

Válasz opponensi bírálatra

Opponens: Páczelt István, az MTA rendes tagja

Mindenekelőtt köszönöm Páczelt Akadémikus Úr szakértő és alapos opponensi véleményét, segítő értékelését, megjegyzéseit és kérdéseit. Gondolatébresztő megjegyzései és kérdései lehetőséget adtak az értekezésben bemutatott eredmények alapos elemzésére, értékelésére és továbbgondolására. Köszönöm bírálómnak a dolgozatomban előforduló elírásokkal kapcsolatos észrevételeit. Ezek mindegyikével egyetértek. A bírálatban feltett kérdésekre, illetve megjegyzésekre válaszaimat az alábbiakban adom meg. Válaszaim sorrendje a kérdések illetve megjegyzések bírálatbeli előfordulási sorrendjét követi.

Válaszok

Megjegyzés 1: Mi a fizikai alapja a (3.4.7) alatti d normálizáló faktornak?

Szubjektív véleményem szerint a d normalizáló faktornak egyetlen feladata abban áll, hogy, az $\vec{N}$ vektorhoz hasonlóan, az $\vec{m}$ vektorhossz legyen 1.

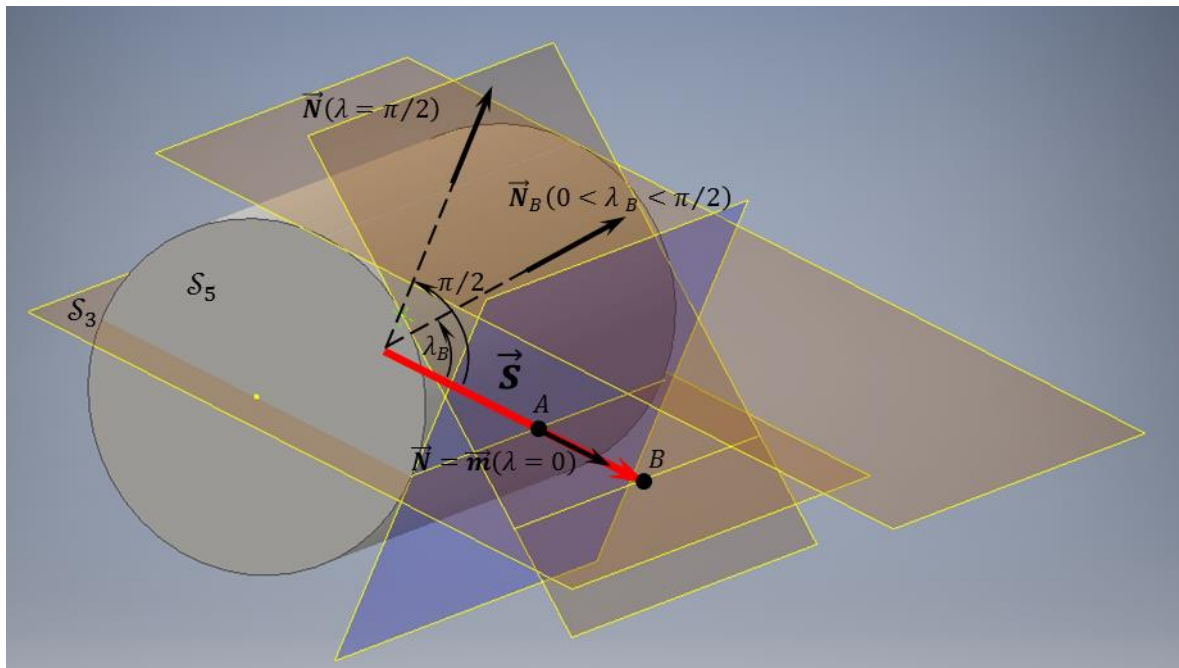
Megjegyzés 2: Hogyan viselkedik a (3.5.9) alatti χ_0 kilencven fok környékén?

A (3.5.9) alatti $\chi_0(\lambda)$ funkció véges értéket vesz fel a $[0, \pi/2)$ intervalumban. Kilencven fok környékén nem határozható meg egyértelműen, mert az y_0 funkcióban lévő $\tan \lambda$ végtelenséghez tart.

Ez azonban nem okoz problémát a szintézis elmélet alkalmazásával, mert a λ szög értéke $\pi/2$ végtelen nagy terhelésnek felel meg. Tényleg, egyszerűség kedvéért, tegyük fel, hogy az 5-dimenziós folyási felületet henger reprezentálja (ld. az 1. ábra). Képlékeny alakváltozás kezdődik akkor, amikor a feszültség vektor $\vec{S} \in \mathcal{S}_3$ eléri az első érintő síkot a folyási határon ($\lambda = 0$, pont A). Ha a feszültségi vektor végpontja például a B pontban van, akkor a rajta lévő érintő síkok egyikének állását az $\vec{N}_B$ vektor határozza meg¹. Most teljesen világos, hogy elérni azt a síkot, amelynek $\lambda = \pi/2$ (párhuzamos az $\mathcal{S}_3$ síkkal) lehet csak akkor, ha $|\vec{S}| \rightarrow \infty$. Tekintettel arra, hogy

¹ A B pontban nem csak az $\vec{N}_B$ normálissal ellátott sík található, hanem az összes sík, amelyet a terhelési vektor eltol az A és B pontok között. Ezeket a síkokat nem ábrázoljuk, mert az ábrán látható három sík teljesen elég ahhoz, hogy elmagyarázhassuk a helyzetet.

a szintézis elmélet csak kis maradó (képlékeny/kúszási) alakváltozással foglalkozik, ez a helyzet közel sem lehetséges.



1. ábra. Folyási felület és érintő síkjai.

Megjegyzés 3: Mennyi a hiba a Tresca és a Mises feltétel vonatkoztatásban, hogyan volna ez kimutatható?

Kiindulópontként vesszük figyelembe azt, hogy Koiternek sikerült megmutatni, hogy a Batdorf-Budiansky-féle csúszási koncepció és Sanders-féle folyási elmélet azonos eredményekhez vezet². Ez a tény, a szintézis elmélet vonatkozásában, a következőt jelenti:

- 1) a szintézis elmélet fizikai modellnek tartható (legalább abban a mértékben, ahogy a csúszási koncepció fizikai elmélet);
- 2) képlékeny alakváltozás modellezése az érintő síkok segítségével sok, nem klasszikus feladat megoldását teszi lehetővé;
- 3) három paraméter elég az összes csúszási rendszer figyelembevételére, annak ellenére, hogy az ötdimenziós felülethez érintő síkról van szó. Ez a tény a Tresca-féle folyási felület

² Koiter, W. T. (1953). Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Quarterly of applied mathematics*, **11**: 350-354.

sajátosságából adódik – egy sík érinti az ötdimenziós Tresca-féle felületet nem egy pontban, hanem általános esetben egy görbe mentén.

A Tresca-féle felületet azért kellett módosítani, (3.5.1), mert nem minden irányban érintő síkokat lehetett meghatározni.

