TÉZISFÜZET

MEREV TESTEK EGYENSÚLYA ÉS TRANZIENS DINAMIKÁJA ÉRINTKEZÉSI KÖLCSÖNHATÁSOK ESETÉN

STATIC EQUILIBRIA AND TRANSIENT DYNAMICS OF RIGID BODIES WITH UNILATERAL CONTACTS

AZ MTA DOKTORI ELJÁRÁS RÉSZEKÉNT BENYÚJTOTT DISSZERTÁCIÓ RÖVID ÖSSZEFOGLALÓJA ÉS TÉZISEI

VÁRKONYI PÉTER

2016 OKTÓBER

1. A DISSZERTÁCIÓ TUDOMÁNYOS PROGRAMJA

A doktori disszertációm témája merev testek, illetve több merev testből álló mechanikai rendszerek egyensúlyi helyzeteinek vizsgálata, különös tekintettel az egyensúlyi helyzetek *számára* és *stabilitására*. Ezen rendszerek mozgásegyenletei és az egyensúly feltételei évszázadok óta ismertek. Nyitott tudományos kérdéseket elsősorban akkor találhatunk ezen a területen, ha a fenti alapkérdést valamilyen más matematikai vagy fizikai jellegű problémával kombináljuk. A disszertáció olyan feladatokat tárgyal, ahol az egyensúlykeresés problémája egy geometriai kényszerrel összekapcsolva jelenik meg, illetve olyanokat, ahol olyan érintkezési kölcsönhatások vannak a rendszerben, melynek fizikai modellezése, illetve a modellek viselkedésének leírása is kihívást jelent. Mindkét feladattípusnál kitérek az eredmények alkalmazhatóságára mérnöki vagy biológiai területen.

Egy vízszintes felületen nyugvó merev tárgy egyensúlyi helyzeteit és azok stabilitását egyszerűen meg lehet állapítani, ha ismerjük a súlypontja helyzetét. Kevésbé magától értetődő kérdés azonban az, hogy hogyan konstruálható, illetve egyáltalán létezik-e olyan alakzat, amelynek előírt számú stabil, illetve instabil egyensúlyi helyzete van. A probléma két dimenziós, egyszerűsített változatát Domokos, Ruina és Papadopoulos vizsgálta először [6]. Vladimir I. Arnold orosz matematikus mutatott rá 1995-ben arra, hogy ennek a problémakörnek a kulcskérdése az, hogy *minimum hány* egyensúlyi helyzete van egy *konvex* és *homogén tömegeloszlású* testnek [7]. A disszertációm a probléma 3 dimenziós változatával foglalkozik. Domokos Gáborral közös munkámat összefoglalva olyan *mono-monostatikus* alakzatok konstruálását mutatom be, amelyeknek mindössze 1 stabil és 1 instabil egyensúlyi helyzete van (1.a tézis) [S4] [S7]. Ezek segítségével teljes válasz kapunk az egyensúlyi helyzetek lehetséges számának kérdésére is. A kérdés összetettsége abban rejlik, hogy az egyensúlyi feltétel vizsgálata igényli a súlypont helyének ismeretét, amely azonban csak a konstruálás végeredményének ismeretében adható meg. Így egy kapcsolt mechanikai-geometriai feladattal állunk szemben.

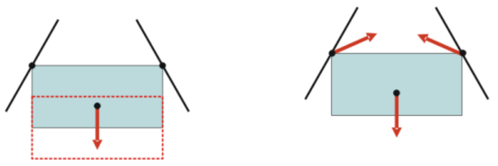
Az egyensúlyok száma alapján a merev testek osztályozhatóak. A disszertációban bemutatom az osztályozási módszert és annak egy biológiai alkalmazását is (szintén közös munka Domokos Gáborral) [S1]. Teknősök parametrikus, merev test-szerű morfológiai modelljét vizsgáljuk. A modellek osztályozása, valamint élő teknősökkel végzett kísérleti megfigyelések segítségével kimutatjuk, hogy a teknősök a számukra létfontosságú talpra állásra [25] különböző módon váltak képessé. Az egyes stratégiák jól elkülöníthetőek és erős korrelációban vannak az egyes teknős fajok geometriai modelljének egyensúlyi osztályával (1.b tézis). Az egyensúlyi osztálynak különösen nagy jelentősége van *monostatikus* azaz egyetlen stabil egyensúllyal rendelkező alakzatok esetén. A disszertációban nem térek ki viszont részletesen az egyensúlyi osztályoknak a geológia területén való szintén kutatott alkalmazási lehetőségeire [8] [9].

