Éles funkcionál-egyenlőtlenségek és elliptikus problémák nemeuklideszi struktúrákon

MTA Doktori Értekezés Tézisei

Kristály Alexandru

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

I) A kutatás tematikája. A Disszertáció olyan éles funkcionál-egyenlőtlenségeket tárgyal görbült tereken (nemeuklideszi geometriai struktúrákon), amelyek különböző parciális differenciálegyenletek megoldásánál alkalmazhatóak. A felhasznált módszerek skálája igen széles, éspedig geometriai analízistől a variációszámításon keresztül egészen a csoportelméletig terjed ki. A Disszertáció az utolsó nyolc évben már közölt, vagy frissen elfogadott – tizenkilenc cikkből és egy monográfiából álló – eredményeimet foglalja össze. Ezek közül nyolc dolgozat egyszerzős, míg a további tizenegy cikk különböző társszerzőkkel közösen íródott.

II) Rövid történelmi áttekintés. Schrödinger-, Dirichlet- vagy Neumann-feladatokban megjelenő elliptikus parciális differenciálegyenletek tárgyalásánál elengedhetetlen a feladatokhoz társított Szoboljev-terek alaptulajdonságainak teljesülése, valamint az éles Szoboljev-egyenlőtlenségek fennállása. Például, ha $n \geq 2$, $p \in (1, n)$, a jól ismert $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$ Szoboljev-beágyazást az

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^\star} \mathrm{d}x\right)^{1/p^\star} \leq S_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \qquad (\mathbf{S})$$

éles egyenlőtlenséggel írhatjuk le, ahol

$$S_{n,p} = \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p'} \left(\frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{1/n}$$

a legjobb állandót, $p^\star = \frac{pn}{n-p}$ a kritikus Szoboljev-exponenst, valamint $p' = \frac{p}{p-1}$ a p konjugáltját jelöli, lásd Talenti [44]. Mi több az $(\mathbf{S})$ egyenlőtlenség egyetlen extremálisát az $u_\lambda(x) = \left(\lambda + |x|^{p'}\right)^{1-n/p}$, $\lambda > 0$ függvényosztály képezi. Az $(\mathbf{S})$ éles egyenlőtlenség a Schwarz-féle szimmetrizáció és a Pólya–Szegő-egyenlőtlenség révén igazolható, ahol utóbbi az $\mathbb{R}^n$-beli éles izoperimetrikus egyenlőtlenségen alapszik.

A következő természetes kérdés adódott: *milyen geometriai információ van belekódolva egy olyan* $(\mathbf{S})$*-típusú egyenlőtlenségbe, amely egy görbült téren van megfogalmazva*? Ennek a problémakörnek a tárgyalása végett fogalmazta meg Aubin [5] a hetvenes évek közepén az ún. *AB-program*ot (lásd Druet és Hebey [18]), melynek központi kérdését az

$$\left(\int_M |u|^{p^\star} \mathrm{d}V_g\right)^{1/p^\star} \leq A \left(\int_M |\nabla_g u|^p \mathrm{d}V_g\right)^{1/p} + B \left(\int_M |u|^p \mathrm{d}V_g\right)^{1/p}, \ \forall u \in W^{1,p}(M), \qquad (\mathbf{AB})$$

egyenlőtlenségben megjelenő $A \geq 0$ és $B \geq 0$ számok optimális értékének meghatározása képezi, ahol (M, g) egy n-dimenziós teljes Riemann-sokaságot, $\mathrm{d}V_g$ a kanonikus térfogatelemet, míg ∇_g a Riemann-gradienst jelöli. Mint kiderült, az $(\mathbf{AB})$ egyenlőtlenség lényegesen függ az (M, g) Riemann-sokaság *görbületétől*. Egyrészt az $A = S_{n,p}$ és $B = 0$ megválasztással az $(\mathbf{AB})$ egyenlőtlenség minden olyan n-dimenziós (M, g) Hadamard-sokaságon[1] teljesül, amelyen fennáll az ún. Cartan–Hadamard sejtés[2]; ilyen geometriai helyzet az $n \in \{2, 3, 4\}$ alacsony dimenziós esetekben következik be, lásd Druet, Hebey és Vaugon [19]. Másrészt, ha az (M, g)

[1] Egyszeresen összefüggő, nempozitív metszetgörbületű teljes Riemann-sokaság.

[2] Fennáll az éles izoperimetrikus egyenlőtlenség Hadamard-sokaságon.

Riemann-sokaság Ricci-görbülete nemnegatív, az (**AB**) egyenlőtlenség akkor és csakis akkor áll fenn az $A = S_{n,p}$ és $B = 0$ megválasztással, ha (M, g) izometrikus az n-dimenziós euklideszi térrel, lásd Ledoux [32]. További fontos eredmények Riemann-sokaságokon az (**AB**)-feladat kapcsán Bakry, Concordet és Ledoux [6], do Carmo és Xia [17], Ni [36], Xia [49] munkáiban találhatóak.

Az utóbbi években *görbült tereken értelmezett*, Laplace-operátort tartalmazó, nemlineáris parciális differenciálegyenletek elméletében áttörő eredmények születtek. Ezen problémák tárgyalására különböző módszereket – például a Riemann–Finsler-sokaságokon kidolgozott optimális anyagszállítással, vagy a Ricci-fluxusokkal kapcsolatos elméletet – fejlesztettek ki. Az idevágó fő motivációs problémákat az ún. *Yamabe-feladat*, lásd Hebey [26], illetve a Perelman [40] által igazolt *Poincaré-sejtés* képezték. Ezekben a művekben az éles geometriai, illetve funkcionál-egyenlőtlenségek, valamint a görbület hatása igen fontos szerepet kapnak. (Például Perelman [40] híres dolgozatában a Gross-típusú [25] éles logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenség a Poincaré-sejtés igazolásának egyik alappillére.) Ezek az eredmények a geometriai analízis igen gyors fejlődéséhez vezettek az utóbbi tizenöt évben. Ebben a periódusban kiváló matematikuscsoportok (Ambrosio, Gigli és Savaré [4]; Lott és Villani [34]; Sturm [42, 43]; Villani [46]) értek el további látványos eredményeket.

III) Saját eredmények ismertetése. Az utóbbi években megvalósított fő kutatási célkitűzéseimet *nemeuklideszi geometriai struktúrákon értelmezett olyan nemlineáris jelenségek leírása* képezte, amelyek esetén lényegesen megmutatkozik a *tér görbületének a Szoboljev-típusú egyenlőtlenségekben, valamint variációs módszerekkel tanulmányozott elliptikus problémákban kifejtett hatása.* A következőkben ebben az irányban elért eredményeimet mutatom be röviden. A jelen tézisfüzetben követem a Disszertációban használt számozást.

A tézisfüzet 2 szakasza a Disszertáció ugyanolyan sorszámú fejezetének főbb eredményeit foglalja össze, éspedig görbült tereken értelmezett interpolációs egyenlőtlenségeket tárgyal. Első lépésként felelevenítjük a Cordero-Erausquin, Nazaret és Villani [13], valamint Gentil [22] által igazolt éles Gagliardo–Nirenberg interpolációs egyenlőtlenséget és ennek határhelyzeteit az $\mathbb{R}^n$ nullgörbületű euklideszi térben, melyek modellként szolgálnak a mi kutatásainkban. Sajátosan ez az egyenlőtlenség az éles (**S**) Szoboljev-egyenlőtlenségre redukálódik. A [59], [66], [60], [53] és [56] dolgozatokra alapozva, amelyekben a tanulmányozott jelenség jellegét a *tér görbületének előjele* dönti el, a saját eredményeim a következő felsoroláselemekben foglalhatóak össze.

- *Interpolációs egyenlőtlenségek pozitívan görbült tereken.* Lott és Villani [34], továbbá Sturm [42, 43] nagy hatású dolgozatai alapján tudjuk, hogy azon metrikus mértéktereken, amelyek teljesítik az ún. Lott–Sturm–Villani-féle $\mathsf{CD}(K, N)$-feltételt[3], olyan alap *geometriai egyenlőtlenségek* állnak fenn, mint a Brunn–Minkowski-, vagy a Bishop–Gromov-egyenlőtlenségek (lásd [52]). Villani felvetette azt a kérdést, hogy a Lott–Sturm–Villani-féle $\mathsf{CD}(K, N)$-terek miképpen viselkednek *funkcionál-egyenlőtlenség*ek szempontjából. A következő rigiditási eredményt sikerült igazolnom (lásd [59]): ha valamilyen $K \geq 0$ és $n \geq 2$ esetén a $\mathsf{CD}(K, n)$-típusú (M, d, m) metrikus mértéktéren teljesül a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenség (vagy ennek az L^p-logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenségként,

[3] A $\mathsf{CD}(K, N)$ görbületdimenziós (curvature-dimension) feltétel metrikus mértéktereken volt bevezetve. Egy M Riemann/Finsler-sokaság esetén a $\mathsf{CD}(K, N)$-feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha az M Ricci-görbülete alulról korlátos $K \in \mathbb{R}$ által és az M dimenziója kisebb, mint $N \in \mathbb{R}$.

illetve a Faber–Krahn-egyenlőtlenségként megfogalmazható határhelyzetei), továbbá valamely M-beli ponthoz tartozó n-sűrűségi feltétel[4] is érvényes, akkor fennáll az ún. *globális n-dimenziós nem-összezsugorodó térfogatnövekedés*, azaz létezik egy $C > 0$ szám úgy, hogy $\mathsf{m}(B(x,\rho)) \geq C_0\rho^n$ minden $x \in M$ és $\rho \geq 0$ esetén, ahol $B(x,\rho) = \{y \in M : d(x,y) < \rho\}$ (lásd 2.3., 2.4. és 2.5. tételeket). Felhasználva Perelman homotopikus szerkesztését [39], az utóbbi térfogatnövekedés kvantitatív jellege mély rigiditást eredményez nemnegatív Ricci-görbületű Riemann/Finsler-sokaságokon: éspedig igazolhatjuk (lásd a 2.6. tételt), hogy amennyiben a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségben megjelenő Szoboljev-típusú állandó minél közelebb kerül a szóban forgó egyenlőtlenség éles euklideszi esetének optimális állandójához, annál közelebb kerül topológiailag az adott nemnegatív Ricci-görbületű sokaság az euklideszi térhez. Sajátosan ez a rigiditási eredmény megválaszolja Xia [50] – L^p-logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenségekre vonatkozó – nyitott kérdését is. Hasonló jelenségeket tárgyalunk a [66] és [53] dolgozatokban is.

- *Interpolációs egyenlőtlenségek negatívan görbült tereken.* Ni [36] és Perelman [40] ötlete alapján azt bizonyítjuk az [56] dolgozatban, hogy a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségek igazak (ráadásul ugyanazokkal az éles konstansokkal, mint az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben) minden olyan n-dimenziós Hadamard-sokaságon, amelyen teljesül a Cartan–Hadamard-sejtés. Ha azonban a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségekben extremális függvények létezését várjuk el, kiderül (lásd a 2.7. tételt), hogy a Hadamard-sokaság izometrikus lesz az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel. A Morrey–Sobolev-egyenlőtlenség esetén hasonló jelenséget igazoltam a [60] dolgozatban is.

A jelen tézisfüzet 3 szakasza a Disszertáció ugyanolyan sorszámú fejezetének főbb eredményeivel, éspedig a matematikai fizikából ismert bizonytalansági elvekkel foglalkozik görbült tereken. A Caffarelli–Kohn–Nirenberg-egyenlőtlenség határhelyzeteiként felevenítjük az $\mathbb{R}^n$ téren úgy az *éles Heisenberg–Pauli–Weyl*, mint az *éles Hardy–Poincaré bizonytalansági elveket.* Az [58], [68] és [54] dolgozatokban lévő saját eredmények a következő felsorolás szerint összegezhetőek.

- *Bizonytalansági elvek pozitívan görbült tereken.* A [58] dolgozatban kimutatom (lásd a 3.4. tételt), hogy egy nemnegatív Ricci-görbületű teljes (M,g) Riemannian-sokaságon az éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv akkor és csakis akkor áll fenn, ha (M,g) izometrikus az ugyanolyan dimenziójú euklideszi térrel. A Gagliardo–Nirenberg-féle interpolációs egyenlőtlenség és annak határhelyzeteivel szemben megjegyezhető, hogy az utóbbi eredmény erős rigiditásnak tűnik abban az értelemben, hogy nem lehet megadni annak kvantitatív formáját.

- *Bizonytalansági elvek negatívan görbült tereken.* A [58] dolgozatban bizonyítom, hogy az éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv fennáll minden n-dimenziós (M,g) Hadamard-sokaságon. Ennek ellenére pozitív extremális akkor és csakis akkor létezik, ha (M,g) izometrikus az $\mathbb{R}^n$ térrel (lásd a 3.5. és 3.6. tételeket). Hangsúlyozom, hogy – az éles interpolációs egyenlőtlenségekkel szemben – a most bemutatott éles eredmények *nem* követelik meg a Cartan–Hadamard-sejtés érvényességét. Mi több hiperbolikus tereken a 3.6. tétel egy lényeges hibát igazít ki Kombe és Özaydin [31] dolgozatában. Igazolom azt is

[4] Lásd a 2.1. pontban lévő $(\mathbf{D})^n_{x_0}$-feltételt.

(lásd a 3.7. és 3.8. tételeket), hogy nagyobb görbület erőteljesebb Hardy–Poincaré bizonytalansági elvet eredményez Hadamard-sokaságok esetén (az utóbbi eredmény a Hardy–Poincaré-egyenlőtlenségben lévő extremális függvény nemlétezését aknázza ki). A [54] dolgozat alapján több szinguláris tagot tartalmazó éles Hardy–Poincaré-egyenlőtlenséget igazolunk (lásd a 3.10. tételt), illetve a [68] dolgozatban éles másodrendű Rellich-féle bizonytalansági elvet bizonyítunk görbült terekben.

A tézisfüzet 4 és 5 szakaszai olyan éles Szoboljev-típusú egyenlőtlenségek alkalmazásával foglalkozik, amelyek különböző létezési, egyértelműségi/multiplicitási eredményeket adnak elliptikus parciális differenciálegyenletekre. Ezeket a problémákat Finsler- és Riemann-sokaságok esetén vizsgáljuk, rámutatva a két geometria közötti finom, de mély különbségekre.

