Válasz Makai Endre opponensi véleményére

Először is köszönetemet szeretném kifejezni Makai Endrének dolgozatom értő és figyelmes olvasásáért és eredményeim részletes ismertetéséért. A véleményben egyetlen kérdés szerepel:

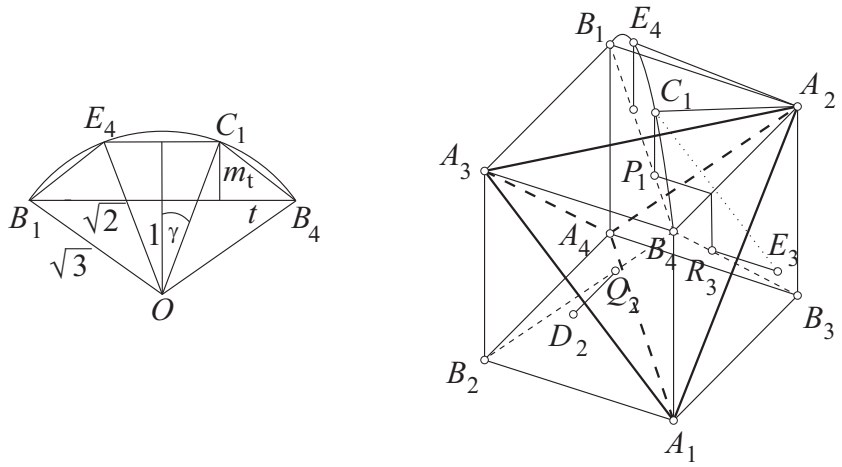
T. Tarnai, P. W. Fowler, S. Kabai, Packing of regular tetrahedral quartets of circles on a sphere, Proc. Royal Soc. London A 459 (2003), 2847-2859 numerikusan vizsgálták ugyanezt a kérdést $N \leq 8$ beírt szabályos tetraéder esetére. Ott megsejtették (az $N = 2$ eset mellett) hogy $N = 5$-re a megoldás (azaz a konvex burok) a beírt szabályos dodekaéder (és az öt tetraéder egy úgynevezett "tetrahedral compound"-ot ad). Lehetne-e ezt a kérdést hasonló módszerekkel kezelni?

Az említett cikkben a szerzők egy az általam vizsgált térfogatszámítási probléma egy közeli rokonát tárgyalják: A gömbfelszínen (az enyémmel megegyező) korlátozó feltételeknek eleget tevő kongruens körök elhelyezésére vonatkozó sűrűségi probléma optimális megoldásait keresik, numerikusan. Ezáltal kapnak olyan konfigurációkat, melyek esélyesek a globális maximum felvételére. Habár ez a klasszikus feladat igazából a pontok között fellépő minimális távolság maximumának a keresését jelenti, (ami nem ekvivalens feladat a pontok konvex burka maximumának a megtalálásával), jelentős új irányt mutathat az én vizsgálataim folytatásában két okból:

- A cikkben használt feltétel jogossága, (miszerint a pontok négyesével egy-egy a gömbbe írt szabályos tetraédert határoznak meg,) olyan alkalmazásokkal bír, amelyekről eddig nem volt tudomásom.

- Maga az említett (általam eddig nem ismert) cikk, olyan konstrukciók gépi vizsgálatát tartalmazza, melyekre a "kézi" számolás esélytelen, támpontot nyújtva az optimális konfigurációk kereséséhez.

A cikkben és Makai Endre kérdésében szerepel az 5 tetraéder esetére vonatkozó, a sűrűségi probléma megoldására esélyes azon konstrukció, melyben az 5 tetraéder csúcsponthalmazának a konvex burka a szabályos dodekaéder. Elképzelhető, hogy a cikkben vizsgált feladat megoldása tényleg ez, de a dodekaéder csekély számú (mindössze 12) lapjára tekintettel, a konvex burok maximális térfogatára vonatkozó feladatnak nem lehet ez a megoldása. A következő konfiguráció által származtatott konvex test térfogata nagyobb mint az ugyanazon gömbbe írt szabályos dodekaéder térfogata.