A Mises kritérium alkalmazása nem kívánatos azért, mert öt paraméter szükséges az 5-dimenziós hiperszféra érintő síkjának megadásához, ami nagyon bonyolult képletekhez vezet (ötszörös integrálás szükséges az alakváltozás meghatározására)³.

Megjegyzés 4: Általános esetben (pl. síkfeszültségi állapotban lévő testnél) hogyan tudjuk meghatározni az $\vec{N}$ vektort? A (3.6.1)-(3.6.4) alattiak már a folyási feltétel teljesülésekor állnak fenn. Ha $\vec{S} \cdot \vec{N} < H_N$, akkor még növelni kell a terhelést.

Az Iljuszin-féle elmélet alapján a deviátor tenzor komponenseinek felhasználásával előállíthatók ötdimenziós vektor koordinátái.

Az ötdimenziós feszültség vektor koordinátáinak (S_i ; $i = 1, \dots, 5$) levezetések az alábbi célokra törekedtek:

- a) bevezetni 5 független mennyiséget S_i a feszültségi deviátor tenzor 6 függő komponense (S_{kl} ; $k, l = x, y, z$) helyett;
- b) hogy az effektív feszültség τ_0 „egyenjogú” módon (egyforma együtthatókkal) tartalmazza az S_i komponenseket; az S_{kl} segítségével előállított τ_0 különböző együtthatókat mutat a normális és tangenciális komponenseknél:

$$\tau_0^2 = \frac{3}{2} S_{kl} S_{kl} = \frac{3}{2} [S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2)]; \quad (4.1)$$

- c) előállítani lineáris és kölcsönösen egyértelmű összefüggéseket az S_{kl} és S_i között;

- d) megkapni az $S_{kl} S_{kl} = S_i S_i = 2/3 \tau_0^2$ összefüggést.

A felsorolt követelményeknek az alábbi S_i komponensek eleget tesznek:

$$S_1 = \sqrt{3/2} S_{xx}, \quad S_2 = S_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2} S_{yy}, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{xz}, \quad S_4 = \sqrt{2} S_{xy}, \quad S_5 = \sqrt{2} S_{yz}, \quad (4.2)$$

³ Popov, L.G. (1987). Generalization of Rabotnov model of plasticity for five-dimensional stress-deviator space. *J. Izv. Nauk USSR (USSR Acad. Sci.), Mech. Tverdogo Tela*, **5**: 126–134.

$$\tau_0^2 = \frac{3}{2} S_i S_i = \frac{3}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2). \quad (4.3)$$

Nagyon fontos megjegyezni, hogy a (4.2) képletben az S_{kl} elemekhez tetszőleges indexeket lehet hozzárendelni, mert ettől az effektív feszültséget definiáló összefüggés (4.3) nem fog változni. ⁴

Ebből kifolyólag, síkfeszültségi állapot esetén ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$), az összes képlet marad változatlan, csak $S_3 = \sqrt{2} S_{xy}$:

$$S_1 = \sqrt{3/2} S_{xx}, \quad S_2 = S_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2} S_{yy}, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{xy} = \sqrt{2} \tau_{xy}, \quad (4.4)$$

$$N_1 = \cos \alpha \cos \beta \cos \lambda, \quad N_2 = \sin \alpha \cos \beta \cos \lambda, \quad N_3 = \sin \beta \cos \lambda.$$

Általános esetben, a szintézis elmélet maximális „teljesítménye” az S_3 térben a feszültségtenzor négy komponense: három normális és egy tangenciális.

Megjegyzés 5: A (3.8.6) alatti képletben az $(\dot{S} \cdot N)$ szorzatot a $t = t_M$ időnél kell venni.

Igen. Abszolút helyes a megjegyzés, pláne, ha változó terhelésssebességről lenne szó.

Megjegyzés 6: Miért azonos a p értéke a $t \in [0, t_M]$ és a $t > t_M$ tartományban? Ezt kísérletek is igazolják?

A sebesség-integrálban lévő konstansok, B és p (mindkettő a hőmérséklet függvénye), a következő folyamatok intenzitását szabják meg. A B konstans a rácsszerkezet-eltorzulás és -rendetlenségek környékén felhalmozódott energiát reprezentálja aktív terheléskor. Ez az energia majd, az időben állandó terhelés alatt felszabadul – relaxációs mechanizmusokon keresztül – a primer kúszás formájában.

A p konstans a relaxációs mechanizmusok sebességért, azaz a primer kúszás időtartamáért, ill. „dinamikájáért” felelős. Az a tény, hogy ugyanaz a p konstans a $t \in [0, t_M]$ és a $t > t_M$ tartományban áll a (3.8.5) és (3.8.6) képletben az alábbi példa segítségével indokolható. Tekintsük meg a 2. ábrát, ahol két $I_N \sim t$ grafikont látunk két különböző p konstans mellett. Az, hogy $p_1 > p_2$ az $I_{N2} > I_{N1}$ -et jelenti és a következő egyenlőtlenséghez vezet a képlékeny alakváltozások között: $e_1 > e_2$. Másrészt, számos kísérlet bizonyította⁵, hogy minél nagyobb a képlékeny alakváltozás

⁴ Ilyushin, A. A. (1963). *Plasticity: Fundamentals of general mathematical theory*. Akademiya Nauk, SSSR.

Rusinko, A., & Rusinko, K. (2011). *Plasticity and Creep of Metals*. Springer Science & Business Media.

⁵ Rusinko, K. N. (1981). *Theory of Plasticity and Nonsteady Creep*. Vyshcha Shkola, Lviv.

Vasiljev, L.I. (1950). On the relaxation of metals. *Zhurnal Technicheskoy Fiziki*, **22**: 619-628.

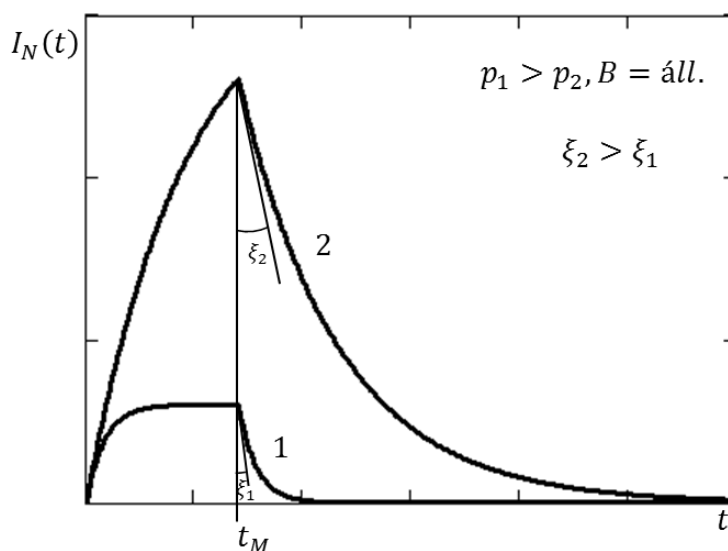
(minél nagyobb disztorziót szenved a rácsszerkezet), annál nagyobb sebességgel indulnak a relaxációs folyamatok (csökkenő rész az $I_N \sim t$ diagramon). Ezt a tényt a 2. ábrán látható egyenlőtlenség $\xi_2 > \xi_1$ mutatja, ami a $|\exp(-p_1 t_M)|' > |\exp(-p_2 t_M)|'$ egyenlőtlenségből adódik.