A jelen tézisfüzet 4 szakasza a Disszertáció ugyanolyan sorszámú fejezetén alapul és Finsler-sokaságokon értelmezett elliptikus problémákat tárgyal. Az [57] és [70] dolgozatokban olvasható saját eredményeket a következő módon összegezhetjük.

- *Reverzibilitás és Szoboljev-terek.* A Finsler-sokaságokon értelmezett elliptikus problémák vizsgálata megköveteli a sokaság felett értelmezett Szoboljev-terek alapvető tulajdonságainak (mint például reflexivitásának és beágyazhatóságának) feltérképezését. Mint tudjuk, a Finsler-sokaságok nem feltétlenül reverzibilisek, aminek igen váratlan következményei lehetnek. Kiderül, hogy az (M, F) Finsler-sokasághoz rendelt $r_F \geq 1$ *reverzibilitási állandó*nak döntő szerepe van e jelenség megértésében. Pontosabban az [57] dolgozatban igazoljuk (lásd a 4.1. tételt), hogy amennyiben az (M, F) Finsler-sokaság reverzibilitási állandója véges, akkor a felette értelmezett Szoboljev-tér reflexív Banach-tér lesz. Ezzel szemben a [70] dolgozatban egy olyan nemkompakt (M, F) Finsler-sokaságot szerkesztünk (lásd a 4.2. tételt), amelynek a reverzibilitási állandója végtelen és a sokaság felett értelmezett Szoboljev-tér még csak vektortér sem lesz. Az utóbbi (ellen)példa egy Funk-típusú Finsler-metrikával felruházott n-dimenziós egységgolyón van szerkesztve és rámutat a Riemann- és Finsler-geometriák közötti mély különbségekre. Ez az eredmény lezárja egyúttal a nemkompakt sokaságokon értelmezett Szoboljev-terek elméletét is.

- *Elliptikus problémák Finsler–Hadamard-sokaságokon.* Paraméterfüggő, Finsler–Laplace-operátort és egy nemlinearis tagot tartalmazó, elliptikus modellproblémát vizsgálunk egy Funk-típusú Finsler-sokaságokon. A [70] dolgozatunkban variációs módszerekkel (minimalizációval és „mountain pass”-típusú tétellel) bizonyítjuk (lásd a 4.3. tételt), hogy kis paraméterek esetén a vizsgált problémának csak a nulla megoldása van, míg nagy paraméterek esetén a probléma két különböző, nemnulla gyenge megoldást szolgáltat. Ezt követően az [57] cikkünkben szingularitást tartalmazó Poisson-típusú feladatot vizsgálunk Finsler–Hadamard-sokaságokon (lásd a 4.4. és 4.5. tételeket), ahol kiaknázzuk az éles Hardy–Poincaré-egyenlőtlenséget. Mi több látványos módon igazoljuk (lásd a 4.6. tételt), hogy a tanulmányozott Poisson-egyenlet megoldásának alakja teljes mértékben jellemzi a Finsler-sokaság görbületét.

A jelen tézisfüzet 5 szakasza, a Disszertáció ugyanolyan sorszámú fejezetére épülve, kompakt és nemkompakt Riemann-sokaságokon értelmezett elliptikus problémákat tárgyal. A [63], [54] és [55] dolgozatokban lévő saját eredmények a következő módon összegezhetőek.

- *Elliptikus problémák kompakt Riemann-sokaságokon.* Variációs módszerek révén a megoldások számára vonatkozóan egy éles bifurkációs eredményt igazolok (lásd az 5.1. tételt) egy szublineáris tagot tartalmazó sajátérték-feladatra nézve, továbbá megállapítom a megoldások számának stabilitását kis perturbációk esetén. Ezek az eredmények éles Emden-típusú multiplicitási eredmények igazolására alkalmazhatóak (lásd az 5.3. tételt) páros dimenziós euklideszi tereken úgy, hogy az eredeti feladatot az 1-kodimenziós egységgömbre vezetjük vissza.

- *Elliptikus problémák nemkompakt Riemann-sokaságokon.* Felhasználva az éles, többpólusú Hardy–Poincaré-egyenlőtlenséget, végtelen sok, egymástól szimmetrikusan különböző megoldást garantálunk (lásd az 5.5. tételt) az egységgömb felső féltekéjén értelmezett, Laplace–Beltrami-operátort tartalmazó elliptikus problémára. Ez az eredmény egy meglepő csoportelméleti érvelés révén igazolódik, amely a Rubik-kocka megoldhatóságára támaszkodik. Ezután kimutatjuk (lásd az 5.6. tételt), hogy egy Hadamard-sokaságokon értelmezett, oszcillációs tagot tartalmazó Schrödinger-Maxwell rendszernek végtelen sok izometriákra invariáns megoldása létezik. Utóbbi eredmény esetén a Hadamard-sokaságok izometria-csoportjának viselkedése fontos szerepet kap a vizsgálat során.

A továbbiakban bemutatjuk az eredményeket pontos matematikai megfogalmazásban. Mint jeleztük, a tézisfüzetben követjük a Disszertációban felsorakoztatott szakaszok, pontok, alpontok és eredmények sorszámozását.

2. Éles interpolációs egyenlőtlenségek

A geometriai és funkcionál-egyenlőtlenségek elméletében fontos szerepet kapnak a Szoboljev-típusú interpolációs egyenlőtlenségek. Ebben a szakaszban éles Gagliardo–Nirenberg interpolációs egyenlőtlenségeket vizsgálunk pozitívan és negatívan görbült terek esetén.

A klasszikus euklideszi térben használt szimmetrizációs eljárások révén Del Pino és Dolbeault [15] igazolták elsőként az éles Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségeket bizonyos paraméter-tartományra. Optimális anyagszállítás elméletének a segítségével, Cordero-Erausquin, Nazaret és Villani [13] kiterjesztették a [15] dolgozatban lévő eredményeket az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges normája esetén. Először felelevenítjük a [13] dolgozat fő eredményeit és az ahhoz tartozó fogalmakat, melyek központi szerepet kapnak az eredményeink igazolásában.

Legyen $\|\cdot\|$ az $\mathbb{R}^n$ egy olyan tetszőleges normája, amelyre az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ egységgolyójának Lebesgue-mértéke megegyezik az n-dimenziós euklideszi egységgolyó $\omega_n = \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$ nagyságú térfogatával. Jelölje $\|x\|_* = \sup_{\|y\|\leq 1} x\cdot y$ a $\|\cdot\|$ norma duálisát (polárisát). Rögzítsük a $p\in[1,n)$ számot és jelölje $L^p(\mathbb{R}^n)$ a klasszikus Lebesgue-teret. A szokásos módon, tekintsük a

$$\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{u\in L^{p^\star}(\mathbb{R}^n) : \nabla u\in L^p(\mathbb{R}^n)\right\} \quad \text{és} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{u\in L^p(\mathbb{R}^n) : \nabla u\in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}$$

Szoboljev-tereket, ahol $p^\star = \frac{pn}{n-p}$ a kritikus Szoboljev-exponenst, míg ∇ a gradiensoperátort jelöli. Ha $u\in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, a ∇u normáját a

$$\|\nabla u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x)\|_*^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

kifejezés adja, ahol $\mathrm{d}x$ az $\mathbb{R}^n$-en vett Lebesgue-mértéket jelenti.

Rögzítsük az $n \geq 2$, $p \in (1,n)$ és $\alpha \in \left(0, \frac{n}{n-p}\right] \setminus \{1\}$ számokat, továbbá minden $\lambda > 0$ esetén legyen $h_{\alpha,p}^{\lambda}(x) = \left(\lambda + (\alpha-1)\|x\|^{p'}\right)_+^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, ahol $p' = \frac{p}{p-1}$ és $r_+ = \max\{0,r\}$. A $h_{\alpha,p}^{\lambda}$ függvény pozitív minden $\alpha > 1$ esetén, míg a $h_{\alpha,p}^{\lambda}$ leképezés kompakt tartójú midőn $\alpha < 1$. A következőkben az *éles Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenség*nek két formáját különböztetjük meg (lásd Cordero-Erausquin, Nazaret és Villani [13]).

Először is, ha $1 < \alpha \leq \frac{n}{n-p}$, akkor teljesül a

$$\|u\|_{L^{\alpha p}} \leq \mathcal{G}_{\alpha,p,n} \|\nabla u\|_{L^p}^{\theta} \|u\|_{L^{\alpha(p-1)+1}}^{1-\theta}, \ \forall u \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

éles egyenlőtlenség, ahol

$$\theta := \frac{p^\star(\alpha-1)}{\alpha p(p^\star - \alpha p + \alpha - 1)}, \tag{2}$$

míg

$$\mathcal{G}_{\alpha,p,n} := \left(\frac{\alpha-1}{p'}\right)^{\theta} \frac{\left(\frac{p'}{n}\right)^{\frac{\theta}{p}+\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\alpha(p-1)+1}{\alpha-1} - \frac{n}{p'}\right)^{\frac{1}{\alpha p}} \left(\frac{\alpha(p-1)+1}{\alpha-1}\right)^{\frac{\theta}{p}-\frac{1}{\alpha p}}}{\left(\omega_n \mathsf{B}\left(\frac{\alpha(p-1)+1}{\alpha-1} - \frac{n}{p'}, \frac{n}{p'}\right)\right)^{\frac{\theta}{n}}}$$

a legjobb állandó, amely el is érődik a $h_{\alpha,p}^{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ függvénycsalád esetén.

Továbbá, ha $0 < \alpha < 1$, akkor teljesül az

$$\|u\|_{L^{\alpha(p-1)+1}} \leq \mathcal{N}_{\alpha,p,n} \|\nabla u\|_{L^p}^{\gamma} \|u\|_{L^{\alpha p}}^{1-\gamma}, \ \forall u \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

éles egyenlőtlenség, ahol

$$\gamma := \frac{p^\star(1-\alpha)}{(p^\star - \alpha p)(\alpha p + 1 - \alpha)}, \tag{4}$$

és

$$\mathcal{N}_{\alpha,p,n} := \left(\frac{1-\alpha}{p'}\right)^{\gamma} \frac{\left(\frac{p'}{n}\right)^{\frac{\gamma}{p}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{\alpha(p-1)+1}{1-\alpha} + \frac{n}{p'}\right)^{\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{\alpha(p-1)+1}} \left(\frac{\alpha(p-1)+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha(p-1)+1}}}{\left(\omega_n \mathsf{B}\left(\frac{\alpha(p-1)+1}{1-\alpha}, \frac{n}{p'}\right)\right)^{\frac{\gamma}{n}}}$$

az optimális állandó, amely el is érődik a $h_{\alpha,p}^{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ függvénycsalád esetén.

Az $\alpha = \frac{n}{n-p}$ határhelyzetben (tehát amikor $\theta = 1$), az (1) pontosan az (**S**) éles Szoboljev-egyenlőtlenségre redukálódik, lásd Talenti euklideszi térhez tartozó [44] munkáját, továbbá Alvino, Ferone, Lions és Trombetti tetszőleges normát feltételező [2] dolgozatát.

Az $\alpha \to 1$ és $\alpha \to 0$ határhelyzetekben az (1) és (3) egyenlőtlenségek az *éles L^p-logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenségre* (lásd Gentil [22]), illetve a *Faber–Krahn-egyenlőtlenségre* (lásd Cordero-Erausquin, Nazaret és Villani [13]) vezetődnek vissza.

Egyrészt az (1) egyenlőtlenség $\alpha \to 1$ határhelyzetekor teljesül az

$$\mathbf{Ent}_{\mathrm{d}x}(|u|^p) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log |u|^p \mathrm{d}x \leq \frac{n}{p} \log\left(\mathcal{L}_{p,n} \|\nabla u\|_{L^p}^p\right), \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \ \|u\|_{L^p} = 1, \tag{5}$$

éles egyenlőtlenség, ahol

$$\mathcal{L}_{p,n} := \frac{p}{n}\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\left(\omega_n \Gamma\left(\frac{n}{p'}+1\right)\right)^{-\frac{p}{n}}$$

a legjobb állandó, amely el is érődik a Gauss-féle

$$l_p^\lambda(x) := \lambda^{\frac{n}{pp'}} \omega_n^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{n}{p'}+1\right)^{-\frac{1}{p}} e^{-\frac{\lambda}{p}\|x\|^{p'}},\ \lambda > 0$$

függvénycsalád esetén.

Másrészt az (1) egyenlőtlenség $\alpha \to 0$ határhelyzetekor érvényes a

$$\|u\|_{L^1} \leq \mathcal{F}_{p,n} \|\nabla u\|_{L^p} |\mathrm{supp}(u)|^{1-\frac{1}{p^\star}},\ \forall u \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

éles Faber–Krahn-egyenlőtlenség, ahol

$$\mathcal{F}_{p,n} := \lim_{\alpha\to 0} \mathcal{N}_{\alpha,p,n} = n^{-\frac{1}{p}} \omega_n^{-\frac{1}{n}} (p'+n)^{-\frac{1}{p'}}$$

a legjobb állandó, amely el is érődik a

$$f_p^\lambda(x) := \lim_{\alpha\to 0} h_{\alpha,p}^\lambda(x) = (\lambda - \|x\|^{p'})_+,\ \lambda > 0$$

függvénycsaládra.

2.1. Megjegyzés. Eltekintve transzlációktól és skalárissal való szorzástól, a fenti egyenlőtlenségek extremális függvényosztályai egyértelműek. Ez a tulajdonság lényeges szerepet játszik a továbbiakban.

2.1. Interpolációs egyenlőtlenségek pozitívan görbült tereken: rigiditások

Megőrizve a fenti jelöléseket, ebben a pontban kvalitatív topológiai tulajdonságokat mutatunk be olyan Lott–Sturm–Villani-értelemben görbült metrikus mértéktereken, amelyeken Gagliardo–Nirenberg-típusú egyenlőtlenségek érvényesek.

Tekintsünk egy tetszőleges m pozitív Borel-mértékű (M, d, m) metrikus mértékteret és legyen $\mathrm{Lip}_0(M)$ az M-en értelmezett kompakt tartójú Lipschitz-függvények tere. Rögzített $u \in \mathrm{Lip}_0(M)$ esetén vezessük be a

$$|\nabla u|_d(x) := \limsup_{y\to x} \frac{|u(y)-u(x)|}{d(x,y)},\ x \in M \tag{7}$$

jelölést.