Az Arnold féle problémának számos lehetséges általánosítása van. Ezek közül részletesen vizsgálom egy egységnyi sűrűségű folyadékban úszó ρ sűrűségű test egyensúlyi helyzeteinek lehetséges számát. Ez a kutatási feladat Arnold kérdésének általánosítása, mivel a $\rho \to 0$ és a $\rho \to 1$ határérték lényegében szilárd, síkfelületre helyezett testet jelent. Az egyensúlyok minimális számával kapcsolatos eredményeim [26] nem szerepelnek a disszertációban. Részletesen foglalkozom viszont egy Stanislav Ulam által javasolt feladattal: *mely alakzatoknak van a lehető legtöbb egyensúlyi helyzete?* Az 1930-as években vetette fel [1], és 1957-ben publikálták angol nyelven [17] a *Scottish Book* című problémagyűjteményben az alábbi, úszó test probléma néven ismert kérdést: *létezik-e a gömbtől eltérő test, amely* *tetszőleges irányba fordítva egyensúlyban tud maradni egy folyadékban úszva?* Korábbi, gömbi sorfejtés technikáját használó munkák alapján már valószínűsíthető volt, hogy létezik ilyen test [27]. Ugyanakkor a sorfejtés konvergenciáját nem sikerült bizonyítaniuk, így ezek nem tekinthetőek egzakt eredménynek. A disszertációban a problémát tört rendű deriváltak alkalmazásával nem-standard kezdetiérték-feladattá alakítom, és a Picard-Lindelöf tételt erre a az egyenlettípusra kiterjesztve bebizonyítom, hogy a problémának létezik megoldása. Ezzel teljes értékű bizonyítást adok Ulam kérdésére, valamint numerikus módszerekkel példákat is konstruálok ilyen tulajdonságú testekre (3. tézis) [S3]. A disszertációban nem térek ki a probléma mások által kutatott alternatív interpretációjára, amely a nehézségi erő helyett a kapilláris erők hatását veszi figyelembe [12].

Az Arnold féle probléma egy másik általánosításaként α sugarú, súrlódásmentes gömb belsejébe helyezett test egyensúlyi helyzeteinek lehetséges számát is vizsgálom [S6]. Itt az $\alpha\to\infty$ határérték egyenértékű az eredeti problémával. Az általánosítás gyakorlati jelentőségét az a megfigyelés adja, hogy az α paraméter csökkentése jellemzően csökkenti a stabil egyensúlyi helyzetek számát, α kellően kicsiny értéke esetén majdnem minden test *egyetlen stabil egyensúlyi helyzettel* rendelkezik (2. tézis). Egy ilyen test mozgása tehát olyan dinamikai rendszerrel modellezhető, amely egyetlen attraktorral rendelkezik, és így hosszú idő után a viselkedése megjósolható a kezdeti állapot ismeretétől függetlenül. Ez olyan mérnöki alkalmazások számára nyit utat, melyekben egy fizikai rendszert az elkerülhetetlen kezdeti bizonytalanság ellenére robusztus módon szeretnénk egy kívánt végállapotba eljuttatni. A disszertációban részletesen tárgyalom a gyakorlati alkalmazás lehetőségeit automatizált alkatrész-adagolók tervezésében.