Meg kell jegyezni, hogy a (3.8.5) és (3.8.6) képletek helyett sokkal gyakrabban a (4.1.10) és (4.1.29) formulákat használják,

$$I_N = BS_1\Omega,$$

$$I_N = BS_1\Omega \exp(-pt),$$

amelyek a $t_M \rightarrow 0$ feltételnek megfelelnek (t_M az aktív terhelés időtartama). Tekintettel arra, hogy valós kísérleteknél a képlékeny deformáció időtartama több nagyságrenddel kisebb, mint a kúszásé, a fenti képletek alkalmazása indokoltá válik. Most a B és a p konstans a primer kúszásnak különböző paraméterén „dolgozik”: B a kúszás nagyságát, p pedig időtartamát és lefutását határozza meg.



2. ábra. $I_N \sim t$ grafikonok

Megjegyzés 7: A (4.1.14) alattiak milyen megfontolásban származnak? Az összefüggéseket másképp felírva, $\cos \alpha_0 = \frac{s_s}{s_1}$, $\cos \beta_0 = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$, $\cos \lambda_0 = \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta}$. Ha az $\alpha_0, \beta_0, \lambda_0$ szélsőérték, akkor hogyan szerepelhet a képletben a változó α, β ? Hasonló a helyzet a (4.1.32-33), a (4.1.50), a (4.1.60), sőt a (4.2.7) és a (4.2.15) összefüggéseknél is. A (4.1.33) a $t = t_2$ időponthoz tartozik?

A (4.1.14) képlet az $\vec{S}$ vektorral eltolt síkok halmazát határozza meg. Az α_0 , β_0 és λ_0 határértékek azokra a síkokra vonatkoznak, amelyeket az $\vec{S}$ végpontja elért, de mozgásban még nem vettek részt. A szintézis elmélet keretében, a terhelési vektor végpontján lévő sík mozgása a képlékeny alakváltozás lefolyását szimbolizálja, amely a kristályrács hibáinak növekedésével (ψ_N) párosul⁶. Ebből következtetjük, hogy az α_0 , β_0 és λ_0 meghatározására a $\psi_N = 0$ feltétel alkalmazandó.

Először vizsgáljuk meg a $\lambda = 0$ esetet. Olyan síkokról van szó, amelyek egyidejűleg érintik az ötdimenziós folyási felületet és a von-Mises szférát (3.8.2). Pont ezek a síkok a folyási/keményedési felület alakját és transzformációját határozzák meg az S^3 térben.

Egytengelyű húzás esetén az első sík, amelyet az $\vec{S}(S_1 = S_S, 0, 0)$ vektor érint az S_1 tengelyre merőleges, azaz $\alpha = 0$ és $\beta = 0$. Nyilvánvaló, hogy ennek a síknak a normálisa $\vec{N}$ az S_1 tengely mentén fekszik. A terhelés növekedés folyamán egyre több sík kerül az $\vec{S}$ vektor végpontjára (a keményedési felületet a 3. ábra szemlélteti). Amiatt, hogy a terhelési pálya az S_1 tengely mentén terjeszkedik az α és β szögek növekedése tengelyszimmetrikusan történik mind negatív, mind pozitív irányban.

A (4.1.13) képlet a $\psi_N = 0$ és $\lambda = 0$ feltétellel az alábbi alakot ölti:

$$S_1(1 - B) \cos \alpha \cos \beta - S_P = 0. \quad (7.1)$$

A fenti összefüggésből a $\beta = 0$ helyettesítéssel,

$$\cos \alpha_0 = \frac{S_P}{S_1(1 - B)}, \quad (7.2)$$

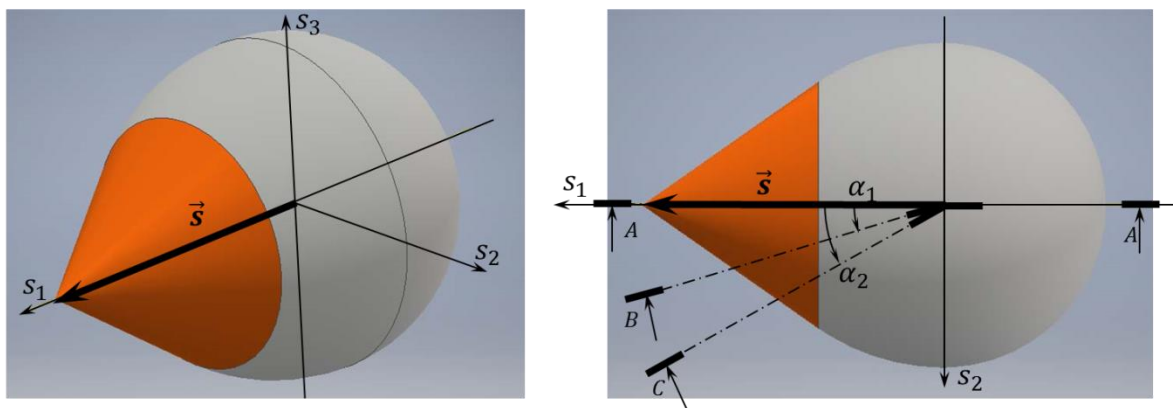
az α szög határértékét kapjuk meg. Míg α_0 konstans, a (7.1) képletből látjuk, hogy a β szög határértéke az α függvénye,

$$\cos \beta_0(\alpha) = \frac{S_P}{S_1(1 - B) \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}. \quad (7.3)$$

Észrevehető, hogy az α növekedésével a β_0 csökken és $\alpha = \alpha_0$ -nál nullává válik. Ez a tény nem látható a 4.2. ábrán a disszertációban, mert csak azokat az érintősíkokat (vonalakat) szemlélteti az S_1S_2 ill. S_1S_3 síkmetszetekben, amelyeknek normális vektorai rendre $\beta = 0$ és $\alpha = 0$ szöggel bírnak.

A helyzet javítása csak 3D rajzolással lehetséges. Ebből a célból az Autodesk Inventor Professional 2016 segítségével, a terhelési felület három metszetét készítettem (a 3. ábra): $\alpha = 0$ ($A - A$), $\alpha_1 > 0$ ($B - A$) és $\alpha_2 > \alpha_1$ ($C - A$).

⁶ Kezdeti állapotban a $\psi_N = 0$ feltétellel élünk.



