viselkedését Lotka-Volterra modellel jellemezhetjük, úgy, hogy az i. faj időfüggő sűrűségét leíró differenciálegyenlet az alábbi:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := x_i \left[\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{5} \gamma_{ij} x_j \right]; \qquad i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$$

ahol az ε_i-k a Malthus paraméterek, γ-k a kölcsönhatási mátrix elemei, az x_i denzitások $\mathbf{x}$ vektora lesz a populáció állapotvektrora, és $f : R^5_+ \to R^5$.

Feltesszük, hogy van egyetlen pozitív egyensúlya a rendszernek: Γ invertálható, és $x^* = \Gamma^{-1}\varepsilon$ pozitív. Legyen $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ és $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_m \leq 5$. A megfigyelési mátrixot $\mathbf{C}$-vel jelölve tetszőleges $\mathbf{x}$ állapotvektor esetén a $\mathbf{Cx}$ vektor koordinátái a megfigyelt koordináták, technikai okokból az aktuális sűrűségek helyett az egyensúlytól való eltérést tekintjük:

$$h : \mathbf{R}^5_+ \to \mathbf{R}^m, \qquad h(\mathbf{x}) := \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

Az egyszerűség és a biológiai értelmezhetőség kedvéért vizsgálatainkat az állapotvektor egy koordinátájára korlátozzuk, és felhasználva egy linearizációs eljárást [11] kapunk lokális megfigyelhetőségi feltételt rendszerünkre.

A ragadozó fajok megfigyelése esetében a megfigyelési mátrix $\mathbf{C} = [00100]$ alakúként definiálható, és rövid levezetés után kapjuk az alábbi tételt:

7.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a fenti kölcsönhatási mátrixszal leírt háló fajközi kölcsönhatási együtthatóira teljesülnek, hogy* $\gamma_{33} > 0$, $\gamma_{21}, \gamma_{32}, \gamma_{34}, \gamma_{45} < 0$, *és* $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{43}, \gamma_{54} > 0$, *továbbá* $\gamma_{12}\gamma_{21}x_1^*x_2^* \neq \gamma_{45}\gamma_{54}x_4^*x_5^*$.

Ekkor a rendszer a ragadozó faj megfigyelésével az x^* *egyensúlyi pont környezetében lokálisan megfigyelhető.*

Vagyis bármikor, amikor az abiotikus (pl. környezeti vagy emberi eredetű) hatás kellően kicsi, a rendszer megfigyelése lehetséges csak a ragadozófaj egyedszámának mérésével. A következőekben hasonló állításokat vizsgálunk eltérő megfigyelési helyzetekre.

A növényevők nem megkülönbeztethető megfigyelése

Tegyük fel, hogy két növényevő fajt figyelünk meg, és nem tudunk köztük különbséget tenni, a megfigyelési mátrix ekkor $\mathbf{C} = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]$ alakú. Tegyük fel továbbá, hogy a fenti tételben megfogalmazott feltétellel ellentétesen $\gamma_{12}\gamma_{21}x_1^*x_2^* = \gamma_{45}\gamma_{54}x_4^*x_5^*$. A ragadozó fajjal kapcsolatban feltesszük, hogy a konverziós ráták (növekedésük az egyes zsákmányfajok növekedésének hatására) nem egyenlőek, $\gamma_{32} \neq \gamma_{34}$. Akkor megmutatható, hogy a két növényevő együttes megfigyelése az egyensúly közelébeni lokális megfigyelhetőséget biztosítja.

Növényfaj megfigyelése

Ha a növényfajt figyeljük meg, akkor a megfigyelési mátrix $\mathbf{C} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ alakú, ekkor a megfigyelési mátrix rangja teljes, tehát a növénypopuláció megfigyelésével a teljes rendszer megfigyelhető.

Megfigyelő konstruálása

A fenti modellhez kapcsolódóan megfigyelőt konstruáltunk a ragadozófaj megfigyelésén keresztül. Az A és C mátrixok felhasználása mellett feltesszük, hogy a 3.1. tételben megfogalmazott feltételek teljesülnek, ekkor a rendszer lokálisan megfigyelhető $\mathbf{x}^*$ környezetében. Ekkor definiáljuk a $\mathbf{K}$ mátrixot úgy, hogy $\mathbf{A} - \mathbf{KC}$ stabil legyen, ekkor a Routh-Hurwicz tételt felhasználva megmutatjuk, hogy lokálisan exponenciális megfigyelő rendszert kapunk. Ezeket az alábbi tételben foglalhatjuk össze

7.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a fent leírt tápláléklánc-háló teljesíti a 7.3.2.. tételben megfogalmazott feltevéseket,* $\mathbf{x}^*$ *Ljapunov-stabil. Ekkor a*

$$\dot{z} = f(z) + \mathbf{K}[y - h(z)]$$

dinamikus rendszer a fentiek szerint definiált $\mathbf{K}$ *mátrixszal lokálisan exponenciális megfigyelő rendszer a ragadozófaj megfigyelésével.*

Következtetések

Az ökológia és természetvédelem területén a hatékony monitoring-eljárás kialakítása kulcsfontosságú. A matematikai rendszerelmélet eszközöket ad a teljes állapotfolyamat rekonstruálására bizonyos indikátorfajok megfigyelései alapján. A fajok stabil együttélésének feltevése mellett tudunk az egyensúly közelében megfigyelőt konstruálni úgy, hogy a utóbbi megoldása aszimptotikusan megadja az állapotfolyamat megoldását, exponenciális konvergenciasebességgel.