Szintén az alkatrész adagolás problémaköre volt az egyik kiindulópont az egyensúlyok stabilitásának és attraktivitásának vizsgálata során. A legnépszerűbb ipari alkatrész adagolók működési elvének lényege az, hogy az egyforma alkatrészeket egy vízszintes felületre öntik, ahol azok az egyensúlyi helyzeteik valamelyikét veszik fel. Ezután alkatrész-specifikus mechanikai beavatkozások segítségével kiválasztják azokat a példányokat, amik egy adott, preferált helyzetben vannak, a többit pedig eltávolítják (és újra felhasználják) [3][10]. Egy ilyen adagoló működése szempontjából nem a stabil egyensúlyok száma a kritikus kérdés, hanem azok vonzási tartományának nagysága, konkrétabban egy olyan egyensúly létezése, amelybe a véletlenszerűen leejtett tárgyak nagy hányada jut el. Az adagolók, illetve az adagolható alkatrészek tervezésének tehát fontos eszköze egy tárgy egyensúlyi helyzeteihez rendelhető leérkezési valószínűségek (az ún. leérkezési statisztika) meghatározása, amely számítógépes szimulációk és fizikai kísérletek segítségével is elvégezhető. Mindkét módszer munka, illetve időigényes, ezért sokan javasoltak egyszerű becslési módszereket a leérkezési valószínűségekre [4] [11] [18]. A disszertációmban, numerikus szimulációval létrehozott referencia adathalmazt felhasználva, elsőként módszeresen vizsgálom és összehasonlítom ezeket a becslési eljárásokat, valamint új, a korábbiaknál pontosabb becslési módszerre teszek javaslatot (4. tézis) [S2] [S9].

Az alkatrészadagokkal ellentétben a gépészeti, és robotikai rendszerek többségénél, illetve a szabályozástechnikában a stabilitásvizsgálat központi kérdése jellemzően az, hogy ha egy rendszer már eljutott egy preferált állapotba (pl. egyensúlyi helyzetbe), akkor ellenáll-e a környezetében jelen lévő kiszámíthatatlan zavaró hatásoknak, vagyis megmarad-e az egyensúlyi helyzetében. Mivel a „zavaró hatások", illetve a „megmaradás" fogalma is sokféleképpen definiálható, a stabilitásnak számtalan definíciója létezik. A dinamikai rendszerek elméletében központi helyet elfoglaló szokásos stabilitásfogalmak alkalmazhatóságát behatárolja, hogy nehéz azok teljesülését egy viszonylag komplex rendszer esetén ellenőrizni. Emiatt a gyakorlati robotika területén gyakran használnak olyan „stabilitási feltételeket", melyek ellenőrzése egyszerű, ugyanakkor nem nyújtanak garanciát semmilyen jól körülhatárolható zavarás-típussal szembeni ellenállásra. Ezekre példa a Pang és Trinkle [23] által definiált *egyértelmű egyensúly* fogalma, melynek lényege az, hogy az egyensúlyi helyzetben a mozgásegyenleteknek a statikus megoldás az *egyetlen* konzisztens megoldása (1. ábra).



1. ábra: példa nem egyértelmű egyensúlyra (baloldal: nem-statikus megoldás; jobboldal: a statikus megoldáshoz tartozó támaszerők)

A disszertációmban két stabilitási fogalmat vizsgálok. A *statikus stabilitás* fogalma olyan egyensúlyokat takar, melyek egy potenciális energiafüggvény lokális minimumpontjainak felelnek meg. A stabilitásvizsgálat fő nehézségét az jelenti, hogy egy merev testekből álló rendszerhez nem rendelhető folytonos potenciális energia függvény jól definiált lokális minimumpontokkal. Ennek áthidalására a rendszer regularizálásának módszerét alkalmazom [14], azaz a merev test modellt az érintkezési pontok környezetében deformálható modellel helyettesítem, és ennek viselkedését vizsgálom a deformálható modell merevségének végtelen nagyra növelése mellett. Fő eredményként megmutatom, hogy a merev testekből álló rendszerek egy széles csoportja rendelkezik statikus stabilitással (5.a tézis), ezzel általánosítom Howard és Kumar [13] egyetlen merev testre vonatkozó hasonló eredményét. A statikus stabilitás még az *egyértelmű egyensúly* kritériumának nem megfelelő rendszerekre (1. ábra) is gyakran teljesül. Az eredményeket egy kvázi-statikusan mozgó robot példájával illusztrálom.

