MTA Doktori Tanácsa felkérésére

OPPONENSI VÉLEMÉNY

G. Horváth Ákos

„CONVEXITY AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES"

című DSC-disszertációjáról

ÁRPÁD KURUSA

1. A tartalom áttekintő leírása

A bevezető (Introduction) ... 9 oldalán voltaképpen az egyes fejezetekhez tartozó témakörök részletes történeti és áttekintő leírása szerepel.

Az első fejezet (Chapter 1.) ... a „*Problems on convexity and volumes in connection with non-Euclidean geometries*" címet viseli, hossza mindössze 20 oldal, és tartalmilag leginkább a térfogat fogalma köré csoportosul, de a konvexitáshoz és a Minkowski- vagy hiperbolikus geometriákhoz is kapcsolódik.

`Az első, 1.1-es szakasz` egy, még a szegedi Fáry és Rédei által 1950-ben indított problémakört általánosítva foglalkozik metsző konvex testek közös konvex burkának térfogatbecslésével, illetve ezen térfogat szélsőértékeinek és e szélsőértékeket előállító testeknek a meghatározásával. Ilyen például az, hogy egy konvex síkidomnak és vele érintkező eltoltjainak konvex burka akkor és csak akkor konstans területű, ha centrális szimmetrizáltja egy Radon-görbe.

`A második, 1.2-es szakasz` részlegesen általánosítja Fejes-Tóth László fontos, 1964-es, a rögzített felszínű és élszámú konvex gömbi sokszög és a gömb középpontja által adott térbeli gömbszelet térfogatáról szóló egyenlőtlenségét, és példákkal támasztja alá, hogy az általánosítás valóban szolgáltat újdonságot.

`A harmadik, 1.3-as szakasz` a 3-dimenziós hiperbolikus geometriában a hiperbolikus ortogonális paraméterezéssel ad az ortoszkémák térfogatára egy, a Heron-képletre emlékeztető, kizárólag az ortoszkéma oldalhosszait használó formulát.

A második fejezet (Chapter 2.) ... az „*Investigations in a classical Minkowski normed space*" címet viseli, hossza 49 oldal, és ugyancsak három szakaszra tagozódik, de az előző fejezettől eltérően most végig tematikusan kötődik a Minkowski-geometriákhoz.

`Az első, 2.1-es szakasz` mintegy 21 oldalon át, öt részben vizsgálja a biszektorokat, amelyeken a szerző a két pontra ekvidisztáns pontok halmazait érti.

Az első részben a szerző azt igazolja, hogy *szigorúan konvex indikátrix esetén a biszektorok homeomorfak egy hipersíkkal.*

A második rész az első gondolatait fűzi tovább a Dirichlet–Voronoi-cellákra.

A harmadik rész témája az első rész eredményének megfordítása. Ehhez a szerző bevezeti a *paramétergömböket*, melyek minden dimenzióban az indikátrix árnyékhatárához tartanak, és 3-dimenzióban el is vezetnek oda, hogy *a biszektorok akkor és csak akkor homeomorfak egy síkkal, ha az indikátrix árnyékhatára topologikus kör.*

Date: Felkérés száma: DT.58.022/17 /03; dátuma: 2017. december 05.
Az MTA Doktori Tanácsának felkérésére.

(március 12, 2018) © Á. Kurusa http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa

A negyedik részben a szerző a harmadik részben megfogalmazott sejtésének, mely szerint „*n-dimenzióban a biszektorok és hipersíkok homeomorfiájából következik az indikátrix árnyékhatárainak homeomorfiája az $(n-2)$-dimenziós gömbfelülettel*", egy verzióját bizonyítja. Eszerint egy biszektor akkor és csak akkor $(n-1)$-dimenziós topologikus sokaság, ha a megfelelő paraméter-gömbök $(n-2)$-dimenziós topologikus sokaságok.

