1062
vegy.

Hajlitott héjak általános elmélete

/ Doktori értekezés /

Budapest, 1959. április hó 16.

Bölcskei Elemér
/ Bölcskei Elemér /
a müszaki tudományok kandidátusa

Hajlitott héjak általános elmélete

1. A dolgozat tárgya

Jelen dolgozat célja tetszés szerinti terhelésü általános görbe felület alaku, állandó vasatgságu hajlitott héjak /görbe lemezek/ térbeli derékszögü koordináta rendszerre vonatkoztatott általános egyensulyi ill. alakváltozási összefüggéseinek felállitása. A felállitandó differenciál egyenletek a sik lemezek, tárcsák és az un. membrán héjak problémáit - mint különleges eseteket - szintén leirják.

2. Számitási feltevések

Számitásaink során az alábbi feltevésekből indulunk ki:

a./ A lemez vastagsága másik két méretéhez viszonyitva csekély.

b./ A középfelület normálisán elhelyezkedő pont az alakváltozás után a deformálódott középfelület normálisára esik.

c./ Az alakváltozások a lemezvastagsághoz képest kicsinyek.

d./ A lemez anyaga homogén és izotrop. Követi a Hooke-féle törvényt, tehát a nyulások és feszültségek között ferde egyenes szerinti összefüggés áll fenn.

e./ A lemez középfelületére merőleges feszültségek elhanyagolhatóan csekélyek.

3. A felület és a vizsgált felületelem geometriai jelemzői

Legyen a görbe lemez középfelületének egyenlete

$$z = f(x,y)$$

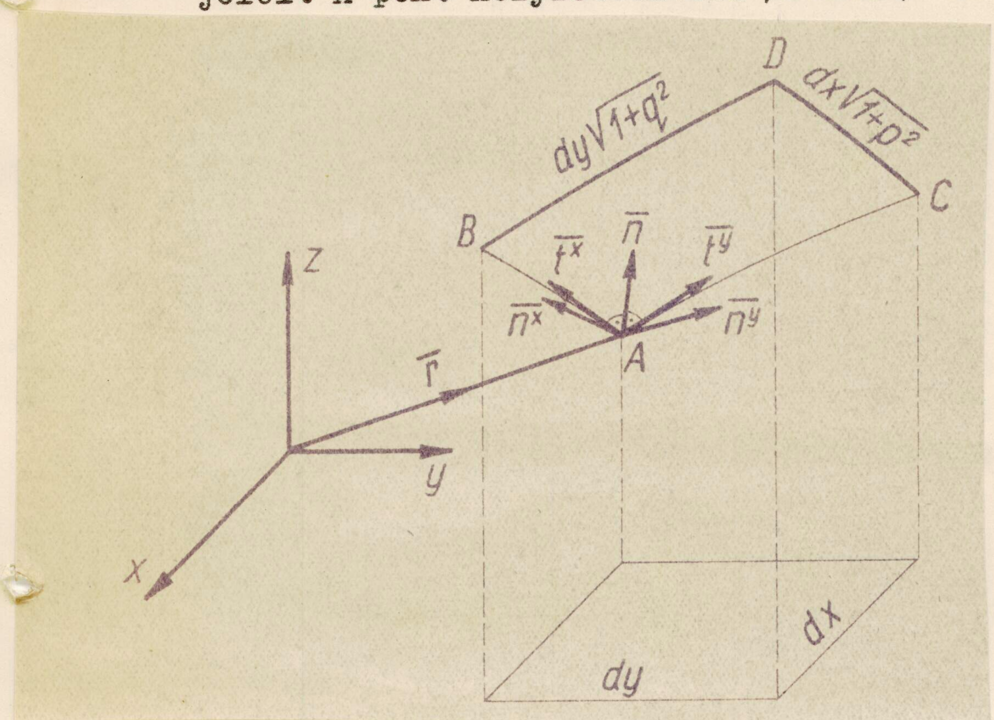
s jelüljük ennek első differenciálhányadosait

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

második differenciálhányadosait a szokásos

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

betükkel. Legyen továbbá a görbe lemez középfelületén kijelölt A pont helyzetvektora /1.ábra/ és ennek abszolut értéke



$$\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A középfelület /z,x/ ill. /z,y/ sikokkal párhuzamos metszetgörbéjének érintő vektora t^x ill. t^y. Ezek koordinátái és abszolut értékei

$$\bar{t}^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \qquad \bar{t}^y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{bmatrix}$$

$$|\bar{t}^x| = \sqrt{1 + p^2} \qquad |\bar{t}^y| = \sqrt{1 + q^2}$$

A felület normálvektorát $\overline{t^x}$ és $\overline{t^y}$ vektorok vektoriális szorzataként kapjuk. Tehát a normálvektor koordinátái és abszolut értéke

$$\overline{n} = \overline{t^x} \times \overline{t^y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\overline{n}| = \sqrt{1+p^2+q^2} = T$$

A további számitásainkban szükségünk lesz a $\overline{t^x}$ és $\overline{n}$ vektorokra merőleges $\overline{n^x}$ vektorra, valamint $\overline{t^y}$ és $\overline{n}$ vektorokra merőleges $\overline{n^y}$ vektorra. E vektorokat és abszolut értéküket az alábbi összefüggésekkel határozhatjuk meg:

$$\overline{n^x} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -p & -q & 1 \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -pq \\ 1+p^2 \\ q \end{bmatrix}$$

$$|\overline{n^x}| = T\sqrt{1+p^2}$$

$$\overline{n^y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & q \\ -p & -q & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1+q^2 \\ -pq \\ p \end{bmatrix}$$

$$|\overline{n^y}| = T\sqrt{1+q^2}$$

A lemez középfelületének - az /x,y/ sikban kijelölt dx, dy oldalhosszuságu derékszögü négyszög felett elhelyezkedő -

elemi része általános alaku felületelem lesz. Ezen általában térbeli elemi felületrész a felület érintő sikjában fekvő $dx\sqrt{1+p^2}$ ill. $dy\sqrt{1+q^2}$ oldalhosszuságu sik paralellogrammának tekinthető, amelynek /x,z/ ill. /y,z/ koordináta sikokkal párhuzamos oldalai egymás között α szöget zárnak be. A felületelem oldalai által bezárt szög szögfüggvényeit a felületelem első parciális differenciálhányadosaival fejezhetjük ki, mégpedig

$$\cos\alpha = \frac{pq}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}$$

összefüggésekkel.

A vizsgált lemez a felületi normális irányában mérve v vastagságu. Az elemi rész középfelülete a fent leirt $dx\sqrt{1+p^2}$ ill. $dy\sqrt{1+q^2}$ oldalhosszuságu ferdeszögű paralellogramma. A valóságos felületelem nem hasáb alaku, hanem a kétirányu görbület következtében a domboru oldal felé szélesedő "lék" alaku elem lesz. A héjvastagság irányában - az érintő sikkal párhuzamosan - vett metszet szintén paralellogramma alaku lesz, amelynél az oldalak által bezárt szög azonos a középfelület hasonló szögével, de az oldalhossz változó. A középfelület felett v magasságban lévő felületelem oldalhossza ui.

$$ds_x^v = dx\sqrt{1+p^2}\;\frac{R_x+v}{R_x}$$

$$ds_y^v = dy\sqrt{1+q^2}\;\frac{R_y+v}{R_y}$$

összefüggésekkel irható le, ahol R_x ill. R_y a középfelület $\overline{t}^x$ ill. $\overline{t}^y$ érintővektora és az $\overline{n}$ normálvektor által meghatározott sikban - tehát mindkét esetben normál sikban - mért görbületi sugár. A normál metszetek görbülete általában

$$\frac{1}{R} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

képletből számitható ahol a, b, c a normál metszet érintőjének iránykoszinuszait jelenti. Tehát a $\overline{t}^x$- en átmenő normál metszetben a görbület

$$-\frac{1}{R_x} = \frac{r}{(1+p^2)\,T}$$

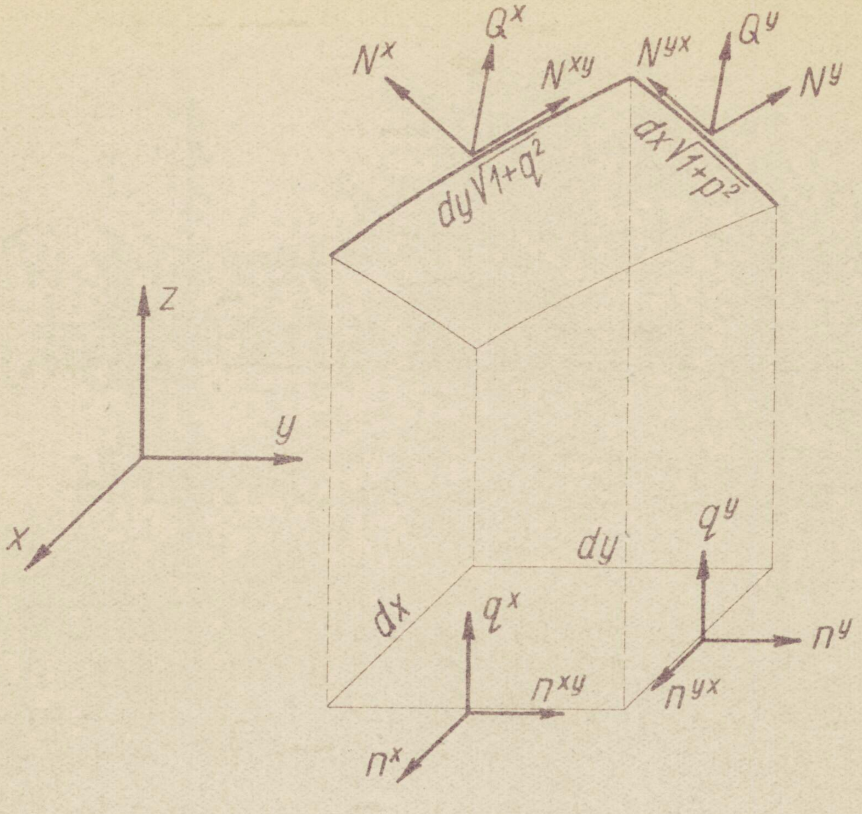
ill. a $\overline{t}^y$ -on átmenő normál metszetben a görbület