Rögzítsük az $n \geq 2$, $p \in (1, n)$ és $\alpha \in \left(0, \frac{n}{n-p}\right] \setminus \{1\}$ számokat, továbbá tegyük fel, hogy az $x_0 \in M$ pontban teljesül a

$$\liminf_{\rho\to 0} \frac{\mathsf{m}(B(x_0,\rho))}{\omega_n \rho^n} = 1 \tag*{$(\mathbf{D})_{x_0}^n$}$$

alsó n-sűrűségi feltétel.

2.2. Megjegyzés. Amennyiben m a kanonikus Busemann-Hausdorff mértéket jelöli, $(\mathbf{D})_{x_0}^n$ nyilvánvalóan teljesül bármely n-dimenziós Riemann- és Finsler-sokaság tetszőleges x_0 pontjára.

Az első főeredményünket a következő tételben olvashatjuk, amely egy globális n-dimenziós nem-összezsugorodó térfogatnövekedési tulajdonságot fogalmaz meg.

2.3. Tétel. (Kristály [59]) *Legyen (M, d, m) egy metrikus mértéktér, mely teljesíti a $\mathsf{CD}(K, n)$-feltételt valamely $K \geq 0$ és $n \geq 2$ esetén. Rögzítsük a $p \in (1, n)$ számot és tételezzük fel, hogy $(\mathbf{D})^n_{x_0}$ teljesül valamely $x_0 \in M$ pontra. Ekkor igazak a következő állítások:*

(i) *ha $1 < \alpha \leq \frac{n}{n-p}$ és teljesül a*

$$\|u\|_{L^{\alpha p}} \leq \mathcal{C}\, \||\nabla u|_d\|^{\theta}_{L^p}\, \|u\|^{1-\theta}_{L^{\alpha(p-1)+1}},\ \forall u \in \mathrm{Lip}_0(M) \qquad (\mathbf{GN1})^{\alpha,p}_{\mathcal{C}}$$

egyenlőtlenség valamely $\mathcal{C} \geq \mathcal{G}_{\alpha,p,n}$ esetén, akkor $K = 0$ és

$$\mathsf{m}(B(x, \rho)) \geq \left(\frac{\mathcal{G}_{\alpha,p,n}}{\mathcal{C}}\right)^{\frac{n}{\theta}} \omega_n \rho^n, \quad \forall x \in M,\ \rho \geq 0.$$

(ii) *ha $0 < \alpha < 1$ és teljesül a*

$$\|u\|_{L^{\alpha(p-1)+1}} \leq \mathcal{C}\, \||\nabla u|_d\|^{\gamma}_{L^p}\, \|u\|^{1-\gamma}_{L^{\alpha p}},\ \forall u \in \mathrm{Lip}_0(M) \qquad (\mathbf{GN2})^{\alpha,p}_{\mathcal{C}}$$

egyenlőtlenség valamely $\mathcal{C} \geq \mathcal{N}_{\alpha,p,n}$ esetén, akkor $K = 0$ és

$$\mathsf{m}(B(x, \rho)) \geq \left(\frac{\mathcal{N}_{\alpha,p,n}}{\mathcal{C}}\right)^{\frac{n}{\gamma}} \omega_n \rho^n, \quad \forall x \in M,\ \rho \geq 0.$$

Kihasználva az (1) és (3) Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségek élességét, a 2.3. tétel igazolásához egyrészt a $\mathsf{CD}(K, n)$-tereken érvényes Bishop–Gromov- és Bonnet–Myers-egyenlőtlenségek, másrészt pedig a közönséges differenciálegyenletek és differenciálegyenlőtlenségek éles összehasonlítási elveinek megfelelő kombinálása szükséges.

2.3. Megjegyzés. Az S. Ohta társszerzőmmel írt [66] dolgozatban a $p = 2$ és $\alpha = \frac{n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ sajátos esetet tárgyaljuk úgy, hogy a $\mathsf{CD}(K, n)$-feltétel helyett egy bizonyos térfogatduplázási feltétel teljesülését feltételezzük.

Az L^p-logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenséget implikáló $\alpha \to 1$ határhelyzetben a 2.3. tételhez hasonló eredményt igazolhatunk.

2.4. Tétel. (Kristály [59]) *Ha a 2.3. tétel feltételei mellett az*

$$\mathbf{Ent}_{\mathsf{dm}}(|u|^p) = \int_M |u|^p \log |u|^p \mathsf{dm} \leq \frac{n}{p} \log\left(\mathcal{C}\, \||\nabla u|_d\|^p_{L^p}\right),\ \forall u \in \mathrm{Lip}_0(M),\ \|u\|_{L^p} = 1 \qquad (\mathbf{LS})^p_{\mathcal{C}}$$

egyenlőtlenség is teljesül valamely $\mathcal{C} \geq \mathcal{L}_{p,n}$ esetén, akkor $K = 0$ és

$$\mathsf{m}(B(x, \rho)) \geq \left(\frac{\mathcal{L}_{p,n}}{\mathcal{C}}\right)^{\frac{n}{p}} \omega_n \rho^n,\ \forall x \in M,\ \rho \geq 0.$$

Az $\alpha \to 0$ határhelyzetben a Faber–Krahn-egyenlőtlenségre vonatkozó eredményt igazolhatunk.

2.5. Tétel. (Kristály [59]) *Ha a 2.3. tétel feltételei mellett az*

$$\|u\|_{L^1} \leq \mathcal{C}\, \||\nabla u|_d\|_{L^p}\, \mathsf{m}(\mathrm{supp}(u))^{1-\frac{1}{p^\star}},\ \forall u \in \mathrm{Lip}_0(M) \qquad (\mathbf{FK})^p_{\mathcal{C}}$$

egyenlőtlenség is teljesül valamely $\mathcal{C} \geq \mathcal{F}_{p,n}$ *esetén, akkor* $K = 0$ *és*

$$\mathsf{m}(B(x,\rho)) \geq \left(\frac{\mathcal{F}_{p,n}}{\mathcal{C}}\right)^n \omega_n \rho^n,\ \forall x \in M, \rho \geq 0.$$

A fenti globális térfogatnövekedési tételek jelentőségét differenciálható strukturákon domboríthatjuk ki a következő eredményék révén. Először egy olyan – tetszőleges Riemann-sokaságokon érvényes – Aubin–Hebey-típusú eredményt (lásd [5] és [26]) jelentünk ki a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségekre nézve, amelynek bizonyításához egyrészt lokális térképek alkalmazása, másrészt pedig ugyancsak az (1), (3), (5) és (6) egyenlőtlenségek élessége szükséges.

2.1. Segédtétel. *Tekintsünk egy* $n \geq 2$ *dimenziós* (M, g) *teljes Riemann-sokaságot és legyen* $\mathcal{C} > 0$. *Ekkor igazak a következő állítások:*

(i) *ha* $(\mathbf{GN1})^{\alpha,p}_{\mathcal{C}}$ *teljesül az* (M, g)*-n valamely* $p \in (1, n)$ *és* $\alpha \in \left(1, \frac{n}{n-p}\right]$ *esetén, akkor* $\mathcal{C} \geq \mathcal{G}_{\alpha,p,n}$;

(ii) *ha* $(\mathbf{GN2})^{\alpha,p}_{\mathcal{C}}$ *teljesül az* (M, g)*-n valamely* $p \in (1, n)$ *és* $\alpha \in (0, 1)$ *esetén, akkor* $\mathcal{C} \geq \mathcal{N}_{\alpha,p,n}$;

(iii) *ha* $(\mathbf{LS})^p_{\mathcal{C}}$ *teljesül az* (M, g)*-n valamely* $p \in (1, n)$ *esetén, akkor* $\mathcal{C} \geq \mathcal{L}_{p,n}$;

(iv) *ha* $(\mathbf{FK})^p_{\mathcal{C}}$ *teljesül az* (M, g)*-n valamely* $p \in (1, n)$ *esetén, akkor* $\mathcal{C} \geq \mathcal{F}_{p,n}$.

Tekintsük az $n \geq 2$ dimenziós nemnegatív Ricci-görbületű és $\mathrm{d}V_g$ kanonikus térfogatelemű Riemann-sokaságot. Az

$$\mathrm{AVG}_{(M,g)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_g(B_g(x,r))}{\omega_n r^n}$$

mennyiséget az (M, g) *aszimptotikus térfogatnövekedésének* nevezzük. A Bishop–Gromov összehasonlítási elv alapján $\mathrm{AVG}_{(M,g)} \leq 1$, továbbá ez a szám független az $x \in M$ ponttól.

Adott $k \in \{1, ..., n\}$ esetén legyen $\delta_{k,n} > 0$ a

$$10^{k+2} C_{k,n}(k) s \left(1 + \frac{s}{2k}\right)^k = 1$$

egyenlet s változó szerinti legkisebb pozitív megoldása, ahol

$$C_{k,n}(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i = 0, \\ 3 + 10C_{k,n}(i-1) + (16k)^{n-1}(1 + 10C_{k,n}(i-1))^n, & \text{ha} \quad i \in \{1, ..., k\}. \end{cases}$$

Tekintsük a differenciálható $h_{k,n} : (0, \delta_{k,n}) \to (1, \infty)$ bijektív és növekvő függvényt, ahol

$$h_{k,n}(s) = \left[1 - 10^{k+2} C_{k,n}(k) s \left(1 + \frac{s}{2k}\right)^k\right]^{-1}.$$

Minden $s>1$ esetén legyen

$$\beta(k,s,n)=\begin{cases} 1-\left[1+\frac{s^n}{[h_{1,n}^{-1}(s)]^n}\right]^{-1}, & \text{ha} \quad k=1, \\ \max\left\{\beta(1,s,n),\beta(i,1+\frac{h_{k,n}^{-1}(s)}{2k},n):i=1,...,k-1\right\}, & \text{ha} \quad k\in\{2,...,n\}. \end{cases}$$

A $\beta(k,s,n)$ szám a Perelman-féle maximális térfogat-lemmánál jelenik meg, melynek segítségével igazolható, hogy ha egy $n\geq 2$ dimenziós nemnegatív Ricci-görbületű teljes Riemann-sokaság geodetikus gömbjeinek térfogatai „majdnem maximálisak" (vagyis egyenletesen mérhetőek össze a megfelelő sugarú euklideszi gömbökkel), akkor M kontraktibilis. Bevezetve az

$$\alpha_{MP}(k,n)=\inf_{s\in(1,\infty)}\beta(k,s,n)$$

számot, a továbbiakban a Perelman-féle szerkesztésnek egy kvantitatív formáját használjuk. Észrevehető, hogy $k\mapsto\alpha_{MP}(k,n)$ nemcsökkenő ($1\leq k\leq 3$ és $1\leq n\leq 10$ esetén az $\alpha_{MP}(k,n)$ értékei Munn [35] dolgozatában találhatóak meg).

A továbbiakban a Villani-féle kérdésre szorítkozunk, mely az $(\mathbf{LS})^p_{\mathcal{C}}$ logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenségre vonatkozik nemnegatív Ricci-görbületű teljes (M,g) Riemann-sokaságokon. Megmutatjuk, hogy amennyiben $\mathcal{C}>0$ egyre közelebb kerül az éles euklideszi $\mathcal{L}_{p,n}$ állandóhoz, az (M,g) sokaság topológiailag egyre közelebb kerül az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térhez. Ennek érdekében legyen $\pi_k(M)$ az (M,g) sokaság k-adrendű homotopikus csoportja.

2.6. Tétel. (Kristály [59]) *Legyen (M,g) egy $n\geq 2$ dimenziós nemnegatív Ricci-görbületű teljes Riemann-sokaság és tételezzük fel, hogy teljesül az L^p-logaritmikus $(\mathbf{LS})^p_{\mathcal{C}}$ Szoboljev-egyenlőtlenség valamely $p\in(1,n)$ és $\mathcal{C}>0$ esetén. Ekkor fennállnak a következő állítások:*

(i) $\mathcal{C}\geq\mathcal{L}_{p,n}$;

(ii) *az M sokaság $\pi_1(M)$ fundamentális csoportjának rendje felülről korlátos az $\left(\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{L}_{p,n}}\right)^{\frac{n}{p}}$ révén;*

(iii) *ha $\mathcal{C}<\alpha_{MP}(k_0,n)^{-\frac{p}{n}}\mathcal{L}_{p,n}$ valamely $k_0\in\{1,...,n\}$ esetén, akkor $\pi_1(M)=...=\pi_{k_0}(M)=0$;*

(iv) *ha $\mathcal{C}<\alpha_{MP}(n,n)^{-\frac{p}{n}}\mathcal{L}_{p,n}$, akkor M kontraktibilis;*

(v) *$\mathcal{C}=\mathcal{L}_{p,n}$ akkor és csakis akkor, ha (M,g) izometrikus az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.*

2.5. Megjegyzés. A 2.6./(v) tétel egyúttal megválaszolja a Xia által felvetett [50], L^p-logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenség általános $p\in(1,n)$ esetére vonatkozó nyitott kérdést is. A $p=2$ esetben a fenti kérdésre a válasz ismert volt (lásd Bakry, Concordet és Ledoux [6], Ni [36], valamint Li [33] munkáit, amelyekben a hőmagfüggvényt élesen lehetett becsülni). Viszont $p\neq 2$ esetén az L^p-becslések nem elég élesek, így a jól ismert analitikus megközelítés nem szolgáltatott megfelelően éles eredményt.

A 2.6. tételhez hasonló eredmények igazolhatóak a többi Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségre is. Sajátosan a következő rigiditási eredményt igazolhatjuk.

2.1. Következmény. *Legyen (M, g) egy $n \geq 2$ dimenziós nemnegatív Ricci-görbületű teljes Riemann-sokaság. Ekkor egyenértékűek a következő állítások:*

(i) $\mathbf{(GN1)}^{\alpha,p}_{\mathcal{G}_{\alpha,p,n}}$ *teljesül az (M, g)-n valamely $p \in (1, n)$ és $\alpha \in \left(1, \frac{n}{n-p}\right]$ esetén;*

(ii) $\mathbf{(GN2)}^{\alpha,p}_{\mathcal{N}_{\alpha,p,n}}$ *teljesül az (M, g)-n valamely $p \in (1, n)$ és $\alpha \in (0, 1)$ esetén;*

(iii) $\mathbf{(LS)}^{p}_{\mathcal{L}_{p,n}}$ *teljesül az (M, g)-n valamely $p \in (1, n)$ esetén;*

(iv) $\mathbf{(FK)}^{p}_{\mathcal{F}_{p,n}}$ *teljesül az (M, g)-n valamely $p \in (1, n)$ esetén;*

(v) *(M, g) izometrikus az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.*

2.2. Interpolációs egyenlőtlenségek negatívan görbült tereken: a Cartan–Hadamard-sejtés hatása

Ebben a részben a 2.1. pontban leírt eredmények negatívan görbült megfelelőit vizsgáljuk. Legyen (M, g) egy $n \geq 2$ dimenziós Hadamard-sokaság a $\mathrm{d}V_g$ kanonikus térfogatelemmel felruházva. A továbbiakban szüksegünk lesz a Cartan–Hadamard-sejtésre.

