

Borkovits Tamás

A FEDÉSI KETTŐS ÉS TÖBBES CSILLAGRENDSZEREK
VIZSGÁLATÁNAK JÁRATLAN ÚTJAIN

DR KOLLÁTH ZOLTÁN OPPONENS KÉRDÉSEIRE ADOTT VÁLASZOK

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BAJAI OBSZERVATÓRIUMA,
BAJA, 2018

1. kérdés: A dolgozatból nem, de a tézisfüzetből kiderül, hogy a szerző az analitikus számolások kivitelezéséhez szimbolikus matematikai programcsomagot használt. Kérem mutassa be, milyen arányban használta ezeket az eszközöket, mik voltak a tapasztalatai és szemléltesse egy példával az eljárást.

Válasz: Az analitikus számítások kivitelezésénél a Maplesoft¹ Maple nevű matematikai szoftvercsomag 9–13-mas, 2003. és 2009. között kibocsátott, és egy Java nyelven íródott grafikus (X-es) interfésszel ellátott verzióját (Xmaple) használtam.² A programcsomag széleskörű algebrái, formális matematikai, numerikus analízisbeli, illetve grafikus lehetőségeinek kivonatos ismertetése megtalálható például a wikipédia megfelelő oldalán³, amely lehetőségek közül munkám során azonban csupán egy keveset használtam fel. Azt, hogy miként használtam a programcsomagot, az alábbiakban a hierarchikus hármas rendszerek szoros kettősének mozgásában jelentkező, hosszú periódusú, a perturbáló erő oktupól komponenseitől származó perturbációk kiszámításán (doktori mű, 2.3.1, fejezet, különösen 50-53. oldal) keresztül mutatom meg.

```
[> assume(mu > 0, a > 0, e < 1, e > 0, ev < 1, ev > 0);
```

A fenti sor a μ , a_1 , e_1 , illetve e_2 paraméterek értékészletére ad meg néhány olyan triviális kikötést, amelyre a Maple-nek a későbbiekben a formális matematikai műveletek végrehajtása során szüksége lesz.

```
> ro1:=a*(1-e^2)/(1+e*cos(u-om)); dtdu:=ro1^2/sqrt(mu*a*(1-e^2));
```

$$ro1 := \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(-u+om)}$$

$$dtdu := \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos(-u+om))^2 \sqrt{\mu a(1-e^2)}}$$

```
> rov2:=av*(1-ev^2)/(1+ev*cos(vv)); dt dv:=rov2^2/sqrt(muv*av*(1-ev^2));
```

$$rov2 := \frac{av(1-ev^2)}{1+ev\cos(vv)}$$

$$dt dv := \frac{av^2(1-ev^2)^2}{(1+ev\cos(vv))^2 \sqrt{muv av(1-ev^2)}}$$

```
> f3r:=15/64*GM3*ro1^2/r2^4*Mtag(I31*cos(3*vv+3*u-3*vvm-3*um)+I32*cos(3*vv-3*u-3*vvm+3*um)+3*I33*(cos(3*vv+u-3*vvm-um)+cos(vv+3*u-vvm-3*um))+3*I34*(cos(3*vv-u-3*vvm+um)+cos(vv-3*u-vvm+3*um))-3/5*I35*cos(vv+u-vvm-um)-3/5*I36*cos(vv-u-vvm+um));
```

$$f3r := \frac{15}{64} \frac{GM3 \cdot ro1^2}{r2^4} \cdot Mtag \left(I31 \cos(3 \cdot vv + 3 \cdot u - 3 \cdot vvm - 3 \cdot um) + I32 \cos(3 \cdot vv - 3 \cdot u - 3 \cdot vvm + 3 \cdot um) + 3 \cdot I33 \cdot (\cos(3 \cdot vv + u - 3 \cdot vvm - um) + \cos(vv + 3 \cdot u - vvm - 3 \cdot um)) + 3 \cdot I34 \cdot (\cos(3 \cdot vv - u - 3 \cdot vvm + um) + \cos(vv - 3 \cdot u - vvm + 3 \cdot um)) - \frac{3}{5} \cdot I35 \cos(vv + u - vvm - um) - \frac{3}{5} \cdot I36 \cos(vv - u - vvm + um) \right);$$

```
f3r:=15/64*1/(1+e*cos(-u+om))^2/r2^4*(GM3*a^2*(1-e^2)^2*Mtag(I31*cos(3*vv+3*u-3*vvm-3*um)+I32*cos(3*vv-3*u-3*vvm+3*um)+3*I33*(cos(3*vv+u-3*vvm-um)+cos(vv+3*u-vvm-3*um))+3*I34*(cos(3*vv-u-3*vvm+um)+cos(vv-3*u-vvm+3*um))-3/5*I35*cos(vv+u-vvm-um)-3/5*I36*cos(vv-u-vvm+um));
```

$$f3r := \frac{15}{64} \frac{1}{(1+e\cos(-u+om))^2 r2^4} \left(GM3 a^2 (1-e^2)^2 Mtag \left(I31 \cos(3 \cdot vv + 3 \cdot u - 3 \cdot vvm - 3 \cdot um) + I32 \cos(3 \cdot vv - 3 \cdot u - 3 \cdot vvm + 3 \cdot um) + 3 \cdot I33 \cdot (\cos(3 \cdot vv + u - 3 \cdot vvm - um) + \cos(vv + 3 \cdot u - vvm - 3 \cdot um)) + 3 \cdot I34 \cdot (\cos(3 \cdot vv - u - 3 \cdot vvm + um) + \cos(vv - 3 \cdot u - vvm + 3 \cdot um)) - \frac{3}{5} \cdot I35 \cos(vv + u - vvm - um) - \frac{3}{5} \cdot I36 \cos(vv - u - vvm + um) \right) \right);$$

Ezt követően formálisan megadom a ρ_1 , ρ_2 rádiuszvektorokat⁴, a $\frac{dt}{du_1}$, $\frac{dt}{dv_2}$ differenciálhányadosokat, illetve a perturbációs erő oktupól komponenseinek radiális (f_{3r}),

¹<https://www.maplesoft.com/products/maple/>

²Az ennél újabb verziókhoz sajnos már nem volt hozzáférésem.

³[https://en.wikipedia.org/wiki/Maple_\(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maple_(software))

⁴Itt jegyzem meg, hogy amikor ezeket a számításokat felprogramoztam, még általában más jelölési

valamint itt nem mutatott transzverzális, illetve normális komponenseit. A szoftver a korábban már definiált változókat egyből behelyettesíti, amint az látható, a részleteiben meghagyott, kék színű szoftver outputból is.

Ezt követően a doktori mű (2.11) képlete felhasználásával már könnyedén kiszámítható a $\frac{de_1}{du_1}$ derivált:

```
> #####
> # excentricitas derivalt
> #####
> dedu3 := convert(combine(taylor(sqrt(a/mu)*egymine2gyok*(f3r*sin(u
-om)+f3t*(cos(u-om)+(cos(u-om)+e)/(1+e*cos(u-om)))))*dtdu,
e, 5), trig), polynom);#valójában de/du*ro2^4/(1-e^2)^(1/2)
```

ahol jól látható, hogy ezen a ponton már számos (részben) szimbolikus matematikai eljárást végrehajtottam a programmal. Elsőként a behelyettesítések után kapott formulát az e_1 excentricitás szerint haladó Taylor-sorba fejtem ötödrendig, majd a Taylor-sorban megjelenő, különféle trigonometrikus tagok szorzatát tartalmazó komponenseket a trigonometrikus azonosságok felhasználásával átalakítom (a szinusz, koszinusz argumentumában megjelenő szögösszegekké, vagy különbségekké). Az ezt követő lépésben pedig az eredményt az excentricitás növekvő hatványai szerint csoportosított polinomná konvertálom, elhagyva egyben a Taylor-sorfejtés szimbolikus maradványtagját. A programkimenet első néhány sora itt látható:

$$\begin{aligned} dedu3 := & \frac{1}{128} \frac{1}{r^2 \sqrt{\mu \sim a \sim}} \left(\right. & (6) \\ & -45 \sqrt{\frac{a \sim}{\mu \sim}} \text{egymine2gyok GM3 } a \sim^4 \text{ Mtag I31 sin}(2 u + om + 3 v v - 3 v m \\ & - 3 u m) + 15 \sqrt{\frac{a \sim}{\mu \sim}} \text{egymine2gyok GM3 } a \sim^4 \text{ Mtag I31 sin}(-4 u + om - 3 v v \\ & + 3 v m + 3 u m) - 45 \sqrt{\frac{a \sim}{\mu \sim}} \text{egymine2gyok GM3 } a \sim^4 \text{ Mtag I32 sin}(2 u + om \\ & - 3 v v + 3 v m - 3 u m) + 15 \sqrt{\frac{a \sim}{\mu \sim}} \text{egymine2gyok GM3 } a \sim^4 \text{ Mtag I32 sin} \\ & \left. - 4 u + om + 3 v v - 3 v m + 3 u m) \right) \end{aligned}$$