A disszertációban vizsgált másik fogalom a *Lyapunov stabilitás*, amely azt garantálja, hogy egy egyensúlyi állapot kellően kicsiny megzavarása után a rendszer az egyensúlyi állapot kis környezetében marad. A Lyapunov stabilitás a robotika és a tárgymanipuláció területén a legtermészetesebb stabilitási fogalom, gyakorlati használata mégsem elterjedt [16]. Merev testekből álló mechanikai rendszerek Lyapunov stabilitásának vizsgálata elsősorban azért nehéz, mert az egyensúlyi állapot végtelenül kicsiny környezetében a rendszer egymással érintkező elemei többféle viselkedést mutathatnak: az elemek egymáson gördülhetnek, elcsúszhatnak, illetve szétválhatnak, ezenkívül a rendszer ütközéseken is keresztülmegy. Az így kialakuló dinamikus viselkedés nem-sima, hibrid dinamikai rendszerrel modellezhető, amely nem linearizálható [2]. Emellett a rendszer végtelen sok állapotátmeneten (pl. ütközésen) mehet át véges idő alatt. A kialakuló „Zeno pontok" [29] utáni viselkedést is szükséges vizsgálni. További modellezési nehézséget jelentenek a merev modellekben súrlódás jelenlétében szükségszerűen fellépő nemlétezési és nem-egyértelműségi paradoxonok (az ún. Painlevé paradoxonok) [5] [22]: a merev test modellek segítségével bizonyos állapotokban nem határozható meg egyértelműen a rendszer pillanatnyi gyorsulása. A probléma hátterében a közel merev elemekből felépülő mechanikai rendszerek nehezen mérhető paraméterekre való rendkívüli érzékenysége, azaz egy kiküszöbölhetetlen fizikai jelenség áll. A nehézségek miatt a disszertációmban a legegyszerűbb, komplex viselkedést mutató modellproblémát vizsgálom, melyet elsőként Or és Rimon vizsgált [20] [21]: egy lejtőn álló, két pontszerű támasszal rendelkező két dimenziós merev testet. Joel W. Burdick-kel és David Gontier-vel közös munkám [S5] összefoglalásaként a stabilitás elégséges feltételét mutatom be a Lyapunov függvények módszerének általánosítását felhasználva (5.b tézis), továbbá kimutatom, hogy bár *egyértelmű egyensúly* esetén a stabilitás elvesztését csak exponenciálisan növekedő intenzitású ütközési sorozatok okozhatják, de ennek ellenére az ütközések csillapítása nem elég a Lyapunov stabilitás biztosítására (5.c tézis). A disszertáció nem tartalmazza a feladattal kapcsolatos legfrissebb kutatási eredményeimet, melyek publikálása folyamatban van [27].

2. ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

1. tézis (közös eredmény Domokos Gáborral)

Vízszintes felületen nyugvó merev testek egyensúlyi helyzeteit vizsgálva

a) bebizonyítottuk, hogy léteznek konvex, homogén, mono-monostatikus testek és példákat is mutattunk ezekre.

b) megalkottuk a teknőspáncél egy parametrizált geometriai modelljét, a modell paramétereit különböző teknősfajok páncéljának formájához illesztettük, és az eredmények elemzésével kimutattuk, hogy egyes fajok formája monostatikus vagy közel monostatikus, amely lehetővé teszi, hogy minimális erőfeszítéssel talpra álljanak vízszintes felületen.

2. tézis

Súrlódásmentes kör belsejében nyugvó síkbeli merev testek, illetve gömb belsejében nyugvó térbeli merev testek egyensúlyi helyzeteit vizsgálva

a) kimutattam, hogy egy *síkbeli test* vagy akkor monostatikus, ha a kör sugara egy kritikus érték alatt van, vagy a sugártól függetlenül mindig monostatikus.

b) számítási algoritmust dolgoztam ki, amellyel meghatározható, hogy egy síkbeli poligon alakú vagy egy térbeli poliéder alakú test a kör, illetve gömb sugarának mely értékeire monostatikus.

c) rámutattam, hogy gömb, illetve kör alakú "ketrecek" alkatrész adagolókban való használata részleges megoldást kínál a három dimenziós, univerzális adagolók kifejlesztésének problémájára.

3. tézis

Bebizonyítottam, hogy a gömbön kívül léteznek más olyan alakzatok, amelyeket 1/2 sűrűségű homogén anyagból megformálva a kapott test bármilyen irányultsággal egyensúlyban lebeghet egy egységnyi sűrűségű folyadék felszínén.