A megfigyelői rendszer konstruálásából látható módon a segédmátrix megfelelő megválasztásával a becslési idő tranziens periódusa rövidíthető, így felgyorsítva a konvergenciát.

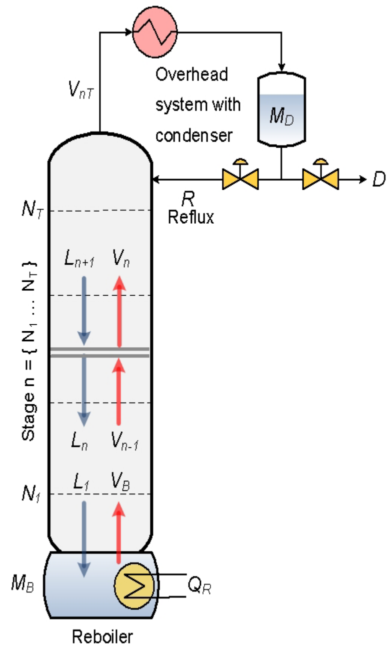
Ugyanezt a módszert lehet többszereplős táplálék-hálózatokban is alkalmazni, de itt az algebrai feltételek biológiai értelmezése nehézkesebb lehet.

7.4. Finomítási eljárások

A fejezet utolsó alkalmazását a vegyiparból vettem, a példához kapcsolódó részletes műszaki matematikai leírás megtalálható a [60] cikkben. Itt csak a probléma és a kapott eredmények ismertetésére szorítkozunk.

A finomítói rendszerek csatolt változata a finomkémia, a gyógyszeripar, a kozmetikai ipar és a biokémiai ipar fontos alkalmazása, ahol kis mennyiségű nyersanyagot dolgoznak fel nagy hozzáadott értékkel. Fontos a nagymértékű precizitás, emiatt olyan szabályozási eljárást kell alkalmazni, amely a termékek és folyamatok minőségét szavatolja. A terület egyre nagyobb jelentőségű, mivel az igény a magas finomítottságú vegyszerek és összetevők iránt egyre növekszik.

A csatolt finomítóirendszerek operatív irányítása a keletkező termékek összetételének ismeretét igényli a teljes folyamat során. Egyes esetekben modelprediktív irányítást alkalmaznak, amelyek az állapotbecslésből származó pontos adatok rendelkezésre állását igénylik. Ehhez hagyományosan összetételanalizátorokat alkalmaznak, amelyek bár nagyon pontosak, de egyben igen drága berendezések is, emellett a teljes mérés manuálisan zajlik. Fejlett szintű eljárások esetén ez nemkívánatos. Az analizátorok fő alternatívájaként hőmérséklet-visszacsatolásos szabályozókat alkalmaznak, ezek azonban az összetétel variációjának nem pontos indikátorai.



7.4.1. ábra: Finomítási folyamatábra

Egy másik alternatíva állapotbecslések alkalmazása, amelyek szekunder hőmérsékletmérésekre támaszkodnak megfigyelésként.

A csatolt finomítási eljárások komplex, magasabbrendű, nemlineáris folyamatokat követnek, időben változó dinamikával. Nemlineáris rendszerek robosztus állapotbecslésének externális zavarok ellenében való megállapítására számos esetben szükség van: szenzorok meghibásodása, a mérési jelekben bekövetkező zavarok stb.

A becslési módszerek közül való választás során egy adott probléma esetén az adott dinamikus rendszer legalább két tulajdonsága értékelendő helyesen: a bizonytalanság és az exogén zavarok természete.