Miután így megkaptam az e_1 excentricitásban az oktupól közelítésben, a megfelelő rendben fellépő összes perturbációt, ezeknek egy külső periódusra való átlagolásával állítottam elő a hosszú periódusú perturbációkat:

$$\begin{aligned} & > dedv3atlag := simplify(Pv/P/(av^4*(1-ev^2)^(5/2))*r2^4*combine(1/(2 \\ & \quad *Pi)*(int(dedu3, u=0..2*Pi))*(1+ev*cos(vv))^0, trig)); \\ & dedv3atlag := & (7) \\ & - \frac{15}{512} \frac{1}{\mu \sim P a v^4 (1 - ev^2)^{5/2}} (Pv a \sim^4 \text{egymine2gyok GM3 Mtag (20 I33} \\ & \sin(om + 3 v v - 3 v m - u m) + 20 I34 \sin(om - 3 v v + 3 v m - u m) \\ & - 4 I35 \sin(om + v v - v m - u m) - 4 I36 \sin(om - v v + v m - u m) \\ & + 105 e \sim^2 I33 \sin(3 om + v v - v m - 3 u m) - 3 e \sim^2 I35 \sin(om + v v - v m \\ & - u m) + 15 e \sim^2 I34 \sin(om - 3 v v + 3 v m - u m) + 35 e \sim^2 I32 \sin(3 om \\ & - 3 v v + 3 v m - 3 u m) + 35 e \sim^2 I31 \sin(3 om + 3 v v - 3 v m - 3 u m) \\ & + 105 e \sim^2 I34 \sin(3 om - v v + v m - 3 u m) + 15 e \sim^2 I33 \sin(om + 3 v v \\ & - 3 v m - u m) - 3 e \sim^2 I36 \sin(om - v v + v m - u m)) \end{aligned}$$

konvenciót használtam, miszerint a szoros és a tág pályához tartozó paramétereket az különböztette meg, hogy ez utóbbiakat vesszővel jelöltem. Erre a vesszőre utal a tág pályához tartozó változók és paraméterek nevének végén, vagy vége felé a v betű.

Hasonlóan kaphatók meg a többi pályaelemben jelentkező oktupól rendű, hosszú periódusú perturbációk is. Ezek kombinálásával pedig következik az $O - C$ analitikus alakjának felírása:

```

> #####
> Kozvetett tagok az O - C - ben:
> #####
> domincde :=  $\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(om)}{1-e \cdot \sin(om)} \cdot \left(2 - \frac{e \cdot \sin(om)}{1-e \cdot \sin(om)}\right)$ ; domincdom := 1

```

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-e \cdot \sin(om))^2}; \\
& \text{domincde} := \frac{\sqrt{1-e^2} \cos(om) \left(2 - \frac{e \sin(om)}{1-e \sin(om)}\right)}{1-e \sin(om)} \\
& \text{domincdom} := 1 - \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1-e \sin(om))^2} \tag{16}
\end{aligned}$$

```

> domincdepoly := combine(convert(taylor(domincde, e, 7), polynom), trig);
  domincdompoly := combine(convert(taylor( $\frac{\text{domincdom}}{e}$ , e, 7),
  polynom), trig);
domincdepoly :=  $2 \cos(om) + \frac{1}{2} e \sim \sin(2 om) - \cos(om) e^2 + \frac{1}{8} e^3 \sin(4 om)$ 
 $-\frac{1}{2} e^3 \sin(2 om) + \frac{3}{8} e^4 \cos(3 om) - \frac{1}{8} e^4 \cos(5 om) - \frac{1}{2} e^4 \cos(om)$ 
 $-\frac{13}{32} e^5 \sin(2 om) + \frac{5}{16} e^5 \sin(4 om) - \frac{3}{32} e^5 \sin(6 om)$ 
 $+\frac{1}{16} e^6 \cos(7 om) - \frac{1}{4} e^6 \cos(5 om) - \frac{5}{16} e^6 \cos(om)$ 
 $+\frac{3}{8} e^6 \cos(3 om)$ 
domincdompoly :=  $-2 \sin(om) + \frac{3}{2} \cos(2 om) e \sim + \sin(3 om) e^2$ 
 $+\frac{1}{4} e^3 \cos(2 om) - \frac{5}{8} e^3 \cos(4 om) + \frac{3}{8} e^4 \sin(3 om)$ 
 $-\frac{3}{8} e^4 \sin(5 om) - \frac{3}{8} e^5 \cos(4 om) + \frac{3}{32} e^5 \cos(2 om)$ 
 $+\frac{7}{32} e^5 \cos(6 om)$ 

```

(Ezen a ponton mindjárt felhívnám a figyelmet egy furcsaságra. Amint látható, a legutolsó kifejezésben, noha a Taylor-sorfejtés elvben hetedrendig történik, mégsem szerepel az excentricitásban hatodrendű tag. Vagyis úgy tűnik, mintha a program előbb végezné el a sorfejtést, és utána osztana e -vel. A valóság azonban ennél bonyolultabb, ugyanis amennyiben két külön parancssorba bontom az e -vel való osztást, majd pedig azt követően a Taylor-sorfejtést, ugyanezt az eredményt kapom. E viselkedésnek az eredetét nem tudom, és nem is jártam utána, azonban jelzi, hogy különös gondossággal kell eljárni, ha a Taylor-sorba fejtendő kifejezés független változójával korábban osztottunk. Ebben az esetben ez az óvintézkedés azt jelentette, hogy a Taylor-sorfejtéseket minden esetben a kívántnál eggyel magasabb rendig végeztettem el a programmal, vagyis az utolsó „hasznos” nagyságrendű tagokat már nem vettem figyelembe.)

A következő lépés már semmi újat nem tartalmaz:


```

> domincdvkozv3 := simplify(combine(convert(taylor(domincdepoly-dedv3atlag
+ domincdompoly-edomdvteljesatlag3, e, 5), polynom), trig));
domincdvkozv3 := - 15
1024 (Mtag GM3 egymine2gyok a~4 Pv (
-35 e~4 egyminuszenegyzet sini I32 sin(2 om - 3 vv + 3 vvm - 3 um)
-105 e~4 egyminuszenegyzet sini I33 sin(4 om + vv - vvm - 3 um)
-105 e~4 egyminuszenegyzet sini I33 sin(2 om + vv - vvm - 3 um)
-25 e~4 egyminuszenegyzet sini I33 sin(2 om + 3 vv - 3 vvm - um)
-80 egyminuszenegyzet sini I33 sin(-3 vv + 3 vvm + um)

```

(18)

viszont az eredmény közlésre megfelelő alakba rendezését, és az egyes együtthatók kiolvasását az alábbi sorok illusztrálják:

$$A3t := \frac{15}{8} \frac{Pv GM3 a^4 Mtag}{Pav^4 (1 - ev^2)^{5/2} \mu}$$

```

> simplify(coeff(coeff(domincdvkozv3, I42), e, 4));
simplify(coeff(coeff(domincdvkozv3, I42), sin(-(1·vv - 1·vvm - 2·om
+ 0·um))));
3 1
32 egyminuszenegyzet sini (egymine2gyok cosi (-5 sin(vv - vvm + 2 om)
+ 6 sin(vv - vvm) + 5 sin(-vv + vvm + 2 om) + 2 sin(vv - vvm + 4 om)

```

$$-2 \sin(-vv + vvm + 4 om)) \frac{3}{32} \frac{egymine2gyok e^2 cosi(4 + 5 e^2)}{egyminuszenegyzet sini} \quad (19)$$

Az így, mind a trigonometrikus kifejezések argumentumai, mind az e_1 excentricitás, illetve a köztes inklináció (i_m) különböző függvényei szerint leválogatott tagokat, illetve együtthatókat már egyenként kérdeztem le és jegyeztem fel a fenti formula jobb oldalán szereplő függvényargumentumok változtatásával. (Nyilván lehetett volna rá a Maple-n belül kis programot írni, hogy automatikusan legyártsa és exportálja mindet, de ezzel már nem bajlódtam.)

A fentiekén felül még a szoftvercsomag grafikus funkcióit használtam ki néhány alkalommal, amikor egyes analitikus formulákat közelítő sorfejtések alakjában kívántam reprodukálni, grafikusan ellenőrizve a közelítések jóságát, azonban a felesleges szószaporítás elkerülése végett ezt ehelyütt már nem illusztrálok.

