Válasz Garay Barnabás professzor úr bírálatára

Szeretném megköszönni professzor úr opponenciáját, a leírt munkára való sokoldalú reflexióit, melyben a matematikai igényesség vizsgálata mellett a mérnöki szempontok is helyet kaptak. Köszönöm dicsérő szavait és kritikáit is, melyekkel alapvetően egyetértek, és válaszomban igyekszem az azokban megjelölt kérdéses pontokat tisztázni.

A bírálat 2. fejezet első négy részével és a 3. fejezettel kapcsolatos részei azt hiszem, hogy nem igényelnek részletes választ, köszönöm a pozitív értékelést, és az eredményeim tág kontextusban való bemutatását is.

Az Úszó test problémát tárgyaló 2.5. fejezettel kapcsolatban bírálóm több nyitott kérdést, érdekes felvetést és kritikus megjegyzést fogalmaz meg, melyekre sorban szeretnék reflektálni.

A reguláris mátrixok komplementerhalmaza

A (28)-as képlet feletti két mondat valóban ébreszthet az olvasóban olyan érzést, hogy az író esetleg azonosnak tekintette a reguláris mátrixok komplementerhalmazát az azonosan 0 mátrixszal. Szerencsémre nem ez a helyzet. Azért emeltem ki az azonosan nulla mátrix esetét a szövegben, és nem tárgyaltam más szinguláris mátrixok esetét, mert az idézett szövegrész célja az Úszó test probléma megoldásához felhasznált módszer bemutatása. Az Úszó test probléma esetén a (27) egyenletekben szereplő mátrix minden esetben azonosan nulla, és ennek kezelésére egy olyan megoldási technikát javaslok, amely más szinguláris mátrixoknál a leírt formában nem lenne működőképes.

A 3-as lábjegyzet

Teljes mértékben egyetértek bírálómmal abban, hogy a Riemann-Liouville féle törtrendű kalkulus valóban tartogat kellemetlenségeket a klasszikus kalkulushoz képest. A törtrendű derivált nemlokális jellege azt eredményezi, hogy a neutrális úszás egyszeres integrállal kifejezett geometriai feltételei a törtrendű deriválás következtében kettős integrállá változnak. A törtrendű deriválás nemegyértelműségének problémája azért nem jelentkezett, mert Riemann nyomán a deriválás végpont-paraméterét 0-nak vettem fel, így a derivált egyértelművé vált. A Newton-Leibniz formula analogonját pedig nem kíséreltem meg felhasználni. A regularitás problémás voltát egyértelműen tükrözik a kapott eredmények is. Ahhoz, hogy szingularitásoktól mentes megoldást kapjunk, nem elég megfelelő kezdőfeltételeket meghatározni, hanem szükség volt annak feltételezésére, hogy a [0,1] intervallum egy véges kezdeti szakaszán már rendelkezünk egy reguláris megoldással. Ezt a feltételt sikerült oly módon teljesítenem, hogy a triviális megoldás (gömb alakú test) kezdeti szakaszát kombináltam egy nemtriviális folytatással. Ugyanakkor azt gondolom, hogy a dolgozatban szereplő kiindulóegyenletek speciális formája miatt a törtrendű deriválás ebben az esetben kellően reguláris függvényekre vezet. Ezt alább részletesen is bemutatom majd.

A törtrendű kalkulus kedvezőtlen tulajdonságai miatt nem próbáltam meg a törtrendű deriváltak általános tulajdonságaiból levezetni a megoldás létezését, hanem a törtrendű deriváltat annak klasszikus definíciójának megfelelően klasszikus deriváltakkal és integrálokkal fejeztem ki, és az így kapott - meglehetősen összetett – képletekkel dolgoztam. Ezzel a megközelítésmóddal sajnos együtt jár, hogy a vizsgált probléma konkrét egyenleteinek pontos alakját erősen kihasználó, és nagyszámú

technikai lépést tartalmazó (de azokban egyszerű matematikai eszközökkel operáló) érvelést írtam le. Az ilyen jellegű megoldások ritkán tudnak „elegánsak” lenni, az olvasó számára nagyon sok munkával jár a technikai lépések rekonstruálása, és az esetemben valóban nem segített a matematikai és mérnöki nyelvezet vegyítése, illetve egyes helyeken a probléma jellege által igényelt matematikai precizitás elégtelensége. Külön szeretném megköszönni bírálómnak, hogy ennek ellenére részletesen vizsgálta a dolgozatnak ezt a fejezetét.

4-es lábjegyzet javaslatai

A lábjegyzet két rövid javaslatot tartalmaz, melyekre sorban szeretnék reagálni.

Bírálóm felvetette, hogy egyetlen megoldás bemutatása is elég lenne a megoldás létezésének bizonyításához. Bár ezzel egyetértek, de sajnos a megoldandó egyenletek összetett alakja miatt nem tudtam zárt alakban megoldást találni, még úgy sem, hogy rendelkezésre álltak az egyenletrendszer numerikus integrálásával nyert megoldások (36. ábra).