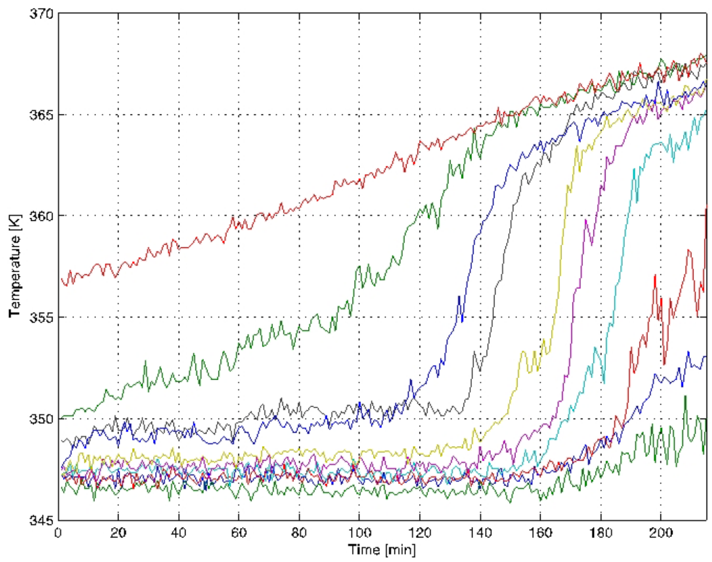
A bizonytalanság modellezésének mellőzése és a zavarok statisztikai tulajdonságának megbízható ismerete feltételei mellett (pl. adott paraméterű normális eloszlás esetén) a Kálmán-szűrő évtizedek óta egyeduralkodó, mind optimalitása, mind robosztussága miatt, valamint egyszerű implementálhatósága révén. Nemlineáris rendszerek esetében a kiterjesztett Kálmán-szűrő adja a megfelelő nemlineáris szűrőt.

Az alkalmazásoknak két fő területe ismert, ahol a kiterjesztett Kálmán-szűrő (KKSZ) megkülönböztetett figyelmet érdemel: folyamatirányítás és a vegyipar. Érdekes módon éppen ezen a két területen derül fény a KKSZ megoldásainak tarthatatlanságára.

Egyik probléma a trajektória körüli linearizációból fakad, ez instabilitást, nagy eltéréseket okoz.

A KKSZ másik tulajdonsága, hogy akkor is az aktuális állapothoz kell konvergálnia, amikor részlegesen ismert kezdeti feltételekkel inicializáljuk.

Laborkísérletekkel igyekeztünk találni egy, a KKSZ korlátait meghaladó alternatív szűrési eljárás lehetőségét [59]. Valós, nem szimulált, gyáregység-szintű adatok segítségével sikerült alternatív megfogalmazást adni egy csatolt finomítási eljárás segítségével, amely a vertikumtípusú rendszerek egyik jó gyakorlati példája.



7.4.2. ábra: Analitikusan redundáns hőmérsékletmérések

A szűrési probléma megfogalmazása

A kötegelt finomítási folyamat és érzékelőrendszere nemlineáris dinamikus rendszerként modellezhető, amelyeket az alábbi közönséges differenciálegyenlet-rendszer és megfigyelési egyenlet ad meg:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(x(t), u(t)), \\ \phi(t) &= h(x(t)). \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Speciális esetben ez átírható állapottérformába, az állapotegyenletek és a megfigyelési egyenletek segítségével, az additív zaj hatását figyelembevéve:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i + W_i \\ \phi &= h_i(x) + v_i, \qquad 1 \le i \le p, \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in \mathbb{R}^p$ rendre az állapot, input és outputjai a rendszernek. A $w(t)$ és $v(t)$ zajok, amelyek hatnak a rendszerre és a mérési egyenletre normális eloszlású, nulla várható értékű egymástól és $x(0)$-tól független fehérzajfolyamatok

Legyenek továbbá Q_i és R_i rendre v_i és w_i kovarianciamátrixai minden i-re

$$Q_i = \mathbf{E}\left\{v_k v_k^T\right\}, \quad R_i = \mathbf{E}\left\{w_k w_k^T\right\} \tag{7.4.3}$$

A következőekben statisztikai szűrőt adok meg, amely robusztus $\widehat{x}$ becslést ad az x állapotra.

A szűrő előfeltételei

A 7.4.1. ábra által leírt folyamat 10 elkülönülő finomítási fázisból áll, a 8 oszloptálcából, a reboiler-ból és a kondenzátorból a szokásos esetben.

A tálcákat az NT paraméter azonosítja, a control-input az üzemben levő folyadékáramlás visszárama, az érzékelők outputja az egyes tálcák hőmérsékletadatai (tálcánként egy, ez a (minimális) elégséges feltétel a megfigyelhetőségre).

A szűrési algoritmushoz a standard lineáris Kálmán-szűrő kiterjesztését alkalmazzuk.

Az unscented szűrő

A KKSZ továbbfejlesztéseként tekintsük az (unscented) megoldást, amely azon az intuitív várakozáson alapul, hogy rögzített számú véletlen paraméter esetén egyszerűbb egy normális eloszlást becsülni, mint egy tetszőleges nemlineáris függvényt. Ezért a rendszer állapoteloszlását egy véletlen, normális eloszlású változóval közelítjük, de minimális számú mintavételezési ponttal reprezentáljuk, amelyet az $\bar{x}$ átlag körül választunk, a P kovariancia pedig az alábbi vektorokban jelenik meg:

$$\begin{aligned} X_i &= \bar{x} + [(n+\lambda)P]^{1/2}, \qquad & i &= 1,\ldots,n, \\ X_i &= \bar{x} - [(n+\lambda)P]^{1/2}_{i-n}, \qquad & i &= n+1,\ldots,2n, \end{aligned}$$

ahol $X_i \in \mathbb{R}^{(2n+1)}$ és λ skálázási paraméter. Részletes definíció [**?**]-ban található. Az úgynevezett szigma-mátrix k időpontbeli értékét és a λ specifikus skálázást az alábbiak szerint számíthatjuk ki