Összefoglalásul annyit tudnék elmondani, hogy, noha, amint látható, a magam részéről csupán egy némileg fejlettebb zsebszámológépként használtam fel ezt a szimbolikus programcsomagot, azonban így is jelentősen felgyorsította a számításaimat, és nem utolsósorban, nyilván sokkal kevesebb hibát vétettem a számítások közben. Mindehhez jó összehasonlítási alapul szolgált számomra az első analitikus perturbációs számítással foglalkozó munkánkkal (Borkovits és mksai., 2003) való összevetés. Abban az esetben ugyanis még mindezeket a számításokat a szoftvercsomag segítségével nélkül, kézíleg, papíron végeztem, így a saját bőrömön is megtapasztaltam, mekkora segítséget és időnyerést nyújt ez a programcsomag, illetve megtanultam különösen becsülni az elmúlt századok égi mechanikusait, akik

esetenként sokkal hosszabb sorfejtéseket számoltak végig papíron, egy szál tollal.

2. kérdés: A dolgozatban több helyen is foglalkozik a megoldások realitásával, ezeken túlmenően mi mondható el a megoldások egyértelműségéről? Sok paraméter illesztésekor előfordulhat, hogy több megoldás is létezik, ami mérési hibán belül illeszkedik a megfigyelésekhez. Lehetséges-e, hogy valamelyik esetben több, fizikailag reálisnak tűnő megoldás is szülessen?

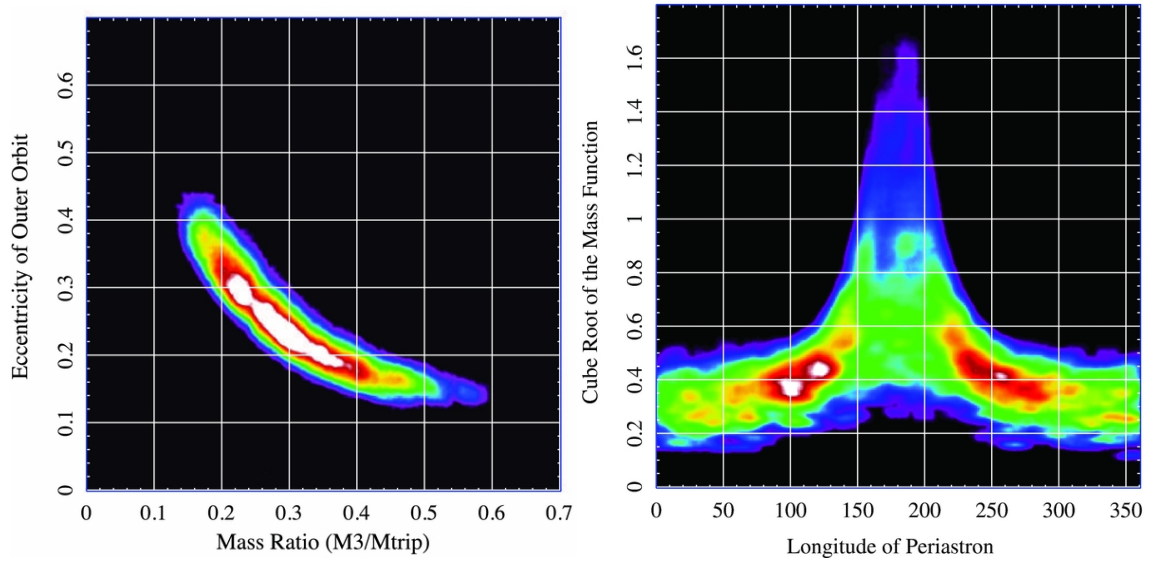
Válasz: Mind a dolgozatom negyedik fejezetében vizsgált $O - C$ -görbék, mind az 5. és 6. fejezetben analizált fénygörbék nagyszámú, esetenként több mint 20 paraméter függvényei, amely paraméterek között gyakran bonyolult, nemlineáris korrelációk is fennállnak. Így módon a megoldások egyértelműsége tényleg nem egy könnyen vizsgálható probléma. Ez különösképpen igaz az $O - C$ görbék analízisére, ahol a paramétereket a nemlineáris legkisebb négyzetek módszerén alapuló Levenberg-Marquardt algoritmussal határoztam meg. Ez az algoritmus, különösen az általam használt esetben, amikor az analitikus deriváltak ismertek, rendkívül gyors, azonban semmi sem biztosítja, hogy nem valamely lokális minimumot, hanem az abszolút minimumot találja meg. Ezen felül, a teljes paraméterter feltérképezésének hiányában, illetve a paraméterek közti nagyfokú korrelációk (1. ábra) következtében a paraméterek bizonytalanságának megbízható megbecslésére is csak kevésbé alkalmas.

Ezzel a kérdéskörrel ugyan terjedelmi okokból doktori dolgozatomban valóban nem foglalkozom, azonban, amint azt a doktori mű 4.6.1 (Az eredmények megbízhatósága) alfejezetében, a 19-es lábjegyzetben (134. oldal) megemlítem, a kombinált, mind fényidő-, mind dinamikai effektusból származó fedésiminimumidőpont-változásokat is mutató rendszerek ETV-megoldásai esetére a problémát alaposabban körüljártuk a doktori mű ezen részének alapjául szolgáló egyes munkáinkban (Rappaport és mktsai., 2013; Borkovits és mktsai., 2015).

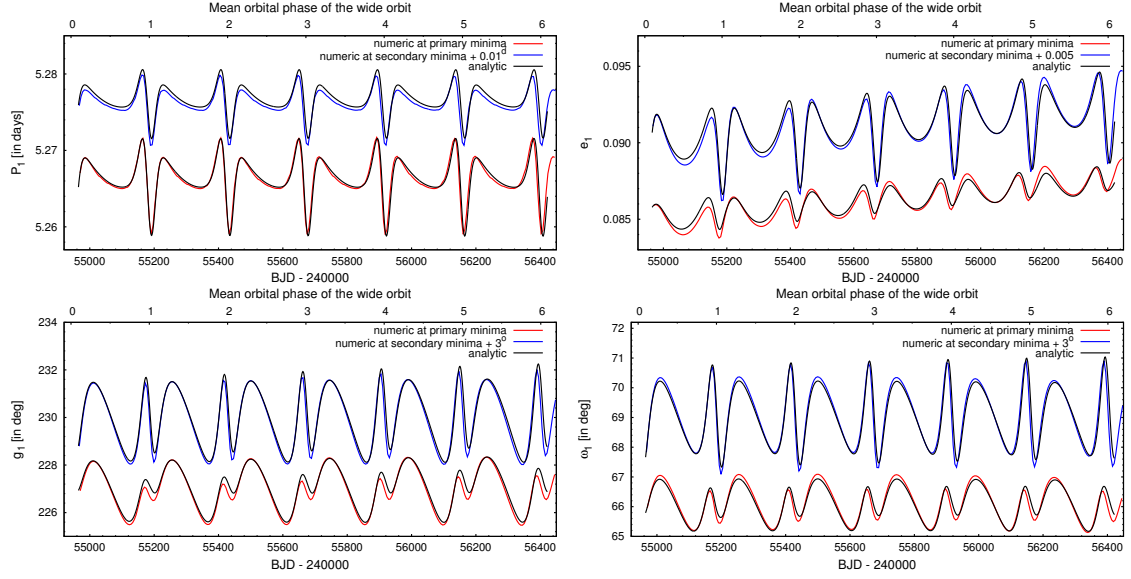
Mindkét dolgozatban, más-más numerikus módszerek alkalmazásával (köztük numerikus integrálással, mesterségesen előállított, a *Kepler* méréseihez hasonló minőségű $O - C$ -görbék illesztésével⁵) arra a következtetésre jutottunk, hogy amennyiben az adatsor hossza meghaladja a tág pálya periódusának kétszeresét, akkor a klasszikus pályaelemek közül az $e_{1,2}$ excentricitások, az $\omega_{1,2}$ pericentrum-argumentumok, valamint a pericentrum-átmenetek $\tau_{1,2}$ időpontjai, és természetesen a P_1 és P_2 periódusok is nagyon erősen meghatározottak. A fenti paraméterek közül érdemes kiemelni a szoros kettős e_1 és ω_1 pályaelemeit. Egy excentrikus pályán mozgó fedési kettőscsillag esetében a mellékminimum középidejének a (főminimum közepétől mért) $\phi = 0,5$ fotometriai fázistól való eltérése nem extrém nagy excentricitások esetén nagy pontossággal megadja az $e_1 \cos \omega_1$ paramétert.⁶ Jelentős dinamikai perturbációk esetében azonban, amennyiben az $O - C$ -görbe legalább egy (szerencsésebb esetben több) külső periódust is lefed, akkor a görbe alakja megtöri az $e_1 - \omega_1$ elfajulást, és így módon azt találtuk, hogy a Borkovits és mktsai. (2015) tanulmányban vizsgált 26, excentrikus fedési kettőst tartalmazó, kompakt hierarchikus hármas rendszer közül azok esetében, amelyek a fenti feltételt kielégítették, a fedési kettős excentricitásának, illetve pericentrum-argumentumának a tipikus bizonytalansága $\delta e_1 \sim 10^{-4}$,

⁵Ld. Borkovits és mktsai. (2015), E. függelék.