4. tézis

Vízszintes felületre ejtett tárgyak dinamikájának egy fenomenologikus, Markov-lánc modelljét felhasználva új módszereket javasoltam az "egyensúlyi statisztika" gyors becslésére. A becsült valószínűségeket számítógépes szimulációk eredményével összevetve kimutattam, hogy az egyik új becslési módszer lényegesen jobb eredményeket ad az irodalomban megtalálható korábbi eljárásoknál.

5. tézis

Egyoldali, pontszerű, súrlódásos érintkezési kapcsolatokkal rendelkező merev testek és merev testekből álló összetett rendszerek egyensúlyi helyzeteinek stabilitását vizsgáltam, és

a) az érintkezési pontok környezetében létrejövő deformációk egyszerűsített figyelembevételével, a deformálható kapcsolat merevségének végtelen nagyra növelésével kimutattam, hogy egy merev testekből álló rendszer statikus stabilitással rendelkezik, amennyiben (i) a kapcsolati erők egyike sincs a megcsúszás határán és (ii) az érintkezési pontok megcsúszását vagy elválását megakadályozva a rendszer első rendben merevvé válna.

b) **(közös eredmény Joel W. Burdick-kel és David Gontier-vel)** egy lejtőre helyezett, két ponton támaszkodó síkbeli merev testnek az egyensúlyi helyzete közelében létrejövő mozgását szakaszonként lineáris, hibrid dinamikai rendszerrel modellezve kidolgoztuk az egyensúlyi helyzet Lyapunov stabilitásának egy elégséges feltételét.

c) Kimutattam, hogy egy egyensúly végtelen ütközési sorozatok létrejöttének lehetősége miatt elveszítheti a Lyapunov stabilitását még abban az esetben is, ha az ütközések tökéletesen rugalmatlanok.

3. AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN ÍRT SAJÁT PUBLIKÁCIÓK JEGYZÉKE

[S1] Domokos, G., Várkonyi, P. L., 2008, Geometry and self-righting of turtles. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 275(1630), 11-17.

[S2] Várkonyi P.L., The secret of gambling with irregular dice: estimating the face statistics of polyhedra, extended abstract at the *European Workshop on Comp. Geom*. (EuroCG), Ein-Gedi, Israel, March 3-5, 2014.

[S3] Várkonyi, P. L., 2013, Neutrally floating objects of density ½ in three dimensions. *Studies in Applied Mathematics*, 130(3), 295-315.

[S4] Várkonyi, P. L., Domokos, G., 2006, Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles and the Poincaré-Hopf Theorem *J. Nonlinear Sci.* 16, 255-281.

[S5] Várkonyi, P. L., Gontier, D., and Burdick, J. W., On the Lyapunov stability of quasistatic planar biped robots, *Proc. IEEE ICRA*, 63-70, 2012.

[S6] Várkonyi, P. L., 2016, Sensorless part feeding with round cages in two and three dimensions. *Robotics and Automation Letters* 1, 724–731.

[S7] Várkonyi, P.L., Domokos, G., 2006, Mono-monostatic bodies: the answer to Arnold's question. *Math. Intelligencer* 28(4), 34-38.

[S8] Várkonyi, P. L., 2015, On the Stability of Rigid Multibody Systems With Applications to Robotic Grasping and Locomotion. *ASME J. Mechanisms and Robotics*, 7(4), 041012.

[S9] Várkonyi, P. L., 2014, Estimating part pose statistics with application to industrial parts feeding and shape design: new metrics, algorithms, simulation experiments and datasets. *IEEE Trans. Aut. Sci. Eng.*, 11(3), 658-667.

4. A CSATLAKOZÓ SZAKIRODALOM LEGFONTOSABB KÖZLEMÉNYEI

[1] Auerbach H., 1938, Sur un probleme de M. Ulam concernant I'équilibre des corps flottants, Studia Math 7, 121-142.

[2] Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A. R., & Kowalczyk, P., Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications (Vol. 163). Springer Science & Business Media, 2008.

[3] Berretty, R. P., Goldberg, K., Overmars, M. H. and Van der Stappen, A. F. (2001). Trap design for vibratory bowl feeders, *Int. J. Robot. Res.*, 20, 891-908.

[4] Boothroyd G. and C. Ho , 1977, Natural resting aspects of parts for automatic handling, J. Eng. for Industry 99, 314-317.