Szintén felvetette, hogy Riemann-Liouville derivált helyett Caputo deriváltat használva egyszerűsödhetne a megoldás. Sajnos a 2.5.4 fejezetben javasolt megoldási stratégia Caputo derivált használata esetén nem működik. Ahhoz első lépésben a (24)-(25) kiindulóegyenleteket kétszer kellene deriválni. Amint azt a 2.5.4 fejezetben bemutattam, a kétszeri deriválás nem végezhető el az integráljelen belül a (28) kifejezésnek megfelelően, mivel a g_i függvények ehhez nem kellően simák. A Riemann-Liouville deriválás esetén viszont a törtrendű integrálást követően kell deriválni, amely értelmes kifejezésekhez vezet.

A megoldás regularitásával kapcsolatos megjegyzések a 4-es lábjegyzetben

Amint bírálóm megjegyzi, a dolgozat eredménye szempontjából a kontrakcióval nyert megoldás regularitása problémás lehet a szinguláris magfüggvényekkel való konvolúciós operátorok ismert nehézségei miatt. Ezt az észrevételt, és az ehhez kapcsolódó kritikus megjegyzéseket jogosnak tartom, mivel a Picard-Lindelöf tétel adaptálása során nem tárgyaltam részletesen egy lényeges kérdést, ami az eredeti tétel esetén nyilvánvaló, de a neutrális úszás problémája esetén nem.

A megoldás létezésének bizonyításához definiáltam egy leképezést a dolgozat (47) képletével:

$$\mathbf{\Psi}(\chi) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{A}\left(\chi, \underbrace{\mathbf{Y}(\chi_0)}_{ismert} + \int_{\chi_0}^{\chi} \mathbf{\Psi}(\beta) d\beta \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdots \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 8I\chi^{3/2} \end{bmatrix} - \int_0^{\chi_0} \mathbf{C}(\alpha, \chi, \mathbf{Y}(\alpha)) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} d\alpha}_{ismert} - \int_{\chi_0}^{\chi} \mathbf{C}(\alpha, \chi, \mathbf{Y}(\alpha)) d\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} d\alpha \right)$$

(V1)

amely $\mathbf{\Psi}(\beta) : [\chi_0, \chi_1] \to \mathbb{R}^2$ ($0 < \alpha_1 < \chi_0 < \chi_1 \leq 1$ adottak) függvények egy zárt halmazát képezi le ugyanilyen függvényekbe. Bizonyítottam, hogy kontraktív és így kell legyen egy fixpontja, ami az úszó test probléma megoldását adja. A dolgozatban ugyan kimondtam, de nem indokoltam meg azt, hogy

> *V.1 tétel: A (V1) leképezés a dolgozat megkötései mellett minden folytonos függvényre értelmezhető és a kapott függvény is folytonos.*

Az alábbiakban ezt a hiányzó indoklást szeretném ismertetni. Az egyes függvények Y_j függvényektől való függését a dolgozathoz hasonlóan explicit módon jelölöm, de természetesen ez nem jelent még egy független változót.

Tegyük fel tehát, hogy a $\Psi_j(\alpha)=Y_j'(\alpha)$ $(j=1,2)$ függvények folytonosak az $\alpha\in[\chi_0,\chi_1]$ intervallumon. A dolgozatból tudjuk, hogy

(i) A $\Psi_j(\alpha)=Y_j'(\alpha)$ $j=1,2$ folytonos függvények ismertek az $\alpha\in[0,\chi_0]$ intervallumon ahol $0<\alpha_1<\chi_0$.

(ii) ekkor értelemszerűen $Y_j(\alpha)$ folytonosan differenciálható

(iii) az $\tilde{a}(\phi)$ és $b(\phi)$ függvények szabadon megválaszthatóak. A továbbiakban tételezzük fel, hogy C^3 folytonosak!

(iv) Mindhárom függvény kezdeti szakasza ismert: $Y_j(\alpha)=(-1)^{j+1}\alpha$ és $\tilde{a}(\alpha)$ = $b(\alpha)$ = 0 ha $\alpha\in[0,\alpha_1]$, ahol $0<\alpha_1<1$ adott konstans.

Az alábbi függvény:

(V2) $$X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))=\left(\tilde{a}(\phi)+\left(Y_j(\alpha)-b(\phi)\right)\phi^{-1}\right)^2\left(1-\phi^2\right)$$

a (ii) és (iii) pontok miatt az $\alpha\in[0,\phi]$ $\phi\in(0,1]$ tartományon folytonos függvények összeadásával, szorzásával és kompozíciójával állítható elő, így maga is folytonos. A függvény ϕ szerinti első, második és harmadik deriváltja (V2)-ből zárt alakban kifejezhető (lásd csatolt Maple munkafüzet[1]). A kapott képletek alapján ezekről is megállapíthatjuk, hogy a $\alpha\in[0,\phi]$ $\phi\in(0,1]$ tartományon folytonosak.

A fentiekből következik az is, hogy $X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))$ folytonos függvény, ha $\alpha\in(0,1]$. Ugyanakkor $\alpha\in[0,\alpha_1]$ esetén az (iv) pont miatt

$$X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))=1-\alpha^2$$

amely szintén folytonos. Így az $X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))$ egyváltozós függvény folytonos az $\alpha\in[0,1]$ zárt intervallum egészén.