⁶Az excentricitás magasabb, páratlan hatványait is tartalmazó, pontosabb formulát a dolgozatom bevezető fejezetében, az (1.27,28) egyenletekben adom meg.



1. ábra. Példák az illesztési paraméterek közti korrelációra a 39 *Kepler*-hármassjelöltet vizsgáló első, 2013-mas munkánkból (Rappaport és mksai., 2013). A bal oldalon a dinamikai komponens által dominált KIC 9714358 esetében látható az m_C/m_{ABC} tömegarány, illetve a tág pálya e_2 excentricitása közti korreláció. (E korreláció eredete a dinamikai $O - C$ komponens amplitúdójában keresendő.) A jobb oldalon egy sokkal erősebb elfajulás látható az $f(m_C)$ tömegfüggvény köbgyöke (amely a fényidő-komponens amplitúdójában jelenik meg), illetve a tág pálya ω_2 pericentrum-argumentuma között egy olyan rendszer, a KIC 9451096 esetében, ahol a dinamikai, illetve a fényidőtag amplitúdója hasonló. A színek a paraméterértékek relatív valószínűsége szerint vannak skálázva a fehértől (legmagasabb valószínűség) a liláig (legalacsonyabb).



2. ábra. A KIC 7289157 szoros kettősének pályaelemváltozásai az analitikus modell (fekete), illetve numerikus integrálás (piros és kék) esetén, az $O - C$ görbére illesztett analitikus modell alapján kapott kezdeti rendszerparaméterek figyelembe vétele mellett. A piros, illetve kék görbék a numerikus integrálás során a fő- illetve mellékminimum aktuális idejéhez az adott ciklusban legközelebb eső lépések során mintavételezett, Jacobi-féle hely-, illetve sebességkoordinátákból számolt oszkuláló pályaelemeket mutatják. Mint látható, az analitikus görbék ezt a belső pálya fázisától függő változást is lekövetik, amely azért lehetséges, mert a doktori mű 2.3.2 alfejezetében tárgyaltak értelmében a rövid periódusú perturbációk fázisátlagolt hatását is figyelembe vettem. A négy panel balról jobbra, illetve fentről lefelé rendre a P_1 pillanatnyi periódus, az e_1 excentricitás, a g_1 dinamikai, valamint az ω_1 észlelői rendszerbeli pericentrum-argumentumok változását mutatja. (A további pályaelemek változását szemléltető ábrák Borkovits és mksai., 2015 E. mellékletének E4. ábráján láthatók.)

$\delta\omega_1 \sim 0,1$ körülinek adódott. Ezen a ponton azonban szükséges észben tartanunk, hogy az eredményeink ennél bizonyosan legalább egy nagyságrenddel nagyobb szisztematikus „hibát” tartalmaznak. Ennek oka (a modell nyilvánvalóan közelítő jellegén túl) az, hogy maguk a szoros kettős pályaelemei a hosszú periódusú perturbációk miatt, P_2 időskálán a fentebbi formális hibánál legalább egy nagyságrenddel nagyobb, periodikus perturbációkat szenvednek el. E perturbációk, a kvadrupól közelítés keretén belül, közvetlenül a doktori mű (2.39)–(2.46) egyenleteinek v_2 -szerinti integrálásával kaphatók meg. Itt jegyzem meg, hogy bár a doktori műben nem említtem, de az analitikus $O - C$ -illesztő programcsomagom a futtatás végeredményének elfogadott illesztés esetében ezen egyenletek, valamint az elsőként tudomásom szerint általam kiszámolt okkupól rendű, valamint egyes rövid periódusú perturbációk átlagolásával kapott további hosszú periódusú perturbációk, illetve a kvadrupól rendű szekuláris perturbációk figyelembe vételével kiszámítja a szoros kettős összes pályaelemének a vizsgált időintervallum alatti változását is. Ennek illusztrációjaként ehelyütt a 2. ábrán bemutatom a KIC 7289157 esetére a szoros kettős pályaelemváltozásait szemléltető grafikonokat mind az $O - C$ analizáló kód által számolt analitikus formulák, mind numerikus integrálás alapján. Itt jegyzem meg azt is, hogy vizsgálataink szerint, elegetően jó minőségű $O - C$ -görbe esetén a tág pálya excentricitása is akár $\delta e_2 \leq 0,01$ -os bizonytalansággal megkapható.

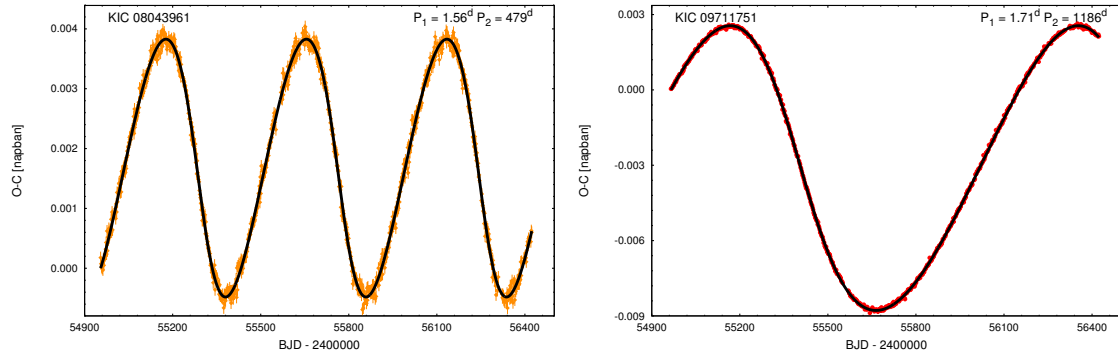
Egy további, fontos paraméter a két pályasík hajlásszöge, az i_m köztes inklináció. Erre vonatkozó numerikus vizsgálataink azt mutatták, hogy e paraméter esetében az LM eljárás során kapott, tipikusan $1^\circ - 2^\circ$ -os bizonytalanságok jócskán alulbecsülik e paraméter tényleges hibáját, különösképpen az alacsony köztes inklináció ($i_m \lesssim 30^\circ$) tartományában. Ennek az lehet az oka, hogy közel egysíkú pályák esetén az analitikus formulák köztes inklinációtól való függése meglehetősen lapos. Ráadásul ebben a tartományban az oktapól, illetve az átlagolt rövid periódusú tagoknak a kvadrupól járulékokhoz képesti relatív erőssége általában nagyobb. (Éppen ez ösztönzött ezen magasabb rendű perturbációs komponensek figyelembe vételére, és ezen tagok beillesztése után a bizonytalanság valóban mérséklődött. Azaz korábban még az ehelyütt említettéknél is nagyobb volt.)

A program outputjai közül az asztrofizikailag legfontosabb paraméterek minden bizonnyal a csillagtömegek lennének. E tömegekkel kapcsolatos paraméterek közül a tág pálya tömegaránya a tapasztalataim szerint általában az $1 - 10\%$ -os, tehát elegendően kicsinek sajnos semmi esetre sem nevezhető tartományba esik. Még problémásabbak maguk a tömegek. Tapasztalataim szerint, amennyiben a dinamikai járulék amplitúdója jelentősen felülmúlja a fényidő-komponensét, akkor a megoldás szinte érzéketlen az individuális tömegekre, a megoldás csupán azok hányadosát adja vissza, mégpedig a korábban említett bizonytalansággal. Ugyanakkor, ha a két jelenségnek a fedésiminimumidőpont-változásokra kifejtett hatása összemérhető, akkor a tág rendszerbeli individuális tömegek is hasonló biztonsággal (vagy bizonytalansággal) kaphatók meg, mint arányuk. Mindezt az alábbiakban néhány példával is illusztrálom.