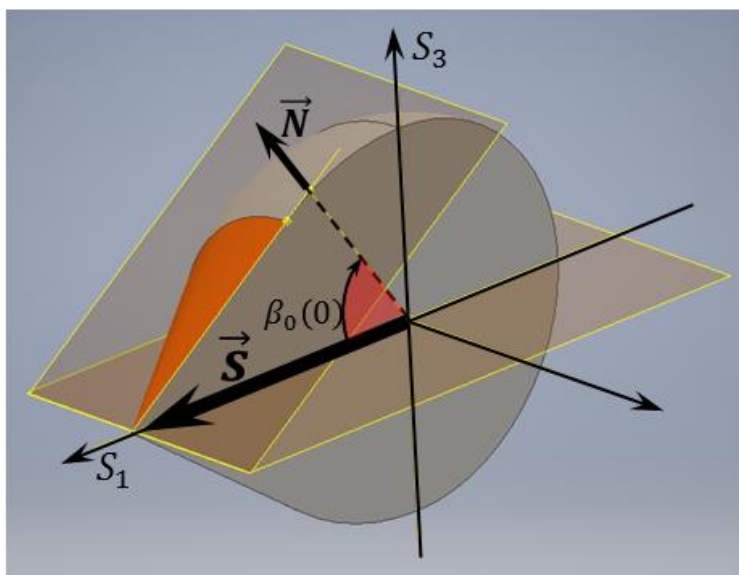
3. ábra. Terhelési felületet egytengelyű húzásnál.

A 4. ábra félreérthetetlenül demonstrálja a (7.3) képletben kapott eredményt a $\beta_0(\alpha)$ összefüggésre vonatkozóan.

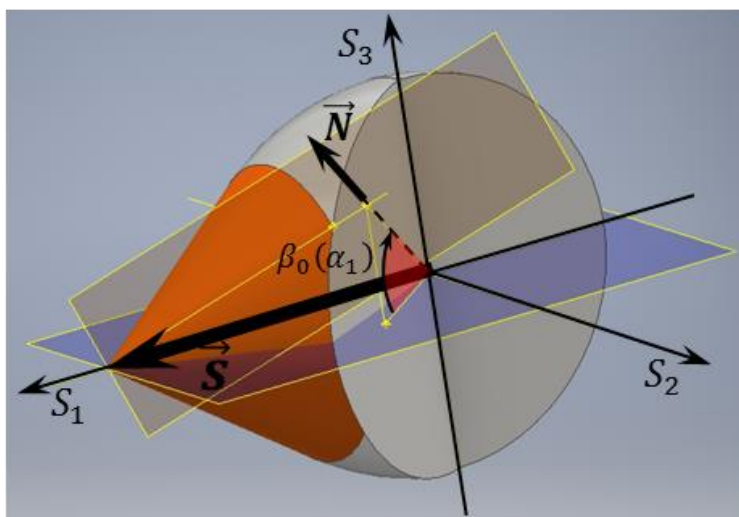
Ami a λ szög határértékét illeti, látjuk a (4.1.14)-ből, hogy $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \beta)$. Ennek a ténynek az oka az, hogy a λ szög az 5-dimenziós felülethez érintő síkok elmozdulását figyelembe veszi. $\lambda = 0$ annak a síknak megfelel, amely egyszerre érinti a folyási/keményedési felületet az $\mathcal{S}_5$ -ben és annak protekcióját az $\mathcal{S}_3$ -ban is. A λ_0 szög egy adott irányban (α, β) a feszültségvektor végpontján lévő határsíkot határozza meg, amely az 5-dimenziós felületet érinti.

Illusztrációként tegyük fel, hogy az 5-dimenziós folyási felületet szféra reprezentálja (ld. az 5. ábra), amelynek a nyoma kör ($\mathcal{S}_3$). Vegyük a szférához érintő síkokat: $A-B-C-D$. A síkok metszik az $\mathcal{S}_3$ -t párhuzamos egyenesekkel $a-b-c-d$, amelyek folytonosan kitöltik a körön kívüli teret (ezt vázlatosan szemlélteti a 3.6a ábra). Tegyük fel, hogy az $\vec{S} \in \mathcal{S}_3$ vektor végpontján a, b, c síkok vannak. Annak ellenére, hogy ezek azonos állásúak ($\alpha = \text{áll.}$), könnyű látni, hogy a λ szög nő az A, B, C síkok számára. Mivel a λ_0 szög annak a határsíknak megfelel (C), amely került a feszültségvektor végpontjára, a λ_0 meghatározására a $\psi_N = 0$ feltétel alkalmazandó (lásd a (4.1.14) képlet).

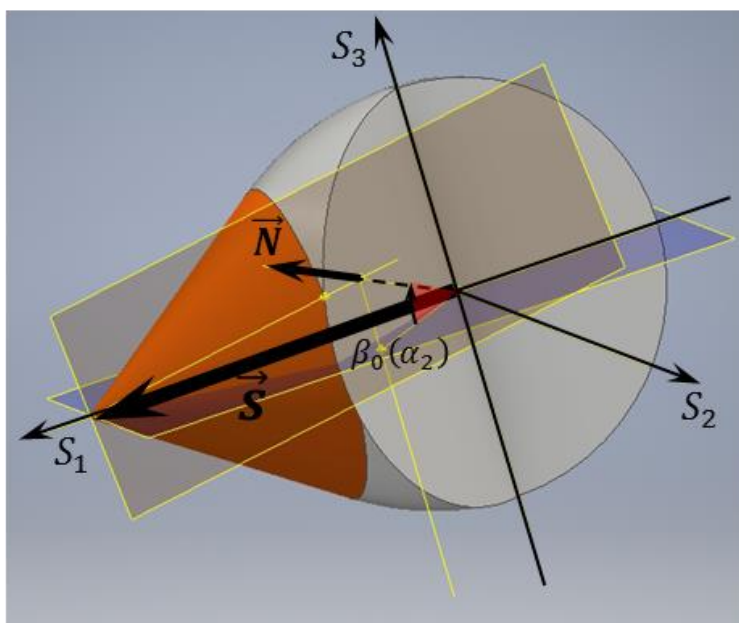
Figyelembe véve a (4.1.14) képletet, illetve a 4. ábrához tartozó megfontolásokat, arra következtetünk, hogy különböző irányokban más és más határérték λ_0 alakul, azaz $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \beta)$.