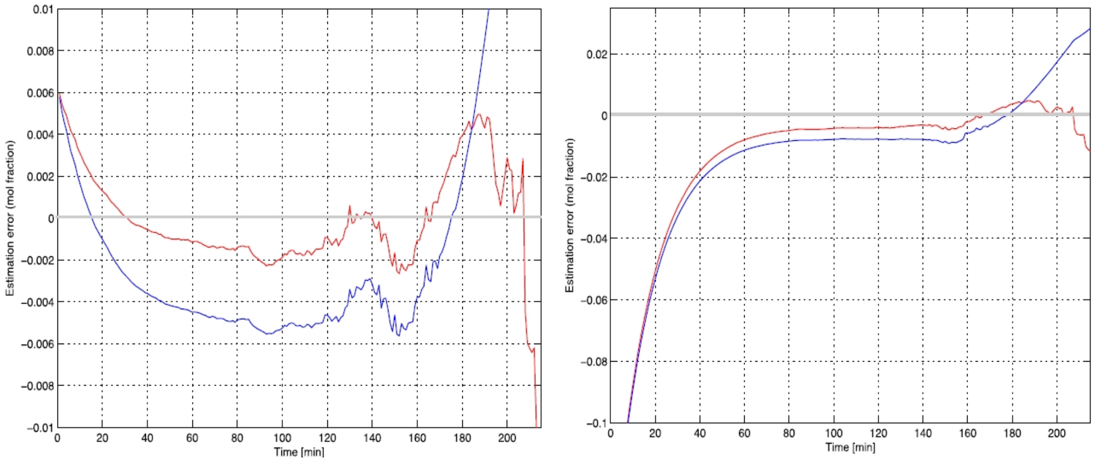
$$X_k = \left[\bar{x}_k, \bar{x}_l + \gamma P_k^{1/2}, \bar{x}_k - \gamma P_k^{1/2}\right],$$

ahol $\gamma = (n-\lambda)^{1/2}$.

Szimulációs eredmények (lásd [60]).

A folyamatszimulációkat MATLAB-bal végeztük. Elsődlegesen az EKF és UF algoritmusokat implementáltuk, és a szűrőket valós adatokra alkalmaztuk, melyeket a próbaüzemből nyertünk, a szimulációs eredményeket valós kísérleti adatokkal hasonlítottuk össze.

A nyers hőmérsékletmérések alapján az egyes szűrők teljesítményét mutatja tálcánként a szimulált folyamatok esetében a 7.4.2. ábra.



7.4.3. ábra: Szűrőkonvergencia a) mérsékelt és b) nagy kezdetifeltétel-eltérés esetében. EKF becslési hiba (kék vonal), UF becslési hiba (piros görbe).

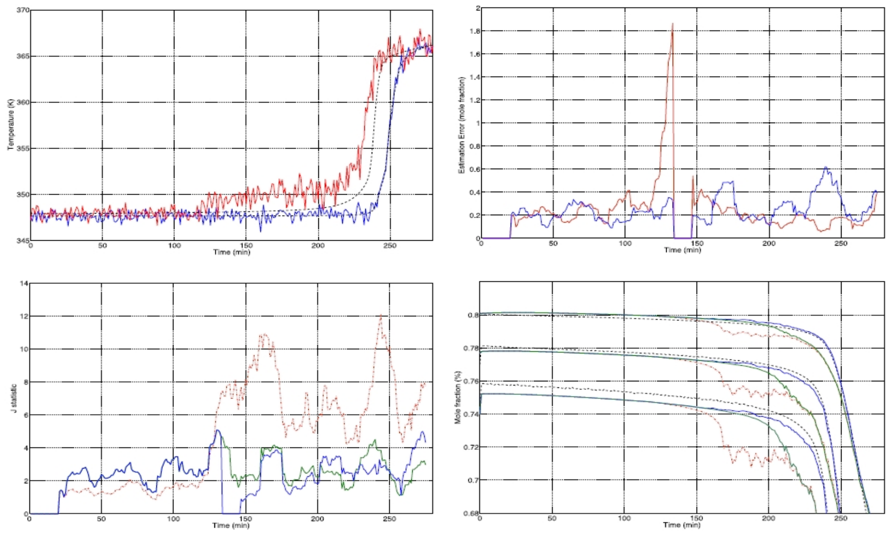
A becslési pontosságot az átlagos négyzetes hiba segítségével vizsgálhatjuk az EKF és UF esetében, ld. 7.4.1. táblázat. A legfontosabb teljesítménymutató, vagyis a végtermék összetétel becslési pontosságának jellemzése érdekében, a 7.4.4. ábra mutatja a becsült arányokat a kondenzátorban végzett pontos sűrűségmérésekkel összevetve.