Cartan–Hadamard-sejtés n-dimenziós esetben. (Aubin [5]) *Legyen (M, g) egy $n \geq 2$ dimenziós Hadamard-sokaság és jelölje ∂D valamely sima peremű $D \subset M$ kompakt halmaz határát. Ekkor D eleget tesz az euklideszi izoperimetrikus egyenlőtlenségnek, azaz*

$$\mathrm{Area}_g(\partial D) \geq n\omega_n^{\frac{1}{n}} \mathrm{Vol}_g^{\frac{n-1}{n}}(D), \tag{8}$$

amely akkor és csakis akkor teljesül egyenlőséggel, ha D izometrikus az n-dimenziós euklideszi tér $\mathrm{Vol}_g(D)$ térfogatú gömbjével.

Vegyük észre, hogy $n\omega_n^{\frac{1}{n}}$ éppen az izoperimetrikus hányados az n-dimenziós euklideszi térben. Megjegyezzük, hogy a Cartan–Hadamard-sejtés tetszőleges dimenziójú hiperbolikus téren, továbbá bármilyen 2-, 3- és 4-dimenziós Hadamard-sokaságon is fennáll (lásd Beckenbach és Radó [9], Weil [47], Kleiner [29] és Croke [14] munkáit), viszont igaz volta $n \geq 5$ esetén még mindig nyitott kérdésnek számít.

Croke [14] igazolta, hogy bármely $n \geq 3$ dimenziós Hadamard-sokaság tetszőleges sima peremű $D \subset M$ kompakt halmazára fennáll az

$$\mathrm{Area}_g(\partial D) \geq C(n) \mathrm{Vol}_g^{\frac{n-1}{n}}(D) \tag{9}$$

izoperimetrikus egyenlőtlenség, ahol

$$C(n) = (n\omega_n)^{1-\frac{1}{n}} \left((n-1)\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{n-2}}(t) \sin^{n-2}(t) \mathrm{d}t \right)^{\frac{2}{n}-1}. \tag{10}$$

Megállapítható, hogy $C(n) \leq n\omega_n^{\frac{1}{n}}$ minden $n \geq 3$ esetén, míg egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $n = 4$.

Morse-elmélet és sűrűségi meggondolás alapján észrevehető, hogy a Gagliardo–Nirenberg-típusú egyenlőtlenségek vizsgálatához elegendő eléggé sima, kompakt tartójú, nemdegenerált kritikus pontokkal rendelkező $u : M \to [0, \infty)$ tesztfüggvényeket választani. Egy ilyen $u : M \to [0, \infty)$ függvényhez rendeljük hozzá a

$$\mathrm{Vol}_e\left(\{x \in \mathbb{R}^n : u^*(x) > t\}\right) = \mathrm{Vol}_g\left(\{x \in M : u(x) > t\}\right) \tag{11}$$

összefüggés által értelmezett $u^* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ függvényt, amelyet az u *euklideszi szimmetrikus újrarendezésének* (lásd Druet, Hebey és Vaugon [19]) nevezünk.

Ni [36] és Perelman [40] ötlete alapján bizonyítható, hogy a (11)-es összefüggés maga után vonja az ún. térfogat- és normamegőrzési tulajdonságokat az u es u^* függvényekre, továbbá érvényes marad a Pólya–Szegő-egyenlőtlenség, azaz tetszőleges $p \in (1, n)$ esetén

$$\frac{n\omega_n^{\frac{1}{n}}}{C(n)}\|\nabla_g u\|_{L^p(M)} \geq \|\nabla u^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

mi több, ha fennáll a Cartan–Hadamard-sejtés az (M, g) sokaságon, akkor

$$\|\nabla_g u\|_{L^p(M)} \geq \|\nabla u^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{12}$$

Az előbbi tulajdonságoknak köszönhetően, a következő eredményt igazolhatjuk.

2.7. Tétel. (Farkas, Kristály és Szakál [56]) *Legyen (M, g) egy $n \geq 2$ dimenziós Hadamard-sokaság és rögzítsük a $p \in (1, n)$ és $\alpha \in \left(1, \frac{n}{n-p}\right]$ számokat. Ekkor:*

(i) *teljesül a*

$$\|u\|_{L^{\alpha p}} \leq \mathcal{C}\,\|\nabla_g u\|_{L^p}^{\theta}\,\|u\|_{L^{\alpha(p-1)+1}}^{1-\theta},\ \forall u \in C_0^\infty(M) \tag*{$(\mathbf{GN1})_{\mathcal{C}}^{\alpha,p}$}$$

Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenség a $\mathcal{C} = \left(\frac{n\omega_n^{\frac{1}{n}}}{C(n)}\right)^{\theta}\mathcal{G}_{\alpha,p,n}$ *állandó megválasztásával;*

(ii) *ha teljesül a Cartan–Hadamard-sejtés az (M, g) sokaságon, akkor fennáll a $(\mathbf{GN1})_{\mathcal{G}_{\alpha,p,n}}^{\alpha,p}$ éles Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenség az (M, g) sokaságon, azaz*

$$\mathcal{G}_{\alpha,p,n}^{-1} = \inf_{u\in C_0^\infty(M)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla_g u\|_{L^p}^{\theta}\|u\|_{L^{\alpha(p-1)+1}}^{1-\theta}}{\|u\|_{L^{\alpha p}}}, \tag{13}$$

mi több rögzített $\alpha \in (1, \frac{n}{n-p}]$ esetén akkor és csakis akkor létezik valamely x_0 pont köré koncentrálódó korlátos és pozitív extremális függvény az éles $(\mathbf{GN1})_{\mathcal{G}_{\alpha,p,n}}^{\alpha,p}$ Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségben, ha (M, g) izometrikus az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.

A 2.7. tételhez hasonló eredményeket fogalmazhatunk meg a $(\mathbf{GN2})_{\mathcal{C}}^{\alpha,p}$, $(\mathbf{LS})_{\mathcal{C}}^{p}$ és $(\mathbf{FK})_{\mathcal{C}}^{p}$ egyenlőtlenségekre vonatkozóan is, mi több a [60] és [61] dolgozataimban a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségtől enyhén eltérő – de mégis ugyanabba a kategoriába sorolható – Morrey–Szoboljev-féle illetve Szoboljev-féle interpolációs egyenlőtlenségekre nézve szintén a 2.6. és 2.7. tételekhez hasonló eredményeket sikerült igazolnom. Végezetül megemlítem, hogy nemnegatív Ricci-görbületű teljes Riemann-sokaságokon az egyetlen ismert magasabb rendű rigiditási eredményt nemrégen E. Barbosaval igazoltuk a [53] dolgozatban, amelyben a távolságfüggvény Laplace-értékét megfelelően kontrollálva további görbületi megkötéshez jutottunk.

3. Éles bizonytalansági elvek

A bizonytalansági elvek egy adott fizikai részecske helyzetének és momentumának egyidejű tanulmányozásánál – a kvantummechanika egyik alapkérdésénél – jelennek meg. Ebben a pontban Riemann/Finsler-sokaságok görbületétől függő bizonytalansági elveket vizsgálunk.

Tekintsük a $p, q \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ számokat úgy, hogy

$$0 < q < 2 < p \text{ és } 2 < n < \frac{2(p-q)}{p-2}, \tag{14}$$

továbbá jelölje $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_*$ az $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges normáját, illetve annak duálisát. Tekintsük a *Caffarelli–Kohn–Nirenberg-féle*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x)\|_*^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^{2p-2}}{\|x\|^{2q-2}}\mathrm{d}x\right) \geq \frac{(n-q)^2}{p^2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{\|x\|^q}\mathrm{d}x\right)^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{\textbf{CKN}}$$

egyenlőtlenséget (lásd [11]).

Közvetlen számolással bizonyítható (lásd Xia [50]), hogy $\frac{(n-q)^2}{p^2}$ a legjobb állandó a (**CKN**) egyenlőtlenségben, valamint – transzlációtól és skálázástól eltekintve – az

$$u_\lambda(x) = \left(\lambda + \|x\|^{2-q}\right)^{\frac{1}{2-p}}, \ \lambda > 0$$

az egyetlen extremális függvényosztály.

A (**CKN**) egyenlőtlenség $p \to 2$ és $q \to 0$ határhelyzete a jól ismert,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x)\|_*^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2 u^2(x)\mathrm{d}x\right) \geq \frac{n^2}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x)\mathrm{d}x\right)^2, \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{\textbf{HPW}}$$

alakú *Heisenberg–Pauli–Weyl-féle bizonytalansági elvet* eredményezi, amely a kvantummechanikában azt mondja ki (lásd Heisenberg [28]), hogy egy adott részecske helyzetét és momentumát egyidejűleg nem lehet pontosan meghatározni. A Pauli és Weyl által megfogalmazott [48], parciális differenciálegyenletek nyelvezetére épülő **(HPW)** egyenlőtlenség pontosan ezt a fizikai jelenséget fejezi ki. A (**HPW**) egyenlőtlenségben a legjobb állandó $\frac{n^2}{4}$, továbbá – transzlációtól és skálázástól eltekintve – a Gauss-féle

$$u_\lambda(x) = e^{-\lambda\|x\|^2}, \ \lambda > 0$$

függvények képezik az egyetlen extremális függvényosztályt.

A (**CKN**) $p \to 2$ és $q \to 2$ határhelyzete a szinguláris tagot tartalmazó parciális differenciálegyenletek egyik mérföldkövének minősül, éspedig a nevezetes

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x)\|_*^2 \mathrm{d}x \geq \frac{(n-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2(x)}{\|x\|^2}\mathrm{d}x, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{\textbf{HP}}$$

Hardy–Poincaré bizonytalansági elvet eredményezi. A (**HP**) egyenlőtlenségben a legjobb állandó $\frac{(n-2)^2}{4}$, viszont egyetlen nemnulla extremális függvény sem létezik (lásd Adimurthi, Chaudhuri és Ramaswamy [1], Barbatis, Filippas és Tertikas [8], Brezis és Vázquez [10], Filippas és Tertikas [21], valamint Ghoussoub és Moradifam [24] munkáit).

3.1. Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv Riemann-sokaságokon

Eredeti megfogalmazása óta a Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv folyamatos kutatási témát szolgáltatott a matematikai fizikában, többek között már kompakt és nemkompakt Riemann-sokaságokon is tanulmányozták azt (lásd Carron [12], Erb [20], valamint Kombe és Özaydin [30, 31] munkáit). Ennek ellenére kevés olyan eredmény található a szakirodalomban, amely a Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elvet az élesség szempontjából vizsgálja. Ennek megfelelően a jelen pontban teljes leírást adunk a Riemann-sokaságokon megfogalmazott éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elvre.

Tekintsük az $n \geq 2$ dimenziós, nemkompakt, teljes (M,g) Riemann-sokaságon megfogalmazott, tetszőlegesen rögzített $x_0 \in M$ ponthoz társított

$$\left(\int_M |\nabla_g u|^2 \mathrm{d}V_g\right)\left(\int_M d_{x_0}^2 u^2 \mathrm{d}V_g\right) \geq \frac{n^2}{4}\left(\int_M u^2 \mathrm{d}V_g\right)^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(M) \qquad (\mathbf{HPW})_{x_0}$$

Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elvet.

Pozitívan görbült terek esetén a következő rigiditási eredmény igazolható.

3.4. Tétel. (Kristály [58]) *Legyen (M,g) egy $n \geq 2$ dimenziós, nemnegatív Ricci-görbületű, teljes Riemann-sokaság. Ekkor egyenértékűek a következő állítások:*

(a) *teljesül a* $(\mathbf{HPW})_{x_0}$ valamely $x_0 \in M$ *pont esetén;*

(b) *teljesül a* $(\mathbf{HPW})_{x_0}$ bármely $x_0 \in M$ *pont esetén;*

(c) *(M,g) izometrikus az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.*

A 3.4. tétel egy erős rigiditást mutat, hiszen – az interpolációs egyenlőtlenségekkel ellentétben – nem létezik előbbinek olyan kvantitatív formája, amely lehetőséget adna a Perelman-féle homotopikus rigiditás alkalmazására.

A negatívan görbült terek esetén a helyzet lényegesen más. Tetszőleges $c \leq 0$ szám esetén értelmezzük a

$$\mathbf{ct}_c(r) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{ha} \quad c = 0, \\ \sqrt{-c}\coth(r\sqrt{-c}), & \text{ha} \quad c < 0 \end{cases} \qquad (15)$$

függvényt, továbbá ennek megfelelően tekintsük a $\mathbf{D}_c : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ leképezést úgy, hogy

$$\mathbf{D}_c(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \rho = 0, \\ \rho\mathbf{ct}_c(\rho) - 1, & \text{ha} \quad \rho > 0. \end{cases}$$

Mivel $\mathbf{D}_c \geq 0$, a Heisenberg–Pauli–Weyl elvnek egy olyan kvantitatív formáját mutatjuk meg, amelynek bizonyítása a divergenciatételen és a Bishop–Gromov összehasonlítási elven alapszik.

3.5. Tétel. (Kristály [58])] *Legyen (M,g) egy olyan $n \geq 2$ dimenziós Hadamard-sokaság, amelynek metszetgörbületét*[5] *felülről a tetszőlegesen rögzített $c \leq 0$ szám korlátozza. Ekkor tetszőleges $x_0 \in M$ és $u \in C_0^\infty(M)$ esetén, fennáll*

$$\left(\int_M |\nabla_g u|^2 \mathrm{d}V_g\right)\left(\int_M d_{x_0}^2 u^2 \mathrm{d}V_g\right) \geq \frac{n^2}{4}\left(\int_M \left(1 + \frac{n-1}{n}\mathbf{D}_c(d_{x_0})\right) u^2 \mathrm{d}V_g\right)^2.$$

[5] A *metszetgörbületre* a *szekcionális görbület* fogalom is használatos; angol szakirodalomban: *sectional curvature*, lásd do Carmo [16].