A – A

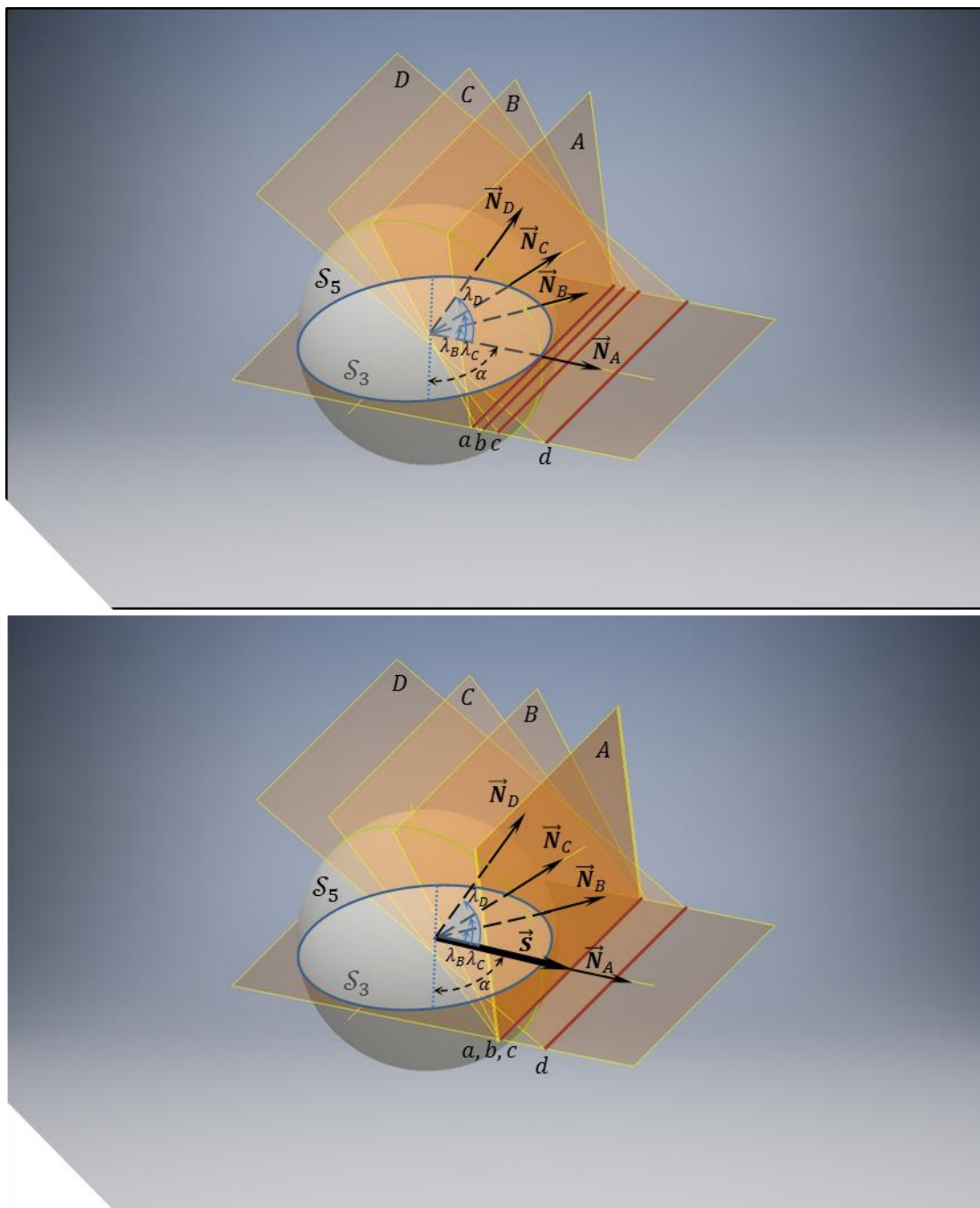


B – A



C – A

4. ábra. Különböző α -nak megfelelő határsíkok, ill. β_0 szögek.



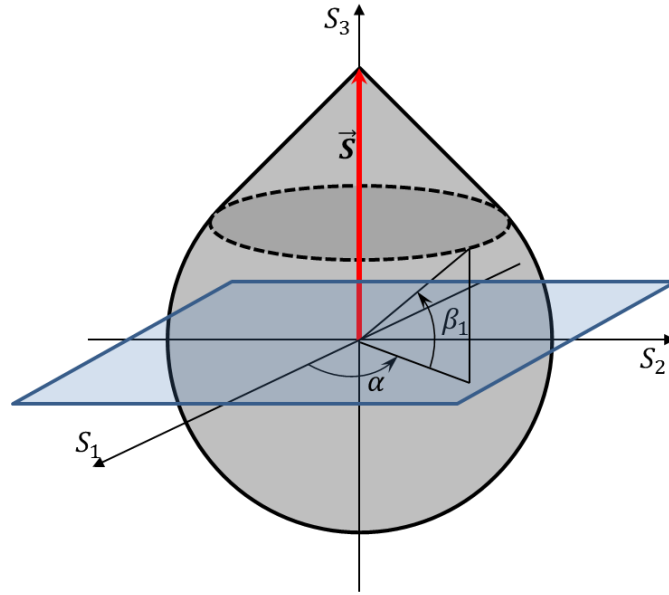
5. ábra. Különböző λ -nak megfelelő síkok.

A (4.1.33) a $t = t_2$ időponthoz tartozik?

A (4.1.33) képletben $t \in [0, t_2]$.

Megjegyzés 8: Kérem részletezni a (4.1.19)-ből levezetett (4.1.20)-(4.1.23) összefüggéseket

A (4.1.19) képletben háromszoros integrálást kell végezni. Az integrálási procedúra egyszerűsödik a csavarás okozta maradó alakváltozás esetében. Ennek a feszültségi állapotnak megfelelő terhelési felületet a 6. ábra szemlélteti. Látjuk, hogy az S_3 tengelyre szimmetrikus figuráról van szó. Ez a tény azt jelenti, hogy a feszültségvektor végén lévő síkokon $\alpha \in [0, 2\pi]$.



6. ábra. Terhelési felület csavarásnál.

Tehát, a következő feladatokat el kell végezniem:

- I. Meghatározni a csavarási képlékeny alakváltozást (e_3),
- II. Megmutatni, hogyan lehet konvertálni az e_3 -t definiáló képletet tetszőleges proporcionális terhelésre, egytengelyű húzásra is.

I. Csavarás esetében, a hibaintenzitás az alábbi alakot ölti (3.8.3a képlet):

$$\psi_N = S_3(1 - B)N_3 - \sqrt{2}\tau_P = \sqrt{2}[\tau(1 - B) \sin \beta \cos \lambda - \tau_P], \quad (8.1)$$

ahol $\tau \equiv \tau_{xz}$. Latjuk, hogy a ψ_N nem függ az α szögtől. Ez a tény az első bekezdésben említett egyszerűsítést tükrözi. A (8.1) képletben a hibaintenzitás felvesz nem zérus értéket a következő szögtartományokon belül

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad (8.2)$$

$$\sin \beta_1 = \frac{\tau_P}{\tau(1-B)} \equiv a, \quad \cos \lambda_1(\beta) = \frac{\tau_P}{\tau(1-B) \sin \beta} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta}.$$