Az utolsó, ötödik rész a biszektorok *korlátos reprezentációjával* foglalkozik. A korlátos reprezentáció végső soron nem más, mint az indikátrix megfelelő árnyékhatárának és az azonos irányhoz tartozó húrfelező pontok halmazának uniója. Kiderül, hogy ez és a biszektor lényegében ugyanakkor homeomorf egy hipersíkkal.

`A második, 2.2-es szakasz` mintegy 10 oldalon, a Neumann által elindított, majd Lumer által továbbvitt gondolatot, vagyis a normák és bizonyos skalárszorzatok összekötését folytatva, a differenciálhatóság tekintetében fejleszti tovább a félskalárszorzat fogalmát, megadja a Minkowski-geometria által meghatározott félskalárszorzásra nézve adjungált Abel-operátorok normálformáját, és bebizonyítja l_p terekre a nagyon természetesnek ható sejtést, mely szerint *egy sima Minkowski-geometria által meghatározott fél-skalárszorzásra nézve adjungált Abel-operátorok diagonizálhatók.* Végül az izometriák normálalakjából a 3-dimenziós Minkowski-geometriák izometriacsoportjának jellemzését adja.

`A harmadik, 2.3-as szakasz` mintegy 16 oldalon mutat be különféle görbéket a Minkowski-geometriában. Először az euklidészi geometriában általánosan kúpszeleteknek nevezett görbékre megszokott definíciók három főbb típusáról mutatja meg, hogy azok általában a típusok szerint eltérő görbéket eredményeznek, azután bizonyos típusok esetén a görbék konvexitását összeköti az indikátrix konvexitásával, végül a szögmérés lehetőségei mentén az egymáson gördülő görbékkel létrehozott *ruletták* és a rugalmas mozgás Minkowski-geometriai vizsgálatával zár.

A harmadik fejezet (Chapter 3.) ... a „*From the semi-indefinite inner product to the time-space manifold*" címet viseli, hossza 47 oldal, ezúttal négy szakaszra osztva, de mindvégig a szerző által bevezetett indefinit fél-skalárszorzatok területére koncentrálva.

`Az első, 3.1-es szakasz` mindössze 4 oldalas bevezetőjében a szerző az indefinit skalárszorzatok és a félskalárszorzatok közös általánosításaként bevezeti az *indefinit fél-skalárszorzást*, majd példák bemutatásával demonstrálja annak létjogosultságát. Utóbbi egyben az *általánosított Minkowski-tér* fogalmának bevezetésére is alkalmat teremt. Az általánosított Minkowski-tér tulajdonképpen egy indefinit skalárszorzatos téren bevezetett, Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség nélküli indefinit félskalárszorzat-tér, és nem más, mint a relativitáselméletben használt téridő olyan általánosítása, melyben az idő dimenziója 1-nél nagyobb is lehet, valamint a téren és időn Minkowski-metrikát definiáló fél-skalárszorzatok vannak adva.

`A második, 3.2-es szakasz` 16 oldala az általánosított Minkowski-tér *általánosított téridő modellnek* nevezett speciális verziójával, ahol a negatív tér (vagyis az

idő) dimenziója 1, annak is leginkább a képzetes egységgömbjével foglalkozik. A fő eredmény az, hogy – bár finomabb értelmezés mellett, de bizonyos értelemben mégis – teljes az analógia a kvadratikus skaláris szorzásnál megszokott helyzettel, mint például az $[a,b]^+ = -\cosh(d(a,b))$ formulában. Végül a szerző kiépíti az általánosított téridő „hiperfelületeinek" differenciálgeometriáját: kiszámítja az első (belsőgeometriai) és második (külsőgeometriai) főmennyiséget, a Ricci-görbületet a képzetes egységgömbre, a de Sitter-gömbre, a fénykúpra és a beágyazó fél-skalárszorzat egységgömbjére.

`A harmadik, 3.3-as szakasz` 9 oldala az n-dimenziós valós tér konvex testeinek Haussdorff-metrikával adott metrikus terében Hoffman egy eljárásával, a szertő által bevezetett „*soványsági függvényt*" használva ad meg egy valószínűségi mértéket, mely invariáns az Euklidészi tér forgásaira és eltolásaira nézve.