A dolgozat függelékében, a (168) egyenlettel definiált $Q(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))$ függvény az alábbi alakra hozható:

(V3) $$Q(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))\overset{def}{=}\begin{cases}-\phi\cdot\dfrac{X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))-X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))}{\phi-\alpha} & ha\quad \alpha<\phi\\ \lim\limits_{\beta\to\phi^-}Q(\beta,\phi,Y_j(\beta)) & ha\quad \alpha=\phi\end{cases}$$

A (V3) felső sora alapján *Q* függvény folytonos az $\alpha\in[0,\phi)$, $\phi\in(0,1]$ tartományon. Ugyanakkor tudjuk, hogy az X^2 függvény ϕ szerinti első deriváltja létezik és folytonos, ezért a (V3) alsó sorába írt határérték létezik és értéke $-\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))$. A Lagrange féle középértéktétel segítségével $\frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))$ folytonosságából egyszerűen belátható, hogy *Q* folytonossága kiterjed $\alpha=\phi$-re is, tehát a függvény folytonos az $\alpha\in[0,\phi]$ $\phi\in(0,1]$ tartományon. A dolgozatban még bemutatom azt

[1] lásd „X^2 függvény és deriváltjai" az alábbi linken található Maple munkalapon vagy annak e dokumentum végén található képében: http://home.mit.bme.hu/~vpeter/temp/maplemunkalap.mw

is, hogy a triviális megoldás kis környezetében, ahol dolgozunk, *Q* mindig pozitív, így törtrendű és negatív hatványai valósak és az eredeti függvénnyel azonos regularitási osztályba tartoznak.

A (V3)-hoz hasonló hányadosok összegeként kifejezhető *Q* függvény ϕ szerinti első deriváltja is:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}Q(\alpha,\phi,Y_j(\alpha)) = -\frac{X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha)) - X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))}{\phi-\alpha} - \phi\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))(\phi-\alpha) - \left(X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha)) - X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))\right)}{(\phi-\alpha)^2} =$$

$$= -\frac{X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha)) - X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))}{\phi-\alpha} - \phi\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))(\phi-\alpha) - \int_\alpha^\phi \frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\eta,Y_j(\alpha))d\eta}{(\phi-\alpha)^2} =$$

$$= -\frac{X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha)) - X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))}{\phi-\alpha} - \phi\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))(\phi-\alpha) - \int_\alpha^\phi \frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha)) - \int_\eta^\phi \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}X^2(\alpha,\mu,Y_j(\alpha))d\mu d\eta}{(\phi-\alpha)^2} =$$

$$= -\frac{X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha)) - X^2(\alpha,\alpha,Y_j(\alpha))}{\phi-\alpha} - \phi\cdot\frac{\int_\alpha^\phi\int_\eta^\phi \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}X^2(\alpha,\mu,Y_j(\alpha))d\mu d\eta}{(\phi-\alpha)^2}$$

mely szintén folytonos, ha $0 \le \alpha < \phi \le 1$. $\alpha = \phi$ esetén ezen derivált is határértékkel adható meg, mely létezik és értéke

$$\frac{\partial}{\partial\phi}Q(\beta,\phi,Y_j(\beta))\Big|_{\alpha=\phi} = -\frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))\Big|_{\alpha=\phi} - \frac{\phi}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))\Big|_{\alpha=\phi}$$

Végül pedig $\frac{\partial}{\partial\phi}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))$ és $\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))$ folytonossága miatt, a Lagrange féle középértéktétel és a felületi integrálok középértéktétele felhasználásával kimutatható, hogy a folytonosság kiterjed az $\alpha\in[0, \phi]$, $\phi\in(0,1]$ tartomány egészére.

Ugyanilyen módon, $\frac{\partial^3}{\partial\phi^3}X^2(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))$ folytonosságából, a Lagrange féle középértéktétel, valamint a felületi és térfogati integrálok középértéktétele felhasználásával levezethető $\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Q(\alpha,\phi,Y_j(\alpha))$ folytonossága az $\alpha\in[0, \phi]$, $\phi\in(0,1]$ tartományon. Ennek lépéseit nem írom le részletesen.

A dolgozatban szereplő G_i függvényeket a (31) egyenletben szereplő improprius integrál definiálja, de ez változócserével és a Q függvény felhasználásával a (170) egyenletben megadott fix határok közötti, paraméterektől függő, proprius integrállá alakítható:

(V4) $$G_i(\alpha,\chi,Y_j(\alpha)) = 2(\chi-\alpha)\int_0^1\left(\frac{1-\Gamma^2}{\chi-\chi\Gamma^2+\Gamma^2\alpha}\chi\right)^{1/2} Q^{1/2}\left(\alpha,\chi-\Gamma^2(\chi-\alpha),Y_j(\alpha)\right)\left(Y_j(\alpha)-b\left(\chi-\Gamma^2(\chi-\alpha)\right)\right)^i d\Gamma$$

Ha $\chi\ge\alpha>0$, akkor G_i folytonos függvények kompozíciójával, szorzásával, összeadásával és integrálásával előállítható. Ez alapján kimondhatjuk, hogy G_i folytonos a $\chi\in(0,1]$, $\alpha\in(0,\chi]$ tartományon. (Ugyanakkor $\alpha=0$ és $\Gamma=1$ esetén a fenti képletben szereplő tört számlálója és nevezője is 0-vá válik. A folytonosság ennek ellenére bizonyítható lenne $\alpha=0$ esetén, de nincs rá szükségünk.)