$$-\frac{1}{R_y} = \frac{t}{(1+q^2)\,T}$$

4. Az egyensulyi egyenletek

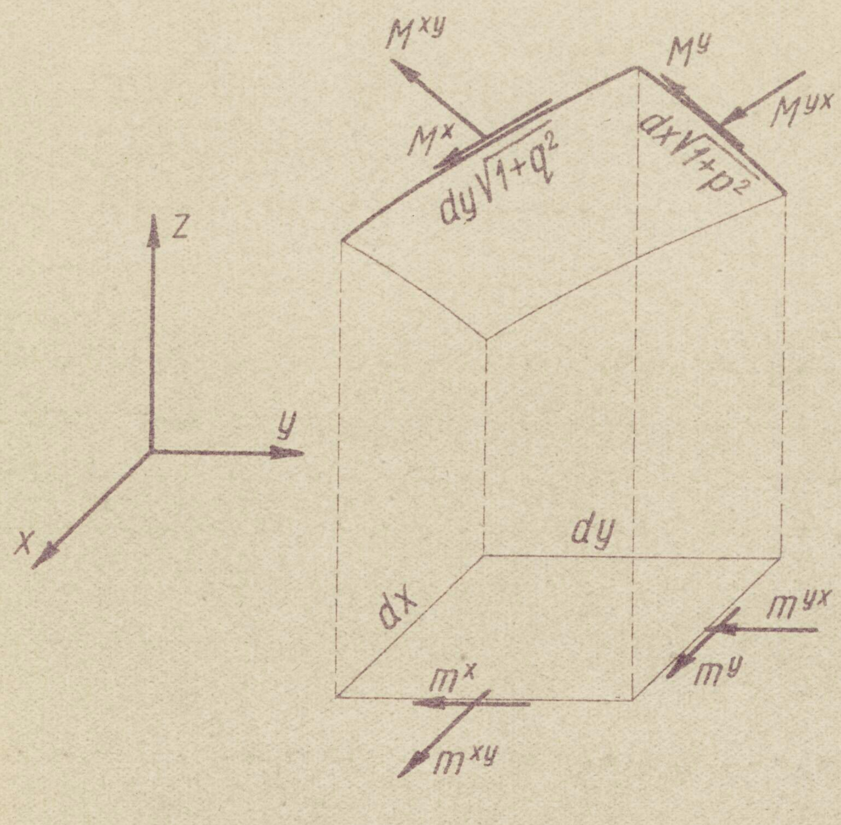
Vizsgáljuk a $z = f(x,y)$ felületből kivágott dx, dy alaprajzu felületelem egyensulyát. Jelöljük a héjfelületre ható és a felület érintő sikjába eső /x,z/ ill. /y,z/ sikokkal párhuzamos tényleges feszitő erőket N^x-szel ill. N^y-nal. Az érintő sikban fekvő ugyanilyen irányu nyiróerők fajlagos értékei legyenek N^{xy} ill. N^{yx}. Szükségünk lesz továbbá a felületi normálissal $\overline{n}$-nel párhuzamos irányban ható Q^x ill. Q^y nyiróerőkre is /2.ábra/.

Hasonló módon értelmezzük és jelöljük a tényleges hajlitó nyomatékokat is /3.ábra/. Legyen M^x, M^y az x ill. az y



N^x
Q^x
N^{xy}
N^{yx}
Q^y
N^y
$dy\sqrt{1+q^2}$
$dx\sqrt{1+p^2}$
z
y
x
dy
dx
q^y
q^x
n^y
n^{xy}
n^{yx}
n^x

2. ábra



M^{xy}
M^y
M^x
M^{yx}
$dy\sqrt{1+q^2}$
$dx\sqrt{1+p^2}$
z
y
x
dy
dx
m^{yx}
m^x
m^y
m^{xy}

3. ábra

irányu hajlitást előidéző tényleges nyomaték, amelynek vektora a megfelelő hajlitási sikra merőleges. M^{xy} ill. M^{yx} a hasonlóképen értelmezett csavaró nyomaték.

A héjfelület dx, dy alaprajzu elemére ható térbeli erőrendszer egyensulyát három vetületi és három nyomatéki egyenlet fejezi ki. Ezek könnyebb felirása céljából a felületelemre ható erőket a I. ill. a nyomatékokat a II. táblázatban állitottuk össze. Feltüntetve itt az erők ill. nyomatékok nagyságát valamint irányvektoruk koordinátáit.

I. táblázat

Az erő nagysága	Az egységvektor x irányu vetülete	Az egységvektor y irányu vetülete	Az egységvektor z irányu vetülete
$N^{x}\sqrt{1+q^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$N^{xy}\sqrt{1+q^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$Q^{x}\sqrt{1+q^2}$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$N^{y}\sqrt{1+p^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$N^{yx}\sqrt{1+p^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$Q^{y}\sqrt{1+p^2}$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$

II. táblázat

A nyomaték nagysága	Az egységvektor x irányu vetülete	y	z
$-M^x\sqrt{1+q^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$M^{xy}\sqrt{1+q^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$M^{xy}T$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$-Q^x\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}$	$-\frac{pq}{T\sqrt{1+p^2}}$	$\frac{1+p^2}{T\sqrt{1+p^2}}$	$\frac{q}{T\sqrt{1+p^2}}$
$M^y\sqrt{1+p^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$-M^{yx}\sqrt{1+p^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$-M^{yx}T$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$Q^y\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}$	$\frac{1+q^2}{T\sqrt{1+q^2}}$	$-\frac{pq}{T\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{p}{T\sqrt{1+q^2}}$

Legyen a héjfelület koordináta sikokra vonatkoztatott terhelésének az x, y ill. z irányban mért intenzitása az

$$X_0(x,y),\ Y_0(x,y),\ Z_0(x,y)$$

terhelés függvényekkel jellemezve.

Számitásaink egyszerüsitése céljából az egyensulyi egyenleteket nem a tényleges erőkre ill. nyomatékokra fogjuk felirni, hanem az un. redukált erőkre ill. nyomatékokra. A redukált erők ill. nyomatékok a tényleges erők ill. nyomatékok x, y ill. z irányu vetületének visszintes sikban mért intenzitását jelentik. A redukált erőket ill. nyomatékokat a megfelelő kisbetükkel és ugyanazokkal az indexekkel jelöljük.

A redukált erők a tényleges erőkből a 2. ábra alapján a alábbi összefüggésekkel számithatók.

$$n^x = N^x \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$n^y = N^y \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}}$$

$$n^{xy} = N^{xy}$$

$$n^{xy} = N^{yx}$$

$$q^x = Q^x \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$q^y = Q^y \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

A redukált nyomatékok a tényleges nyomatékokból a 3.ábra alapján az alábbi összefüggések segitségével számithatók.

$$m^x = M^x$$

$$m^y = M^y$$

$$m^{xy} = M^{xy} \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$m^{yx} = M^{yx} \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

A I. táblázat alapján felirhatjuk az erők egyensulyi egyenleteit, de rövidség kedvéért mindjárt vezessük be a redukált erőket:

$$n^x_x + n^{yx}_y - (pq^x)_x - (pq^y)_y + X_o = 0$$

$$n^{xy}_x + n^y_y - (qq^x)_x - (qq^y)_y + Y_o = 0$$

$$(pn^x)_x + (qn^y)_y + (qn^{xy})_x + (pn^{yx})_y + q^x_x + q^y_y + Z_o = 0$$

A müveleteket végrehajtva és rendezve majd a harmadik egyenletből levonva az első p-szeresét és a második q-szorosát

$$n^x_x + n^{yx}_y - rq^x - sq^y - p(q^x_x + q^y_y) + X_o = 0$$

$$n^{xy}_x + n^y_y - sq^x - tq^y - q(q^x_x + q^y_y) + Y_o = 0$$

$$rn^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + tn^y + T^2(q^x_x + q^y_y) +$$
$$+ (pr+qs)q^x + (ps+qt)q^y + Z_o - pX_o - qY_o = 0$$

egyenleteket kapjuk. Minthogy

$$(q^xT)_x + (q^yT)_y = \frac{1}{T}\left\{(pr+qs)q^x + (ps+qt)q^y + T^2(q^x_x + q^y_y)\right\}$$

E kifejezést a harmadik egyenletbe visszahelyettesitve

$$rn^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + tn^y + T\left\{(q^xT)_x + (q^yT)_y\right\} + Z_o - pX_o - qY_o = 0$$

összefüggésre jutunk.