`A negyedik, 3.4-es szakasz` 18 oldalán a szerző bevezeti az univerzum két, általa konstruált, *determinisztikus*, illetve *valószínűségi „idő-tér"* modelljét. A determinisztikus modellben egy bizonyos feltételeken belül a τ „abszolút" idővel változó $K(\tau)$ egységgömb adja meg az általánosított téridő-modell alakját. Ebben a térben a differenciálgeometriai alapok megteremtése után sor kerül a képzetes egységgömb és a de Sitter-gömb vizsgálatára, előbbi egy konkrét példán is szemléltetve, utóbbi pedig az analógia miatt csak utalásszerűen. Ezt a 3.4.1.3-as, több mint 5 oldalas rész követi, amelyben a szerző bevezeti az „*alakfüggvényt*", hogy kiválaszthassa a modell inerciarendszereit. Végül a 3.4.2-es részben a 3.3-as szakaszban elkészített valószínűségi mérték felhasználásával a „valószínűségi" modell létrehozására kerül sor, melyről kiderül, hogy bármely trajektóriáján kijelölve tetszőlegesen sok pontot, választható olyan determinisztikus modell, mely ezen pontokban tetszőlegesen közel van a trajektóriához.

A FÜGGELÉK (APPENDIX A.) címe „*Relativity theory in time-space*", hossza apró betűkkel 11 oldal, leírása szerint kozmológiai és elméleti fizikai ismeretekkel támasztja alá a 3.4 szakaszban tanulmányozott struktúrák hasznosságát.

2. ÉRTÉKELÉS

Bár nem lehet mindig szétválasztani a formai és tartalmi elemeket, azért most ezek (mindenképpen szubjektív, de objektivitásra törekvő) megítélése következik.

FORMAI ÉRTÉKELÉS. A véleményezésre való felkérés rögzítette a formai szempontokat, először ezek következnek:

(1) *a doktori mű be kell, hogy mutassa a pályázó tudományos munkásságának egy jellemző részét*;
Ez egészen nyilvánvalóan teljesül.

(2) a doktori műnek
   (a) *egységes terminológiát és jelölésrendszert kell használnia*;
   Alapvetően teljesül ez a feltétel, ráadásul egy ekkora anyagban amúgy is

csak elég nehezen lenne tartható ez a feltétel teljes egészében, ezért a következő észrevételeket nem tekintem a disszertáció negatívumának.
Úgy látom, hogy a jelölésrendszer sokszor bonyolultabb a kelleténél. Néha fejtörést okoz, hogy egy-egy paraméterjellegű index[1] miért is került a jelölésbe.
A 2.3 szakaszban a szerző ugyan bejelenti, hogy ebben a korábbitól eltérő jelölésrendszert használ, de ez mégis a jelen feltétel tételes megsértését jelenti.
A 3.2 szakaszban a szerző a cosh és sinh függvényjelölések helyett a magyarban szokásos ch és sh jelöléseket használja, de ezt a szorzattól alig megkülönböztethető *ch* és *sh* formában teszi.

(b) *a szakértőknél szélesebb kör számára is érthetőnek kell lennie*;
Nem tudom, hol kellene a szakértői szintet meghúzni, ezért ez a feltétel inkább csak iránymutató lehet, de szerintem ez biztosan nem teljesül a dolgozat egy kisebb, mondjuk 20%-ában. Mindazonáltal a maradék 80%-ban, és ez még mindig óriási anyag, az általános érthetőség inkább többé mint kevésbé van jelen.

(3) a doktori műnek tartalmaznia kell

(a) *az alapfogalmak definiálását*;
Nehéz eldönteni, hogy hol húzódik az alapfogalom szintje.... Néha küzdenem kellett egy-egy hirtelen előkerült fogalommal, de ezek minden tekintetben rendeződtek továbbolvasás és a szövegkörnyezet elemzése útján. (A disszertáció egy külön példányában ezeket az összességében nem olyan fontos dolgokat pirossal megjelöltem, az anyagot a szerzőnek átadom.)