1. ábra. A konstrukció

Tekintsünk két közös középpontú szabályos tetraédert oly módon, hogy a csúcsok konvex burka kockát alkosson. Az egyik $A_1A_2A_3A_4$ csúcsokkal rendelkező $\mathcal{A}$ tetraéder élei a kocka felszínét triangulálják (egybevágó derékszögű háromszögekre bontják). A másik $\mathcal{B}$ tetraéder B_4 csúcsához csatlakozó háromszögekben helyezzünk el egy-egy pontot (az ábrán P_1, Q_2, R_3) ezeket az őt tartalmazó kockalapra merőlegesen vetítsük fel a kocka (így a tetraéderek köré is) rajzolt gömbre. Kapjuk a C_1, D_2, E_3 pontokat, melyek a maradék három $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, illetve $\mathcal{E}$ tetraéder egy-egy csúcsát jelölik. Végül az $\mathcal{A}$ tetraéder $A_1A_2A_3$ lapját a csúcsok sorrendjének megfelelő ciklikus permutációkkal rendre vigyük az $\mathcal{A}$ további lapjaiba és tekintsük ezen permutációk által definiált gömbi egybevágóságok szerinti képeit a C_1, D_2, E_3 gömbi pontoknak. A kapott négyesek a $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ illetve $\mathcal{E}$ szabályos tetraéderek csúcsait adják. A rendszer legszimmetrikusabb változata, amikor a C_1, D_2, E_3 pontok a kocka B_4 csúcsához tartozó harmadrendű forgásszimmetriával kaphatók egymásból és a C_1 pont az $A_2A_3B_4$ egyenlőszárú gömbi háromszög szimmetria tengelyére esik. (Az ábrán ezt az esetet látjuk.) Ilyenkor az öt tetraéder konvex burka térfogatának a számítása könnyen megy. Vezessük be az B_4OB_1 metszeten (lsd a baloldali kis rajz) a t, m_t, γ paramétereket és tegyük fel, hogy a gömb sugara $\sqrt{3}$, azaz a kocka élhossza 2. Az $m_t = \sqrt{3}\cos\gamma - 1$ és $t = \sqrt{6} - \sqrt{3}\sin\gamma$ összefüggésekre tekintettel $m_t < (\sqrt{2}/2)t$, azaz a C_1E_3 húr hosszabb mint 2, ezért a konvex burok a kocka uniója a 12 darab az $A_2B_1E_4C_1B_4$ négyoldalú

gúlával egybevágó gúlával. Ezért a teljes térfogat

$$V = 8 + 12V(\gamma) = 8 + 4(2\sqrt{3}\cos\gamma + 3\sqrt{2}\cos\gamma\sin\gamma - \sqrt{6}\sin\gamma - 2).$$

A maximális térfogat a $\gamma = 1/3\sin^{-1}\sqrt{2/3}$ értéknél adódik, mely értéke $V \approx 15.1383$. Az ugyanezen sugarú gömbbe írt szabályos dodekaéder térfogata viszont csak $V_D = 14.4721$ ami állításunkat alátámasztja. (A kapott "optimális" testben a B_1E_4, E_4C_1 és C_1B_4 ívek és a nekik megfelelő élek egyenlő hosszúak.)

Az eredeti kérdés vonatkozásában megjegyzem, hogy a módszer rögzített kombinatorikájú lapháló esetén alkalmazható csak hatékonyan, így nem segít a kombinatorikusan különböző esetek számának a csökkentésében. Tekintettel arra, hogy egy szabályos tetraéder valamely lapjának centrális vetülete a gömbfelszínen képes a belsejében tartalmazni egy az éleivel egyenlő hosszúságú gömbi szakaszt, az öt tetraéder esete nagyon sok alesetet tartalmaz, melyekben külön-külön meg kell oldani a kapott szélsőérték feladatot. Ezért a korábbi kutatás eredményes folytatása a (szintén nyitott) 3 tetraéderre vonatkozó kérdés megoldására irányulhat inkább.

2018 március 9.

G.Horváth Ákos