A II. táblázat alapján viszont a nyomatékokra vonatkozó egyensulyi egyenleteket irhatjuk fel. Ezek a következők:

$$m^{xy}_x + m^y_y - p(n^{xy} - n^{yx}) + pqq^x + (1+q^2)q^y = 0$$

$$m^x_x + m^{yx}_y + q(n^{xy} - n^{yx}) + (1+p^2)q^x + pqq^y = 0$$

$$-(qm^x)_x + (pm^{xy})_x + (pm^y)_y - (qm^{yx})_y + (n^{xy} - n^{yx}) - qq^x + pq^y = 0$$

A harmadik egyenletben kijelölt müveleteket végrehajtva és ebből levonva az első egyenlet p-szerését, s hozzáadva a második egyenlet q-szorosát

$$r m^{xy} - s(m^x - m^y) - t m^{yx} + T^2(n^{xy} - n^{yx}) = 0$$

összefüggésre jutunk. Végeredményben tehát a hat egyensulyi egyenlet a következő

$$n^x_x + n^{yx}_y - (pq^x)_x - (pq^y)_y + X_0 = 0$$
$$n^{xy} + n^y_y - (qq^x)_x - (qq^y)_y + Y_0 = 0$$
$$r n^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + t n^y + T(Tq^x)_x + T(Tq^y)_y + Z_0 - pX_0 - qY_0 = 0$$
$$m^{xy}_x + m^y_y - p(n^{xy} - n^{yx}) + pq q^x + (1+q^2) q^y = 0$$
$$m^x_x + m^{yx}_y - q(n^{xy} - n^{yx}) + (1+p^2) q^x + pq q^y = 0$$
$$r m^{xy} - s(m^x - m^y) - t m^{yx} + T^2(n^{xy} - n^{yx}) = 0$$

Ezekben az egyenletekben az alábbi tiz ismeretlen szerepel:

$$n^x,\ n^y,\ n^{xy},\ n^{yx},\ q^x,\ q^y$$
$$m^x,\ m^y,\ m^{xy},\ m^{yx}$$

A negyedik és ötödik egyenletből q^x, q^y egyszerüen kifejezhető és a másik négy egyenletbe behelyettesithető. Ha ezt végrehajtjuk négy egyenletet kapunk, amelyekben már csak az alább felsorolt nyolc ismeretlen szerepel /1. 11. pont / :

$$n^x \quad n^y \quad n^{xy} \quad n^{yx}$$
$$m^x \quad m^y \quad m^{xy} \quad m^{yx}$$

5. Az alakváltozás vizsgálata

Vizsgáljuk a z = f /x,y/ alaku héj középfelülete felett v magasságban lévő P pont mozgását. A középfelület mozgását az x,y,z irányokban az

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y), \quad \zeta = \zeta(x,y)$$

elmozdulás függvényekkel jellemezzük. Az alakváltozás után a középfelület felett v magasságban elhelyezkedő P pont P' helyzetbe kerül /4.ábra/. A $\overline{PP'} = \overline{e}^v$ elmozdulás két részből tevődik össze. Az első rész a tiszta eltolódás, amelyet a ξ, η, ζ elmozdulás függvényekkel jellemezhetünk, mig a második rész a középfelület normálvektorának elfordulása következtében előálló mozgás, amelynek koordinátái a Ξ, H, Z függvényekkel irhatunk le.

P pont helyzetvektora

$$\overline{P} = \overline{x} + \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} v$$

mig P' helyzetvektora

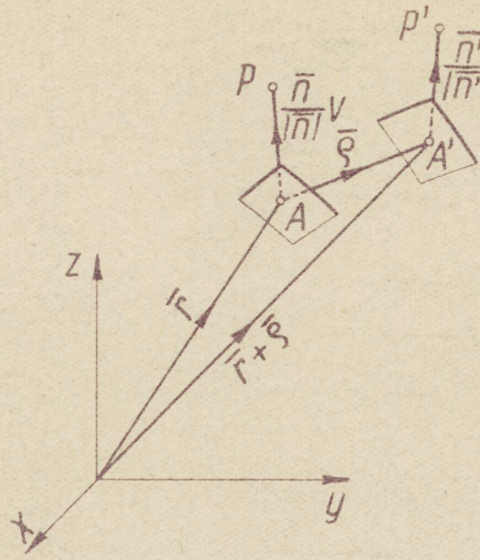
$$\overline{P}' = \overline{r} + \overline{\varrho} + \frac{\overline{n}'}{|\overline{n}'|} v$$

összefüggésekkel irható le, ahol ϱ az elmozdulásvektor, $\overline{n}$ az eredeti felület normálvektor, mig $\overline{n}'$ a deformáltfelület normálvektora. Az elmozdulásvektor tehát

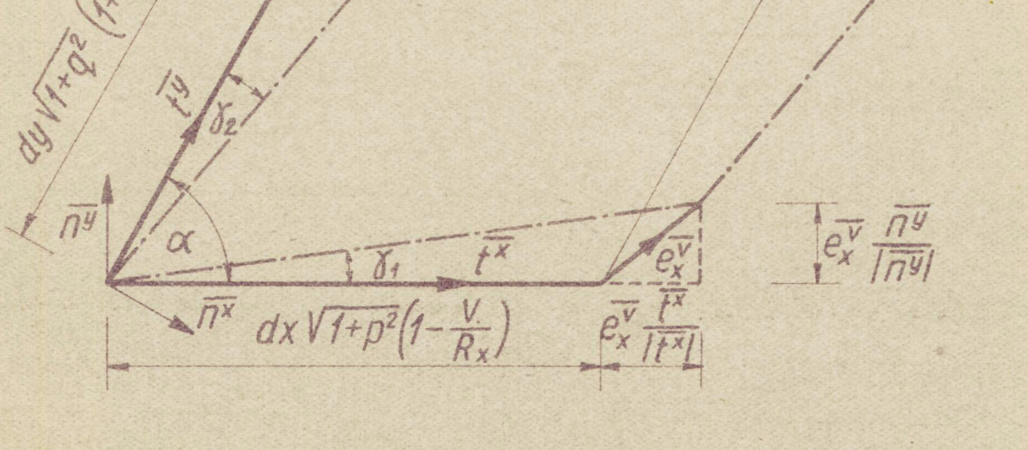
$$\overline{PP'} = \overline{e}^v = \overline{\varrho} + \left\{ \frac{\overline{n}'}{|\overline{n}'|} - \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} \right\} v$$

E vektor egyenletben szereplő mennyiségeket a felületelmélet alapján határozzuk meg. Az eredeti felület normálvektora

$$\overline{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{bmatrix}$$



4. ábra



5. ábra

s ennek abszolut értéke a szokásos jelöléssel

$$|\bar{n}| = \sqrt{1+p^2+q^2} = T$$

Az alakváltozás után a felület normálvektora

$$\bar{n}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1+\xi_x & \eta_x & p+\zeta_x \\ \xi_y & 1+\eta_y & q+\zeta_y \end{vmatrix}$$

lesz s ezt rendezve majd bevezetve a A,B és C jelöléseket matrix alakban

$$\bar{n}' = \begin{bmatrix} -p+(q\eta_x - p\eta_y - \zeta_x) \\ -q+(-q\xi_x + p\xi_y - \zeta_y) \\ 1+(\xi_x+\eta_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

összefüggésekre jutunk. E vektor abszolut értéke

$$|\bar{n}'| = \sqrt{1+p^2+q^2+2(-pA-qB+C)+A^2+B^2+C^2}$$

E kifejezésben az alakváltozási tagokat tartalmazó A,B, C mennyiségek második hatványait - mint másodrendüen kicsiny mennyiségeket - elhanyagolva és rendezve

$$|\bar{n}'| = T\sqrt{1+2\frac{-pA-qB+C}{T^2}}$$

összefüggést kapjuk. Ebben a gyökjel alatti második tag az elsőhöz képest kicsiny tehát irhatjuk

$$|\bar{n}'| = T\left(1+\frac{-pA-qB+C}{T^2}\right)$$

Fenti mennyiségeket az elmozdulásvektor matrixába helyettesitve

$$\bar{e}^v = \begin{bmatrix} \xi + \frac{1}{T}(-p+A)\left(1+\frac{pA+qB-C}{T^2}\right)v + \frac{p}{T}v \\ \eta + \frac{1}{T}(-q+B)\left(1+\frac{pA+qB-C}{T^2}\right)v + \frac{q}{T}v \\ \zeta + \frac{1}{T}(1+C)\left(1+\frac{pA+qB-C}{T^2}\right)v - \frac{1}{T}v \end{bmatrix}$$

összefüggésre jutunk, amelyet rendezve

$$\overline{e^v} = \begin{bmatrix} \xi + \frac{v}{T^3} \{(1+q^2) A - pq B + pC \} \\ \eta + \frac{v}{T^3} \{ -pq A + (1+p^2) B + qC \} \\ \zeta + \frac{v}{T^3} \{ pA + qB + (p^2+q^2) C \} \end{bmatrix}$$

egyenletet kapjuk. A,B,C fenti kifejezéseit behelyettesitve

$$\overline{e^v} = \begin{bmatrix} \xi + \frac{v}{T^3} \{(1+q^2)(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) - pq(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \\ \eta + \frac{v}{T^3} \{ -pq(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + (1+p^2)(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \\ \zeta + \frac{v}{T^3} \{ p(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + p(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \end{bmatrix}$$

összefüggést kapjuk s ha bevezetjük az

$$\omega_y = \frac{1}{T^2}(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x)$$

$$\omega_x = -\frac{1}{T^2}(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y)$$

jelöléseket, végeredményben a középfelület felett v magasságban elhelyezkedő pont elmozdulását az

$$e^v = \begin{bmatrix} \xi + \frac{v}{T} \{(1+q^2)\omega_y + pq\,\omega_x \\ \eta + \frac{v}{T} \{ -pq\,\omega_y - (1+p^2)\omega_x \\ \zeta + \frac{v}{T} \{ p\,\omega_y - q\,\omega_x \end{bmatrix}$$

egyenlettel irhatjuk le. e^v kifejezésében az első tag a tiszta eltolódás a mádoik tag pedig a felületi normális szögelfordulása következtében előálló mozgás. Ha ez utóbbiakat - mint már emlitettük - a megfelelő görög nagybetükkel jelöljük, akkor

$$e^v = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \Xi \\ H \\ Z \end{bmatrix}$$

összefüggésre jutunk.

Itt emlitjük meg, hogy ω_x ill. ω_y-nak érdekes jelentése van. Ez ui. a felületi normális alakváltozás közbeni $\overline{\omega}$ forgásvektorának x ill. y irányu koordinátája. A forgásvektor az

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} \times \frac{\overline{n}'}{|\overline{n}'|}$$

vektor egyenlet alapján számitható. Ha a kijelölt vektoriális szorzást kifejtjük

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2}(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \\ \frac{1}{T^2}(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) \\ \frac{q}{T^2}(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) - \frac{p}{T^2}(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \end{bmatrix}$$

eredményre jutunk.