(b) *az eredmények előzményeit, egymásra épülésüket, helyét a tudományban, tudományos megalapozottságát, részletes bizonyítását (ez utóbbi lehet csatolt publikációkban is)*;
Ebben a tekintetben a disszertáció lényegében tökéletes. Ehhez nincs mit hozzátenni.

Nincs ugyan formálisan előírva (gondolom egyelőre :-)), de rendelkezvén a disszertáció PDF-állományával, bizony negatívan éltem meg, hogy sajnos az irodalomjegyzékben az egyes referenciáknál nem áll rendelkezésre se DOI-kód, se más internetes elérhetőség, holott ez (különösen, ha klikkelhető formában lenne) sokkal könnyebbé tette volna az irodalmi hivatkozások ellenőrzését, illetve azok böngészését a jobb megértés céljával.

Végül, bár szintén nem előírt szempont (talán csak mert nyilvánvaló :-)), fontos rögzíteni, hogy a tételeknél és definícióknál adottak a referenciák, és a nyelvezet tekintetében a disszertáció hozza a matematikai publikációk megszokott átlagos nyelvi szintjét, habár néhol vannak benne komolyan „angoltalan" mondatok és jó

[1]Például a 3.3 szakaszban a soványságot jelentő α_0 esetében

pár (gondolom) elírás (A disszertáció egy külön példányában ezeket is megjelöltem pirossal, az anyagot a szerzőnek átadom.).

Tartalmi értékelés. Tekintve, hogy a disszertáció már publikált cikkekből építkezik, vagyis eredményei már átestek a részletes matematikai vizsgálaton, az aprólékos hibakeresés helyett, csak a mondandó megértésére koncentráltam. Ez is egy hatalmas, vagy 100 oldalas anyag feldolgozását jelentette, így csak a szerintem tudományosan legfontosabb megjegyzéseimre térek ki.

A tartalomjegyzék láttán a disszertáció címe tökéletes, amit olvasáskor a tartalom is visszaigazol. A hosszú és részletes bevezető igazolja, hogy a disszertáció a matematika (elméleti fizika?) élő témáival foglalkozik, olvasáskor pedig a matematikai tartalomnak megfelelő felépítés is megmutatkozik, ami talán csak a `2.2` és `2.3` szakasz megcserélésével lenne tovább javítható.

Az `1.1` szakaszban a szerző és társzerzője a témát 1959-ben elindító szegedi Fáry és Rédei, majd a későbbi szórványos kutatások felvetéseit általánosítva jut nemcsak az eredetiket jelentősen pontosító, kifejezetten szép, teljes és értékes eredményekre, hanem ezeket továbbgondolva bőséggel[2] felvet fontos és értékes problémákat és sejtéseket is. Az egyik sejtéssel kapcsolatban, már közölt is érdemi eredményt az *Amer. Math. Monthly* (`https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.5.486`) 2015-ben. Felmerült bennem, hogy ez a téma kapcsolatban lehet a kovariogram-problémával, és ebben az esetben milyen következményekkel számolhatunk?.

Az `1.2` szakaszban a Fejes-Tóth-eredmény munkás általánosítása, de számomra az erre adott példák sem támasztják eléggé alá az általánosítás fontosságát vagy értékességét.

Az `1.3` szakaszban az ortoszkémákra adott Heron-szerű formula nemcsak tetszetős, de a szerző további munkái jól mutatják a használhatóságát is.