A kezdeti feltételekre vonatkozó érzékenységvizsgálat során két kísérletet mutatunk be, a 7.4.3. ábra mutatja a konvergenciát mérsékelt és erős kezdetifeltétel-eltérés esetén (rendre 5% és 25% a eltérés a nominális állapotváltozótól).

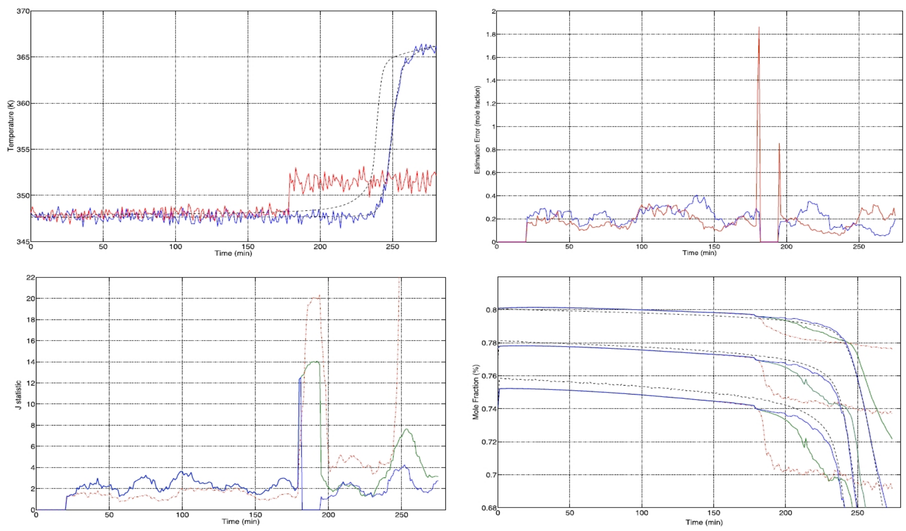
7.4.1. táblázat. Átlag-négyzeteshibamutatók az EKF és UF becslésekre

	MSE	
	EKF	UF
Kondenzátor	0.0079	0.0026
1. tálca	0.0139	0.0120
2. tálca	0.0104	0.0114
3. tálca	0.0076	0.0074
4. tálca	0.1050	0.0080
5. tálca	0.0089	0.0116
6. tálca	0.0131	0.0184
7. tálca	0.0135	0.0177
8. tálca	0.0098	0.0081
Reboiler	0.0024	0.0018

A második tálcán az adaptív hibatűrő szűrőt került összehasonlításra a standard EKF-megoldással. A szűrő abnormális bemeneti jelekre való reagálását különböző kísérleti szcenáriókban vizsgáltuk. A három szűrőbeállítást, nevezetesen a normális EKF-et, az adaptív EKF-et, és a hibatűrő adaptív EKF-et két jellemző szenzorhiba-eseménnyel teszteltük, összehasonlítva a kimenetet. Az első forgatókönyvben a kisebb bemeneti jelváltozások és kezdődő jelhibák hatását vizsgáltuk, ehhez a mérési zajban mérsékelt növekedést alkalmaztunk 120 alkalommal a szűrő bemenetén. A második forgatókönyvben egy folyamatos torzítást vittünk be a bemenetre egy konstans tag hozzáadásával 150 alkalommal, ez szintén egy jellemző szenzorhiba szimulált esete. A szűrők összehasonlítására kapott szimulációs eredményeket a 7.4.4. és 7.4.5. ábra mutatja.



7.4.4. ábra: Fönt balról jobbra lefelé: a) A mért szűrőhőmérséklet változása a bemeneti zaj variálásának hatására a 120. időpillanatban. b.) Az EKF reziduális hibái. c) A reziduális hibák küszöbértékének elérésekor működésbe lépő egyedi szűrők J-statisztikái. d) A becslés pontossága (piros: EKF, zöld: adaptív EKF, kék: adaptív EKF szűrőújrakonfigurálással, pontozott fekete: a tényleges folyamat).



7.4.5. ábra: Fönt balról jobbra lefelé: a) A mért szűrőhőmérséklet változása a bemeneti zaj variálásának hatására a 150. időpillanatban. b) Az EKF reziduális hibái. c) A reziduális hibák küszöbértékének elérésekor működésbe lépő egyedi szűrők J-statisztikái. d) A becslés pontossága (piros:EKF, zöld: adaptív EKF, kék: adaptív EKF szűrőújrakonfigurálással, pontozott fekete: a tényleges folyamat).

Látható, hogy az adott szűrési megközelítés hogyan befolyásolja a becslési pontosságot a két hibaszcenárióban. Míg a standard EKF-becslés a hibabejuttatás után szinte azonnal sem képes a valós állapotot követni, az adaptív szűrő képes a hibát kompenzálni és a hibatűrő mechanizmussal kiegészített verziója szinte érzéketlenné válik a bevezetett abnormalitásokra.