6. A fajlagos nyulások és a szögváltozás

Állapitsuk meg a vizsgált α hajlásszögü, paralellogramma alaku héjelem v magasságban lévő felületelemén fellépő fajlagos nyulásokat. Fajlagos nyulás alatt - a ferdeszögü rendszerben is - az elmozdulásvektor vizsgált irányu vetületének és az eredeti oldalhossznak hányadosát értjük, vagyis

$$\varepsilon^{xv} = \frac{\overline{e}_v}{|t^{xv}|} \cdot \frac{\overline{t}^x}{|t^x|}$$

ahol

$$\overline{r^v} = \begin{bmatrix} x & -\frac{p}{T}v \\ y & -\frac{q}{T}v \\ z & -\frac{1}{T}v \end{bmatrix}$$

$$\overline{t^{xv}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v}{T^3}\{r(1+q^2) - pqs\} \\ 0 - \frac{v}{T^3}\{s(1+q^2) - pqt\} \\ p - \frac{v}{T^3}\{pr + qs\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - vD \\ 0 - vE \\ p - vF \end{bmatrix}$$

E vektor hossza, vagyis abszulut értéke,: a másodrendü tagokat elhanyagolva:

$$\overline{|t^{xv}|} = \sqrt{1-2vD+p^2-2vpF} = \sqrt{1+p^2}\sqrt{1-\frac{2v}{1+p^2}(D+pF)} =$$

$$= \sqrt{1+p^2}\left\{1 - \frac{v}{(1+p^2)T}v(1+p^2+q^2)\right\} =$$

$$= \sqrt{1+p^2}\left\{1 - \frac{v}{(1+p^2)T}v\right\} = \sqrt{1+p^2}\,\frac{R_x+v}{R_x}$$

tehát a keresett fajlagos nyulás

$$\varepsilon_x^v = \frac{R_x}{R_x+v}\left\{\frac{\xi_x + p\zeta_x}{1+p^2} + v\frac{\Xi_x + pZ_x}{1+p^2}\right\} = \frac{R_x}{R_x+v}\left(\varepsilon_x^0 + vE_x^0\right)$$

Hasonló gondolatmenettel

$$\varepsilon_y^v = \frac{R_y}{R_y+v}\left\{\frac{\eta_y - q\zeta_y}{1+q^2} + v\frac{H_y - qZ_y}{1+q^2}\right\} = \frac{R_y}{R_y+v}\left(\varepsilon_y^0 + vE_y^0\right)$$

Meg kell határoznunk még a szögváltozás értékét is. A szögváltozás alatt a ferdeszögü koordináta rendszerben a tengelyek által bezárt szög torzulását értjük. Ez kétrészből tevődik össze /5.ábra/

$$\gamma^v = \gamma_1^v + \gamma_2^v$$

$$\gamma_1^v = \frac{\overline{e_x^v}}{|t^{xv}|} \cdot \frac{\overline{n^x}}{|n^x|}$$

$$\gamma_2^v = \frac{e_y^v}{|t^{yv}|} \cdot \frac{\overline{n^y}}{|n^y|}$$

Tehát

$$\gamma_1^v = \frac{R_x}{R_x+v} \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left[\xi_x + v\Xi_x ,\ \eta_x + v H_x ,\ \zeta_x + v Z_x \right] \cdot \frac{1}{T\sqrt{1+p^2}} \begin{bmatrix} -pq \\ 1+p^2 \\ q \end{bmatrix}$$

s ezt kifejtve

$$\gamma_1^v = \frac{R_x}{R_x+v} \quad \frac{1}{T(1+p^2)} \left[-pq\,\xi_x + (1+p^2)\eta_x + q\zeta_x + v\left\{ -pq\,\Xi_x + (1+p^2)H_x + qZ_x \right\} \right]$$

Hasonló gondolatmenettel

$$\gamma_2^v = \frac{R_y}{R_y+v} \quad \frac{1}{T(1+q^2)} \left[(1+q^2)\xi_y - pq\,\eta_y + p\zeta_y + v\left\{ (1+q^2)\Xi_y - pq\,H_y + pZ_y \right\} \right]$$

Tehát a keresett szögelfordulás

$$\gamma^v = \gamma_1^v + \gamma_2^v = \frac{R_x}{R_x+v} \left(\gamma_1^o + v\Gamma_1^o \right) + \frac{R_y}{R_y+v} \left(\gamma_2^o + v\Gamma_2^o \right)$$

7. Az elmozdulási egyenletek

A szögtorzulás összetevőit az alábbi formában is felirhatjuk:

$$\gamma_1^v + \frac{pq}{T}\varepsilon_x^v = \frac{R_x}{R_x+v} \quad \frac{1}{T} \left\{ \eta_x + q\zeta_x + v\left(H_x + qZ_x \right) \right\}$$

$$\gamma_2^v + \frac{pq}{T}\varepsilon_y^v = \frac{R_y}{R_y+v} \quad \frac{1}{T} \left\{ \xi_y + p\zeta_y + v\left(\Xi_y + pZ_y \right) \right\}$$

Ily módon végeredményben a fajlagos nyulásokra és a szögtorzulás összetevőire az alábbi négy összefüggés irható fel:

$$\varepsilon_x^v = \frac{R_x}{R_x+v}\,\frac{1}{1+p^2}\left\{\xi_x + p\zeta_x + v(\Xi_x + pZ_x)\right\}$$

$$\varepsilon_y^v = \frac{R_y}{R_y+v}\,\frac{1}{1+q^2}\left\{\eta_y + q\zeta_y + v(H_y + qZ_y)\right\}$$

$$\gamma_1^v + \frac{pq}{T}\varepsilon_x^v = \frac{R_x}{R_x+v}\,\frac{1}{T}\left\{\eta_x + q\zeta_x + v(H_x + qZ_x)\right\}$$

$$\gamma_2^v + \frac{pq}{T}\varepsilon_y^v = \frac{R_y}{R_y+v}\,\frac{1}{T}\left\{\xi_y + p\zeta_y + v(\Xi_y + pZ_y)\right\}$$

s ezt rendezve

$$\xi_x + p\zeta_x + v(\Xi_x + pZ_x) = \frac{R_x+v}{R_x}(1+p^2)\varepsilon_x^v$$

$$\eta_y + q\zeta_y + v(H_y + qZ_y) = \frac{R_y+v}{R_y}(1+q^2)\varepsilon_y^v$$

$$\eta_x + q\zeta_x + v(H_x + qZ_x) = \frac{R_x+v}{R_x}(T\gamma_1^v + pq\varepsilon_x^v)$$

$$\xi_y + p\zeta_y + v(\Xi_y + pZ_y) = \frac{R_y+v}{R_y}(T\gamma_2^v + pq\varepsilon_y^v)$$

összefüggésekre jutunk. Vezessük be a

$$\bar{e^v} = \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}\Xi\\ H\\ Z\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}\phi\\ \psi\\ \chi\end{bmatrix}$$

$$P = \frac{R_x+v}{R_x}(1+p^2)\,\varepsilon_x^v$$

$$Q = \frac{R_y+v}{R_y}(1+q^2)\,\varepsilon_y^v$$

$$S_1 = \frac{R_x+v}{R_x}(T\gamma_1^v + pq\,\varepsilon_x^v)$$

$$S_2 = \frac{R_y+v}{R_y}(T\gamma_2^v + pq\,\varepsilon_y^v)$$

jelöléseket.

Az y-szerint kétszer differenciált első ill. az x-szerint kétszer differenciált második egyenletet levonva az xy-szerint differenciált harmadik és negyedik egyenlet összegéből

$$f_{xx}\chi_{yy} - 2f_{xy}\chi_{xy} + f_{yy}\chi_{xx} = (S_1 + S_2)_{xy} - P_{yy} - Q_{xx}$$

összefüggésre jutunk. Fennáll továbbá az

$$\phi_x = P - p\chi_x$$

és

$$\psi_y = Q - q\chi_y$$

összefüggés is.

E három egyenlet segitségével a héjfelület alakváltozásait mindenkor meg tudjuk határozni ha ismerjük az ε_x^v, ε_y^v, γ^v fajlagos nyulásokat és szögtorzulást. Ezekből ugyanis a héjfelület állandói ismeretében meghatározhatók P, Q, S_1 S_2 értékek s ezeket fenti egyenletekbe helyettesitve ismeretlenként csupán a ϕ, ψ, χ elmozdulás függvényeik maradnak. Végeredményben tehát három differenciálegyenletet kapunk, amelyekből a három ismeretlen elmozdulás függvény megállapitható. Ezeket meghatározva a középfelület keresett ξ, η, ζ mozgásai a

$$\phi = \xi + \frac{v}{T_3}(1+q^2)(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) - \frac{v}{T_3}pq(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y)$$
$$\psi = \eta - \frac{v}{T_3}pq(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + \frac{v}{T_3}(1+p^2)(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y)$$
$$\chi = \zeta + \frac{v}{T_3}p(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + \frac{v}{T_3}q(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y)$$

differenciálegyenlet-rendszerből a megfelelő kerületi feltételek figyelembevétel esetében kiszámithatók.