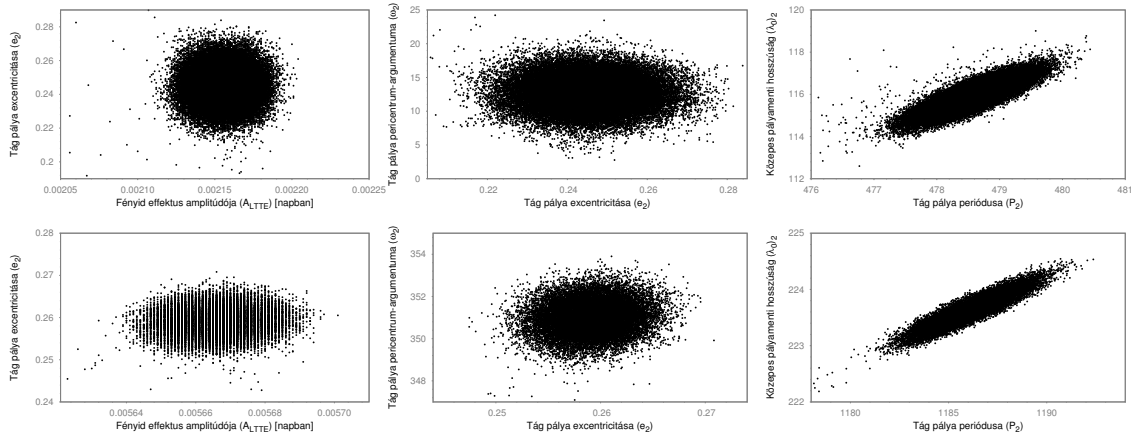
A dolgozat elkészülte óta eltelt időben ugyanis mind az analitikus formulákon alapuló $O - C$ - (vagy ETV-)görbét illesztő, mind (az ezen felül is jelentős fejlesztéseken átesett) fénygörbeillesztő programcsomagomba beépítettem egy, az általános Metropolis-Hastings algoritmus alapján működő Markov-láncos Monte Carlo (MCMC) paraméter-kereső eljárást. Ezzel a módszerrel ugyan az egyes $O - C$ -megoldások megkeresésének ideje valamivel hosszabb, de (legalábbis, amennyiben az ember időmilliomos) a paramétertér, és így a különféle paraméterelfajulások megbízhatóan feltérképezhetők, valamint a paraméterek bizonytalansága is statisztikailag megbízhatóbb módon becsülhető. Ezért a következőkben néhány, a dolgozatban, illetve az alapjául szolgáló tanulmányokban az LM-módszerrel analizált, tipikusnak tekinthető ETV görbét alávétettem a programba frissen beillesztett, MCMC eljárás alapján paraméterkeresésnek.

Elsőként két tisztán fényidőeffektussal modellezhető ETV-görbét vizsgáltam meg. Ezek a KIC 8043961, illetve a KIC 9711751 fedési kettősök ETV-görbéi (3. ábra). Az első rendszer esetében a *Kepler*-űrtávcső megfigyelései 3,07, míg a másodikonál csupán 1,23 tágpálya-periódust ölelnek fel. Az LM, illetve az MCMC módszerrel kapott, legvalószínűbbnek elfogadott paraméterértékek az 1. táblázat első soraiban láthatók. Amint látható, ezekben az esetekben a két módszer nagyon hasonló eredményt adott, legfeljebb az látható, hogy az LM-módszer használata során a kovariancia mátrixból becsült formális hibák kicsit alulbecsülték az MCMC módszerrel kapott szimmetrikus 1σ bizonytalanságokat. A 4. ábra panelein egyes illesztési paraméterek közti korrelációkat szemléltettem. Jól látható, hogy a P_2 periódus, illetve $(\lambda_0)_2$ kezdeti pályamenti hosszúság közti triviális korrelációt leszámítva nem fedezhetők fel más összefüggések a példaként ábrázolt változók között.

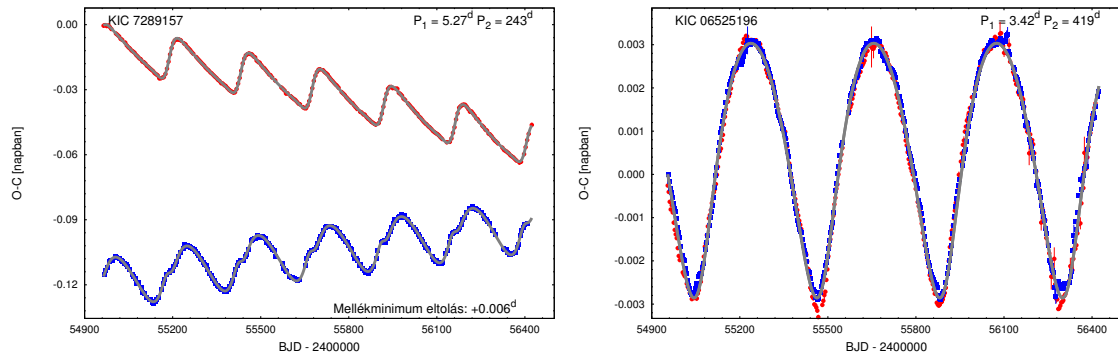
E tény azért sem okoz különösebb meglepetést, mert ismeretes, hogy amennyiben a fedési minimumidőpontok változásainak egyedüli forrása egy olyan fényidőeffektus, amelynek periódusa jól ismert, továbbá a fényidőpálya excentricitása nem túl extrém érték, akkor ebben az esetben a fényidőpálya pályaelemei (vagy pontosabban: ezeknek közelítő értékei) a Fourier-térben egyszerű, kezdeti paraméterbecslést nem igénylő, és az abszolút minimumot megtaláló lineáris legkisebb négyzetes illesztéssel is megkaphatók (Kopal, 1978; Vinkó,



3. ábra. A KIC 8043961, illetve KIC 9711751 ETV görbái MCMC fényidő-illesztéssel



4. ábra. Korrelációs grafikonok a KIC 8043961 (felső sor), valamint a KIC 9711751 paraméterteréből.



5. ábra. A KIC 7289157, illetve KIC 6525196 ETV görbái MCMC módszerrel kapott kombinált, dinamikai és fényidőillesztéssel. (A piros körök a főminimumokat, a kék négyzetek pedig a mellékminimumokat jelölik.)

1. táblázat. Tisztán fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek, illetve hibáik összehasonlítása LM (felső sor), illetve MCMC paramétermeghatározás esetén.

KIC No.	P_1 (d)	P_2 (d)	$a_{AB} \sin i_2$ ($R_\odot$)	e_2	ω_2 ($^\circ$)	τ_2 (MBJD)	$f(m_C)$ ($M_\odot$)
8043961	1,55921280(1)	478,6(2)	82,6(2)	0,245(5)	13(1)	54817(2)	0,0330(3)
	1,55921280(1)	478,6(5)	82,6(6)	0,246(11)	13(4)	54818(5)	0,0329(6)
9711751	1,71152818(1)	1186,1(7)	218,1(2)	0,259(1)	351,0(4)	55385(1)	0,0989(3)
	1,71152818(1)	1186,2(16)	218,2(4)	0,259(3)	351,1(9)	55385(3)	0,0989(6)

2. táblázat. Kombinált dinamikai és fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek. (Az egyes sorok jelentését ld. a szövegben!)

KIC No.	P_1 (d)	P_2 (d)	a_2 ($R_\odot$)	e_2	ω_2 ($^\circ$)	τ_2 (MBJD)	$f(m_C)$ ($M_\odot$)	$\frac{m_C}{m_{ABC}}$	m_{AB} ($M_\odot$)	m_C ($M_\odot$)
7289157	5,2665478(4)	243,36(8)	215(6)	0,309(3)	156,5(7)	54942(1)	0,14(2)	0,39(3)	1,4(1)	0,9(1)
	5,2665479(4)	243,33(2)	215(2)	0,314(12)	157,0(49)	54942(4)	0,130(9)	0,39(1)	1,39(5)	0,87(3)
	5,2665745(14)	243,13(19)	218(3)	0,308(4)	158,8(15)	54943(1)	0,15(1)	0,40(1)	1,43(8)	0,93(4)
6525196	3,42059733(4)	418,2(1)	334(27)	0,295(5)	94(2)	55070(3)	0,066(10)	0,29(3)	2,0(5)	0,8(2)
	3,42059725(1)	418,6(3)	330(16)	0,289(34)	98(15)	55072(18)	0,063(4)	0,284(7)	1,97(3)	0,78(2)
	3,420460(3)	418,53(9)	332(5)	0,306(2)	94,8(8)	55072(2)	0,062(1)	0,282(4)	2,02(2)	0,80(1)

1989; Borkovits és Hegedüs, 1996).

A kombinált dinamikai és fényidőmegoldás egyértelműségének, vagy éppen ennek hiányának demonstrálására két hierarchikus hármast, a harmadik komponens extra fedéseit is mutató (triplán fedő) KIC 7289157, illetve a KIC 6525196 katalógusszámú rendszereket választottam. Az előbbi hármascillag belső kettőse excentrikus pályán kering, és az $O - C$ görbe, amelyet egyértelműen, de nem túl erősen a dinamikai effektus dominál (az amplitúdók aránya $\sim 4,4$ a dinamikai járulék javára), jól láthatóan mutatja a harmadik test perturbációi keltette gyors, dinamikai apszismozgás nyomát is, míg a második hármascillag szoros kettőse körpályán kering, és a fényidőeffektus amplitúdója pontosan a duplája a dinamikaiénak (5. ábra). Ezen felül a *Kepler*-űrtávcső mérései az első esetben pontosan hat, de a második rendszer esetében is több mint három tágpálya-periódust fednek le. A 2. táblázatban foglaltam össze e két rendszer esetében is a korábbi LM-illesztésekből, illetve a jelenlegi, MCMC-eljárással talált, elfogadott megoldásokat. A KIC 7289157 esetében két MCMC megoldást is megadok, amelyeket ugyan a tömegekben jelentősen eltérő kezdeti paraméterekkel indítottam, azonban mindkét megoldás láthatóan ugyanoda konvergált. Ezen a ponton felhívnám a figyelmet arra is, hogy mindhárom esetben csaknem egysíkú konfiguráció adódott, amit egy triplán fedő rendszer esetében előzetesen is valószínűsítettünk. Ugyanakkor a három megoldás közel sem egyenértékű abban, hogy a szoros kettős esetében milyen gyorsaságú, és milyen irányú inklináció, és ezzel fedésmélység-változást jósol.