A (3.7.3), (3.9.5), (8.1) és (8.2) alapján a deformációvektor komponensét e_3 ($e_1 = e_2 = 0$) határozzuk meg:

$$\begin{aligned} e_3 &= \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_{\lambda} \varphi_N N_3 dV = \frac{2\pi}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \int_0^{\lambda_1} (\sqrt{2}\tau(1-B) \sin \beta \cos \lambda - \sqrt{2}\tau_P) \sin \beta \cos \lambda \cos \beta d\lambda d\beta \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}\tau_P}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \int_0^{\lambda_1} \left(\frac{1}{\sin \beta_1} \sin \beta \cos \lambda - 1 \right) \sin \beta \cos \lambda \cos \beta d\lambda d\beta \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}\tau_P}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \int_0^{\lambda_1} \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} \sqrt{1 - \sin^2 \lambda} - 1 \right) d(\sin \lambda) d\beta \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}\tau_P}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \left[\frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} \left(\sin \lambda_1 \sqrt{1 - \sin^2 \lambda_1} + \arcsin(\sin \lambda_1) \right) - \sin \lambda_1 \right] d\beta \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}\tau_P}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \left[\frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} (\sin \lambda_1 \cos \lambda_1 + \lambda_1) - \sin \lambda_1 \right] d\beta \quad (8.3) \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}\tau_P}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \left[\frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \sin \lambda_1 + \frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} \arccos \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \right) - \sin \lambda_1 \right] d\beta \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}\tau_P}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \left[\frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} \arccos \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \right)^2} \right] d\beta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi\tau_P}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \left[\frac{\sin^2 \beta}{\sin \beta_1} \arccos \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \right) - \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_1} \right] d(\sin \beta) \end{aligned}$$

Vezessünk be új változót:

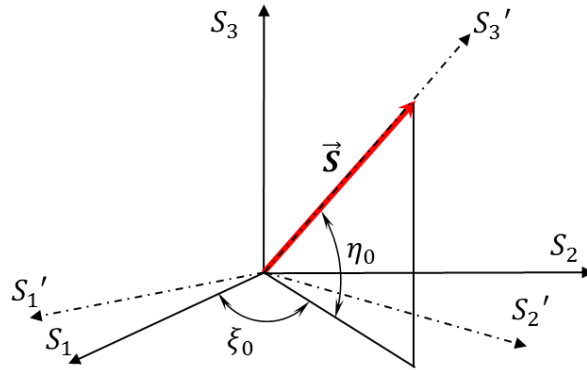
$$x \equiv \sin \beta. \quad (8.4)$$

Most

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{\sqrt{2}\pi\tau_P}{r} \int_a^1 \left[\frac{x^2}{a} \arccos \left(\frac{a}{x} \right) - \sqrt{x^2 - a^2} \right] dx = \frac{\sqrt{2}\pi\tau_P}{r} \left\{ \int_a^1 \frac{1}{3a} \arccos \left(\frac{a}{x} \right) d(x^3) - \int_a^1 \sqrt{x^2 - a^2} dx \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi\tau_P}{r} \left\{ \frac{\arccos a}{3a} - \frac{1}{3} \int_a^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx - \int_a^1 \sqrt{x^2 - a^2} dx \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi\tau_P}{r} \left[\frac{\arccos a}{3a} - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right] - \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - a^2} - a^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right] \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi\tau_P}{3r} \left[\frac{\arccos a}{a} - 2\sqrt{1 - a^2} + a^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right] = a_0 \Phi(a) \quad (8.5) \end{aligned}$$

ahol $a_0 = \sqrt{2}\pi\tau_P/(3r)$, Φ a szögletes zárójelben álló összefüggés.

II. Tekintsünk meg tetszőleges proporcionális (egyszerű) terhelést, amikor a terhelési pálya egyenes vonal az S_3 térben (lásd a 7. ábra). A feszültségvektor állását ξ_0 és η_0 szögek határozzák meg.



7. ábra. Tetszőleges állású feszültségvektor (S_3' merőleges az $S_1'S_2'$ síkra).

Forgassuk el a koordinátarendszert úgy, hogy S_3' tengely egy vonalba essen az $\vec{S}$ vektorral, aminek köszönhetően újra csavarási problémát kapunk, azaz a deformációvektor $\vec{e}'$ az S_3' tengely irányú. Ebből kifolyólag a csavarásra levezetett (8.5) képlet használható, ha a benne lévő τ feszültséget a feszültségvektor hosszával (S -sel) helyettesítjük:

$$e'_3 = a_0 \Phi(a), \quad e'_1 = e'_2 = 0, \quad (8.7)$$

ahol

$$a = \frac{\sqrt{2}\tau_p}{S(1-B)}. \quad (8.8)$$

Vetítsük az $\vec{e}'$ vektort az eredeti tengelyekre:

$$e_1 = e'_3 \cos \xi_0 \cos \eta_0, \quad e_2 = e'_3 \sin \xi_0 \cos \eta_0, \quad e_3 = e'_3 \sin \eta_0. \quad (8.9)$$

Tekintettel arra, hogy

$$\begin{aligned} \cos \xi_0 &= \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, & \sin \xi_0 &= \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, \\ \cos \eta_0 &= \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S}, & \sin \eta_0 &= \frac{S_3}{S} \end{aligned} \quad (8.10)$$

a (8.7), (8.9) és (8.10) képletek alapján felírható, hogy

$$e_k = a_0 \frac{S_k}{S} \Phi(S) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (8.11)$$

Ez a Szintézis elmélet keretében levezetett analógiája annak, amit a képlékenységtan alakváltozási elméletében kapnak (a Hencky-Nádai-féle képlet analógiája).

Összefoglalva, tetszőleges proporcionális terhelés esetén, a (8.11) képletten keresztül, a csavarásnál levezetett funkció Φ használható.

És végezetül, a (8.11) képlet egy tengelyű húzásnál – $\vec{S}(\sqrt{2/3}\sigma, 0, 0)$, $S_1 = S$ – az alábbi összefüggéshez vezet ($\sigma_p = \tau_p/\sqrt{3}$ figyelembevételével):

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}\pi\sigma_p}{3\sqrt{3}r} \left[\frac{\arccos a}{a} - 2\sqrt{1-a^2} + a^2 \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \right], \quad a = \frac{\sigma_p}{\sigma(1-B)}.$$

Ez a (4.1.20) képlet a disszertációban.

Tehát, a (4.1.19) és (4.1.20) képletek közötti kifejezés „Integrating in the formula above gives” a fenti megfontolásokat és levezetéseket tartalmazza.

Megjegyzés 9: Az 54. oldalon $\pi - \beta_0 \leq |\alpha| \leq \pi$ helyett $\pi - \beta_0 \leq |\beta| \leq \pi$.

Egyetértek. Elírás.

Megjegyzés 10: Az 59. oldalon a (4.1.42) képletnél, mit jelent: ... and $I_N = 0$?

A (4.1.41) képlet a (4.1.3) képletben definiált szabályt használja a sebességintegrálra vonatkozóan. Minthogy a ΔS miatt az I_N negatív értéket vesz fel, az $I_{-N} = -I_N$ pozitív integrállal dolgozunk, az I_N -hez pedig 0-t rendelünk.

Megjegyzés 11. A kísérletek és a számítások révén milyen hibaelv felhasználásával kerültek kiszámításra a szóban forgó állandók? Hányfajta kísérletet kell elvégezni, és azokat milyen körülmények között?

Megtekintjük például a 4.15 ábrán látható eredményeket. Az MTK utáni kúszási sebesség meghatározására szolgáló (4.2.33), (4.2.34), (4.2.21) és (4.2.22) képletek 7 darab konstans tartalmaz (r_0, r, K és $Q_j, j = 1, \dots, 4$).