8. A fajlagos belső erők és nyomatékok

Vizsgáljuk meg a héj dx, dy alaprajzu elemek felett elhelyezkedő azon részét, amelyet a középfelület érintővektorai és a normálvektor által meghatározott sikokkal párhuzamos sikok metszenek ki a lemezből. Ha szemügyre vesszük a középfelület felett v magasságban elhelyezkedő felületelemet megállapithatjuk, hogy ennek hossza a

$$ds_x^v = \frac{R_x + v}{R_x} ds_x$$

$$ds_y^v = \frac{R_y + v}{R_y} ds_y$$

összefüggésekkel irható le, ahol ds_x, ds_y az eredeti hossz mig ds_x^v, ds_y^v a középfelület felett v magasságban lévő elemi szál hossza. A lemez metszett felületein müködő tényleges fajlagos erőket tehát az alábbi összefüggések szolgáltatják:

$$N^x = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R_y + v}{R_y} \sigma_x \, dv$$

$$N^y = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R_x + v}{R_x} \sigma_y \, dv$$

$$N^{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R_y + v}{R_y} \tau_{xy} \, dv$$

$$N^{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R_x + v}{R_x} \tau_{yx} \, dv$$

$$M^x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{R_y + v}{R_y} v \, \sigma_x \, dv$$

$$M^y = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{R_x + v}{R_x} v \, \sigma_y \, dv$$

$$M^{xy} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{R_y + v}{R_y} v \, \tau_{xy} \, dv$$

$$M^{yx} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{R_x + v}{R_x} v \, \tau_{yx} \, dv$$

$$Q^x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{R_y + v}{R_y} \tau_{xz} \, dv$$

$$Q^y = -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{R_x + v}{R_x} \tau_{yz} \, dv$$

Ezekben az egyenletekben σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{yz} a ferdeszögü rendszerben értelmezett feszültségeket jelenti.

9. A Hooke-féle törvény ferdeszögü koordinátákban

Az alaprajzban derékszögü négyszög alaku felületelem a héjfelületen a valóságban ferdeszögü paralellogramma lesz. Szükségünk lesz tehát az α hajlásszögü /x,y/ koordináta rendszerben értelmezett σ_x, σ_y, ill. τ_{xy} feszültségek, valamint ugyanebben a rendszerben értelmezett ε_x, ε_y nyulások és γ szögváltozás közötti összefüggésekre. Ez a Hooke-féle törvény amelynek ferdeszögü koordinátákra is érvényes összefüggéseit P. Lardy állitotta fel [3], s ezeket - a levezetések mellőzésével - az alábbiakban közöljük:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E \sin\alpha} \left[\sigma_x + \left(\cos^2\alpha - \mu \sin^2\alpha \right) \sigma_y + 2\tau \cos\alpha \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E \sin\alpha} \left[\sigma_x \left(\cos^2\alpha - \mu \sin^2\alpha \right) + \sigma_y + 2\tau \cos\alpha \right]$$

$$\gamma = \frac{1+\mu}{E} \left[\sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha + 2\tau \right]$$

Ezekből az egyenletekből, ha a fajlagos nyulások ill. a szögváltozás segitségével a feszültségeket akarjuk kifejezni, e három ismeretlen egyenletrendszert a feszültségekre kell megoldani. A részletezámitásokat ismét mellőzve végeredményben

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2)\sin^2\alpha}\left[\varepsilon_x \sin\alpha + \mu\,\varepsilon_y \sin\alpha - \gamma\cos\alpha\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2)\sin^2\alpha}\left[\mu\,\varepsilon_x \sin\alpha + \varepsilon_y \sin\alpha - \gamma\cos\alpha\right]$$

$$\tau = \frac{E}{2(1-\mu^2)\sin^2\alpha}\left[\gamma\left\{2-(1+\mu)\sin^2\alpha\right\} - (1+\mu)(\varepsilon_x + \varepsilon_y \sin\alpha\cos\alpha\right]$$

egyenletekre jutunk. Ha a szögfüggvényeket a középfelület egyenletének parciális differenciál hányadosaival fejezzük ki

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{\sqrt{1+p^2}\,\sqrt{1+q^2}}{T^2}\left\{(\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y)T - \gamma pq\right\}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{\sqrt{1+p^2}\,\sqrt{1+q^2}}{T^2}\left\{(\mu\,\varepsilon_x + \varepsilon_y)T - \gamma pq\right\}$$

$$\tau = \frac{E}{2(1-\mu^2)}\,\frac{1}{T^2}\Big\{\gamma\left[2(1+p^2)(1+q^2) - (1+\mu)T^2\right] - $$
$$- (1+\mu)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\,pqT\Big\}$$

összefüggéseket kapjuk.

10. A fajlagos belső erők és nyomatékok mint az alakváltozás függvényei

A fajlagos belső erők ill. nyomatékok és az alakváltozás közötti összefüggések meghatározása során a fentebb igazoltuk, hogy

$$\varepsilon_x^v = \frac{R_x}{R_x + v}\left\{\frac{\xi_x + p\,\zeta_x}{1+p^2} + v\,\frac{\Xi_x + p\,Z_x}{1+p^2}\right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{R_y}{R_y+v}\left\{ \frac{\eta_y + q\zeta_y}{1+q^2} + v\frac{H_y + q Z_y}{1+q^2} \right\}$$

$$\gamma^v = \gamma_1^v + \gamma_2^v =$$

$$= \frac{R_x}{R_x+v}\left\{ \frac{-pq\xi_x + (1+p^2)\eta_x + q\zeta_x}{(1+p^2)T} + v\frac{-pq\Xi_x + (1+p^2)H_x + qZ_x}{(1+p^2)T} \right\}$$

$$\frac{R_y}{R_y+v}\left\{ \frac{(1+q^2)\xi_y - pq\eta_y + p\zeta_y}{(1+q^2)T} + v\frac{(1+q^2)\Xi_y - pqH_y + pZ_y}{(1+q^2)T} \right\}$$

Ezeket a feszültségek 9. fejezetben levezetétt képleteibe helyettesitve

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\frac{R_x}{R_x+v}\frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{T^3}\Big\{(1+q^2)\xi_x - pq\eta_x - p\zeta_x$$

$$v\left[(1+q^2)\Xi_x - pqH_x - pZ_x\right]\Big\} +$$

$$+ \frac{E}{1-\mu^2}\frac{R_y}{R_y+v}\frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{(1+q^2)T^3}\Big\{-(1+q^2)pq\xi_y + (p^2q^2+\mu T^2)\eta_y - (p^2q - \mu qT^2)\zeta_y +$$

$$+ v\left[-(1+q^2)\Xi_y + (p^2q^2+\mu T^2)H_y - (p^2q - \mu qT^2)Z_y\right]\Big\} =$$

$$= \frac{E}{1-\mu^2}\frac{R_x}{R_y+v}(\delta_x + v\Delta_x) + \frac{E}{1-\mu^2}\frac{R_y}{R_y+v}(\vartheta_x + v\Theta_x)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\frac{R_x}{R_x+v}\frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{(1+p^2)T^3}\Big\{(p^2q^2+\mu T^2)\xi_x - pq(1+p^2)\eta_x - (pq^2 - \mu pT^2)\zeta_x +$$

$$v\left[(p^2q^2+\mu T^2)\Xi_x - pq(1+p^2)H_x - (pq^2 - \mu pT^2)Z_x\right]\Big\} +$$

$$+ \frac{E}{1-\mu^2}\frac{R_y}{R_y+v}\frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{T^3}\Big\{-pq\xi_x + (1+p^2)\eta_y + q\zeta_y$$

$$v\left[-pq\Xi_y + (1+p^2)H_y + qZ_y\right]\Big\}$$

$$= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{R_x}{R_x+v} (\delta_y + v\Delta_y) + \frac{E}{1-\mu^2} \frac{R_y}{R_y+v} (\vartheta_x + v\Theta_x)$$

$$\tau = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{R_x}{R_x+v} \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{T^3} \Big\{ \frac{T^2(1-\mu)+2p^2q^2}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}} [-pq\xi_x + (1+p^2)\eta_x + q\zeta_x] +$$

$$v[pq\Xi_x + (1+p^2)H_x + qZ_x] - \frac{(1+\mu)pqT^2}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}} [\xi_x + p\zeta_x + v(\Xi_x + pZ_x)]\Big\} +$$

$$+ \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{R_x}{R_x+v} \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{T^3} \Big\{ \frac{T^2(1-\mu)+2p^2q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}} [(1+q^2)\xi_y - pq\eta_y + p\zeta_y] +$$

$$+ v[(1+q^2)\Xi_y - pqH_y + pZ_y] - \frac{(1+\mu)pqT^2}{(1+q^2)\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}} [\eta_y + q\zeta_y + v(H_y + qZ_y)]\Big\} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{R_x}{R_x+v} (\delta_{xy} + v\Delta_{xy}) + \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{R_y}{R_y+v} (\vartheta_{xy} + \Theta_{xy})$$

Bevezetve az

$$\alpha = \frac{E}{1-\mu^2}$$

valamint a $\delta_x, \vartheta_x, \delta_y, \vartheta_y, \delta_{xy}, \vartheta_{xy}, \Delta_x, \Theta_x, \Delta_y, \Theta_y, \Delta_{xy}, \Theta_{xy}$ jelöléseket fenti egyenleteink röviden

$$\sigma_x = \alpha \frac{R_x}{R_x+v} (\delta_x + v\Delta_x) + \alpha \frac{R_y}{R_y+v} (\vartheta_x + \Theta_x)$$

$$\sigma_y = \alpha \frac{R_x}{R_x+v} (\delta_y + v\Delta_y) + \alpha \frac{R_y}{R_y+v} (\vartheta_y + \Theta_y)$$

$$\tau = \frac{\alpha}{2} \frac{R_x}{R_x+v} (\delta_{xy} + v\Delta_{xy}) + \frac{\alpha}{2} \frac{R_y}{R_y+v} (\vartheta_{xy} + \Theta_{xy})$$

alakban is irható.