A (V4) egyenletből zárt képlettel megadható $\frac{\partial G_i(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}{\partial\chi}$ és $\frac{\partial^2 G_i(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}{\partial\chi^2}$ a deriválást az integráljelen belül elvégezve és a szorzat, illetve összetett függvény deriváltjának képleteit alkalmazva. A dolgozatomban nem írtam le a Maple program segítségével előállított eredményeket, ezért itt szeretném bemutatni ezeket egy csatolt Maple munkalapban[2]. Mindkét függvény a (V4)-hez hasonlóan folytonos függvények kompozíciójával, szorzásával, összeadásával és integrálásával állítható elő, így kimondhatjuk, hogy $\frac{\partial G_i(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}{\partial\chi}$ és $\frac{\partial^2 G_i(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}{\partial\chi^2}$ is folytonos függvények a $\chi \in(0,1]$, $\alpha\in(0, \chi]$ tartományon.

A dolgozat (37) egyenlete szerint a **C** mátrix elemei előállíthatóak

$$c_{ij}(\alpha,\chi,Y_j(\alpha)) = Y_j'(\alpha)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}G_i(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))$$

alakban. Mivel folytonos függvények szorzata is folytonos, így megállapíthatjuk, hogy $c_{ij}(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))$ is folytonos a $\chi \in(0,1]$ $\alpha\in(0, \chi]$ tartományon. Ebből következik, hogy

V.2 lemma: A $\int_{\chi_0}^{\chi}\mathbf{C}(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))d\alpha$ *integrál létezik és folytonos függvénye* χ *-nek ha* $\alpha_1\le\chi_0\le\chi\le 1$.

Az **A** mátrix a_{ij} elemét a dolgozat (36) egyenlete definiálja. Az ott szereplő $\frac{\partial G_i(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}{\partial\chi}$ deriváltat zárt képlettel megadtam a csatolt Maple munkalapban. Abba $\alpha=\chi$-t behelyettesítve kapjuk a dolgozat (171) egyenletét:

$$a_{ij}(\chi,Y_j(\chi)) = \frac{\pi}{2\sqrt{\chi}}\left(Q_j(\chi,\chi,Y_j(\chi))\right)^{1/2}\left(Y_j(\chi)-b(\chi)\right)^i \quad i,j,=1,2$$

amely alapján

V.3 lemma: a_{ij} *folytonos függvénye* χ *-nek ha* $\chi\in[\alpha_1,1]$.

Ezen kívül a dolgozatban bemutattam azt is, hogy a triviális megoldás kis környezetében, ahol dolgozunk, **A** nem szinguláris, így inverze is folytonos függvény. A V.2 és V.3 lemmák alapján megállapítható, hogy a (V1) leképezés folytonos függvényt ad, mert folytonos függvények összeadásával, szorzásával és kompozíciójával előállítható. Ezzel a V.1 tételt bizonyítottuk.

4-es lábjegyzet megjegyzései a bizonyítás részletezettségével kapcsolatban

A dolgozat írásakor úgy ítéltem meg, hogy a nem részletezett lépések ugyan hosszadalmasak, de a leírás alapján egyértelműen rekonstruálhatóak. Elfogadom a bírálat arra vonatkozó kritikáját, hogy

[2] lásd „Gi függvény és deriváltjai" az alábbi linken található Maple munkalapon vagy annak e dokumentum végén található képében: http://home.mit.bme.hu/~vpeter/temp/maplemunkalap.mw

egyes helyeken szerencsésebb lett volna részletesebb leírást adni. Éppen ezért a válaszomban igyekeztem megadni azokat a hiányzó részeket, melyek úgy érzem, hogy bírálóm számára problémások lehettek, illetve azokat amelyeket konkrétan említett a bírálat. Ezért részletesen írtam a megoldások regularitásáról, bemutattam a Maple program segítségével végzett számítások végeredményét, amely révén az úszó test probléma egyenletei improprius integrálok nélkül felírhatóak, és lejjebb ki fogom fejtem a parazitamegoldások kizárásának módját. Ezeken kívül még két kevésbé részletezett munkarész van a fejezetben:

1) A 2.5.2 lemma bizonyítása során nem adtam meg explicit módon a felső korlátait annak, hogy egyes függvények a triviális megoldáshoz tartozó értéküktől mennyire térhetnek el.
2) A 2.5.3 lemma bizonyításában során nem adtam meg explicit módon, hogy Y_j függvények Lipschitz konstansának ismeretében hogyan határozható meg egyes belőle előállított függvények Lipschitz konstansa.

Bízom benne, hogy ezeket az egyszerűsítéseket bírálóm is elfogadhatónak tartja.

A parazita megoldások kizárása

A dolgozatban nem tárgyaltam részletesen a deriválással előállított egyenletek hamis megoldásainak kérdését. A most következő gondolatmenet lényege a dolgozatban tömörebben és irodalmi hivatkozás nélkül volt leírva, továbbá utóbb vettem észre, hogy az alább megadott (V7) kifejezés jobb oldalának második tagja hibásan lett megadva a dolgozat 48. oldalán. Mindez nehezen érthetővé is tette az érvelést, ezért teljesen egyetértek a kapott kritikával. Ugyanakkor a megoldások valódiságára vonatkozó következtetést a dolgozatban szereplő elírás nem befolyásolja.