3. táblázat. Apszismozgási és/vagy orientációs paraméterek klasszikus apszismozgási (AME) és dinamikai illesztésekből

KIC No.	P_{anom} (d)	a_1 ($R_\odot$)	e_1	ω_1 ($^\circ$)	τ_1 (MJD)	P_{ω_1} (y)	i_m ($^\circ$)	i_1 ($^\circ$)	i_2 ($^\circ$)	$\Delta\Omega$ ($^\circ$)	P_{node} (y)
7289157	5,2673864(4)	14,1(4)	0,0828(2)	65,43(4)	54972,1908(8)	91	4,3(3)	85,8	89,5	2,2(7)	80
	5,2673766(4)	14,2(2)	0,0827(25)	65,45(78)	54972,1912(134)	92	1,9(14)	87,7	89,5	-0,3(3)	79
	5,2673769(14)	14,3(3)	0,0863(14)	66,44(41)	54972,2042(70)	96	6,7(9)	96,0	89,5	1,5(3)	78
6525196	3,4205160(1)	12,1(1,0)	0	—	—	—	0 ^a	80	80	0	—
	3,420526579(7)	11,98(6)	0	—	—	—	10(1)	85	85,9	-10(1)	512
	12,1(2)	0,00004 ^b	355,4 ^b	—	54951,7422(2)	2(1)	85,00(5)	83(1)	0,1(5)	—	—

Megjegyzések: a: $i_m = 0^\circ$ rögzítve. Ebben az esetben, pályasík precesszióra utaló fedésmélység-változás hiányában az

összehasonlítás alapját képező dolgozatunkban (Borkovits és mksai., 2016) csak az egysíkú, direkt megoldást vizsgáltuk. b: A

harmadik test perturbációi következtében a numerikusan integrált belső pálya minden pillanatban nullától kicsit különböző

excentricitás-értéket vesz fel, amely a mintavételezés időpontjától függően is változik.

Ez utóbbi aláhúzza, hogy a megoldásom egyáltalán nem egyértelmű. Ugyanakkor dinamikai szempontból a különbség a három megoldás között elhanyagolható.

A másodiknak választott KIC 6525196 azért releváns ezen a ponton, mert ennek a rendszernek minden komponense elég fényes ahhoz, hogy radiális sebessége megmérhető legyen. Az elmúlt években a hármas rendszer radiális sebességgörbéit legalább két kutatócsoport is mérte. Ezek egyike a Derekas Aliz és általam vezetett csoport. Az én kezdeményezésemre e hármas rendszer csillagainak radiálissebesség-görbéit évek óta mérjük a szombathelyi, illetve Piskás-tetőn felszerelt spektroszkópokkal. Így számítógépemen jelen pillanatban is fut e hármas rendszer komplex, fotodinamikai analízise, amely egyidejűleg foglalja magában a rendszer négy éves *Kepler*-fénygörbéjének, három vonalas radiálissebesség-görbéjének, illetve $O - C$ görbéjének analízisét olyan módon, hogy közben a hármas rendszer mozgását a program numerikusan integrálja. Így módon viszonylag megbízható pályaelemekkel, illetve individuális tömegekkel rendelkezünk, amelyek jól összehasonlíthatók az analitikus $O - C$ illesztő kódokból kapott értékekkel. Ezért e rendszer esetében a 2. táblázat vonatkozó első sora a korábbi, LM-illesztéssel, a második sora az MCMC módszerrel, de szintén az analitikus $O - C$ -illesztő kóddal kapott paramétereket adja meg, a harmadik sor azonban a komplex, fotodinamikai programcsomaggal kapott, jelenleg legvalószínűbbnek elfogadott, de még nem véglegesnek tekintett paramétereket adja meg.

Úgy gondolom, az eredmények ezúttal is önmagukért beszélnek. Mindezek ellenére felelőtlenség lenne kijelentenem, hogy a programjaim minden esetben a fizikailag ténylegesen megvalósuló rendszerkonfigurációt találják meg. Annyi mondható, hogy megfelelő hosszúságú, illetve minőségű adatsorok esetén ennek az esélye természetesen mindig megnövekszik. Az egyes hamis megoldások pedig további vizsgálatokkal kizárhatók. Így például a fedési fénygörbe analízise, amennyiben mindkét típusú fedés megfigyelhető, és megfelelő minőségű, önmagában is egyértelműen megadja a belső pálya excentricitását, illetve a nagytengely irányát. Ezzel tehát kontrollálható a programból kapott kimenet. Hasonlóképpen, amint már említettem, a program által jósolt, vagy éppen nem megjósolt fedésmélység-változás egy további fontos kritérium, az esetleges spektroszkópiai tömegekről nem is beszélve. Az igazi aduászt viszont a triplán fedő rendszerek jelentik, ezek ugyanis nagyon szigorú feltételeket rónak a helyes megoldásra. Ezért is, illetve azért, mert a közeljövőben nemigen várható az eredeti *Kepler*-küldetésből kapottakhoz mind hosszúságban, mind pontosságban hozzámérhető újabb $O - C$ görbék, erőforrásaimat jelenleg inkább a komplex, fotodinamikai programcsomag fejlesztésére fordítom.

3. kérdés: Az 5. és 6. fejezetekben hangsúlyozza, hogy a pulzáció illesztésére matematikai és nem fizikai modellt használt. Véleménye szerint megvalósítható-e ez a közeljövőben, és milyen előrelépésre számítana ebből?

Válasz: Kérdésével az Opponens nyitott kapukat döngtet. Jelenleg is futó OTKA pályázatomban célkitűzései között szerepel a doktori dolgozatomban bemutatott fénygörbékódból továbbfejlesztett komplex fotodinamikai programcsomagba a pulzáció realiztikusabb modellezésének beillesztése is. Ezzel a kérdéssel bajai kollégám, Bíró Imre Barna foglalkozik, lassan egy évtizede, úgyhogy válaszom elsősorban a vele a kérdés kapcsán folytatott diskurzuson alapul.

Elöljáróban azonban szeretném megjegyezni, hogy az általam alkalmazott, a lehető legegyszerűbb matematikai modellből is azért a csillagpulzációkra vonatkozó számos fontos, fizikai eredmény kinyerhető, amint azt manapság már olyan tanulmányok tucatjai mutat-

ják, amelyekben a szerzők a pulzációs fénygörbe Fourier-analízisével nyert pulzációs frekvenciákat és amplitúdókat vetik elmélyült vizsgálat alá. Ugyanakkor kétségtelen, hogy egy olyan fizikai modellből, amely magában foglalná a csillag asztroszeizmológiai modellezését is nem csak a pulzációelmélet, hanem a fedési fénygörbék analízise is jelentősen profitálna.

Itt elsősorban arra gondolok, hogy az egyszerű periodikus jelek nem veszik figyelembe azt a modulációt, amit a pulzációs jelekben a fedések keltenek a részleges kitakarás során. Radiális pulzációknál, amikor a csillag teljes felszíne azonos fázisban oszcillál, ez még csak az oszcillációs amplitúdó csökkenésében mutatkozik meg, amely az éppen illesztés alatt levő kettős/többses-modell keretében még elvileg könnyen beépíthető. Nemradiális pulzációknál viszont mind az amplitúdó, mind pedig a (kezdő-)fázis bonyolult módon változnak a fedés alatt, amely változások jellege a felszíni mintázattól; ezen keresztül pedig az oszcillációs sajátfüggvény alakjától (módusszámaitól), valamint a pulzáció szimmetriatengelyének irányától függ.

Nagy amplitúdójú pulzációk (például cefeidák) esetében a fedési fénygörbe oldaláról ehhez még az is hozzáadódik, hogy a jelentős hőmérséklet-, és így felületifényesség-, valamint csillagsugár-változás következtében mind a fedésmélység, mind a fedéshossz, valamint a leszálló és felszálló ágak meredeksége is változik annak függvényében, hogy milyen pulzációs fázisnál következik be a fedés. Ennél fogva a fedési csillagrendszerekbeli pulzációk kielégítő modellezése a felszíni pulzációs mintázatok (és emellett esetlegesen a csillagsugár változásának) alkalmas modellezését igényli. E modellezés többféleképpen is megtehető.