A jelen pont főeredményének a következő tétel tekinthető.

3.6. Tétel. (Kristály [58]) *Legyen (M, g) egy $n \geq 2$ dimenziós Hadamard-sokaság.*

(i) [Élesség] *Az (M, g) sokaság bármely $x_0 \in M$ pontjára teljesül a $(\mathbf{HPW})_{x_0}$ Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv, mi több az $\frac{n^2}{4}$ állandó éles, azaz*

$$\frac{n^2}{4} = \inf_{u \in C_0^\infty(M) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_M |\nabla_g u|^2 \mathrm{d}V_g\right)\left(\int_M d_{x_0}^2 u^2 \mathrm{d}V_g\right)}{\left(\int_M u^2 \mathrm{d}V_g\right)^2}.$$

(ii) [Extremálisok] *A következő állítások egyenértékűek:*

(a) valamely $x_0 \in M$ *pont esetén a* $(\mathbf{HPW})_{x_0}$ *egyenlőtlenség optimális* $\frac{n^2}{4}$ *állandója elérődik egy pozitív extremálisra;*

(b) bármely $x_0 \in M$ *pont esetén a* $(\mathbf{HPW})_{x_0}$ *egyenlőtlenség éles* $\frac{n^2}{4}$ *állandója elérődik egy pozitív extremálisra;*

(c) (M, g) *izometrikus az* $\mathbb{R}^n$ *euklideszi térrel.*

Az éles interpolációs egyenlőtlenségekkel ellentétben a 3.6. tételben szereplő éles eredmények *nem* követelik meg a Cartan–Hadamard-sejtés fennállását. Ráadásul a 3.6. tétel egy hibát javít ki Kombe és Özaydin [31] dolgozatában, amelyben a szerzők tévesen azt állítják, hogy a hiperbolikus tereken értelmezett $(\mathbf{HPW})_{x_0}$ egyenlőtlenségben létezik extremális függvény.

3.2. Hardy–Poincaré bizonytalansági elv Riemann-sokaságokon

A görbület és a pólusok (másképpen szingularitások) függvényében éles Hardy–Poincaré bizonytalansági elveket is igazolhatunk Riemann-sokaságokon.

A Bishop–Gromov összehasonlítási elvet alkalmazva, először az egypólusú Hardy–Poincaré-egyenlőtlenség kvantitatív változatát mutatjuk meg Hadamard-sokaságokon.

3.7. Tétel. (Kristály [58]) *Legyen (M, g) olyan $n \geq 2$ dimenziós Hadamard-sokaság, amelynek metszetgörbületét felülről a tetszőlegesen rögzített $c \leq 0$ szám korlátozza. Ekkor*

$$\int_M |\nabla_g u|^2 \mathrm{d}V_g \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_M \left(1 + \frac{2(n-1)}{n-2} \mathbf{D}_c(d_{x_0})\right) \frac{u^2}{d_{x_0}^2} \mathrm{d}V_g, \ \forall x_0 \in M, u \in C_0^\infty(M), \ (\mathbf{HP})_{x_0}$$

mi több az $\frac{(n-2)^2}{4}$ állandó éles, viszont az egyetlen nemnulla függvényre sem érődik el.

A következő eredmény azt mutatja meg, hogy *minél erőteljesebb a görbület, annál jobban javul a Hardy–Poincaré bizonytalansági elv* Hadamard-sokaságok esetén.

3.8. Tétel. (Kristály [58]) *Legyen (M, g) olyan $n \geq 2$ dimenziós Hadamard-sokaság, amelynek metszetgörbületét felülről a tetszőlegesen rögzített $c \leq 0$ szám korlátozza. Ekkor tetszőleges $x_0 \in M$ és $u \in C_0^\infty(M)$ esetén, fennáll*

$$\int_M |\nabla_g u|^2 \mathrm{d}V_g \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_M \frac{u^2}{d_{x_0}^2} \mathrm{d}V_g + \frac{3|c|(n-1)(n-2)}{2} \int_M \frac{u^2}{\pi^2 + |c| d_{x_0}^2} \mathrm{d}V_g;$$

mi több – függetlenül a második tag viselkedésétől – az $\frac{(n-2)^2}{4}$ állandó éles.

Hasonló érvelés révén, a Finsler–Hadamard-sokaságok esetén a Hardy–Poincaré bizonytalansági elvnek egy olyan változata is igazolható, amelyet a 4 szakaszban bemutatott alkalmazások során használunk majd fel (a Finsler-sokaság definíciója pár sorral alább olvasható).

3.9. Tétel. (Farkas, Kristály és Varga [57]) *Legyen (M,F) egy $n \geq 3$ dimenziós, eltűnő* **S**-*görbületű Finsler–Hadamard-sokaság és rögzítsük tetszőlegesen az $x_0 \in M$ pontot. Ekkor*

$$\int_M [F^*(x,-D(|u|)(x))]^2\, \mathrm{d}V_F(x) \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_M \frac{u^2(x)}{d_F^2(x_0,x)} \mathrm{d}V_F(x),\ \forall u \in C_0^\infty(M), \tag{16}$$

ahol az $\frac{(n-2)^2}{4}$ állandó éles, viszont az egyetlen nemnulla függvényre sem érődik el[6].

A Hardy–Poincaré-egyenlőtlenség kiterjesztésére több módozat is van. Az egyik lehetőség a Hardy–Poincaré-egyenlőtlenség másodrendű formáját adó *Rellich-egyenlőtlenség, amelynek* éles formáit a [68] dolgozatban D. Repovšsal adtuk meg. Egy másik lehetőség a következő tételben kijelentett *többpólusú Hardy–Poincaré-egyenlőtlenség.*

3.10. Tétel. (Faraci, Farkas és Kristály [54]) *Legyen (M,g) egy $n \geq 3$ dimenziós teljes Riemann-sokaság és $m \geq 2$ esetén jelölje $S = \{x_1, ..., x_m\} \subset M$ a pólusok halmazát. Ha minden $i \in \{1, ..., m\}$ esetén $d_i = d_g(\cdot, x_i)$, akkor*

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g u|^2 \mathrm{d}V_g \quad &\geq \quad \frac{(n-2)^2}{m^2} \sum_{1\leq i<j\leq m} \int_M \left| \frac{\nabla_g d_i}{d_i} - \frac{\nabla_g d_j}{d_j} \right|^2 u^2 \mathrm{d}V_g \\ &\quad + \frac{n-2}{m} \sum_{i=1}^m \int_M \frac{d_i \Delta_g d_i - (n-1)}{d_i^2} u^2 \mathrm{d}V_g, \quad \forall u \in C_0^\infty(M), \end{aligned} \tag{17}$$

mi több a kétpólusú esetben az $\left.\frac{(n-2)^2}{m^2}\right|_{m=2} = \frac{(n-2)^2}{4}$ állandó éles a (17) egyenlőtlenségben.

4 Elliptikus problémák Finsler-sokaságokon

Ebben a szakaszban Finsler-sokaságokon értelmezett elliptikus problémák tárgyalásakor megjelenő Szoboljev-egyenlőtlenségek néhány alkalmazási lehetőségét mutatjuk be. Éppen ezért tekintsünk egy $n \geq 2$ dimenziós összefüggő M sokaságot és annak a $TM = \bigcup_{x\in M} T_x M$ érintőnyalábját. Értelmezés szerint az (M,F) párost *Finsler-sokaságnak* nevezzük, ha az $F : TM \to [0,\infty)$ folytonos függvény teljesíti a következő feltételeket:

(a) $F \in C^\infty(TM \setminus \{0\})$;

(b) $F(x,tv) = tF(x,v)$ minden $t \geq 0$ és $(x,v) \in TM$ esetén;

(c) a $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ irányhoz tartozó,

$$g_{ij}(x,v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} F^2(x,v) \tag{18}$$

elemekkel leírt $g = [g_{ij}(x,v)]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pozitív definit minden $(x,v) \in TM \setminus \{0\}$ esetén.

[6] $F^*(x,\cdot)$ az $F(x,\cdot)$ duálisa, d_F az (M,F) Finsler-sokaság távolságfüggvénye, míg az **S**-görbület az érintőterek "változását" méri, lásd [57].

Megjegyezzük, hogy amennyiben $F(x,tv) = |t|F(x,v)$ minden $t \in \mathbb{R}$ és $(x,v) \in TM$ esetén, akkor az (M,F) Finsler-sokaságot *reverzibilisnek* nevezzük, továbbá, ha $g_{ij}(x,v)$ független a v iránytól, akkor az (M,F) Finsler-sokaság a jól ismert *Riemann-sokaság* fogalmára redukálódik. Utóbbi esetben a $g_{ij}(x,v)$ jelölés helyett a $g_{ij}(x)$ kifejezést is használjuk.

Egy differenciálható normával felruházott véges dimenziós vektorteret *Minkowski-térnek* nevezünk, amely transzlációk révén egy olyan Finsler-sokaságot indukál, amelyre az $F(x,v)$ függvényérték független az x ponttól. Egy másik fontos Finsler-sokaságosztályt az ún. *Randers-terek* képeznek, melyekről a későbbiekben esik szó.

Elliptikus parciális differenciálegyenletek tárgyalásához elengedhetetlen az adott sokaság felett értelmezett Szoboljev-terek tulajdonságainak alapos ismerete. A teljes Riemann-sokaságok, továbbá a kompakt Finsler-sokaságok felett értelmezett Szoboljev-terek elmélete lezárt problémakörnek minősíthető (lásd Hebey [26], valamint Ohta és Sturm [37] munkáit), viszont a *nemkompakt* Finsler-sokaságok esetén ez a kérdés jóval bonyolultabb. Az utóbbi kérdés megválaszolatlansága mostanáig leszűkítette az alkalmazások skáláját ezeken a nemeuklideszi geometriai struktúrákon. A következő pontokban ezekkel a kérdéskörökkel foglalkozunk, kimutatva egyrészt a Riemann- és Finsler-geometriák közötti mély elméleti különbségeket, továbbá alkalmazásokat is adva nemkompakt Finsler-sokaságokon értelmezett elliptikus problémákra.

4.1. Szoboljev-terek Finsler-sokaságokon

Legyen (M,F) egy Finsler-sokaság és tekintsük a hozzárendelt

$$r_F = \sup_{x\in M} \sup_{v\in T_xM\setminus\{0\}} \frac{F(x,v)}{F(x,-v)} \tag{19}$$

reverzibilitási állandót (lásd Rademacher [41]). Nyilvánvaló, hogy $r_F \geq 1$ (sőt r_F akár végtelen is lehet), továbbá az $r_F = 1$ egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha (M,F) reverzibilis.

Az (M,F) Finsler-sokasághoz rendelt

$$l_F = \inf_{x\in M} \inf_{y,v,w\in T_xM\setminus\{0\}} \frac{g_{(x,v)}(y,y)}{g_{(x,w)}(y,y)}$$

számot *egyenletességi állandónak* nevezzük, amely az (M,F) Finsler-sokaságnak (valamint annak (M,F^*) duálisának) az M sokaságon értelmezhető összes lehetséges Riemann-struktúrától való „eltérését” adja meg. Észrevehető, hogy $l_F \leq 1$, továbbá $l_F = 1$ akkor és csakis akkor, ha (M,F) Riemann-sokaság. Igazolható, hogy $l_F r_F^2 \leq 1$.

Tekintsük az (M,F) Finsler-sokaság felett értelmezett

$$W^{1,2}(M,F,\mathsf{m}) := \left\{ u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(M) : \int_M [F^*(x,Du(x))]^2 \,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) < +\infty \right\}$$

Szoboljev-teret, továbbá legyen $W_0^{1,2}(M,F,\mathsf{m})$ a $C_0^\infty(M)$ térnek a

$$\|u\|_F := \left(\int_M [F^*(x,Du(x))]^2 \,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) + \int_M u^2(x)\mathrm{d}\mathsf{m}(x) \right)^{1/2} \tag{20}$$

norma általi lezárása, ahol $\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \mathrm{d}V_F(x)$ a természetes Haussdoff-mértéket jelöli. Megjegyezzük, hogy $\|\cdot\|_F$ rendszerint egy aszimmetrikus norma. A továbbiakban az F függvénynek az

$$F_s(x,y) = \left(\frac{F^2(x,y)+F^2(x,-y)}{2}\right)^{1/2}, \ (x,y)\in TM$$

alakú szimmetrizáltját is használni fogjuk.

Ha az (M,F) Finsler-sokaság az (M,g) Riemann-sokasággal egyezik meg, a $W^{1,2}(M,F,\mathsf{m})$ Szoboljev-tér a Riemann-sokaságok felett értelmezett $H_g^1(M)$ Szoboljev-térrel esik egybe (lásd Hebey [26] munkáját). Az idevágó első főeredményünk a véges reverzibilitású Finsler-sokaságokra vonatkozik.

4.1. Tétel. (Farkas, Kristály és Varga [57]) *Legyen (M,F) egy $n\geq 2$ dimenziós, $r_F<+\infty$ véges reverzibilitási állandójú, teljes Finsler-sokaság. Ekkor $(W_0^{1,2}(M,F,\mathsf{m}),\|\cdot\|_{F_s})$ reflexív Banach-tér, továbbá a $\|\cdot\|_{F_s}$ és $\|\cdot\|_F$ normák ekvivalensek. Sajátosan fennállnak az*

$$\left(\frac{1+r_F^2}{2}\right)^{-1/2}\|u\|_F \leq \|u\|_{F_s} \leq \left(\frac{1+r_F^{-2}}{2}\right)^{-1/2}\|u\|_F, \ \forall u\in W_0^{1,2}(M,F,\mathsf{m}) \tag{21}$$

egyenlőtlenségek is.