A neutrális úszás geometriai feltételeit kifejező (26) egyenletpár tömören az alábbi alakba írható:

(V5) $$u_i(\chi) = f_i(\chi) \qquad i=1,2$$

ahol az u_i -k χ -től és az Y_1, Y_2 ismeretlen függvényeknek a [0, χ] intervallumon felvett értékeitől függő, integrálokat is tartalmazó kifejezések, f_i függvények pedig zárt képlettel adottak. Mivel ezeket az egyenleteket direkt módon nem tudtam megoldani, ezért vettem az egyenletek mindkét oldalának 3/2 rendű Riemann-Liouville deriváltját χ szerint:

(V6) $$\mathrm{D}^{3/2}u_i(\chi) = \mathrm{D}^{3/2} f_i(\chi) \qquad i=1,2$$

ahol $\mathrm{D}^{3/2}$ a fent említett törtrendű differenciáloperátort jelöli. Ezután a módosított egyenletekhez kerestem megoldást. A törtrendű kalkulus egyik klasszikus eredménye szerint

V.4 lemma (Diethelm, 2010, pp. 54)*: ha az u_i kifejezések 1. deriváltja abszolút folytonos és $\mathrm{D}^{3/2} f_i(\chi)$ létezik, akkor a (V6) egyenlet általános megoldása u_i -re az alábbi alakban adható meg:*

(V7) $$u_i(\chi) = f_i(\chi) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_{ij} \chi^{3/2-j}$$

ahol ζ_{ij} konstansok tetszőleges értékeket felvehetnek.

Ezen megoldások közül valódi az, amelyhez ζ_{ij}=0 minden $i,j \in\{1,2\}$-re, és minden olyan megoldás, melyhez valamely ζ_{ij} konstans 0-tól különbözik, parazita megoldás, mely nem elégíti ki a neutrális úszás feltételeit.

A dolgozatban kikötöttem, hogy az egyenletek általam megválasztott bemenő adatai egy véges $\chi \in[0,\alpha_1]$ intervallumon essenek egybe a triviális megoldás bemenő adataival, és a keresett Y_1, Y_2 függvények ennek megfelelő szakasza legyen azonos a triviális megoldással, amiről biztosan tudjuk, hogy nem parazita megoldás. Így a megoldáshoz tartozó u_i kifejezések $\chi \in[0,\alpha_1]$ intervallumon ζ_{ij}=0 mellett elégítik ki a (V7) egyenletet. Tehát ha ezekkel a megkötésekkel állítjuk elő (V6)-nek egy teljes megoldását $\chi \in[0,1]$ intervallumon, akkor az a V.4 lemma miatt nem lehet parazitamegoldás, feltéve, hogy a lemma kikötésének megfelelően u_i 1. deriváltja abszolut folytonos. Az utolsó feladatom tehát az abszolút folytonosság igazolása.

A mi esetünkben u_i a dolgozat (22)-(25) egyenletei szerint az alábbi függvényt jelöli:

(V8) $$u_i(\chi)=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\int_0^{\chi}\sqrt{1-\frac{\alpha}{\chi}}\sqrt{Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}\left(Y_j(\alpha)-b(\chi)\right)^i Y_j'(\alpha)d\alpha$$

A $\chi \in[0,\alpha_1]$ intervallumon kikötöttük, hogy a megoldás egybeesik a triviális megoldással ezért

$$u_i(\chi)=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{i(j+1)}\int_0^{\chi}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\chi^2}}\cdot\alpha^i d\alpha=\begin{cases}0 & ha \quad i=1\\ \dfrac{\pi\chi^3}{8} & ha \quad i=2\end{cases}$$

Tehát u_i deriváltja abszolút folytonos függvény.

$\chi \in[\alpha_1,1]$ esetén u_i deriváltja kifejezhető (V8)-ból, a deriválást az integráljel belsejében elvégezve:

$$\frac{d}{d\chi}u_i(\chi)=\frac{d}{d\chi}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\int_0^{\chi}\sqrt{1-\frac{\alpha}{\chi}}\sqrt{Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}\left(Y_j(\alpha)-b(\chi)\right)^i Y_j'(\alpha)d\alpha$$

$$=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\left[\int_0^{\chi}\frac{d}{d\chi}\left[\sqrt{1-\frac{\alpha}{\chi}}\sqrt{Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}\left(Y_j(\alpha)-b(\chi)\right)^i\right]Y_j'(\alpha)d\alpha+\underbrace{\sqrt{1-\frac{\chi}{\chi}}}_{0}\sqrt{Q(\chi,\chi,Y_j(\chi))}\left(Y_j(\chi)-b(\chi)\right)^i Y_j'(\chi)\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\int_0^{\chi}\left[\frac{\alpha/\chi^2}{2\sqrt{1-\frac{\alpha}{\chi}}}\sqrt{Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}\left(Y_j(\alpha)-b(\chi)\right)^i+\sqrt{1-\frac{\alpha}{\chi}}\frac{\frac{\partial}{\partial\chi}Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}{2\sqrt{Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}}\left(Y_j(\alpha)-b(\chi)\right)^i-\sqrt{1-\frac{\alpha}{\chi}}\sqrt{Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}\cdot i\left(Y_j(\alpha)-b(\chi)\right)^{i-1}b'(\chi)\right]Y_j'(\alpha)d\alpha$$