- a) Az egyik lehetőség, hogy a pulzáló komponensre asztroszeizmológiai modellt (azaz egy ténylegesen, minden szempontból fizikai modellt) illesztünk, amely azonosítja az egyes frekvenciák pulzációs módusait (azaz a pulzációs mintázatot leíró valamely Y_{lm} gömbfelületi függvény aktuális l, m módusszámait). Ez számos olyan paramétert igényel, mint pl. a csillag belső szerkezete (ez határozza meg, hogy melyik módus milyen térbeli tartományban lehet jelen), illetve a csillag olyan fontos állapothatározói, mint pl. a tömeg, sugár, effektív hőmérséklet. Ezen felül a pulzációs tengely helyzete egy további, ismeretlen paraméter. Ebből kifolyólag ezt az asztroszeizmológiai módszert nem könnyű megvalósítani.
- b) Másik lehetőség, hogy kihasználjuk a fedések felszíni mintavételező jellegét, és a teljes, modulált pulzációs jelből kíséreljük meg rekonstruálni a felszíni mintázatokot. Ez megtehető akár analitikus alakot feltételezve (Y_{lm} gömbfelületi függvények), akár teljesen numerikus eljárással (képrekonstrukcióval), a felszínt felületelemekre bontva és azok összességét egyfajta digitalizált képként kezelve (ld. pl. Bíró és Nuspl, 2011). Ez az Eclipse Mapping (fedési leképezés) típusú módszer család „csak” a fedési geometria ismeretét igényli, amely a fedési fénygörbemodelből, legalábbis a posteriori amúgy is adott. Ezért, ebből a szempontból ez előnyösebb, mint a megelőzően tárgyalt eljárás, azonban ez a módszer megfelelően nagy időfelbontású, több fedést felölelő, és – főleg – nagyon pontos adatsort igényel. Szerencsére az űrtávcsöves missziókban, különösen az elsődleges *Kepler*-küldetésben számos ilyen adatsor született. Ugyanakkor annyit azonban meg kell jegyezni, hogy e második módszer hátránya az első, tényleges asztroszeizmológiai modellhez képest, hogy ez utóbbi a csillag időbeli alak- és méretváltozását nem veszi figyelembe, és így alkalmazása inkább csak a kis amplitúdójú (pl. δ Scuti- és/vagy γ Dor-típusú) pulzációkat mutató fedési kettőscsillagok esetében kecsegtet előnnyel.

Szólni kell még arról a bonyolító tényezőről is, hogy mind a két esetben ismerni kell a csillag „pulzációs tengelyének” (pontosabban, a pulzációs mintázatok szimmetriatengelyének) az irányát. Ennek az az oka, hogy a fényességváltozást jelentősen befolyásolja, hogy

a mintázatot milyen irányból fedi el a társcsillag. A szimmetriatengely általában megegyezik a csillag forgástengelyével, azt pedig általában a pályasíkra merőlegesnek tekintik, de excentrikus rendszerekben ez már nem feltétlenül igaz (ld. pl. Albrecht és mksai., 2009).

A rekonstrukciós módszert Bíró Imre Barna kollégámnak és doktoranduszának, Bókon Andrásnak (SZTE fizika doktori iskola) nemrégiben először sikerült élesben is alkalmazni a KIC 3858884 fedési kettőscsillag pulzációs módusainak azonosítására – igaz, egyelőre a több mint száz módus közül csak az elegendően erős obszervációs szignatúrájú 10 módusra. Ezek tipikusan azok a módusok, amelyek jele közvetlenül a fényváltozás grafikonján is megnyilvánul. Iteratív alkalmazással még néhány tucat további módus esetleg beazonosítható, (azonban a gyengébb fotometriai jelet adó módusok egy bizonyos szint alatt már valószínűleg nem). A pulzáló komponens forgástengelyét a keringési síkra merőlegesnek feltételezve az általános képrekonstrukciós módszer értékelhető mintázatokot adott. Az azokból kapott módusszámok közül azok, amelyeket egy korábbi tanulmány (Maceroni és mksai., 2014) a csillag hozzávetőleges asztroszeizmológiai modelljéből is megbecsült, jó egyezést mutatnak. Az is kiderült, hogy a pulzációs módusok nem mind egyazon csillagról származnak, ami nehezíti az elemzést, azonban a szerzők most is dolgoznak azokon a külön módszereken, amelyek segítségével az egyes frekvenciák forrását reményeik szerint azonosítani lehet majd.

Terveink szerint kollégáim eljárását még az idei év során beépítjük a komplex fotodinamikai programcsomagunkba. A pulzációkutatásban várható előnyökön túl még a további előnyök is várhatók:

1. A fedési és pulzációs fényességváltozások még tökéletesebb szétválasztása önmagában is lehetővé teszi a fedési fénygörbékben klasszikusan meghatározható paraméterek (pl. relatív csillagsugár, hőmérsékletarány, stb.) még pontosabb meghatározását;
2. A modellezett pulzációs jelből közvetve további információ kapható a csillag forgási torzultságára, a forgástengely irányára;
3. A pulzáció által esetlegesen elfedett egyéb, kisamplitúdójú fényváltozások (pl. bolygófedés) is kimutathatókká válnak;
4. A pontosabb pulzációs modell abban az esetben is realisztikus tömegbecslést nyújthat, amennyiben spektroszkópia hiányában nincsenek ilyen irányú információink;
5. Továbbá, bizonyos hamis periódusok (pl. az $O - C$ diagramból) még biztosabban kiszűrhetők lesznek.

4. kérdés: Hogyan interpretálható, hogy a HD 183648 esetén a pulzációs frekvenciák különbsége a pályamozgás frekvenciájának a kétszerese, emellett mindkettő lényegesen magasabb ($\sim 17 - 19$ szerez) frekvenciájú?

Válasz: A pulzációs frekvenciáknak a kérdésben szereplő érdekes viselkedése nem választható külön a fedési fénygörbe másik különleges jellegzetességétől, a keringési frekvencia kétszeresével megegyező frekvenciájú, szinuszoidális fényváltozástól, amely nagyságrendileg hasonló amplitúdójú, azonban csaknem pontosan ellentétes fázisú, mint az elméletileg várható, árapály eredetű, klasszikus ellipszoidális fényváltozás. Mivel a pályamozgási frekvencia kétszerese mindkét szokatlan fényváltozási jelenség esetében megjelent, kezdetől feltételeztük, hogy mindkét jelenség összefüggésben lehet a két csillag közti árapály-kölcsönhatással. Ezért az analízis végső fázisában Derekas Alizzal közösen megkerestük

Jim Fullert, aki a Cornell University-n azidőtájt doktorált az árapály-gerjesztésű csillag-pulzációk témakörében, és akivel már korábban, a HD 181068 tripla rendszerében jelentkező árapály eredetű oszcillációk tanulmányozása kapcsán is együtt dolgoztunk (Fuller és mksai., 2013). A pulzáció (vagy oszcilláció) vizsgálatával kapcsolatos eredményeit a dolgozatom 6. fejezetének alapjául szolgáló tudományos közlemény (Borkovits és mksai., 2014) 6.2 fejezetében ismertettük. Ezeket a részeket (mint azt a dolgozat 171-172. oldalán jeleztem is), természetesen nem foglaltam bele nagydoktori értekezésembbe, de ehelyütt nagyon röviden ismertetem.

Elsőként foglalkozunk az ellipszoidális effektussal. Az egyensúlyi árapálymodell keretében tárgyalt, klasszikus ellipszoidális effektusnak két fő összetevője van. A geometriai komponens a Földről látszó csillagfelület változó méretével függ össze.⁷ A termikus komponens pedig a csillagfelszín hőmérsékleteloszlásában az árapály-kölcsönhatás miatti perturbációkból származik. Ezt a klasszikus modellben Von Zeipel (Von Zeipel, 1924) tétele nyomán veszik számításba, amely a lokális felszíni nehézségi gyorsulás és effektív hőmérséklet között állapít meg összefüggést.

A közelmúltban azonban Pfahl és mksai. (2008) megmutatták, hogy egyes nemadiabatikus jelenségek, különösen forró, sugárzási burokkal rendelkező csillagok esetében képesek jelentősen megváltoztatni a felszíni hőmérsékleteloszlást. Ráadásul a forró, sugárzási burokkal rendelkező csillagok esetében, márpedig a vizsgált kettősünk főkomponense ilyen, az ellipszoidális effektusban a termikus komponens relatív járuléka sokkal jelentősebb mint a késebb, hideg, konvektív csillagok esetében. Ennek pedig az lesz a következménye, hogy az ellipszoidális effektus fázisa a pályamenti keringés (és így a geometriai komponens) fázisától véletlenszerűen eltérhet.

Ezen felül a dinamikai árapály-kölcsönhatás következtében fellépő oszcillációk is jelentősen befolyásolhatják az ellipszoidális effektus fázisát (és természetesen amplitúdóját is). Forró csillagokban ezek olyan g-módusú oszcillációkként jelennek meg, amelyek közel rezonánsak a gerjesztő árapály-frekvenciákkal. Ugyanakkor itt némi problémát jelent, hogy amint azt pl. Thompson és mksai. (2012) megmutatták, ezek a g-módusú oszcillációk általában csak jóval kisebb amplitúdójú fényességváltozásokat eredményeznek, mint a klasszikus ellipszoidális effektus.