Az r_0 és r meghatározására például húzóvizsgálatokat kell végezni különböző hőmérsékleten – szobahőmérséklettől a kúszási hőmérsékletig. Minden mérésen az r állandót úgy kell választani,

hogy a modellgörbe $\sigma \sim \varepsilon$ minél inkább egyeztessen a kísérleti eredményekkel (igyekezni kell (javaslatos), hogy a relatívhiba legyen legfeljebb 10-15%). Az így kapott r értékek sorozatát, legkisebb négyzetek hibaelv alkalmazásával, $r(T)$ elsőfokú polinommal közelítjük.

Mivel a kúszási feszültség és hőmérséklet változatlan a 4.15 ábrához tartozó kísérletekben, $K = \text{const}$ és ez az állandó úgy választandó, hogy a modell-eredmény minél inkább egyeztessen a kísérlettel az $\varepsilon_0 = 0$ -nál, azaz az MTM nélküli kúszásnál. Általános esetben a K funkció meghatározására különböző hőmérsékleten mért $\lg \dot{\varepsilon} \sim \lg \sigma$ eredmények szükségesek.

Négy állandó Q_j választásával olyan $\tilde{K}$ funkciót alkotunk (4.2.21-22), amely a (4.2.33) egyenleten keresztül a 4.15 ábrán látható $\dot{\varepsilon} \sim \varepsilon_0$ diagramot eredményezi. A Q_1 és Q_2 a $\tilde{K}$ funkció növekedését határozza meg, míg Q_3 és Q_4 a rajta lévő „hullám” helyét és nagyságát.

Megjegyzés 12: A (4.2.24) képletben az $|\mathcal{S}|$ -nál a pont felesleges.

Szerencsétlenül jött ki, hogy a képlet végén lévő pont az $\vec{\mathcal{S}}$ -nál álló pontként látszik.

Megjegyzés 13: Itt is probléma az anyagállandók meghatározásra szóló elv megadásának hiánya.

A (4.3.10) képletről van szó:

$$\sigma_s^u = \sqrt{\sigma_s^2 + \frac{3}{2} \left\{ V_1 \left[\frac{\sqrt{2/3} (\sigma_m - \sigma_{m0})}{\sigma_s} \right]^{V_2} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{V_3 \sqrt{2/3} \sigma_m \Theta}{\sigma_s} \tau \right) \right\} \right\}^2}.$$

A V_i anyagállandók a $\sigma_s^u \sim \tau$ és $\sigma_s^u \sim \sigma_m$ kísérleti eredményekből származtathatóak (a 4.22. és 4.23. ábra a disszertációban). A fenti képletből látszik, hogy V_1 és V_2 állandók a $\sigma_s^u \sim \sigma_m$ görbe meredekségét határozzák meg az ultrahang-amplitúdó függvényében. A V_3 állandó a $\sigma_s^u \sim \tau$ növekedési szakaszt szabja meg, míg σ_s^u egy állandó értéken meg nem állapodik.

Igyekeztem úgy beállítani (válogatni) a V_i állandókat, hogy a kísérleti és elméleti eredmények közötti eltérések minimálisak legyenek (nem több, mint 10%). Meg kell jegyezni, hogy a választott anyagállandók jó eredményeket mutatnak két különböző jellegű kísérletben.

Megjegyzés 13: A 4.29-es diagram szerint a mért és számított értékek közötti eltérés nem jelentéktelen. Milyen eszközökkel lehetne a számításra felépített modellt pontosítani? Van erre vonatkozó javaslata?

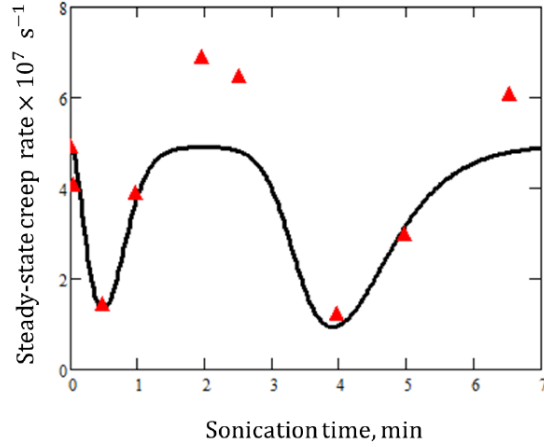


Fig. 4.29. Steady-state creep rate of aluminum in uniaxial tension ($\sigma = 9.6$ MPa, $T = 260^\circ\text{C}$) as a function of sonication time in the course of ultrasound treatment ($T_a = 260^\circ\text{C}$, $t_a = 1$ hour); $\blacktriangle$ -experiment (Bazelyuk et al., 1971), line - model result.

A 4.29. ábrán látható analitikai eredményeket a (4.3.22) képlet alapján kaptuk meg:

$$[H_{Nu}]^2 = \frac{2}{3} \sigma_P^2 + \tilde{\psi}_{Nu} = \frac{2}{3} \sigma_P^2 + \psi_{Nu} \exp(-K_U t_a) =$$

$$= \frac{2}{3} \sigma_P^2 + U(\tau)^2 \exp(-K_U(\tau) t_a) \Omega.$$

Az $1,5 \leq \tau \leq 3$ és $\tau > 6$ időintervallumokon belül, az anyagban kialakult struktúra veszíti a kúszással szembeni ellenálló képességét. A szintézis elmélet leírja ezeket a szakaszokat úgy, hogy a kúszási sebesség visszatér az ultrahangos kezelés nélküli értékhez, miközben a kísérlet magasabb értékeket mutat. De ezek az eltérések másodlagos fontosságúak, mert legfontosabb olyan modellt alkotni, amely a lehető legpontosabban határozza meg az ultrahangos kezelés optimális időtartamát, ahol a kúszási sebesség minimális.

Lehetséges javaslat: úgy definiálni a $\tilde{\psi}_{Nu}$ funkciót, hogy negatív értékeket vehetne fel is.

Megjegyzés 15: Mint a numerikus számításokkal foglalkozó kutató, jó volna, ha kapnék utalásokat arra vonatkozóan, hogyan lehetne tetszőleges alakú és terhelésű síkbeli testekre a fenti, analitikus megoldásokat kiterjeszteni és alkalmazni. Jó volna összefoglalni egy nagy táblázatba, milyen anyagállandók szükségesek a számításokhoz? Mi van ha, olyan terheléssel találkozunk, aminek anyagállandói pontosan nem ismertek, hogyan interpolálunk? Hogyan lehetne egy szokványos végelem programba beépíteni a szintézis elméletet, milyen lényeges változtatásokat kellene végrehajtani? A folyási felület helyett az érintősíkokkal hogyan lehetne dolgozni, stb?