Azonnal következik, hogy a 4.1. tétel bármilyen Riemann-sokaságra, kompakt Finsler-sokaságra, vagy Minkowski-térre is alkalmazható. Ellenben vannak olyan végtelen reverzibilitási állandójú Finsler-sokaságok, amelyekre a (21) egyenlőtlenségpár nem teljesül. Erre vonatkozó (ellen)példát az $a\in[0,1]$ paramétertől függő, $F_a: B_e(0,1)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$F_a(x,y)=\frac{\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2)}}{1-|x|^2}+a\frac{\langle x,y\rangle}{1-|x|^2}, \ x\in B_e(0,1), \ y\in T_xB_e(0,1)=\mathbb{R}^n \tag{22}$$

alakú függvény által implikált Funk-típusú metrikával felruházott, $n\geq 2$ dimenziós $B_e(0,1)$ euklideszi egységgolyón szerkeszthetünk. Igazolható, hogy $(B_e(0,1),F_a)$ Randers-tér, mi több az $a=0$ és $a=1$ sajátos esetekben a $(B_e(0,1),F_a)$ sokaság a jól ismert *Klein-modellnek*, illetve a szokásos finsleri *Funk-modellnek* felel meg. A következő meglepő eredményt tudtuk igazolni.

4.2. Tétel. (Kristály és Rudas [70]) *Ha $a\in[0,1]$, akkor a következő állítások egyenértékűek:*
(i) $W_0^{1,2}(B_e(0,1),F_a,\mathsf{m}_a)$ *egy $\mathbb{R}$-feletti vektorteret alkot;*
(ii) $r_{F_a}<+\infty$;
(iii) $a\in[0,1)$.

A 4.2. tétel sajátosan kimondja, hogy az $a=1$ esetnek megfelelő $(B_e(0,1),F_1)$ Funk-modell felett értelmezett Szoboljev-tér még csak nem is vektortér, mivel ekkor $r_{F_1}=+\infty$. Az utóbbi megállapítás egyben kimutatja a 4.1. tétel optimalitását a reverzibilitási állandó végességének szemszögéből.

4.2. Szublineáris problémák a Funk-golyón

Tekintsük a

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}_{F_a}u(x)=\lambda\kappa(x)h(u(x)), & x\in B_e(0,1),\\ u(x)\to 0, & \text{ha } \ |x|\to 1, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

elliptikus problémát, ahol $a\in[0,1)$, F_a a (22) által megadott Funk-metrika, $\lambda\geq 0$ paraméter, $\kappa\in L^1(B_e(0,1))\cap L^\infty(B_e(0,1))$, valamint $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amely teljesíti a következő feltételeket:

(h1) $h(s) = o(s)$, ha $s \to 0^+$ és $s \to \infty$;

(h2) $H(s_0) > 0$ valamely $s_0 > 0$ esetén, ahol $H(s) = \int_0^s h(t)\mathrm{d}t$.

Vegyük észre, hogy a (h1) feltétel a h függvény végtelenbeli szublineáris viselkedését vonja maga után, mi több a (h1) és (h2) megkötések miatt a $c_h := \max_{s>0} \frac{h(s)}{s}$ szám jól értelmezett és pozitív.

4.3. Tétel. (Kristály és Rudas [70]) *Legyen $a \in [0,1)$ egy rögzített szám, $\kappa \in L^1(B_e(0,1)) \cap L^\infty(B_e(0,1)) \setminus \{0\}$ egy nemnegatív radiálisan szimmetrikus függvény és $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amely teljesíti a* (h1) *és* (h2) *feltételeket. Ekkor érvényesek a következő állítások:*

(i) *a $(\mathcal{P}_\lambda)$ feladatnak csak a nulla megoldása van, midőn $0 \le \lambda < c_h^{-1} \|\kappa\|_{L^\infty}^{-1} \frac{(n-1)^2(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}}{4(1+a)^2}$;*

(ii) *létezik olyan $\widetilde{\lambda} > 0$, hogy bármely $\lambda > \widetilde{\lambda}$ paraméter esetén a $(\mathcal{P}_\lambda)$ feladatnak van legalább két nemnulla, nemnegatív és radiálisan szimmetrikus gyenge megoldása.*

A 4.3. tétel bizonyítása a következő módon zajlik. Először is az (i) pontnál egy direkt számolással kihasználjuk a $c_h > 0$ szám jellegét. Másodsorban a (ii) pont igazolása érdekében, a $(\mathcal{P}_\lambda)$ feladathoz a $(W_0^{1,2}(B_e(0,1), F_a, \mathsf{m}_a), \|\cdot\|_{F_a})$ Szoboljev-téren értelmezett természetes $\mathcal{J}_\lambda$ energiafunkcionált rendeljük, amelynek kritikus pontjai a feladat gyenge megoldásai lesznek (lásd a [67] monográfiánkat hasonló eljárás miatt). Mivel a $(B_e(0,1), F_a)$ Finsler-sokaság nem kompakt, ezért megszerkesztjük az előbbi Szoboljev-tér azon radiálisan szimmetrikus függvényeiből álló leszűkítését, amely kompakt módon beágyazható megfelelő exponensű Lebesgue-terekbe. Legyen $\mathcal{R}_\lambda$ az $\mathcal{J}_\lambda$ lészűkítése az utóbbi résztérre. Kihasználva a variációszámítás direkt minimalizációval és a „mountain pass” tétellel kapcsolatos alapvető eredményeit, igazoljuk hogy az $\mathcal{R}_\lambda$ energiafüggvénynek van legalább egy globális minimuma és egy „mountain pass” típusú kritikus pontja. Az $\mathcal{J}_\lambda$ energiafüggvény ortogonális csoportokkal szembeni invarianciája, továbbá a kritikus szimmetriaelv (lásd Palais [38]) maga után vonja, hogy az $\mathcal{R}_\lambda$ két előbb kapott kritikus pontja a $(\mathcal{P}_\lambda)$ feladat radiálisan szimmetrikus megoldásai lesznek.

4.3. Egypólusú Poisson-egyenletek Finsler–Hadamard-sokaságokon

Legyen (M,F) egy $n \ge 3$ dimenziós, nem feltétlenül reverzibilis Finsler–Hadamard-sokaság, jelölje Ω ennek egy nyílt korlátos részhalmazát, míg $x_0 \in \Omega$ az utóbbinak egy tetszőlegesen rögzített pontját. Ebben a részben a $\mu \in \mathbb{R}$ paraméterrel és az

$$\mathcal{L}_F^\mu u = \mathbf{\Delta}_F(-u) - \mu \frac{u}{d_F^2(x_0,x)}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega, F, \mathsf{m})$$

szinguláris Finsler–Laplace-operátorral leírt

$$\begin{cases} \mathcal{L}_F^\mu u(x) = 1, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\Omega^\mu$}$$

egypólusú Poisson-egyenletre vonatkozóan adunk meg néhány eredményt.

Legyen a továbbiakban $\widetilde{\mu} := \frac{n-2}{2}$. A következő tétel egy egyértelműségi eredményt jelent ki az egypólusú $(\mathcal{P}_\Omega^\mu)$ Poisson-egyenletre nézve.

4.4. Tétel. (Farkas, Kristály és Varga [57]) *Legyen* (M, F) *egy* $n \geq 3$ *dimenziós, pozitív* l_F *egyenletességi állandójú és eltűnő* **S***-görbületű Finsler–Hadamard-sokaság. Ha* $\Omega \subset M$ *egy nyílt korlátos részhalmaz és* $x_0 \in \Omega$ *egy rögzített pont, akkor a* $(\mathcal{P}^\mu_\Omega)$ *egyenletnek pontosan egy nemnegatív megoldása van bármilyen* $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \widetilde{\mu}^2)$ *esetén.*

A 4.4. tétel bizonyításához az egypólusú Poisson-egyenlethez hozzárendelt $\mathcal{E}_\mu : W_0^{1,2}(\Omega, F, \mathsf{m}) \to \mathbb{R}$ energiafüggvény tulajdonságait kell alaposan kiaknázni. A 3.9. tételben kijelentett éles Hardy–Poincaré egyenlőtlenség és az abból származó $\mathcal{E}_\mu$ függvény szigorú konvexitása, továbbá a variációszámítás alaptétele alapján belátható, hogy az $\mathcal{E}_\mu$ energiafüggvénynek pontosan egy globális minimuma van, ami a $(\mathcal{P}^\mu_\Omega)$ egyetlen megoldását szolgáltatja.

A továbbiakban a $(\mathcal{P}^\mu_\Omega)$ Poisson-egyenlet néhány kvalitatív tulajdonságát jellemezzük. A közönséges differenciálegyenletek elméletéből azonnal következik, hogy a

$$\begin{cases} f''(r) + (n-1) f'(r) \mathbf{ct}_c(r) + \mu \frac{f(r)}{r^2} + 1 = 0, \ r \in (0, \rho], \\ f(\rho) = 0, \ \displaystyle\int_0^\rho f'(r)^2 r^{n-1} \mathrm{d}r < \infty \end{cases} \tag{$\mathcal{Q}^\mu_{c,\rho}$}$$

feladatnak pontosan egy megoldása van tetszőlegesen rögzített $\mu \in [0, \widetilde{\mu}^2)$, $c \leq 0$ és $\rho > 0$ számokra, amit a továbbiakban a $\sigma_{\mu,\rho,c}$ alakban jelölünk.

Az első ilyen kvalitatív tulajdonság – amely az $\mathcal{L}^\mu_F$ operátorra vonatkozó összehasonlítási elvre alapszik – megmutatja, hogy a *görbület „behatárolja” a Poisson-egyenlet megoldását.*

4.5. Tétel. (Farkas, Kristály és Varga [57]) *A 4.4. tétel feltételei mellett tegyük fel, hogy az* (M, F) *Finsler-sokaság irány menti görbülete*[7] *teljesíti a* $c_1 \leq \mathbf{K} \leq c_2 \leq 0$ *kétoldalú becslést. Ekkor a* $(\mathcal{P}^\mu_\Omega)$ *feladat egyetlen* u *megoldására teljesül a*

$$\sigma_{\mu,\rho_1,c_1}(d_F(x_0, x)) \leq u(x) \leq \sigma_{\mu,\rho_2,c_2}(d_F(x_0, x)) \ \text{m.m.} \ x \in B_F^+(x_0, \rho_1)$$

kétoldalú becslés, ahol $\rho_1 = \sup\{\rho > 0 : B_F^+(x_0, \rho) \subset \Omega\}$[8] *és* $\rho_2 = \inf\{\rho > 0 : \Omega \subset B_F^+(x_0, \rho)\}$. *Sajátosan, ha* $\mathbf{K} = c \leq 0$ *és* $\Omega = B_F^+(x_0, \rho)$ *valamely* $\rho > 0$ *esetén, akkor* $\sigma_{\mu,\rho,c}(d_F(x_0, \cdot))$ *a* $(\mathcal{P}^\mu_{B_F^+(x_0,\rho)})$ *feladat egyetlen megoldása.*

A 4.5. tétel fordítottja – amely a Finsler-sokaságokon érvényes Bishop-Gromov-típusú összehasonlítási elv egyenlőségi esetére vezetődik vissza – kimondja, hogy a *Poisson-egyenlet megoldása meghatározza a görbületet.*

4.6. Tétel. (Farkas, Kristály és Varga [57]) *A 4.4. tétel feltételei mellett tegyük fel, hogy az* (M, F) *Finsler-sokaság irány menti görbülete teljesíti a* $\mathbf{K} \leq c \leq 0$ *becslést. Legyenek* $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \widetilde{\mu}^2)$ *és* $x_0 \in M$ *rögzítettek. Ha valamely* $\rho > 0$ *esetén a* $\sigma_{\mu,\rho,c}(d_F(x_0, \cdot))$ *függvény a* $(\mathcal{P}^\mu_{B_F^+(x_0,\rho)})$ *feladat egyetlen megoldása a* $B_F^+(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ *halmazon, akkor* $\mathbf{K}(\cdot; \dot{\gamma}_{x_0,y}(t)) = c$ *minden* $t \in [0, \rho)$ *és* $y \in T_{x_0}M \setminus \{0\}$ *választásra, ahol* $\gamma_{x_0,y}$ *a* $\gamma_{x_0,y}(0) = x_0$ *és* $\dot{\gamma}_{x_0,y}(0) = y$ *kezdőértékekkel ellátott állandó sebességű geodetikus vonalat jelöli.*

---

[7] Az *irány menti görbületre* a *zászlógörbület* fogalom is használatos; angol szakirodalomban: *flag curvature*, lásd Bao, Chern és Shen [7].

[8] $B_F^+(x_0, \rho) = \{x \in M : d_F(x, x_0) < \rho\}$.

4.5. Megjegyzés. Ha (M, F) az (M, g) Hadamard-sokasággal esik egybe (vagyis sajátosan az irány menti- és metszetgörbületek megegyeznek), akkor – a $(\mathcal{P}^{\mu}_{\Omega})$ Poisson-egyenlet megoldásformájának függvényében – a 4.5. és 4.6. tételek, valamint az állandó metszetgörbületű Riemann-sokaságok klasszifikációjának (lásd do Carmo [16, 4.1. tétel]) együttes használata az euklideszi és hiperbolikus terek egy újszerű jellemzését adják. Egy ilyen eredmény a következő módon fogalmazható meg.

4.2. Következmény. *Legyen (M, g) egy $n \geq 3$ dimenziós Hadamard-sokaság, amelynek a metszetgörbületét felülről a $c \leq 0$ szám korlátozza. Ekkor a következő állítások egyenértékűek:*

(i) *valamely $\mu \in [0, \widetilde{\mu}^2)$ és $x_0 \in M$ rögzített pontokra, bármely $\rho > 0$ esetén a $\sigma_{\mu,\rho,c}(d_g(x_0, \cdot))$ függvény az egyetlen megoldása a $(\mathcal{P}^{\mu}_{B_g(x_0,\rho)})$ Poisson-egyenletnek a $B_g(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ halmazon;*

(ii) *(M, g) izometrikus a c állandógörbületű n-dimenziós Riemann-sokasággal.*

5 Elliptikus problémák Riemann-sokaságokon

A Finsler-sokaságokkal szemben a Riemann-sokaságokon értelmezett elliptikus problémák jóval gazdagabb irodalmat ölelnek fel. Ez a tény annak is köszönhető, hogy a Riemann-struktúrák nagyobb mozgásteret engednek különböző technikák kidolgozására, mint a Finsler-sokaságok. Történelmi szempontból is, a Riemann-sokaságokon értelmezett problémák nagy érdeklődést váltottak ki, különös tekintettel a nevezetes Yamabe-problémára, amely kritikus növekedésű nemlineáris tagot tartalmazó elliptikus egyenlet pozitív megoldásának keresésére vezetődik vissza.

Különböző variációs technikákat és váratlan csoportelméleti módszereket is felhasználva, a jelen szakaszban néhány kompakt, illetve nemkompakt Riemann-sokaságokon értelmezett elliptikus problémát vizsgálunk meg.