Az integrálon belül lévő $\sqrt{Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))}$, $\frac{\partial}{\partial\chi}Q(\alpha,\chi,Y_j(\alpha))$, $Y_j(\alpha)$, $b(\chi)$, $b'(\chi)$, $Y_j'(\alpha)$ tényezőkről már beláttuk, hogy folytonosak $\alpha\in[0, \phi]$, $\chi \in[\alpha_1,1]$ zárt tartományon (és így korlátosak is). Az $\left(1-\frac{\alpha}{\chi}\right)^{-1/2}$ tényező pedig Lebesgue integrálható függvénye α-nak. Tehát az integrálás elvégezhető, és a végeredményül kapott $\frac{d}{d\chi}u_i(\chi)$ függvény abszolút folytonos.

Egyéb megjegyzések

A 2.5 fejezeten kívül a bírálat felhívja a figyelmet néhány zavaró elírásra. A 76. oldal jobb oldaláról eltűnt képlet az eredeti helyéről a bal oldali hasáb tetejére került egy hibás formázási lépés miatt. A 46. ábrán pedig két helyen a 4-es szám helyett 3-as került be (a középső sor bal és jobboldali oszlopába). Az 50. oldalon egy zárt intervallumot szögletes helyett rendes zárójelekkel jelöltem. A (106) képletben szereplő mennyiséget helytelenül pszeudo-normának neveztem. Valamennyi megjegyzéssel egyetértek, és köszönöm bírálómnak, hogy felhívta ezekre a figyelmet.

Bírálóm kérdései

A bírálóm két kérdését alább válaszolom meg:

1) **Van-e arra vonatkozó eredmény vagy ráutaló érvelés, hogy a mono-monosztatikus testek egyike sem térhet el túlságosan a gömbtől?**

Erre a kérdésre többféleképpen is lehet válaszolni. Könnyű helyzetben vagyok, ha én dönthetem el, hogy hogyan definiálom a gömbtől való eltérés mértékét, ez esetben a válasz egyértelmű igen. A disszertációba terjedelmi okokból nem került be, de a [173] cikkben bevezettük egy alakzat laposságának és megnyúltságának jellemzésére az alábbi mérőszámokat:

$$L = \max_{\forall c, P_1, P_2} \left\{ \frac{\min_s (R(s))}{\max_i (R_i)} \right\}, \qquad H = \max_{\forall c, P_1, P_2} \left\{ \frac{\min_i (R_i)}{\max_s (R(s))} \right\}$$

ahol c egy, az alakzat felületére rajzol tetszőleges zárt, folytonos, önátmetszéstől mentes görbe, mely a felületet két részre osztja; P_1 és P_2 pedig egy-egy tetszőleges pont a két részen; s a görbe paraméterezése; $R(s)$ a görbe pontjainak távolsága az alakzat súlypontjától, R_i pedig a P_i pont távolsága a súlyponttól. Egyszerűen belátható, hogy L és H értéke is mindig minimum 1. Bár e két mérőszám használata nem elterjedt a szakirodalomban, de konvex testek esetén az általuk megadott értékek nagysága szoros összefüggést mutat az alakzatok „megnyúltságának” ill. „laposságának” hétköznapi fogalmával. Ezzel kapcsolatban megmutattuk, hogy nemdegenerált egyensúlyi helyzetekkel rendelkező alakzatok esetén L=1 és H=1 ekvivalens azzal, hogy az alakzatnak 1 stabil, illetve 1 instabil egyensúlyi helyzete van. Tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy a mono-monosztatikus testek sem nem laposak, sem nem hosszúkásak, és ilyen módon bizonyos fokig hasonlítanak egy gömbre.

Kicsit nehezebb helyzetben vagyok, ha a „gömbszerűség” szokványos mérőszámainak segítségével kell érvelnem, de ilyenkor is belátható néhány dolog. Szokás például egy alakzat formájának jellegét, az alakzat köré illeszthető minimális térfogatú befoglaló téglatest a≤b≤c oldalhosszainak arányaival jellemezni ilyen módon:

$L^*=a/b$

$H^*=b/c$

A megnyúltsággal kapcsolatban egyszerűen belátható (publikálatlan eredmény), hogy

- tetszőleges konvex, homogén alakzat esetén ha a befoglaló téglatestet a középpontja körül ½-ére kicsinyítjük, akkor a kapott kisebb téglatest tartalmazza az alakzat súlypontját, majd ezt felhasználva azt is, hogy
- Ha $H^*>3\cdot 2^{1/2}$ akkor $H>1$

Hasonló állítás fogalmazható meg L* és L kapcsolatáról is. Ezek az eredmények is azt mutatják, hogy egy mono-monosztatikus test nem lehet nagyon lapos vagy nagyon megnyúlt.

2) Lehet-e tapasztalatokat vagy érveket felsorakoztatni a következő kijelentés mellett vagy ellen, bármit is jelentsen az: a Természet a törtrendű deriváltak többféle fajtája közül a Riemann-Liouville féle deriváltat részesíti előnyben?