[5] Champneys, A. R., Várkonyi, P. L., 2016, The Painlevé paradox in contact mechanics, IMA Journal of Applied Mathematics 81, 538-588.

[6] Domokos G., Papadopulos J., Ruina A., 1994, Static equilibria of planar, rigid bodies: is there anything new? J. Elasticity 36, 59-66.

[7] Domokos, G., 2006, My lunch with Arnold. Math. Intelligencer 28(4), 31-33.

[8] Domokos, G., Sipos, A. Á., Szabó, T., 2012, The mechanics of rocking stones: equilibria on separated scales. Mathematical Geosciences 44, 71-89.

[9] Domokos, G., Sipos, A., Szabó, T., Várkonyi, P., 2010, Pebbles, shapes, and equilibria. Mathematical Geosciences, 42, 29-47.

[10] Goemans O. C. and A. F. van der Stappen, 2008, On the design of traps for feeding 3D parts on vibratory tracks, Robotica 26, 537-550.

[11] Goldberg K., B. V. Mirtich, Y. Zhuang, J. Craig, B. R. Carlisle, and J. Canny, 1999, Part pose statistics: estimators and experiments, IEEE Trans. Robot. Autom. 15, 849-857.

[12] Gutkin E., 2012, Capillary floating and the billiard ball problem. J. Math. Fluid Mech.14, 363-382.

[13] Howard, W. S., and Kumar, V., 1996, On the stability of grasped objects, IEEE Trans. Robot. Autom. 12, 904-917.

[14] Le Xuan Anh, Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction (Foundations of Engineering Mechanics). Springer, New York, 2003.

[15] Lee S. S. G., B. K. A. Ngoi, L. E. N. Lim, and S. W. Lye, 1997, Determining the probabilities of the natural resting aspects of parts from their geometries, Assembly Autom. 17, pp. 137–42.

[16] Mason M. T., Mechanics of Robotic Manipulation, 1st. ed. MIT Press, 2001.

[17] Mauldin R. D., The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café, Birkhauser, Boston, 1981.

[18] Ngoi B. K. A., L. E. N. Lim, and J. T. Lee, 1997, Analysis of natural resting aspects of parts in a vibratory bowl feeder-Validation of drop test Int. J. Adv. Manuf. Technol. 13, 300-310.

[19] Nordmark, A., Dankowicz, H., Champneys, A., 2011, Friction-induced reverse chatter in rigid-body mechanisms with impacts, IMA J. Appl. Math. 76, 85-119.

[20] Or Y. and E. Rimon, On the hybrid dynamics of planar mechanisms supported by frictional contacts. ii: Stability of two-contact rigid body postures, in Proc. IEEE ICRA, 1219–1224, 2008.

[21] Or Y. and E. Rimon, On the hybrid dynamics of planar mechanisms supported by frictional contacts. i: necessary stability conditions, in Proc. IEEE ICRA, 1213–1218, 2008.

[22] Painlevé, P., 1895, Sur les lois du frottement du glissement, C. R. Acad. Sci. (Paris) 121, 112–115.

[23] Pang, J.-S., and Trinkle, J. C., 2000, Stability characterizations of rigid body contact problems with coulomb friction, Zeitschrift für Angewandte Math. und Mech. 80, 643–663.

[24] Posa, M., Tobenkin, M., Tedrake, R., 2016, Stability Analysis and Control of Rigid-Body Systems with Impacts and Friction. IEEE Trans. Autom. Contr. 61, 1423-1437.

[25] Rivera, A. R. V., Rivera, G., Blob, R. W, 2004, Kinematics of the righting response in inverted turtles J. Morphology, 260, 322.

[26] Várkonyi P. L., 2009, Floating body problems in two dimensions. Studies in Applied Mathematics 122, 195-218.

[27] Várkonyi, P. L., Or, Y., 2016, Lyapunov stability of a rigid body with two frictional contacts. arXiv preprint arXiv:1603.09672.

[28] Wegner F., 2003, Floating Bodies of Equilibrium. Studies in Applied Mathematics 111, 167-183.

[29] Zhang J., K. H. Johansson, J. Lygeros, and S. Sastry, 2001, Zeno hybrid systems, Int. J. Robust Nonlin. Control 11, 435-451.