Fenti adatok alapján a továbbiakban állapítsuk meg a tényleges fajlagos erők és nyomatékok értékeit.

$$N^x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{R_y+v}{R_y}\sigma_x\,dv =$$

$$= \alpha\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{R_y+v}{R_y}\,\frac{R_x}{R_x+v}\,(\delta_x+v\Delta_x)\,dv + \alpha\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{R_y+v}{R_y}\,\frac{R_x}{R_x+v}\,(\vartheta_x+v\,\theta_x)\,dv$$

A kijelölt integrálási müveleteket hajtsuk végre:

$$N^x = \alpha\frac{R_x}{R_y}\delta_x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{R_y+v}{R_x+v}\,dv + \alpha\frac{R_x}{R_y}\Delta_x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{R_y+v}{R_x+v}\,v\,dv + \alpha\vartheta_x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dv + \alpha\,\theta_x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v\,dv =$$

$$= \int \underline{I}\,dv + \int \underline{II}\,dv + \int \underline{III}\,dv + \int \underline{IV}\,dv$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{I}\,dv = \alpha\frac{R_x}{R_y}\delta_x\left[v+(R_y-R_x)\log\left(1+\frac{v}{R_x}\right)\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} =$$

$$= \alpha\frac{R_x}{R_y}\delta_x\left[h+(R_y-R_x)\log\frac{1+\frac{h}{2R_x}}{1-\frac{h}{2R_x}}\right] =$$

$$= \alpha\frac{R_x}{R_y}\delta_x\left[h+(R_y-R_x)\left(\frac{h}{R_x}+\frac{h^3}{12R_x^3}+\dots\right)\right] \cong$$

$$\cong \alpha\frac{R_x}{R_y}\delta_x\left[h\frac{R_y}{R_x}+\frac{h^3}{12}\,\frac{R_y-R_x}{R_x^3}\right] =$$

$$= \alpha h\,\delta_x + \frac{\alpha h^3}{12}\,\frac{1}{R_x}\left(\frac{1}{R_x}-\frac{1}{R_y}\right)\delta_x$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{II}\,dv = \alpha\frac{R_x}{R_y}\Delta_x\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left[v+(R_y-R_x)\,\frac{v}{R_x+v}\right]dv =$$

$$= \alpha\frac{R_x}{R_y}\Delta_x\left[\frac{v^2}{2}+(R_y-R_x)\left(v-R_x\log\left(1+\frac{v}{R_x}\right)\right)\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} =$$

$$= \alpha\frac{R_x}{R_y}\Delta_x(R_y-R_x)\left(h-R_x\log\frac{1+\frac{h}{2R_x}}{1-\frac{h}{2R_x}}\right) =$$

$$= \alpha\frac{R_x}{R_y}\Delta_x(R_y-R_x)\left(h-R_x\left[\frac{h}{R_x}+\frac{h^3}{12R_x^3}+\dots\right]\right)$$

$$= \frac{\alpha h^3}{12}\left(\frac{1}{R_y}-\frac{1}{R_x}\right)\Delta_x$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{III}\,dv = \alpha h\,\vartheta_x$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{IV}\, dv = \alpha\, \Theta \left[\frac{v^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$$

Végeredményben tehát:

$$N^x = \alpha h (\delta_x + \vartheta_x) + \frac{\alpha h^3}{12}\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x}\right)\left(\Delta_x - \frac{\delta_x}{R_x}\right)$$

Hasonló gondolatmenettel állapithatjuk meg a további erők és nyomatékok kifejezéseit. A részletszámitásokat most már mellőzve végeredményben az alábbi összefüggésekre jutunk:

$$N^x = L(\delta_x + \vartheta_x) + K\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x}\right)\left(\Delta_x - \frac{\delta_x}{R_x}\right)$$

$$N^y = L(\delta_y + \vartheta_y) + K\left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y}\right)\left(\Theta_y - \frac{\vartheta_y}{R_y}\right)$$

$$N^{xy} = \frac{L}{2}(\delta_{xy} + \vartheta_{xy}) + K\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x}\right)\left(\Delta_{xy} - \frac{\delta_{xy}}{R_x}\right)$$

$$N^{yx} = \frac{L}{2}(\delta_{xy} + \vartheta_{xy}) + K\left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y}\right)\left(\Theta_{xy} - \frac{\vartheta_{xy}}{R_y}\right)$$

$$M^x = -K\left[\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x}\right)\delta_x + \Delta_x + \Theta_x\right]$$

$$M^y = -K\left[\left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y}\right)\vartheta_y + \Delta_y + \Theta_y\right]$$

$$M^{xy} = -\frac{K}{2}\left[\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x}\right)\delta_{xy} + \Delta_{xy} + \Theta_{xy}\right]$$

$$M^{yx} = -\frac{K}{2}\left[\left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y}\right)\vartheta_{xy} + \Delta_{xy} + \Theta_{xy}\right]$$

ahol

$$L = \frac{Eh}{1-\mu^2} \qquad K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

11. A hajlitott héjak általános differenciálegyenlete

Az egyensulyi egyenletek tárgyalása során kimutattuk, hogy az n^x, n^y, n^{xy}, n^{yx}, m^x, m^y, m^{xy}, m^{yx} ismeretlenek között az alábbi négy összefüggés áll fenn:

$$n^x_x + n^{yx}_y + \left[\frac{p(1+q^2)}{T^2}(m^x_x + m^{yx}_y) - \frac{pq}{T^2}(m^{xy}_x + m^y_y) + qp(n^{xy} - n^{yx})\right]_x +$$

$$+ \left[-\frac{p^2 q}{T}(m^x_x + m^{yx}_y) + \frac{p(1+p^2)}{T^2}(m^{xy}_x + m^y_y) - p^2(n^{xy} - n^{yx})\right]_y + X_0 = 0$$

$$n^{xy}_x + n^y_y + \left[\frac{q(1+q^2)}{T^2}(m^x_x + m^{yx}_y) - \frac{q^2p}{T^2}(m^{xy}_x + m^y_y) + q^2(n^{xy} - n^{yx})\right]_x$$
$$+\left[-\frac{q^2p}{T^2}(m^x_x + m^{yx}_y) + \frac{q(1+p^2)}{T}(m^{xy}_x + m^y_y) - pq(n^{xy} - n^{yx})\right]_y + Y_0 = 0$$

$$r n^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + t n^y +$$
$$+ T\left[-\frac{1+q^2}{T}(m^x_x + m^{yx}_y) + \frac{pq}{T}(m^{xy}_x + m^y_y) - qT(n^{xy} - n^{yx})\right]_x +$$
$$+ T\left[\frac{pq}{T}(m^x_x + m^{yx}_y - \frac{1+p^2}{T}(m^{xy}_x + m^y_y) + pT(n^{xy} - n^{yx})\right]_y +$$
$$+ Z_0 - pX_0 - qY_0 = 0$$

$$r m^{xy} - s(m^x - m^y) - t m^{yx} + T^2(n^{xy} - n^{yx}) = 0$$

Ezen redukált erőkre illetve nyomatékokra felirt egyenletbe a tényleges erők ill. nyomatékok ξ, η, ζ elmozdulásfüggvényekkel kifejezett majd megfelelően redeukált értékeit behelyettesitve

$$g(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) = 0$$
$$h(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) = 0$$
$$i(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) = 0$$
$$j(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) = 0$$

összefüggéseket kapjuk. Fenti négy egyenletben most már csupán a ξ, η, ζ ismeretlenek szerepelnek.

Négy egyenletünk van három ismeretlennel azonban kimutatható, hogy a negyedik egyenlet azonosságra vezet tehát ezt figyelmenkivül hagyva végeredményben három ismertlenes három egyenletből álló differenciálegyenletrendszert nyertünk. Ezt a megfelelő kerületi feltételek mellett megoldva meghatározható a ξ, η, ζ elmozdulásfüggvények s ezek ismeretében előző fejezet végképletei alapján meghatározható a első erők.

Ezen differenciál egyenlet rendszer tehát tetszés szerinti alaku és tetszőleges terhelésü hajlitott héjszerkezetre felirható. Egy konkrét feladat esetében nem kell mást tenni, mint a kérdéses felület egyenletének első ill. második differenciálhányadosait képezni s azokat fenti egyenletbe behyletttesiteni. Az igy nyert egyenletből meghatározhatók a vizsgált héj középfelületének mozgásai és belső erői.

Ezzel bevezetőben kitüzött feladatunkat megoldottuk. E megoldás használhatóságának igazolására a továbbiakban néhány jellegzetes példát mutatunk be. Fenti egyenlet alkalmas ugyanis a siklemezek, a tárcsák, a membránhéjak s bármilyen alaku hajlitott héj problémájának tárgyalására.

12. Példák

a. A siklemez differenciál egyenlete.

A felület egyenelete jelen esetben

$$z = f(x, y) = 0$$

tehát

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0$$

legyen a terhelés

$$Z_0 = p(x, y), \quad Y_0 = 0, \quad X_0 = 0$$

Az egyensulyi egyenletek minthogy nyomó és nyiróerők nincsenek

$$q^x_x + q^y_y + p(x,y) = 0$$

$$m^x_x + m^{yx}_y + q^x = 0$$

$$m^{xy}_x + m^y_y + q^y = 0$$

A második egyenletet x-szerint, a harmadik y-szerint differenciálva helyettesitjük a harmadik egyenletbe:

$$-m^x_{xx} - 2\,m^{xy}_{xy} - m^y_{yy} + p(x,y) = 0$$

A nyomatékok

$$m^x = K(\zeta_{xx} + \mu\,\zeta_{yy})$$

$$m^y = K(\mu\zeta_{xx} + \zeta_{yy})$$

$$m^{xy} = (1-\mu)K\,\zeta_{xy}$$

s ezeket az egyensulyi egyenletbe visszahelyettesitve

$$\zeta_{xxxx} + 2\zeta_{xxyy} + \zeta_{yyyy} = \frac{p(x,y)}{K}$$

összefüggést kapjuk. Ezt részletesen kiirva

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\zeta}{\partial^2 x\,\partial^2 y} + \frac{\partial^4\zeta}{\partial y^2} = \frac{p(x,y)}{K}$$

ahol

$$K = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

Mint látjuk a lemez differenciál egyenletéhez rövid uton eljutottunk.

b. A tárcsa differenciál egyenlete.