5.1. Éles szublineáris problémák kompakt Riemann-sokaságokon

Tekintsük az

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+) \setminus \{0\} : \lim_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} = 0 \right\}$$

függvényosztályt, ahol $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Azonnal észrevehető, hogy minden $f \in \mathcal{F}$ esetén a

$$c_f := \max_{s>0} \frac{f(s)}{s} \text{ és } c_F := \max_{s>0} \frac{2F(s)}{s^2} \tag{23}$$

számok jól értelmezettek és pozitívak, ahol $F(s) := \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, $s \geq 0$.

Legyen egy $n \geq 3$ dimenziós kompakt Riemann-sokaság, továbbá vezessük be a $\Lambda_+(M) = \{\alpha \in L^\infty(M) : \operatorname{essinf}_M \alpha > 0\}$ jelölést. Rögzített $f \in \mathcal{F}$ és $\alpha, \beta \in \Lambda_+(M)$ függvények esetén tekintsük a

$$-\Delta_g u\,(x) + \alpha(x) u\,(x) = \lambda \beta(x) f(u\,(x)),\ x \in M \tag{P_λ}$$

feladatot, ahol $\lambda \geq 0$ tetszőlegesen rögzített paraméter. A 4.3. tétel bizonyításának gondolatmenetét követve, a következő éles bifurkációs eredmény igazolható.

5.1. Tétel. (Kristály [63]) *Legyen egy $n \geq 3$ dimenziós kompakt Riemann-sokaság és tekintsük az $f \in \mathcal{F}$ és $\alpha, \beta \in \Lambda_+(M)$ függvényeket. Ekkor érvényesek a következő állítások:*

(i) *minden $0 \leq \lambda < c_f^{-1} \|\beta/\alpha\|_{L^\infty(M)}^{-1}$ esetén a (P_λ) feladatnak csak a nulla megoldása létezik;*

(ii) *minden $\lambda > c_F^{-1} \|\alpha/\beta\|_{L^\infty(M)}$ esetén a (P_λ) feladatnak létezik legalább két különböző nemnulla megoldása.*

5.1. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a $c_f^{-1} \|\beta/\alpha\|_{L^\infty(M)}^{-1}$ és $c_F^{-1} \|\alpha/\beta\|_{L^\infty(M)}$ küszöbértékek közötti rés tetszőlegesen kicsi lehet. Valóban, ha $f(s) = \min\{\max\{0, s-1\}, a-1\}$ valamely $a > 1$ rögzített szám esetén, akkor $f \in \mathcal{F}$, továbbá $c_f = \frac{a-1}{a}$ és $c_F = \frac{a-1}{a+1}$. Ezért, ha $\alpha = \beta \in \Lambda_+(M)$, akkor a fenti két érték tetszőlegesen közel kerül egymáshoz, midőn az a egyre nagyobb értékeket vesz fel.

Az 5.1. tételnek egy stabilitási változata is megadható, amely azt mondja ki, hogy az f nemlineáris tag kicsi perturbációja és ugyanakkor eléggé nagy λ paraméterértékek esetén a (P_λ) feladatnak még mindig létezik legalább két különböző nemnulla megoldása.

Tekintsük a

$$-\triangle v(x) = \lambda |x|^{-m-2} K(x/|x|) f(|x|^m v(x)), \quad x \in \mathbb{R}^{2m+2} \setminus \{0\} \qquad (S_\lambda)$$

Emden-féle problémát, ahol $f \in \mathcal{F}$, $m \geq 1$, $\lambda \geq 0$, $K \in L^\infty(\mathbb{S}^{2m+1})$ és $\mathbb{S}^{2m+1}$ a $(2m+1)$-dimenziós euklideszi egységgömböt jelöli. Az 5.1. tétel és a 3.9. tételben kijelentett a Hardy–Poincaré-egyenlőtlenség alapján a következő bifurkációs eredmény igazolható.

5.3. Tétel. (Kristály [63]) *Legyenek $f \in \mathcal{F}$, $K \in \Lambda_+(\mathbb{S}^{2m+1})$ és $m \geq 1$ rögzítettek. Ekkor érvényesek a következő állítások:*

(i) *minden $0 \leq \lambda < c_f^{-1} m^2 \|K\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{2m+1})}^{-1}$ esetén az (S_λ) feladatnak csak a nulla megoldása van;*

(ii) *minden $\lambda > c_F^{-1} m^2 \|K^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{2m+1})}$, esetén az (S_λ) feladatnak létezik legalább két különböző nemnulla megoldása.*

5.2. Kétpólusú Schrödinger egyenletek a félgömbön

A molekuláris fizika és kvantumkozmológia olyan elliptikus jelenségek megértését szorgalmazták, amelyek a Laplace-operátor mellett több szingularitási tagot is tartalmaznak (lásd például a Born–Oppenheimer approximációs eljárást, vagy a Thomas–Fermi-elméletet, amelyekben a részecskék szingularitásokként jelennek meg). Eltekintve a tér görbületének a hatásától, az idetartozó tanulmányok többsége az euklideszi esetet tárgyalja.

A továbbiakban az $\mathbb{S}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} > 0\}$ n-dimenziós egységfélgömbön tanulmányozzuk a

$$\begin{cases} -\Delta_g u(x) + \mathtt{C}(n,\beta) u(x) &= \mu \left| \frac{\nabla_g d_1(x)}{d_1(x)} - \frac{\nabla_g d_2(x)}{d_2(x)} \right|^2 u(x) + |u(x)|^{p-2} u(x), \quad x \in \mathbb{S}^n_+, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial \mathbb{S}^n_+ \end{cases} \qquad (P_{\mathbb{S}^n_+})$$

kétpólusú elliptikus modellproblémát, ahol $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^n_+$ a két pólust, g az $\mathbb{S}^n$ természetes Riemann-metrikáját jelöli, $d_i(x) = d_g(x, x_i)$, $i \in \{1, 2\}$, $p \in (2, 2^\star)$ és $\mu \in [0, \widetilde{\mu}^2)$ rögzítettek, továbbá

$$\mathtt{C}(n, \beta) := (n-1)(n-2)\frac{7\pi^2 - 3\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)^2}{2\pi^2\left(\pi^2 - \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)^2\right)},$$

ahol $\beta := \max\{d_g(x_0, x_1), d_g(x_0, x_2)\}$ és $x_0 := (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{S}^n$.

A jelen pont főeredménye a következő módon fogalmazható meg.

5.5. Tétel. (Faraci, Farkas és Kristály [54]) *Legyen $\mathbb{S}^n_+$ az $n \geq 3$ dimenziós egységfélgömb, $S = \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{S}^n_+$ a pólusok halmaza, $p \in (2, 2^\star)$ és $\mu \in [0, \widetilde{\mu}^2)$ rögzített paraméter. Ekkor érvényesek a következő állítások.*

(i) *A $(P_{\mathbb{S}^n_+})$ feladatnak végtelen sok gyenge megoldása van a $H^1_g(\mathbb{S}^n_+)$ Szoboljev-téren, mi több, ha az $a^2 + b^2 = 1$ és $b > 0$ feltételeknek eleget tevő $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén $x_1 = (a, 0, ..., 0, b)$ és $x_2 = (-a, 0, ..., 0, b)$, akkor a $H^1_g(\mathbb{S}^n_+)$ Szoboljev-téren a $(P_{\mathbb{S}^n_+})$ feladatnak létezik különböző elemekből álló gyenge $\{u_k\}_k$ megoldássorozata, ahol*

$$u_k := u_k\left(y_1,\ \sqrt{y_2^2 + ... + y_n^2},\ y_{n+1}\right) = u_k\left(y_1,\ \sqrt{1 - y_1^2 - y_{n+1}^2},\ y_{n+1}\right).$$

(ii) *Ha $n = 5$, vagy $n \geq 7$, továbbá, ha az $a^2+b^2 = 1$ és $b > 0$ feltételeknek eleget tevő $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén $x_1 = (a, 0, ..., 0, b)$ és $x_2 = (-a, 0, ..., 0, b)$, akkor a $H^1_g(\mathbb{S}^n_+)$ Szoboljev-téren a $(P_{\mathbb{S}^n_+})$ feladatnak létezik legalább $s_n = \left[\frac{n}{2}\right] + (-1)^{n-1} - 2$ darab – szimmetriailag páronként különböző – gyenge megoldásokból álló sorozata.*

Az 5.5. tétel bizonyítása a szimmetrikus „mountain pass” tételen (lásd Ambrosetti és Rabinowitz [3] munkáját), továbbá az [51] és [65] dolgozataimban megjelenő – Rubik-kocka megoldási ötletére épülő – csoportelméleti észrevételen alapul. Az alapgondolat lényege, hogy $d \geq 1$ esetén az $O(d+1)$ ortogonális csoportnak a lehető legtöbb egymástól független, de egymással párosított generátorai tranzitíven hassanak az $\mathbb{S}^d$ egységgömbön. Ezt a problémát magasabb dimenziós esetekben tudjuk látványosan megoldani. Legyen $d = 3$, vagy $d \geq 5$, és a $t_d = [\frac{d}{2}] + (-1)^{d+1} - 1$ beállítás esetén tekintsük minden $j \in \{1, ..., t_d\}$ indexre a

$$G^d_j = \begin{cases} O(j+1) \times O(d-2j-1) \times O(j+1), & \text{ha } j \neq \frac{d-1}{2}, \\ O\left(\frac{d+1}{2}\right) \times O\left(\frac{d+1}{2}\right), & \text{ha } j = \frac{d-1}{2} \end{cases}$$

csoportokat. Mivel egyetlen G^d_j sem hat tranzitíven az $\mathbb{S}^d$ egységgömbön (vagyis a Rubik-kocka megoldásához nem elegendő egyetlen oldalt forgatni), a G^d_j csoportokat párosával kell kombinálnunk olyan új csoport kialakításáért, ami már tranzitíven hat az $\mathbb{S}^d$ egységgömbön (vagyis amely a Rubik-kocka megoldásához vezet, ha megfelelően párosított oldalakat forgatunk).

Ha a $H^1_g(\mathbb{S}^n_+)$ Szoboljev-téren a Palais-féle kritikus szimmetriaelvet az előbb megszerkesztett csoporthatás $d = n-2$ esetével megfelelően ötvözzük, az (i) és (ii) pontokban lévő multiplicitási eredményeket tudjuk igazolni.

5.3. Schrödinger–Maxwell rendszerek Hadamard-sokaságokon

A Schrödinger–Maxwell-rendszer töltéssel rendelkező nem-relativisztikus kvantumrészecske viselkedését írja le az elektromágneses mezőben. Ha ez a fizikai közeg egy görbült térbe van helyezve, az eddigi euklideszi Schrödinger–Maxwell-problémák kapcsán kidolgozott módszerek nem szolgáltatnak megfelelő tárgyalásmódot.

Az utóbbi években a Schrödinger–Maxwell-rendszereket mélyrehatóan tanulmányozták *kompakt* Riemann-sokaságokon (lásd Hebey és Wei [27], Ghimenti és Micheletti [23] és Thizy [45] munkáit). Az alábbiakban az első olyan Maxwell–Schrödinger-rendszert tanulmányozzuk, amely nemkompakt Riemann-sokaságokon van értelmezve.

Tekintsük a

$$\begin{cases} -\Delta_g u + u + eu\phi = \alpha(x)f(u) & M, \\ -\Delta_g \phi + \phi = qu^2 & M, \end{cases} \tag{$\mathcal{SM}$}$$

rendszert, ahol (M,g) egy Hadamard-sokaság, $e,q>0$, $\alpha : M \to [0,\infty)$ egy potenciál és $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amely teljesíti a következő feltételeket:

(f_0^1) $-\infty < \liminf_{s\to 0} \frac{F(s)}{s^2} \leq \limsup_{s\to 0} \frac{F(s)}{s^2} = +\infty$, ahol $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$;

(f_0^2) létezik az $\{s_k\}_k \subset (0,1)$ nullához konvergáló sorozat úgy, hogy $f(s_k)<0$, $k\in\mathbb{N}$.

Észrevehető, hogy az (f_0^1) és (f_0^2) feltételek az f függvény nulla körüli oszcillációs tulajdonságát vonják maguk után (lásd a [64] cikket). Az (M,g) nemkompaktságából származó nehézségeket a sokaság $\mathrm{Isom}_g(M)$ izometriacsoportjának megfelelően megválasztott G részcsoportjával fogjuk kezelni. A G részcsoport M-feletti *fixponthalmazát* az

$$\mathrm{Fix}_M(G) = \{x\in M : \sigma(x) = x,\ \forall\sigma\in G\}$$

alakban értelmezzük. Rögzített $x_0\in M$ pont esetén a

$(\boldsymbol{H_G^{x_0}})$: $G\subset \mathrm{Isom}_g(M)$ *kompakt összefüggő csoport úgy, hogy* $\mathrm{Fix}_M(G)=\{x_0\}$

feltételt vezetjük be.

A jelen pont főeredménye a következő módon fogalmazható meg.

5.6. Tétel. (Farkas és Kristály [55]) *Legyen (M,g) egy n-dimenziós $(3\leq n\leq 5)$ homogén Hadamard-sokaság, $x_0\in M$ egy rögzített pont, $\alpha\in L^1(M)\cap L^\infty(M)$ egy nemnulla, nemnegatív és radiálisan szimmetrikus függvény az x_0 pontra nézve (azaz α csak a $d_g(x_0,\cdot)$ távolságtól függ), továbbá egy olyan $G\subset\mathrm{Isom}_g(M)$ csoport mely teljesíti a $(\boldsymbol{H_G^{x_0}})$ feltételt. Ha az $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az (f_0^1) és (f_0^2) tulajdonságokat, akkor létezik olyan G-invariáns, nemnegatív és különböző tagokból álló*

$$\{(u_k^0, \phi_{u_k^0})\}_k \subset H_g^1(M)\times H_g^1(M)$$

gyenge megoldássorozata az $(\mathcal{SM})$ rendszernek, amelyre

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k^0\|_{H_g^1(M)} = \lim_{k\to\infty} \|\phi_{u_k^0}\|_{H_g^1(M)} = 0.$$

Az 5.6. tétel egy puzzleszerű bizonyítást igényel. Először is belátjuk, hogy az $(\mathcal{SM})$ rendszert variációs módszerek segítségével a [69] dolgozatunkhoz hasonlóan kezelhetjük úgy, hogy a rendszer G-invariáns megoldásait egy speciálisan megszerkesztett „egyváltozós” energiafüggvény kritikus pontjaiként állítjuk elő. Éles becslések révén, az f függvény oszcillációs viselkedését áttudjuk ruházni az energiafüggvény tanulmányozására, amely során végtelen sok – nullához tartó Szoboljev-normájú – kritikus pont létezését láthatjuk be.