A) Numerikus számítás

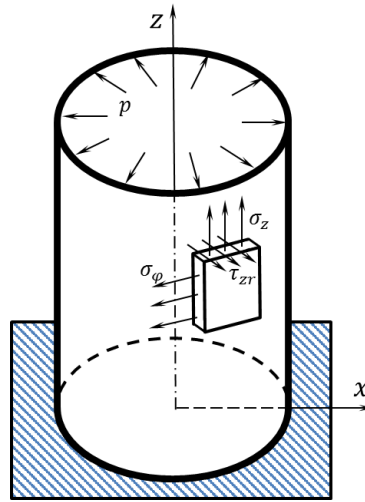
Vegyük az MTT utáni egytengelyű kúszást leíró képletet (4.2.33):

$$\dot{e}_M = \dot{e} - K \frac{r_0}{r} \exp(-\tilde{K}(e_0)t_a) e_0.$$

Ha testekre szeretnénk alkalmazni a fenti képleteket, numerikus módszerek szükségesek – meg kell határozni a feszültség- ill. deformáció-mezőt a képlékeny és kúszási feladatban.

Példaként, tekintsünk meg belső túlnyomással (p) terhelt félvégtelen hosszú, egy oldalon befogott, vékonyfalú csövet (8. ábra). Feszültségi állapotát σ_z , σ_φ és τ_{zr} feszültségtenzor komponensek határozzák meg.

Felvázoljuk a megoldandó differenciálegyenlet rendszer előállítását.



8. ábra. Vékonyfalú csőben ébredő feszültségek.

A σ_z , σ_φ és τ_{zr} komponensek alapján, (3.2.1) segítségével, feszültségvektor komponenseit (S_k) számítsuk ki. Forgassuk el az eredeti koordinátarendszert úgy, hogy az egyik tengely egy vonalba essen az $\vec{S}$ vektorral, aminek köszönhetően egytengelyű terhelést kapunk. Az új koordinátarendszerben, ΔS és Δt okozta alakváltozás növekménye az alábbi alakban felírható:

$$\Delta_\sigma e'_3 = \frac{2\pi}{r} \int_0^{\lambda'} \int_{\beta'}^{\pi/2} 2S \Delta S \sin^2 \beta \cos^2 \lambda \sin \beta \cos \beta \cos \lambda = c_0 X \left(\frac{\tau_p}{S(1-B)} \right) \Delta S, \quad (15.1)$$

$$\Delta_t e'_3 = a_0 K \Phi(a) \Delta t,$$

ahol Φ és a_0 a szekunder kúszás sebességet definiáló (4.2.10) és (4.2.11) képletekkel meghatározhatók; a c_0 állandó és a $X(a)$ funkció a kandidátusi disszertációmban található⁷ (a Φ -hez hasonlóan viselkedik az S függvényében és $X(1) = 0$)

⁷ E. Ruzinkó (1997) Ugrásszerű hőmérséklet-változások okozta hőmérsékleti utóhatás és szilárdulás a polikristályos anyagokban. Kandidátusi disszertáció.

A Megjegyzés 8.-ban levezetett képlet,

$$e_k = a_0 \frac{S_k}{S} \Phi(S) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (15.2)$$

és a (15.1) formula alkalmazásával, a végeelem-módszer egyik legfontosabb eleme – **anyagegyenlet** – előállítható (növekményekben):

$$\begin{aligned} \Delta e_z &= A_{11} \Delta \sigma_z + A_{12} \Delta \sigma_\varphi + A_{13} \Delta \tau_{zr} + A_{14} \Delta T + A_{15} \Delta t \\ \Delta e_\varphi &= A_{21} \Delta \sigma_z + A_{22} \Delta \sigma_\varphi + A_{23} \Delta \tau_{zr} + A_{24} \Delta T + A_{25} \Delta t \end{aligned} \quad (15.3)$$

Bontsuk fel az e_z és e_φ deformációkat rugalmas (index r) és képlékeny (k) komponensekre – $A_{ij} = A_{ij}^r + A_{ij}^k$, $A_{11}^r = A_{22}^r = 1/E$, $A_{12}^r = A_{21}^r = -\nu/E$, $A_{13}^r = A_{23}^r = 0$, $A_{14}^r = A_{41}^r = \alpha_T$, $A_{15}^r = A_{25}^r = 0$. Képlékeny együtthatók $A_{ij}^k = A_{ij}^k(\sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{zr})$ ($j \neq 4$) a (15.1) és (15.2) képletek alkalmazásával adódnak; $A_{14}^k = A_{24}^k = 0$.

Fordított irányú összefüggések

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_z &= B_{11} \Delta e_z + B_{12} \Delta e_\varphi + B_{13} \Delta e_{zr} + B_{14} \Delta T + B_{15} \Delta t \\ \Delta \sigma_\varphi &= B_{21} \Delta e_z + B_{22} \Delta e_\varphi + B_{23} \Delta e_{zr} + B_{24} \Delta T + B_{25} \Delta t \end{aligned} \quad (15.4)$$

$$B_{ij} = B_{ij}(A_{ij}).$$

A végleges differenciálegyenlet rendszer előállításához végezzük el a következő lépéseket:

- A (15.4) képleteken keresztül meghatározzuk a henger falában ébredő igénybevétel-növekményeket – normálerő, nyíróerő és hajlító nyomaték – és felírjuk rájuk az egyensúlyi egyenleteket.
- Felírjuk a Kirchhoff-Love-féle geometriai összefüggéseket.
- Átrendezéseket végezzünk.

Eredmény – 5x5 differenciálegyenlet rendszer:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta Q \\ \Delta M_1 \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & 0 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & 0 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v \\ \Delta Q \\ \Delta M_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15.4)$$

$$X_{ij} = X_{ij}(B_{ij}, x),$$

ahol Q – nyíróerő, M_1 – hajlító nyomaték, u és w – rendre a sugár- és z -tengely irányú elmozdulás. Peremfeltételek:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad w &= 0, \quad \frac{dw}{dz} \equiv v = 0, \quad u = 0. \\ z \rightarrow \infty: \quad Q &= 0, \quad M_1 = 0. \end{aligned} \quad (15.5)$$

A feladat megoldását iterációs módszerrel keressük. A lépéseket ismételjük mindaddig, míg két egymást követő feszültségi- ill. alakváltozási mezők közötti különbség elegendően kicsi.

B) Állandók

Az alábbi táblázat a fenti feladathoz szükséges állandókat foglalja össze

Állandó	Egyenlet	Szükséges kísérletek, interpoláció, hiba elv
$r = r(T)$	(4.1.20-23)	Egytengelyű húzások: a) állandó terhelési sebesség; b) változó hőmérséklet T . Lineáris interpoláció, legkisebb négyzetek hibaelv.
$B = B(T)$	(4.1.11)	Egytengelyű húzások: a) változó terhelési sebesség; b) változó hőmérséklet T . Lineáris interpoláció, legkisebb négyzetek hibaelv.
c	(3.9.3): $K_2 = \frac{9\sqrt{3}cr}{2\sqrt{2}\pi} \tau_0^{k-2}$	Egytengelyű szekunder kúszás (pl. húzásban): a) változó feszültség; b) állandó hőmérséklet.

Ismételten köszönöm Páczelt Akadémikus Úr szakértő és gondos bírálói munkáját.

Budapest, 2018. augusztus 23.



Ruszinkó Endre