Harmadik lehetőségként a forgó csillagok nemadiabatikus oszcillációi és az árapálygerjesztés közti nemlineáris kölcsönhatások merülhetnek fel. Ez esetünkben azért is érdekes, mert, amint az a spektroszkópiai mérésekből kiderült, a kettőscsillag mindkét komponense gyors tengelyforgást mutat.⁸ Ennek a jelenségnek a kimerítő, kvantitatív tárgyalása azonban még várat magára.

Ezen a ponton érkezünk meg a kérdésben említett két pulzációs frekvenciához, és ezek különbségéhez. Az oszcillációs fekvenciák ilyen jellegű kombinációja általában nemlineáris móduscsatolásra utal (ld. pl. Wu és Goldreich, 2001). Hasonló jelenségre más szoros kettősök esetében is találunk példákat (Mukadam és mksai., 2010; Burkart és mksai., 2012; Fuller és Lai, 2012; Hambleton és mksai., 2013). A mi esetünkben a nemlineáris csatolás a két g-módus, illetve a $2f_{\text{orb}}$ frekvenciájú, árapálygerjesztésű oszcilláció között jön létre. Valószínű, hogy legalább az egyik g-módus a kettősségtől függetlenül, a csillag „saját jo-

⁷A forgási, illetve árapálytorzultság miatt a csillag nem marad gömb alakú, hanem jó közelítéssel a térbeli, körkörös, háromtest-probléma valamely zéró sebességű (gravitációs ekvipotenciális) felületének alakját veszi fel. (Ellipszispálya, illetve nem szinkronizált tengelyforgás esetén természetesen ilyen ekvipotenciális felület szigorúan véve nem létezik, de amennyiben azt feltételezzük, hogy a csillag anyaga megfelelően gyorsan „hozzáidomul” a változó potenciáltérhez, akkor formálisan érvényben marad a modellünk.)

⁸Amennyiben feltételezzük, hogy a csillagok egyenlítői síkjai egybeesnek a pályasíkkal, akkor $P_{\text{rot1}} = 1,60 \pm 0,04 \text{ d} = 19,98 f_{\text{orb}}$ és $P_{\text{rot2}} = 2,15 \pm 0,21 \text{ d} = 14,87 f_{\text{orb}}$.

gán” gerjesztődik. Ez esetben elképzelhető, hogy γ Dor-típusú oszcillációt látunk. (Elvileg mindkét csillag a γ Dor instabilitási sávban helyezkedik el, a főkomponens annak forró, a mellékkomponens pedig hideg oldali szélénél, és maguk a frekvenciák is kompatibilisek a γ Dor-típusú pulzációkkal.) Ráadásul a három oszcillációs módus közötti kölcsönhatás olyan energiáttranszferrel is járhat, amely jelentősen befolyásolhatja mindhárom módus fázisát is, és így módon egy további magyarázatot kínálhat az ellipszoidális effektus (azaz a $2f_{\text{orb}}$ frekvenciájú, árapálygerjesztett oszcilláció) rendellenes fázisára is.

Ugyanakkor az sem zárható ki, hogy mindkét pulzációs módus eredetét tekintve nemlineáris árapálygerjesztésű módus, hiszen nemlineáris árapálygerjesztés esetében a gerjesztett módusokra az teljesül, hogy $f_\alpha \pm f_\beta = n f_{\text{orb}}$, ahol n egész szám (ld. Weinberg és mksai., 2012).

Irodalomjegyzék

- Albrecht, S.; Reffert, S.; Snellen, I. A. G.; Winn, J. N., 2009, *Misaligned spin and orbital axes cause the anomalous precession of DI Herculis*, *Nature*, 461, 373
- Bíró, I. B.; Nuspl, J., 2011, *Photometric mode identification methods of non-radial pulsations in eclipsing binaries - I. Dynamic eclipse mapping*, *MNRAS*, 416, 1601
- Borkovits, T.; Hegedüs, T., 1996, *On the invisible components of some eclipsing binaries*, *A&AS*, 120, 63
- Borkovits, T.; Érdi, B.; Forgács-Dajka, E.; Kovács, T., 2003, *On the detectability of long period perturbations in close hierarchical triple stellar systems*, *A&A*, 398, 1091
- Borkovits, T.; Derekas, A.; Fuller, J.; Szabó, Gy. M.; Pavlovski, K.; Csák, B.; Dózsa, Á.; Kovács, J.; Szabó, R.; Hambleton, K. M.; Kinemuchi, K.; Kolbas, V.; Kurtz, D. W.; Maloney, F.; Prša, A.; Southworth, J.; Sztakovics, J.; Bíró, I. B.; Jankovics, I., 2014, *HD 183648: a Kepler eclipsing binary with anomalous ellipsoidal variations and a pulsating component*, *MNRAS*, 443, 3068
- Borkovits, T.; Rappaport, S.; Hajdu, T.; Sztakovics, J., 2015, *Eclipse timing variation analyses of eccentric binaries with close tertiaries in the Kepler field*, *MNRAS*, 448, 946
- Borkovits, T.; Hajdu, T.; Sztakovics, J.; Rappaport, S.; Levine, A.; Bíró, I. B.; Klagyivik, P., 2016, *A comprehensive study of the Kepler triples via eclipse timing*, *MNRAS*, 455, 4136
- Burkart, J.; Quataert, E.; Arras, Ph.; Weinberg, N. N., 2012, *Tidal asteroseismology: Kepler's KOI-54*, *MNRAS*, 421, 983
- Fuller, J.; Derekas, A.; Borkovits, T.; Huber, D.; Bedding, T. R.; Kiss, L. L., 2013, *Tidally induced oscillations and orbital decay in compact triple-star systems*, *MNRAS*, 429, 2425
- Fuller, J.; Lai, D., 2012, *Dynamical tides in eccentric binaries and tidally excited stellar pulsations in Kepler KOI-54*, *MNRAS*, 420, 3126
- Hambleton, K. M.; Kurtz, D. W.; Prša, A.; Guzik, J. A.; Pavlovski, K.; Bloemen, S.; Southworth, J.; Conroy, K.; Littlefair, S. P.; Fuller, J., 2013, *KIC 4544587: an eccentric, short-period binary system with δ Sct pulsations and tidally excited modes*, *MNRAS*, 434, 925
- Kopal, Z., 1978, *Dynamics of Close Binary Systems*, D. Reidel Pub.
- Maceroni, C.; Lehmann, H.; da Silva, R.; Montalbán, J.; Lee, C. -U.; Ak, H.; Deshpande, R.; Yakut, K.; Debosscher, J.; Guo, Z.; Kim, S. -L.; Lee, J. W.; Southworth, J., 2014, *A&A*, 563, A59

- Mukadam, A. S.; Townsley, D. M.; Gänsicke, B. T.; Szkody, P.; Marsh, T. R.; Robinson, E. L.; Bildsten, L.; Aungwerojwit, A.; Schreiber, M. R.; Southworth, J.; Schwope, A.; For, B.-Q.; Tovmassian, G.; Zharikov, S. V.; Hidas, M. G.; Baliber, N.; Brown, T.; Woudt, P. A.; Warner, B.; O'Donoghue, D.; Buckley, D. A. H.; Sefako, R.; Sion, E. M., 2010, *Multi-site Observations of Pulsation in the Accreting White Dwarf SDSS J161033.64-010223.3 (V386 Ser)*, ApJ, 714, 1702
- Pfahl, E.; Arras, Ph.; Paxton, B., 2008, *Ellipsoidal Oscillations Induced by Substellar Companions: A Prospect for the Kepler Mission*, ApJ, 679, 783
- Rappaport, S.; Deck, K.; Levine, A.; Borkovits, T.; Carter, J.; El Mellah, I.; Sanchis-Ojeda, R.; Kalomeni, B., 2013, *Triple-star Candidates among the Kepler Binaries*, ApJ, 768, 33
- Thompson, S.E.; Everett, M.; Mullally, F.; Barclay, Thomas; Howell, S. B.; Still, M.; Rowe, J.; Christiansen, J. L.; Kurtz, D. W.; Hambleton, K.; Twicken, J. D.; Ibrahim, Kh. A.; Clarke, B. D., 2012, *A Class of Eccentric Binaries with Dynamic Tidal Distortions Discovered with Kepler*, ApJ, 753, 86
- Vinkó J., 1989, diplomamunka, JATE TTK, Szeged
- von Zeipel, H., 1924, *The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses*, MNRAS, 84, 665
- Weinberg, N. N.; Arras, Ph.; Quataert, E.; Burkart, J., 2012, *Nonlinear Tides in Close Binary Systems*, ApJ, 751, 136
- Wu, Y.; Goldreich, P., 2001, *Gravity Modes in ZZ Ceti Stars. IV. Amplitude Saturation by Parametric Instability*, ApJ, 546, 469

Baja, 2018. február 13.

Borkovits Tamás