Az 5.6. tételt különböző geometriaközegekben – például az $n \geq 2$ dimenziós euklideszi és hiperbolikus terekben az $x_0 = 0$ pontválasztással és az $n_k \geq 2$ $(k \in \{1, ..., l\})$ feltételt kielégítő $n_1 + ... + n_l = n$ felbontáshoz rendelt $G = SO(n_1) \times ... \times SO(n_l) \subset SO(n)$ speciális ortogonális részcsoporttal, míg a Killing-mátrixnyommal felruházott, $n \times n$-típusú pozitív definit szimmetrikus mátrixok Riemann-struktúráján az $x_0 = I_{\mathbb{R}^n}$ egységmátrixszal és a $G = SO(n)$ csoporttal – alkalmazhatjuk (lásd a [62] cikket).

6. Összefoglaló

A Disszertáció és a jelen tézisfüzet Téziseit a következő módon fogalmazhatjuk meg.

1. Tézis. (Éles interpolációs egyenlőtlenségek)

- Interpolációs egyenlőtlenségek teljesülését megengedő, Lott–Sturm–Villani értelemben görbült $\mathsf{CD}(K, N)$ $(K \geq 0)$ metrikus mértékterek topológiailag rigidek/merevek, azaz metrikus golyóik globálisan nem-összezsugorodó térfogatnövekedést mutatnak. Ha egy nemnegatív Ricci-görbületű Riemann-sokaságon az interpolációs egyenlőtlenségben lévő beágyazási állandó egyre közelebb kerül a neki megfelelő éles euklideszi állandóhoz, a sokaság egyre közelebb kerül topológiailag az euklideszi térhez.

- Hadamard-sokaságokon érvényesek az éles interpolációs egyenlőtlenségek a megfelelő euklideszi állandókkal, amennyiben a sokaságon teljesül a Cartan-Hadamard-sejtés (például 2, 3 és 4 dimenziókban). Extremális függvények létezése viszont maga után vonja az adott Hadamard-sokaság és az euklideszi tér izometrikusságát.

2. Tézis. (Éles bizonytalansági elvek)

- Hadamard-sokaságokon érvényes az éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv (ráadásul úgy, hogy a Cartan-Hadamard-sejtés érvényessége nem is szükséges), viszont egy nemnegatív Ricci-görbületű teljes Riemann-sokaságon akkor és csakis akkor teljesül az éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv, ha a sokaság izometrikus az euklideszi térrel.

- Erőteljesebb negatív metszetgörbület erősebb Hardy–Poincaré- és Rellich-féle bizonytalansági elveket von maga után.

3. Tézis. (Elliptikus problémák Finsler-sokaságokon)

- Véges reverzibilitású Finsler-sokaságok feletti Szoboljev-terek reflexív Banach-terek lesznek. Léteznek viszont olyan végtelen reverzibilitású Finsler-sokaságok, amelyek feletti Szoboljev-terek még csak vektortérstruktúrával sem rendelkeznek.

- Paraméterfüggő szublineáris elliptikus problémának van legalább két nemnulla megoldása véges reverzibilitású Finsler-sokaságokon (elég nagy paraméterértékekre). Az egypólusú Poisson-egyenlet megoldásának formája teljes mértékben jellemzi a Finsler-sokaság görbületét.

4. Tézis. (Elliptikus problémák Riemann-sokaságokon)

- Bármely Riemann-sokaság kompaktitása éles bifurkációs eredményt implikál paraméterfüggő szublineáris elliptikus problémák esetén: kicsi paraméterre csak a nulla megoldás, nagy paraméterre legalább két nemnulla megoldás garantálható, míg a közöttük lévő rés tetszőlegesen kicsi lehet.

- Valamely Riemann-sokaság nemkompaktitása ellensúlyozható a rajta ható izometriacsoporttal, amely révén elliptikus problémák megoldásának multiplicitását igazolhatjuk. Sajátosan a Rubik-kocka megoldásának alapgondolata egymástól szimmetrikusan különböző megoldásokat garantál a parciális differenciálegyenletek elméletében.

Hivatkozások

[1] Adimurthi, N. Chaudhuri, N. Ramaswamy, An improved Hardy Sobolev inequality and its applications, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130 (2002), 489–505.

[2] A. Alvino, V. Ferone, P.-L. Lions, G. Trombetti, Convex symmetrization and applications, *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 14 (1997), no. 2, 275–293.

[3] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *Journal of Functional Analysis*, 14 (1973), 349–381.

[4] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below, *Inventiones Mathematicae*, 195 (2014), no. 2, 289–391.

[5] T. Aubin, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *Journal of Differential Geometry*, 11 (1976), no. 4, 573–598.

[6] D. Bakry, D. Concordet, M. Ledoux, Optimal heat kernel bounds under logarithmic Sobolev inequalities, *ESAIM. Probability and Statistics*, 1 (1995/97), 391–407.

[7] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen, Introduction to Riemann–Finsler Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 200, Springer Verlag, 2000.

[8] G. Barbatis, S. Filippas, A. Tertikas, A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constants, *Transactions of the American Mathematical Society*, 356 (2004), 2169–2196.

[9] E. F. Beckenbach, T. Radó, Subharmonic functions and surfaces of negative curvature, *Transactions of the American Mathematical Society*, 35 (1933), no. 3, 662–674.

[10] H. Brezis, J. L. Vázquez, Blowup solutions of some nonlinear elliptic problems, *Revista Matemática Complutense*, 10 (1997), 443–469.

[11] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, First order interpolation inequalities with weight, *Compositio Mathematica*, 53 (1984), 259–275.

[12] G. Carron, Inégalités de Hardy sur les variétés riemanniennes non-compactes, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (9) 76 (1997), no. 10, 883–891.

[13] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani, A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities, *Advances in Mathematics*, 182 (2004), no. 2, 307–332.

[14] C. Croke, A sharp four-dimensional isoperimetric inequality, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 59 (1984), no. 2, 187–192.

[15] M. Del Pino, J. Dolbeault, The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality, *Journal of Functional Analysis*, 197 (2003), 151–161.

[16] M. P. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser, Boston, 1992.

[17] M. P. do Carmo, C. Xia, Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, *Compositio Mathematica*, 140 (2004), 818–826.

[18] O. Druet, E. Hebey, The AB program in geometric analysis: sharp Sobolev inequalities and related problems, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 160 (2002), no. 761.

[19] O. Druet, E. Hebey, M. Vaugon, Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds: the influence of geometry, *International Mathematics Research Notices*, 14 (1999), 735–779.

[20] W. Erb, Uncertainty principles on Riemannian manifolds. PhD Dissertation, Technical University München, 2009.

[21] S. Filippas, A. Tertikas, Optimizing improved Hardy inequalities, *Journal of Functional Analysis*, 192 (2002), 186–233.

[22] I. Gentil, The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations, *Journal of Functional Analysis*, 202 (2003), no. 2, 591–599.

[23] M. Ghimenti, A. M. Micheletti, Number and profile of low energy solutions for singularly perturbed Klein-Gordon-Maxwell systems on a Riemannian manifold, *Journal of Differential Equations*, 256 (2014), no. 7, 2502–2525.

[24] N. Ghoussoub, A. Moradifam, Bessel pairs and optimal Hardy and Hardy-Rellich inequalities, *Mathematische Annalen*, 349 (2011), 1–57.

[25] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, *American Journal of Mathematics*, 97 (1975), 1061–1083.

[26] E. Hebey, Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities. Courant Lecture Notes in Mathematics, 5. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[27] E. Hebey, J. Wei, Schrödinger-Poisson systems in the 3-sphere, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 47 (2013), no. 1-2, 25–54.

[28] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik*, 43 (1927), 172–198.

[29] B. Kleiner, An isoperimetric comparison theorem, *Inventiones Mathematicae*, 108 (1992), no. 1, 37–47.

[30] I. Kombe, M. Özaydin, Improved Hardy and Rellich inequalities on Riemannian manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, 361 (2009), no. 12, 6191–6203.

[31] I. Kombe, M. Özaydin, Hardy-Poincaré, Rellich and uncertainty principle inequalities on Riemannian manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, 365 (2013), no. 10, 5035–5050.

[32] M. Ledoux, On manifolds with nonnegative Ricci curvature and Sobolev inequalities, *Communications in Analysis and Geometry*, 7 (1999), no. 2, 347–353.

[33] P. Li, Large time behavior of the heat equation on complete manifolds with nonnegative Ricci curvature, *Annals of Mathematics*, 124 (1986), no. 1, 1–21.

[34] J. Lott, C. Villani, Ricci curvature for metric measure spaces via optimal transport, *Annals of Mathematics*, 169 (3) (2009), 903–991.

[35] M. Munn, Volume growth and the topology of manifolds with nonnegative Ricci curvature, *Journal of Geometric Analysis*, 20 (2010), no. 3, 723–750.

[36] L. Ni, The entropy formula for linear heat equation, *Journal of Geometric Analysis*, 14 (2004), no. 1, 87–100.

[37] S. Ohta, K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 62 (2009), no. 10, 1386–1433.

[38] R. Palais, The principle of symmetric criticality, *Communications in Mathematical Physics*, 69 (1979), 19–30.

[39] G. Perelman, Manifolds of positive Ricci curvature with almost maximal volume, *Journal of the American Mathematical Society*, 7 (1994), 299–305.

[40] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv: math.DG/0211159.

[41] H.-B. Rademacher, A sphere theorem for non-reversible Finsler metrics, *Mathematische Annalen*, 328 (2004), no. 3, 373–387.

[42] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I, *Acta Mathematica*, 196 (1) (2006), 65–131.

[43] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Mathematica*, 196 (1) (2006), 133–177.

[44] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 110 (1976), 353–372.

[45] P.-D. Thizy, Blow-up for Schrödinger-Poisson critical systems in dimensions 4 and 5, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 55 (2016), no. 1, Art. 20, 21 pp.

[46] C. Villani, Optimal transport. Old and new. Volume 338 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[47] A. Weil, Sur les surfaces a courbure négative, *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 182 (1926), 1069–1071.

[48] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics. Dover Publications, New York, 1931.

[49] C. Xia, The Gagliardo-Nirenberg inequalities and manifolds of nonnegative Ricci curvature, *Journal of Functional Analysis*, 224 (2005), no. 1, 230–241.

[50] C. Xia, Sobolev type inequalities on complete Riemannian manifolds, http://www.official.kotaroy.com/meeting/symposium/abstract.bak/02-xia.pdf

Saját – Disszertációba teljesen vagy részlegesen beépített – közlemények listája:

[51] Z. M. Balogh, A. Kristály, Lions-type compactness and Rubik-actions on the Heisenberg group, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 48 (2013), no. 1-2 , 89–109.

[52] Z. M. Balogh, A. Kristály, K. Sipos, Geodesic interpolation inequalities on Heisenberg groups, *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 354 (2016), 916–919.

[53] E. Barbosa, A. Kristály, Second-order Sobolev inequalities on a class of Riemannian manifolds with nonnegative Ricci curvature, *Bulletin of the London Mathematical Society*, in press, 2017. DOI: 10.1112/blms.12107.

[54] F. Faraci, Cs. Farkas, A. Kristály, Multipolar Hardy inequalities on Riemannian manifolds, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, in press, 2017. DOI: 10.1051/cocv/2017057.

[55] Cs. Farkas, A. Kristály, Schrödinger-Maxwell systems on non-compact Riemannian manifolds, *Nonlinear Analysis. Real World Applications*, 31 (2016), 473–491.

[56] Cs. Farkas, A. Kristály, A. Szakál, Sobolev interpolation inequalities on Hadamard manifolds, *Proceedings of the 11th IEEE International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics*, 2016. DOI: 10.1109/SACI.2016.7507355

[57] Cs. Farkas, A. Kristály, Cs. Varga, Singular Poisson equations on Finsler-Hadamard manifolds, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 54 (2015), no. 2, 1219–1241.

[58] A. Kristály, Sharp uncertainty principles on Riemannian manifolds: the influence of curvature, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville Journal), in press, 2017. DOI: 10.1016/j.matpur.2017.09.002

[59] A. Kristály, Metric measure spaces supporting Gagliardo-Nirenberg inequalities: volume non-collapsing and rigidities, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations,* 55 (2016), no. 5, Art. 112, 27 pp.

[60] A. Kristály, Sharp Morrey-Sobolev inequalities on complete Riemannian manifolds, *Potential Analysis,* 42 (2015), no. 1, 141–154.

[61] A. Kristály, A sharp Sobolev interpolation inequality on Finsler manifolds, *Journal of Geometric Analysis*, 25 (2015), no. 4, 2226–2240.

[62] A. Kristály, Nash-type equilibria on Riemannian manifolds: a variational approach, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville Journal), 101 (2014), no. 5, 660–688.

[63] A. Kristály, Bifurcations effects in sublinear elliptic problems on compact Riemannian manifolds, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385 (2012), no. 1, 179–184.

[64] A. Kristály, On a new class of elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth, *Journal of Differential Equations*, 249 (2010), no. 8, 1917–1928.

[65] A. Kristály, Asymptotically critical problems on higher-dimensional spheres, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A*, 23 (2009), no. 3, 919–935.

[66] A. Kristály, S. Ohta, Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality on metric measure spaces with applications, *Mathematische Annalen*, 357 (2013), no. 2, 711–726.

[67] A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga, Variational Principles in Mathematical Physics, Geometry, and Economics. Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 136. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2010.

[68] A. Kristály, D. Repovš, Quantitative Rellich inequalities on Finsler-Hadamard manifolds, *Communications in Contemporary Mathematics*, 18 (2016), no. 6, 1650020, 17 pp.

[69] A. Kristály, D. Repovš, On the Schrödinger-Maxwell system involving sublinear terms, *Nonlinear Analysis. Real World Applications*, 13 (2012), no. 1,213–223.

[70] A. Kristály, I. J. Rudas, Elliptic problems on the ball endowed with Funk-type metrics, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications,* 119 (2015), 199–208.