A törtrendű kalkulus egyik specialitása, hogy modern kori fejlődését a rendkívül változatos alkalmazási lehetőségek hajtják előre, és a rigorózus matematikai elmélet fejlődése ezeket az igényeket igyekszik követni. K. Diethelm a nemrég megjelent, Caputo deriváltat bemutató könyvének fő motivációjaként jelöli meg azt a célt, hogy kitöltse a témában meglévő elméleti matematikai szakkönyvek, és a mérnöki szemléletű, matematikai egzaktságukat tekintve kritizálható monográfiák között meglévő rést (Diethelm, 2010,Chapter 1).

Törtrendű deriváltakat (azon belül mind Riemann-Liouville, mind Caputo féle deriváltakat) használó modelleket alkalmaznak sikeresen többek között a kémia, a biomechanika, a transzportfolyamatok fizikája, a képfeldolgozás, a pszichológia és a pénzügyi tudományok területén is. Hogy egy témánkhoz közel álló példát említsek, a viszko-elasztikus anyagviselkedés egyik modellje az anyag megnyúlása és a benne ébredő feszültségek között törtrendű idő szerinti deriválttal kifejezett kapcsolatot tételez fel. Maga Caputo is ilyen problémák megoldására használta a róla elnevezett deriváltat. Ezek a tények is, és internetes keresési találatok elemzése[3] is egyértelműen azt mutatják, hogy a Riemann-Liouville féle derivált és a Caputo féle derivált egyformán sikeresen alkalmazható természeti folyamatok leírására.

Annyiban számomra természetesebbnek tűnik a Riemann-Liouville féle definíció, hogy hatványfüggvények esetén a 0 paraméterű *n*-edrendű derivált egyszerűen megadható

$$D^n x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\beta+1-n} x^{\beta-n}$$

alakban, míg a Caputo derivált ettől bizonyos esetekben eltér:

$$D^n x^\beta = \begin{cases} 0 & ha \quad \beta \in \{1,2,\ldots,\lceil n \rceil - 1\} \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n} & egyéb \quad esetben \end{cases}$$

tehát pl. rögzített *x* mellett β-nak nem folytonos függvénye. Ez a Riemann-Liouville derivált használatát egyszerűbbé teszi olyan esetekben, amikor függvények Taylor sorfejtésével dolgozunk. Ugyanakkor elképzelhetőnek tartom, hogy más helyzetekben a Caputo derivált viselkedik „természetesebben”.

Irodalomjegyzék

K. Diethelm, 2010, The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer. Letöltési link: https://www.researchgate.net/file.PostFileLoader.html?id=512bcd58e5438f371300000f&assetKey=AS%3A271832723197952%401441821379964

[3] google scholar keresővel 21500 találatot kaptam az {application Caputo fractional} és 21000 találatot az {application Riemann-Liouville fractional} szóhalmazra.

Melléklet: Maple munkalap képe

Budapest. 2018. január 3.

Várkonyi Péter László

> ***#Az X^2 függvény és deriváltjai***
> ***# a dolgozattal ellentétben a függvény felett a hullámjelet elhagytam***
> ***# és a _j indexek sem szerepelnek a képletekben***

$$Xnegyzet := \left(a(\mathrm{phi}) + \frac{(Y(\mathrm{alpha}) - b(\mathrm{phi}))}{\mathrm{phi}}\right)^2 \cdot \left(1 - \phi^2\right);$$

$$Xnegyzet := \left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)^2 \left(-\phi^2 + 1\right) \tag{1}$$

> $diff(Xnegyzet, \mathrm{phi});$

$$2\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)\left(-\phi^2 + 1\right)\left(\frac{d}{d\phi}a(\phi) - \frac{\frac{d}{d\phi}b(\phi)}{\phi} - \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi^2}\right) - 2\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)^2 \phi \tag{2}$$

>

> $diff(Xnegyzet, \mathrm{phi}, \mathrm{phi})$

$$2\left(\frac{d}{d\phi}a(\phi) - \frac{\frac{d}{d\phi}b(\phi)}{\phi} - \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi^2}\right)^2\left(-\phi^2 + 1\right) - 8\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)\phi\left(\frac{d}{d\phi}a(\phi) - \frac{\frac{d}{d\phi}b(\phi)}{\phi} - \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi^2}\right) + 2\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)\left(-\phi^2 + 1\right)\left(\frac{d^2}{d\phi^2}a(\phi) - \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}b(\phi)}{\phi} + \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}b(\phi)\right)}{\phi^2} + \frac{2\left(Y(\alpha) - b(\phi)\right)}{\phi^3}\right) - 2\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)^2 \tag{3}$$