A tárcsa középfelülete sik, melynek egyenlete

$$Z = 0$$

tehát

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0$$

a terhelés a tárcsa sikjába esik, vagyis

$$Z_0 = Z_0(x,y) = 0, \quad Y_0 = Y_0(x,y) \qquad X_0 = X_0(x,y)$$

Hajlitás nem lép fel igy eleve tudjuk, hogy

$$m^x = 0, \quad m^y = 0, \quad m^{xy} = 0, \quad m^{yx} = 0, \quad q^x = 0, \quad q^y = 0$$

Induljunk ki az alakváltozási egyenletből. Ez siklemez esetében

$$(S_1 + S_2)_{xy} - P_{yy} - Q_{xx} = 0$$

alaku lesz. Az alakváltozások

$$(\varepsilon_x^v)_{yy} + (\varepsilon_y^v)_{xx} = (\gamma^v)_{xy}$$

$$\varepsilon_x^v = \frac{1}{E}(n^x - \mu n^y)$$

$$\varepsilon_y^v = \frac{1}{E}(n^y - \mu n^x)$$

$$\gamma = \frac{2(1+\mu)}{E} n^{xy}$$

összefüggésekkel irhatók le. Ezeket az alakváltozási egyenletbe helyettesitve

$$n^x_{yy} - \mu n^y_{yy} + n^y_{xx} - \mu n^x_{xx} = 2(1+\mu) n^{xy}_{xy}$$

kapjuk. Vezessük be a feszültségfüggvényt. Mint tudjuk

$$n^x = h F_{yy} \qquad n^{xy} = -h F_{xy} \qquad n^y = h F_{xx}$$

tehát

$$F_{xxxx} - 2\mu F_{xxyy} + F_{yyyy} = -2F_{xxyy} - 2\mu F_{xxyy}$$

Ezt rendezve

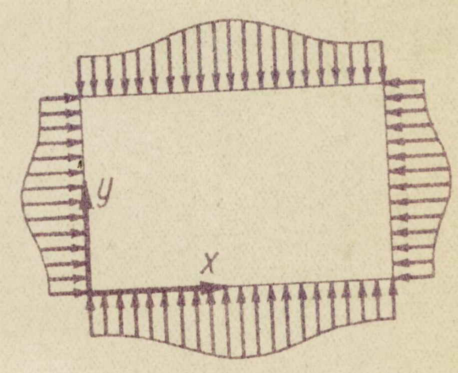
$$F_{xxxx} + 2F_{xxyy} + F_{yyyy} = 0$$

összefüggést kapjuk, amely a siktárcsa, vagy másképen a sikbeli feszültségi állapot differenciál egyenlete.

c. A lemezhorpadás.

A nyomott lemez /6.ábra/ eredetileg sik, Az egyensulyi egyenleteket a $z = \zeta(x,y)$ kihorpadt alakra irjuk fel, s tételezzük fel, hogy ennek, és differenciálhányadosainak második hatványa zérus, vagyis

$$\zeta^2 = \zeta_x^2 = \zeta_x \zeta_y = \zeta_y^2 = \dots = 0$$



6. ábra

Az egyensulyi egyenletek

$$n^x_x + n^{yx}_y + X_0 = 0$$
$$n^{xy}_x + n^y_y + Y_0 = 0$$
$$\zeta_{xx} n^x + 2\zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y + q^x_x + q^y_y = 0$$
$$m^x_x + m^{yx}_y + q^x = 0$$
$$m^{xy}_x + m^y_y + q^y = 0$$
$$n^{xy} - n^{yx} = 0$$

alakban irhatók fel. q^x és q^y értékeit a negyedik és ötödik egyenletből kifejezve a harmadikba helyettesitve

$$\zeta_{xx} n^x + 2\zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y - m^x_{xx} - 2m^{xy}_{xy} - m^y_{yy} = 0$$

összefüggést kapjuk. Feltevéseink esetében

$$m^y = K(\zeta_{xx} + \mu \zeta_{yy})$$
$$m^x = K(\mu \zeta_{xx} + \zeta_{yy})$$
$$m^{xy} = (1-\mu) K \zeta_{xy}$$

E kifejezéseket előző egyenletünkbe helyettesitve

$$\zeta_{xx} n^x + 2\zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y - K[\zeta_{xxxx} + 2\zeta_{xxyy} + \zeta_{yyyy}] = 0$$

összefüggést kapjuk

amelyet rendezve

$$K(\Delta\Delta\zeta) = \zeta_{xx} n^x + 2\zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y$$

végeredményre jutunk. Ez mint ismeretes a lemez-horpadás differenciál egyenlete.

d. A membránhéjak differenciál egyenlete.

A membránfeszültségi állapot esetében

$$m^x = 0, \quad m^y = 0, \quad m^{xy} = m^{yx} = 0, \quad q^x = 0, \quad q^y = 0$$

tehát az egyensulyi egyenletek

$$n^x_x + n^{yx}_y + X_0 = 0$$

$$n^{xy}_x + n^y_y + Y_0 = 0$$

$$r n^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + t n^y + Z_0 - q Y_0 - p X_0 = 0$$

könnyen belátható, hogy

$$n^{xy} = n^{yx}$$

s bevezetve a feszültségfüggvényt

$$r F_{yy} - 2s F_{xy} + t F_{xx} + Z_0 - p X_0 - q Y_0 = 0$$

eredményre jutunk. Ez a membránhéjak közismert differenciál egyenlete.

e. Hajlitott kördonga.

A felület egyenlete és differenciál hányadosai a következők:

$$Z = \sqrt{1 - y^2}$$

$$Z_y = q = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad p = 0$$

$$Z_{yy} = t = -\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad r = 0, \quad s = 0$$

A görbület

$$\frac{1}{R} = -\frac{t}{\sqrt{1+q^2}^{\,3}}$$

A feszültségek

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\xi_x + v\,\Xi_x\right] + \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{R_y}{R_y+v}\,\frac{1}{1+q^2}\,\mu\left[\eta_y + q\,\zeta_y + v\left(H_y + q\,Z_y\right)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E\mu}{1-\mu^2}\left[\xi_x + v\,\Xi_x\right] + \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{R_y}{R_y+v}\,\frac{1}{1+q^2}\left[\eta_y + q\,\zeta_y + v\left(H_y + q\,Z_y\right)\right]$$

$$\tau = \frac{E}{2(1-\mu^2)}\,\frac{1-\mu}{\sqrt{1+q^2}}\left\{\eta_x + q\,\zeta_x + v\left[H_x + q\,Z_x\right]\right\}$$

$$\frac{E}{2(1-\mu^2)}\,\frac{1-\mu}{\sqrt{1+q^2}}\,\frac{R_y}{R_y+v}\left[\xi_y + v\,\Xi_y\right]$$

összefüggésekkel irhatók le: Tekintettel arra, hogy a W.Flügge által levezetëtt összefüggések henger koordinátákban vannak felirva transzformáljuk fenti képleteinekt erre a koordináta rendszerre /7.ábra/

$$Z = \sqrt{R^2 - y^2} = R\cos\beta$$

$$y = R\sin\beta$$

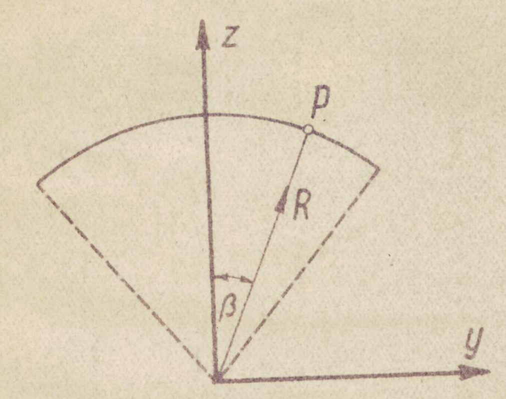
$$Z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}} = -\operatorname{tg}\beta$$

Transzformáljuk az elmozdulásokat is /8.ábra/.

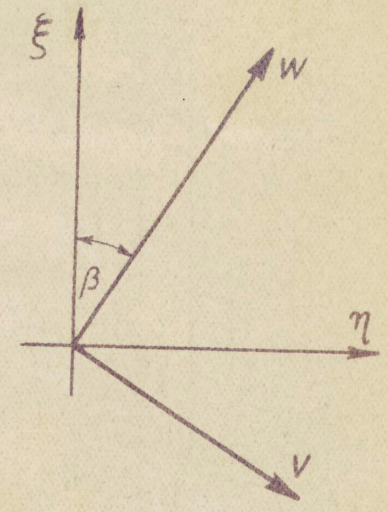
$$\xi = u$$

$$\eta = v\cos\beta + w\sin\beta$$

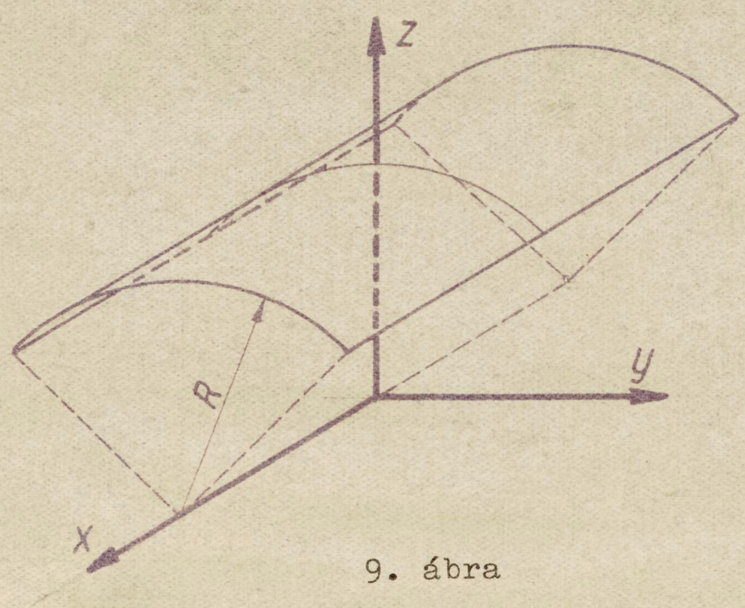
$$\zeta = -v\sin\beta + w\cos\beta$$



7. ábra



8. ábra



9. ábra

Differenciáljuk ezeket az összefüggéseket x és y szerint. Megjegyezzük, hogy az x szerinti differenciálást csak a lánc szabály értelmében tudjuk végrehajtani, vagyis

$$F_y = \frac{dF}{d\beta}\frac{d\beta}{dy} = F_\beta \frac{1}{R\cos\beta}$$

E számitások eredménye

$$\xi_x = u_x$$

$$\eta_x = v_x \cos\beta + w_x \sin\beta$$

$$\zeta_x = -v_x \sin\beta + w_x \cos\beta$$

$$\xi_y = \frac{1}{R\cos\beta} u_\beta$$

$$\eta_y = \frac{1}{R\cos\beta}(w\cos\beta + w_\beta \sin\beta - v\sin\beta + v_\beta \cos\beta)$$

$$\zeta_y = \frac{1}{R\cos\beta}(-w\sin\beta + w_\beta\cos\beta - v\cos\beta - v_\beta \sin\beta)$$