A `2.1` szakaszban a kétpontekvidisztánsok sem váratlannak sem könnyűnek nem tekinthető, az indikátrix tulajdonságaiból kiinduló, de a korábban általában az euklidészi geometriák jellemzésére vezető gondolkodáson túllépő, immár 17 éves topológiai leírása, mindmáig meglepően sok további eredményt indukál például az euklidészi geometriák jellemzését célzó kutatásokban. A sokkal nehezebb, az indikátrixokat, illetve az árnyékhatáraik topológiáját a kétpontekvidisztánsok topológiájával leírni próbáló fordított irányhoz a szerző által az indikátrixokon bevezetett paramétergömbök vizsgálata, majd a 3-dimenziós eredményhez, magasabb dimenzióban pedig egy részeredményhez vezető, sok ötletet és ismeretet felhasználó bizonyítás is világossá teszi ezen terület és benne szerző munkájának mélységét. Egyértelműen ez a szerző legtöbb hivatkozást felmutatni képes kutatási iránya.

A `2.2` szakasz a szerző kutatási témái között a második leghivatkozottabb terület, nyilvánvaló a fontossága és hasznossága. Felmerült bennem, hogy az adjungált Abel-operátor diagonizálhatóságát nem lehetne-e esetleg általánosan is bizonyítani

[2]Az eredeti cikkben legalább...

az amúgy szokásos megközelítéssel, hogy ti. az $\mathcal{I} \ni \boldsymbol{x} \mapsto [A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]$ leképezésnek egy maximumhelye (esetleg) sajátvektor?

A 2.3 szakasz a kúpszeletek leírásában semmi váratlannal nem szolgál, de olyan alaperedményeket hoz, melyekre még sokan fognak építeni, ahogy én magam is tettem már.

A 3.1 szakaszban megjelenő általánosított Minkowski-tér bevezetését nem indokolja közvetlen gondolatmenet, de a szerző példákkal illusztrálja, hogy a fogalom érdemes a vizsgálatra, és engem meggyőzött.

A 3.2 szakaszban az 1-idődimenziós általánosított Minkowski-téren, amit a szerző általánosított téridő modellnek nevez, a szerző olyan számításokat végez, melyek potenciálisan alapvető fontosságúvá válhatnak, matematikai mélységük és gondolatiságuk pedig elvitathatatlan.

A 3.4.1 szakaszban a szerző még az általánosított téridőnél is általánosabb teret, az idő-teret hozza létre, de ennek hasznossága, úgy vélem, már nem matematikai megítélés kérdése.

A 3.3 és 3.4.2, valamint 3.4.1.3 részek *értékelésétől elzárkózom*, mert az előbbi kettőhöz szükséges véletlen alakzatok sztochasztikus elméletében és az utóbbihoz motivációt biztosító fizikusi ismeretek tekintetében nem érzem magam az értékeléshez kellően jártasnak. Mindazonáltal vannak megjegyzéseim:

(i) A 3.3 szakasz megfontolásainak nehézségét az okozza, hogy nincsen izometria-invariáns Borel-mérték a konvex testek Hausdorff-metrikával ellátott terén. A soványságfüggvény bevezetése pedig kifejezetten jó megközelítést eredményez.

(ii) A függelékben a szerző ugyan egyáltalán nem hivatkozik megjelent cikkére, de kis kereséssel megtalálható a publikált verzió: `Relativity Theory in Time-space Manifold`, *Universal J. Phys. Appl.*, **10**(4), pp. 115–127; DOI: 10.13189/ujpa.2016.100403.

3. Konklúzió

Mindent összevetve a disszertáció bizonyítja, hogy a szerző matematikája jelentős mélységgel rendelkezik, sokszor és bátran általánosít és konstruál, vagy hoz létre új területeket, melyeket jó példákkal tölt fel.

A fentiek alapján *javaslom a nyilvános vita kitűzését és a mű elfogadását.* Úgy gondolom, hogy G. Horváth Ákos dolgozata és munkássága megfelel az „MTA Doktora" cím követelményrendszerének.

Á. Kurusa, Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi vértanúk tere 1, 6725 Szeged (Hungary);
E–mail: `kurusa@math.u-szeged.hu` .

Kurusa Ákos
2018. 03. 12.
Szeged