Hivatkozások

[1] Earl A. Coddington, Norman Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, New York: McGraw-Hill; New Delhi: Tata McGraw-Hill, p. 429, 1955.

[2] A. Seidenberg: An elimination theory for differential algebra, *University of California Press*, p. 31-66, 1956. ASIN: B007F6ILXU

[3] Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.S. Gamkrelidze and E.F. Mischenko: Mathematical Theory of Optimal Processes, *Pergamon Press*, The Macmillan Co., New York, 1964.

[4] Wei, J. and E. Norman: " On Global Representation of the Solutions of Linear Differential Equations as a Product of Exponentials", *Proc. Amer. Math. Soc* 15(12), pp. 327-334, 1964.

[5] Fattorini, H. O.: On complete controllability of linear systems, J. Diff. Equations 3, pp. 391-402, 1967.

[6] R.E. Kalman, P.L. Falb and M.A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, *McGraw-Hill Book Company*, New York, San Francisco, St. Louis, Toronto, London, Sydney, p. 353, 1969.

[7] I. Kaplansky: An Introduction to differential algebra, *Hermann*, Paris, p. 62, 1976. ISBN-10: 2705612513, ISBN-13: 978-2705612511

[8] I.R. Shafarevich, Basic algebraic geometry, *Springer*, 1977. (Translated from Russian.)

[9] Gamkrelidze, R.: Principles of Optimal Control Theory, In: Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, *Plenum Press*, New York and London, p. 175, 1978. ISBN-13: 978-1-4684-7400-8, e-ISBN-13: 978-1-4684-7398-8, DOI: 10.1007/978-1-4684-7398-8

[10] Kamen, E.W.: Lectures on algebraic system theory: Linear systems over rings, *NASA Contractor Report # 3016*, 1978.

[11] Fuhrmann, P. A., Linear Systems and Operators in Hilbert Space, McGraw-Hill, New York, 1981.

[12] Kamen, E.W. and P.P. Khargonekar: On the control of linear systems depending on parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 29, pp. 25-33, 1984.

[13] Molnár S.: Néhány új eredmény a megfigyelési rendszerekkel kapcsolatban, *Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, Matematikai és Számítástechnikai Intézet*, Budapest, 1984.

[14] A. Isidori: Nonlinear Control Systems: an introduction, Lecture notes in Control and Inform. Sciences 92, Springer, Berlin, p. 297, 1985.

[15] Molnár S.: Megfigyelési rendszerek vizsgálatáról, *Központi Bányászati Fejlesztési Intézet Közleményei*, 27., pp. 85-89, 1985.

[16] M. Fliess, A new approach to the structure at infinity of nonlinear systems, *Systems Control Letters* 7, pp. 419-421, 1986.

[17] Molnár S., Szidarovszky F.: A Stochastic Multiobjective Dynamic Programming Method with Application to Energy Modelling, Book Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Book: System Modelling and Optimization, (Eds.: Molnár, S; Szidarovszky, F,) *Springer*, Vol. 84, pp. 601-609, Berlin/Heidelberg, 1986. ISBN: 978-3-540-16854-6, ISSN: 0170-8643, DOI: 10.1007/BFb0043885

[18] Molnár S.: Observability and Controllability of Decomposed Systems I., *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 57-66, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[19] Molnár S.: Observability and Controllability of Decomposed Systems II., *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 67-72, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[20] Molnár S.: Observability and Controllability of Decomposed Systems III., *Math. Anal. and System Theory* 5., pp. 73-80, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[21] Molnár S.: Realization of Verticum-Type Systems, *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 11-30, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem) 1988.

[22] Molnár S., Szidarovszky F., Okuguchi K.: On a General Scheme in the Theory of Conflicts, *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 31-37, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[23] A. Haddak: Differential algebra and Controllability, In. Proc. IFAC Symposium, on Nonlinear Control Systems Designs, June 14-16, 1989, Capri, Italy, *Pergamon Press*, pp. 434-437, 1989.

[24] Füst Antal, Gondozó György, Molnár Sándor, Szidarovszky Ferenc: Széleshomokú fejtések teljeskörű geoinformációs rendszere, *BKL Bányászat*, Vol. 122., pp. 458-461, 1989.

[25] Molnár S.: A Special Decomposition of Linear Systems, *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, Vol. 29. No. 4, pp. 1-19, 1989.

[26] Molnár S., Bahill T.A., Szidarovszky F.: On Stable Adaptive Control Systems, *Pure Math. and Appl.*, Ser. B., Vol. 1. No. 2-3, pp. 115-121., 1990.

[27] S.P. Novikov and A.T. Fomenko: Basic Elements of Differential Geometry and Topology, p. 500, 1990. ISBN: 0-7923-1009-8

[28] Diop, S.: Elimination in control theory, Mathematics of Control, Signals and Systems, Vol. 4 No. 1, pp. 17-32, 1991.

[29] Fliess, M.: Controllability Revisited in Mathematical System Theory: The influence of R.E. Kalman, A.C. Antoulas (Ed.) *Springer-Verlag* , Berlin, 1991.