> $diff(Xnegyzet, \mathrm{phi}, \mathrm{phi}, \mathrm{phi})$

$$6\left(\frac{d}{d\phi}a(\phi) - \frac{\frac{d}{d\phi}b(\phi)}{\phi} - \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi^2}\right)\left(-\phi^2 + 1\right)\left(\frac{d^2}{d\phi^2}a(\phi) - \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}b(\phi)}{\phi} + \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}b(\phi)\right)}{\phi^2} + \frac{2\left(Y(\alpha) - b(\phi)\right)}{\phi^3}\right) - 12\left(\frac{d}{d\phi}a(\phi) - \frac{\frac{d}{d\phi}b(\phi)}{\phi} - \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi^2}\right)^2\phi - 12\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)\left(\frac{d}{d\phi}a(\phi) - \frac{\frac{d}{d\phi}b(\phi)}{\phi} - \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi^2}\right) - 12\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)\phi\left(\frac{d^2}{d\phi^2}a(\phi) - \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}b(\phi)}{\phi} + \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}b(\phi)\right)}{\phi^2} + \frac{2\left(Y(\alpha) - b(\phi)\right)}{\phi^3}\right) + 2\left(a(\phi) + \frac{Y(\alpha) - b(\phi)}{\phi}\right)\left(-\phi^2 + 1\right)\left(\frac{d^3}{d\phi^3}a(\phi) - \frac{\frac{d^3}{d\phi^3}b(\phi)}{\phi} + \frac{3\left(\frac{d^2}{d\phi^2}b(\phi)\right)}{\phi^2} - \frac{6\left(\frac{d}{d\phi}b(\phi)\right)}{\phi^3} - \frac{6\left(Y(\alpha) - b(\phi)\right)}{\phi^4}\right) \tag{4}$$

> ***# a Gi függvény és deriváltjai***
> ***# az ismeretlen Y_j függvényektől való függést nem jelölöm explicit módon***
> ***# a differenciáloperátorokat a Maple saját jelöléseivel mutatja***

> $$Gi := int\left(\mathrm{sqrt}\left(\frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\phi}\right)}{(\mathrm{chi} - \mathrm{phi})}\right)\mathrm{sqrt}(Q(\mathrm{alpha}, \mathrm{phi})) \cdot (Y(\mathrm{alpha}) - b(\mathrm{phi}))^i, \mathrm{phi} = \mathrm{alpha..chi}\right);$$

$$Gi := \int_\alpha^\chi \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{\phi}}{\chi - \phi}}\,\sqrt{Q(\alpha, \phi)}\,\left(Y(\alpha) - b(\phi)\right)^i d\phi \tag{5}$$

> $\#$*változócsere*
> $with(IntegrationTools):$
> $Gi2 := Change(Gi, \mathrm{phi} = \mathrm{chi} - \mathrm{Gamma}^2 \cdot (\mathrm{chi} - \mathrm{alpha}), \mathrm{Gamma});$

$$Gi2 := (-2\alpha + 2\chi)\left(\int_0^1 \sqrt{-\Gamma^2 + 1}\,\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha - \Gamma^2\chi + \chi}}\,\sqrt{Q(\alpha, \Gamma^2\alpha - \Gamma^2\chi + \chi)}\,\left(Y(\alpha) - b(\Gamma^2\alpha - \Gamma^2\chi + \chi)\right)^i d\Gamma\right) \tag{6}$$

> $\#$*1. derivált*
> $Gderivalt := diff(Gi2, \mathrm{chi});$

$$Gderivalt := 2\left(\int_0^1 \sqrt{-\Gamma^2 + 1}\,\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha - \Gamma^2\chi + \chi}}\,\sqrt{Q(\alpha, \Gamma^2\alpha - \Gamma^2\chi + \chi)}\,\left(Y(\alpha) - b(\Gamma^2\alpha - \Gamma^2\chi + \chi)\right)^i d\Gamma\right) + (-2\alpha + 2\chi)\left(\int_0^1 \left(\right.\right. \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{3/2}\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i}{\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^2}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,\mathrm{D}_2(Q)\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}}$$

$$-\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,i\,\mathrm{D}(b)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\Bigg)\,\mathrm{d}\Gamma\Bigg)$$

> *#az a_{ij} tényező*
> *aij* := *simplify*(*subs*(alpha = chi, *Gderivalt*));

$$aij := \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\chi}}\,\sqrt{Q(\chi,\chi)}\,\left(Y(\chi)-b(\chi)\right)^i\pi \tag{8}$$

> *#2. derivált*
> *Gmasodikderivalt* := *diff*(*Gderivalt*, chi);

$$Gmasodikderivalt := 4\Bigg(\int_0^1\Bigg(-\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{3/2}\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i}{\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^2} \tag{9}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,\mathrm{D}_2(Q)\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}}$$

$$-\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,i\,\mathrm{D}(b)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\Bigg)\,\mathrm{d}\Gamma\Bigg)+($$

$$-2\,\alpha+2\,\chi)\Bigg(\int_0^1\Bigg(-\frac{1}{4}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i}{\left(\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}\right)^{3/2}\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^4}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,\mathrm{D}_2(Q)\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^2}$$

$$+\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,i\,\mathrm{D}(b)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^2}$$

$$+\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i}{\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^3}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,\mathrm{D}_2(Q)\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^2}{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,i\,\mathrm{D}(b)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\mathrm{D}_2(Q)\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,\mathrm{D}_{2,2}(Q)\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}}$$

$$+\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,i^2\,\mathrm{D}(b)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^2}{\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,i\,\mathrm{D}^{(2)}(b)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}{Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}$$

$$\left.-\frac{\left(-\Gamma^2+1\right)^{5/2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi}}\,\sqrt{Q\left(\alpha,\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)}\,\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^i\,i\,\mathrm{D}(b)\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)^2}{\left(Y(\alpha)-b\left(\Gamma^2\alpha-\Gamma^2\chi+\chi\right)\right)^2}\right)\mathrm{d}\Gamma\Bigg)$$

>