Állapitsuk meg Ξ, H, Z értékeket is

$$\Xi = \frac{1}{T^3}(1+q^2)\,\omega_x - \frac{\omega_x}{\sqrt{1+q^2}}$$

$$H = \frac{1}{T^3}\omega_y$$

$$Z = \frac{1}{T^3} q\,\omega_y$$

Ezen előkészités után felirhatjuk

$$\delta_x = \xi_x = u_x$$

$$\delta_y = \mu\xi_x = \mu u_x$$

$$\delta_{xy} = (1-\mu)\frac{\eta_x + q\zeta_x}{\sqrt{1+q^2}} = (1-\mu)\, v_x$$

$$\vartheta_x = \mu\frac{\eta_y + q\zeta_y}{1+q^2} = \frac{\mu}{R}(w + v_\beta)$$

$$\vartheta_y = \frac{\eta_y + q\zeta_y}{1+q^2} = \frac{1}{R}(w + v_\beta)$$

$$\vartheta_{xy} = (1-\mu)\frac{\Xi_y}{\sqrt{1+q^2}} = (1-\mu)\frac{u_\beta}{R}$$

$$\Delta_x = \Xi_x = -w_{xx}$$

$$\Delta_y = \mu\,\Xi_x = -\mu\, w_{xx}$$

$$\Delta_{xy} = (1-\mu)\frac{H_x + qZ_x}{\sqrt{1+q^2}} = (1-\mu)\frac{1}{R}(v_x - w_{\beta x})$$

$$\Theta_x = \mu\,\frac{H_y + qZ_y}{1+q^2} = \frac{\mu}{R^2}(v_\beta - w_{\beta\beta})$$

$$\Theta_y = \frac{H_y + qZ_y}{1+q^2} = \frac{1}{R^2}(v_\beta - w_{\beta\beta})$$

$$\Theta_{xy} = (1-\mu)\frac{\Xi_y}{\sqrt{1+q^2}} = -(1-\mu)\frac{w_{\beta x}}{R}$$

A tényleges erők ill. nyomatékok kifejezései

$$N^x = L(\delta_x + \vartheta_x) + \frac{K}{R}\Delta_x \qquad M^x = -K\left[\frac{\delta_x}{R} + \Delta_x + \Theta_x\right]$$

$$N^y = L(\delta_y + \vartheta_y) - \frac{K}{R}\left(\Theta_y - \frac{\vartheta_y}{R}\right) \qquad M^y = -K\left[-\frac{\vartheta_y}{R} + \Delta_y + \Theta_y\right]$$

$$N^{xy} = \frac{L}{2}(\delta_{xy} + \vartheta_{xy}) + \frac{K}{2R}\Delta_{xy} \qquad M^{xy} = -\frac{K}{2}\left[\frac{\delta_{xy}}{R} + \Delta_{xy} + \Theta_{xy}\right]$$

$$N^{yx} = \frac{L}{2}(\delta_{xy} + \vartheta_{xy}) - \frac{K}{2R}\left(\Theta_{xy} - \frac{\vartheta_{xy}}{R}\right) \qquad M^{yx} = -\frac{K}{2}\left[-\frac{\vartheta_{xy}}{R} + \Delta_{xy} + \Theta_{xy}\right]$$

s bevezetve δ_x, ϑ_x, δ_y, ϑ_y, $\delta_{xy}, \vartheta_{xy}$, Δ_x, Θ_x, Δ_y, Θ_y, Δ_{xy}, Θ_{xy} értékeit

$$N^x = L\left(u_x + \frac{\mu}{R}(v_\beta + w)\right) + \frac{K}{R}(-w_{xx})$$

$$N^y = L\left(\mu u_x + \frac{1}{R}(v_\beta + w)\right) - \frac{K}{R}\left(-\frac{w}{R^2} - \frac{w_{\beta\beta}}{R^2}\right)$$

$$N^{xy} = L\frac{1-\mu}{2}\left(v_x + \frac{u_\beta}{R}\right) + \frac{K}{2R}(1-\mu)\left(\frac{v_x}{R} - \frac{w_{\beta x}}{R}\right)$$

$$N^{yx} = L\frac{1-\mu}{2}\left(v_x + \frac{u_\beta}{R}\right) - \frac{K}{2R}(1-\mu)\left(-\frac{w_{\beta x}}{R} - \frac{u_\beta}{R^2}\right)$$

$$M^x = \frac{K}{R}\left(-u_x + R\,w_{xx} - \frac{\mu}{R}v_\beta + \frac{\mu}{R}w_{\beta\beta}\right)$$

$$M^y = \frac{K}{R}\left(R\mu\,w_{xx} + \frac{w_{\beta\beta}}{R} + \frac{w}{R}\right)$$

$$M^{xy} = \frac{K}{2R}(1-\mu)(-2v_x + 2w_{\beta x})$$

$$M^{yx} = \frac{K}{2R}(1-\mu)\left(\frac{w_\beta}{R} - v_x + 2w_{\beta x}\right)$$

egyenletekre jutunk. Az egyensulyi egyenletek a következők:

$$N^x\ {}_{1+q^2} + N^{yx} + X_0 = 0$$

$$\left[N^{xy} + q\left\{M^x_x + \left(\frac{M^{yx}}{1+q^2}\right)_y\right\} + q^2\left\{N^{xy} - N^{yx}\right\}\right]_x +$$

$$+\left[\frac{N^y}{1+q^2} + \frac{q}{1+q^2}\left\{\left(M^{xy}\sqrt{1+q^2}\right)_x + M^y_y\right\}\right]_y + Y_0 = 0$$

$$\frac{tN^y}{\sqrt{1+q^2}} + \sqrt{1+q^2}\left[-\sqrt{1+q^2}\left\{M^x_x + \left(\frac{M^{yx}}{\sqrt{1+q^2}}\right)_y\right\} - q\sqrt{1+q^2}\left(N^{xy} - N^{yx}\right)\right]_x +$$

$$+\sqrt{1+q^2}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left\{\left(\sqrt{1+q^2}\,M^{xy}\right)_x + M^y_y\right\}\right]_y + Z_0 - qY_0 = 0$$

Ezekbe N^x, N^y, N^{xy}, N^{yx}, M^x, M^y, M^{xy}, M^{yx} kifejezéseit behelyettesit-ve végeredményben az alábbi három egyenletet kapjuk:

$$R^2 u_{xx} + \frac{1-\mu}{2}u_{\beta\beta} + \mu R w_x + \frac{1+\mu}{2}R v_{x\beta} + \frac{K}{R^2 L}\left[\frac{1-\mu}{2}u_{\beta\beta} - R^3 w_{xxx} + \frac{1-\mu}{2}R w_{x\beta\beta}\right] + \frac{XR^2}{L} = 0$$

$$\frac{1+\mu}{2}R u_{x\beta} + v_{\beta\beta} + \frac{1-\mu}{2}R^2 v_{xx} + w_\beta + \frac{K}{R^2 L}\left[\frac{3(1-\mu)}{2}R^2 v_{xx} - \frac{3-\mu}{2}R^2 w_{xx\beta}\right] + \frac{YR^2}{L} = 0$$

$$\mu R u_x + v_\beta + w + \frac{K}{R^2 L}\left[\frac{1-\mu}{2}R u_{x\beta\beta} - R^3 u_{xxx} - \frac{3-\mu}{2}R^2 v_{xx\beta} + R^4 w_{xxxx} + \right.$$

$$\left. + 2R^2 w_{xx\beta\beta} + w_{\beta\beta\beta\beta} + 2w_{\beta\beta} + w\right] + \frac{ZR^2}{L} = 0$$

A negyedik egyenlet - amint arról könnyü meggyőződni - azonosság-ra vezet. Az egyenletek a W.Flügge által bevezetett egyenletekkel teljes azonosságot mutat. Ez egyben kontrollja levezetett képle-teinknek.

Irodalom.

[1] Flügge W.: Statik und Dynamik der Schalen /Verlag von J. Springer Berlin 1934./

[2] Girkmann K.: Flächenfragwerke /Springer-Verlag Wien 1946/

[3] P. Lardy: Die Elastizitätstheorie der Parallelogramm-förmigen Scheibe. /Schweizerische Bauzeitung 1945. Nr 31. p 419-422/

[4] Bölcskei E.: Deformation des voiles minces /Acta Technica Hungaricae Tom. v. Fasc. 4 p. 489-5o6./

[5] Bölcskei E.: Membránhéjak alakváltozása /Magyar Épitőipar 1953. 3. sz. p. 93-1oo./

[6] Wlassow. W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendug in der Technik /Akademie Verlag Berlin 1958/

[7] Fuchssteiner W. - Schader A. Allgemeine Schalengrundgleichungen / Beton- und Stahlbetonbau 1956. jul. p. 145-153. /