[30] Fliess, M.: Controllability Revisited, In: The influence of R.E. Kalman, A.C. Antoulas (Ed.) *Springer*, pp. 463-474, 1991.

[31] Szigeti, F.: A differential-algebraic condition for controllability and observability of time varying linear systems, Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, Vol 4., pp. 3088-3090, December 1992. ISBN: 0-7803-0872-7, DOI(Digital Object Identifier): 10.1109/CDC.1992.371050

[32] Szigeti, F.: " Kalman's Rank Conditions for Infinite Dimensional Time Dependent Linear Systems", *Proc. Conf. EQUADIFF*, pp. 927-931, Barcelona, Spain, 1992.

[33] Serre, J-P., Lie algebras and Lie groups. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, p. 168, 1992.

[34] Molnár S.: Kalman's Rank Conditions for Time Dependent Linear Systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 4. No. 3, pp. 353-361, 1993.

[35] Molnár S., Szigeti F., Carmen, E. Vera: Kalman-féle rangfeltételek az időtől függő lineáris rendszerekre, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 17. köt., 3-4. sz., 279-286. old., 1993.

[36] Molnár S.: Stabilization of verticum-type systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 4. No. 4, pp. 493-499, 1993.

[37] Molnár S., Szidarovszky F.: A dinamikus termelői-fogyasztói modell irányíthatóságáról, *SZIGMA*, Vol. 26. No. 1-2, pp. 49-54, 1994.

[38] Molnár S., Szidarovszky F.: A note on the coverability problem in input-output systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 5. No. 4, pp. 425-429, 1994.

[39] Molnár S., Szigeti F.: On time varying discrete-time linear systems: reachability, distinguishability and identifiability, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 5. No. 1, pp. 415-424, 1994.

[40] Molnár S., Szigeti F.: "On "Verticum"-Type Linear Systems with Time-Dependent Linkage", *Applied Mathematics and Computation* , Vol. 60., pp. 89-102., 1994.

[41] Molnár S.: On the optimization of INPUT-OUTPUT systems cost functions, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 5. No. 4, pp. 403-414., 1994.

[42] Molnár S., Szidarovszky F.: A dinamikus oligopólium probléma irányíthatóságáról, *SZIGMA*, Vol. 25. No. 3, pp. 95-102, 1994.

[43] J.-F.. Pommaret: Partial Differential Equations and Group Theory: New Perspectives for Applications, *Kluwer Academic Publisher*, Dordrecht, Boston, London, p. 473, 1994.

[44] F. Szigeti, J. Bokor and A. Edelmayer: On the reachability subspaces of time varying linear systems, *Proceeding of 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, September, 1995.

[45] Edelmayer, András and Szigeti, Ferenc and Varga, Z. (1995) Algebraic computation of the solution of first order linear partial differential equations in control with examples. In: ECC'95. Proceedings of the third European control conference. Roma, Vol. 4, 1995. (Part 1.)

[46] Molnár S., Szidarovszky, F., Yen, J.: On the Price-Trajectory Control of a Discrete Dynamic Producer - Consumer Market, *Appl. Math. and Com.*, Vol. 73, No. 2-3, pp. 249-256, 1995.

[47] Szigeti, F. and Vera, C.E.: *State elimination and reachability of infinite-dimensional time varying linear systems.* Eds.: JJ Gertler and JB[JR] Cruz and M Peshkin, In: Preprints of the 13th world congress of International Federation of Automatic Control. San Francisco, pp. 317-322, 1996.

[48] Molnár S.: Időtől függő vertikum-típusú lineáris rendszerekről, in MTA Közgyűlési előadások, 2000 május II. kötet, pp. 645-657, 2001, MTA. ISSN: 1585-1915

[49] Molnár S.: An algebraic condition to reachability of time varying discrete-time linear systems, Proc. of IEEE International Conference on Systems 2001, *Systems, Man, and Cybernetics*, Tucson, AZ, USA, Vol. 1, pp. 669-671, 2002. ISBN: 0-7803-7087-2

[50] Molnár S., Szigeti F.: Algebraic Conditions for Controllability and Reachability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, In: "*Control Aplications of Optimisation 2003*", *a proceedings volume from the 12th IFAC Workshop*, Visegrad, Hungary, 30^{th} June - 2^{nd} July 2003, Edited by: R. Bars, E. Gyurkovics, Published for IFAC by Elsevier Ltd. 2003.

[51] Molnár S., Szigeti, F.: Controllability and Reachability of Dynamic Discrete-time Linear Systems, *Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation*, 2003, Montreal, Canada, pp. 350-354, ISBN: 0-7803-7777-X, Library of Congress: 10-12 June 2003.

[52] Molnár S., Szidarovszky, F., Molnár, M.: Controllability of Time-varying Oligopolies, *Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation*, 2003, Montreal, Canada, WA05-5, *IFAC-IEEE*, pp. 570-573. ISBN: 0-7803-7777-X, Library of Congress: 10-12 June 2003.

[53] Molnár S., Szigeti, F.: Controllability and Reachability of Dynamic Discrete-time Linear Systems, *Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation*, 2003, Montreal, Canada, pp. 350-354, ISBN: 0-7803-7777-X, Library of Congress: 10-12 June 2003.

[54] Hebertt Sira-Ramírez, Sunil K. Agrawal: Differentially Flat Systems (Automation and Control Engineering), *Marcel Dekker Inc.*, New York, Basel, p. 450, 2004. ISBN 10: 0824754700, ISBN 13: 9780824754709

[55] Edelmayer, A., Bokor J., Szabó Z., Molnár S.: Inversion-based residual generation for robust detection and isolation of faults by means of estimation of the inverse dynamics in linear dynamical systems, *Proc. Int. Workshop of Principles of Diagnosis*, DX'07, pp. 67-74. Nashville, TN., 2007.

[56] Molnár S., López I., Gámez M.: Observability and observers in a food web, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 20, Issue 8, August 2007, pp. 951-957, 2007. Impact Factor: 0.699

[57] Molnár S., M. Gamez, I. Lopez: Monitoring Environmental Change in an Ecosystem, *Biosystems*, Vol. 93. No. 3, pp. 211-217, 2008. ISSN 0303-2647, Impact Factor: 1.08

[58] Molnár S., Szigeti F.: Generalized Fuhrmann's rank condition for Controllability and Reachability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 19, No. 1, pp. 55-66, 2008.

[59] Molnár S., Szigeti Ferenc, Molnár Márk: A Rank Condition for Controllability and Reachability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, *Mechanical Engineering Letters*, Vol. 3, pp. 8-16, Szent István University Faculty of Mechanical Engineering, Gödöllő, 2009.

[60] Miranda M., Edelmayer A., Molnár S.: Federated filtering: classical approaches in new approximations for distributed systems estimation, *Mechanical Engineering Letters*, (Szent István University, Gödöllő) Vol. 4, pp. 266-280, 2010.

[61] Molnár S., Alexandros Soumelidis, András Edelmayer, Ferenc Szigeti: On the qualitative properties of hierarchical systems, *Mechanical Engineering Letters*, (Szent István University, Gödöllő) Vol. 4, pp. 37-47, 2010.

[62] Molnár S., F. Szigeti: A generalisation of Fuhrmann's rank condition for discrete dynamic systems, *Int. J. System of Systems Engineering,* Vol. 2, No. 4, 2011.

[63] Alexandros Soumelidis, Molnár S., Ferenc Schipp: Identifying Harmonics in Mechanical Systems by Using Hyperbolic Wavelet Constructs, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 6, pp. 20-38, 2011.

[64] K. Tánczos, Molnár S., Á. Török, M. Molnár: Future trends in road transport systems in Hungary and in the EU, *Int. J. of Critical Infrastructures*, Vol. 7, No. 2, 2011.

[65] Molnár S., Miranda M, Molnár M., Soumelidis A.: Establishment of Optimal Realization-Independt Cost Functions, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 6, pp. 9-19, 2011.

[66] Miranda Moira, Edelmayer András, Molnár Sándor: Performance Verification of Advanced Filtering Alternatives for Robust Fault Tolerant State Estimation in Nonlinear Processes, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 6, pp. 234-255, 2011.

[67] Molnár S., M. Gámez and I. López: Observation of nonlinear verticum-type systems applied to ecological monitoring, *International Journal of Biomathematics*, Vol. 5, No. 6, pp. 1250051-1-1250051-15, 2012, DOI: 10.1142/S1793524512500519, IF:1.667

[68] Molnár S., M. Gámez, I. López, T. Cabello: Equilibrium control of nonlinear verticum-type systems, applied to integrated pest control, *BioSystems*, Vol. 113, pp. 72-80, 2013. DOI: 10.1016/j.biosystems.2013.05.005

[69] Molnár S.: On the properties of linear time varying systems, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 10, pp. 42-59, Gödöllő, 2013.

[70] Molnár S.: On the Reachability of Linear Time Varying Systems, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 11, No. 3, pp. 201-217, 2014.

[71] Hebertt Sira-Ramírez: Sliding Mode Control, *Birkhäuser Verlag Gmbh*, p. 258, 2015.

[72] Molnár Sándor, Inmaculada López, Manuel Gámez, József Garay: A two-agent model applied to the biological control of the sugarcane borer (Diatraea saccharalis) by the egg parasitoid Trichogramma galloi and the larvae parasitoid Cotesia flavipes, *BioSystems*, Vol. 141, pp. 45-54, 2016. doi:10.1016/j.biosystems.2016.02.002

[73] Molnár S.: An alternative method in optimizing random outcomes, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 13, No. 4, pp. 77-86, 2016. (ISSN: 1785-8860), DOI: 10.12700/APH.13.4.2016.4.5