Opponensi vélemény

Kristály Alexandru

Sharp Functional Inequalities and Elliptic Problems on Non-Euclidean Structures

című MTA-doktori értekezéséről

A disszertáció témája éles funkcionál-egyenlőtlenségek és ezek alkalmazásai nem-euklideszi (Riemann illetve Finsler típusú) geometriai struktúrákon. Az angol nyelven megírt értekezésében a szerző az utóbbi kilenc évben közölt tizenkilenc cikkben és egy monográfiában megjelent eredményeit foglalja össze 99 oldalon, amit még hat oldal terjedelmű bevezetés, valamint tartalomjegyzék, jelölések jegyzéke és irodalomjegyzék egészít ki.

A disszertáció 5 fejezetből áll.

Az *első fejezet* tartalmazza a legfontosabb alapfogalmakat és eredményeket, melyek szükségesek a dolgozat megértéséhez. Itt találjuk többek között a Riemann és Finsler terek legfontosabb fogalmait, mennyiségeit és tulajdonságait, valamint a variációszámítás és a kritikus pontok elméletének alapfogalmait és eredményeit.

A disszertáció *második fejezete* görbült tereken értelmezett interpolációs egyenlőtlenségeket tárgyal. Két esetet kell megkülönböztetni a görbület előjelének függvényében: nemnegatív görbületű terek esetén Kristály rigiditási eredményeket bizonyít. Nevezetesen, ha valamilyen nemnegatív görbületű térre teljesül a görbület-dimenzió feltétel és valamely pontban érvényes a sűrűségi feltétel, akkor teljesül a nem-összezsugorodó térfogatnövekedés, mely Perelman eredményét felhasználva bizonyos rigiditást eredményez: a sokaság topológiai szempontból egyre közelebb kerül az euklideszi térhez. Ez az eredmény választ ad Xia L^p-logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenségekre vonatkozó kérdésére is. Nempozitív görbületű esetekre bebizonyíja, hogy az olyan Hadamard-sokaságokon, amelyeken teljesül a Cartan–Hadamard-sejtés a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségek igazak. Ugyanakkor a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségekben az extremális függvények létezése ekvivalens azzal, hogy a Hadamard-sokaság izometrikus az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.

A disszertáció *harmadik fejezete* görbült terekben vizsgálja bizonytalansági elvek teljesülését. Bebizonyítja, hogy egy nemnegatív görbületű teljes Riemann sokaságon az éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv akkor és csakis akkor áll fenn, ha a tér izometrikus az euklideszi térrel. Nempozitív görbületű esetkre vonatkozóan bizonyítja, hogy az éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv teljesül minden Hadamard-sokaságon, viszont pozitív extremális akkor és csakis akkor létezik, ha a tér izometrikus az euklideszi térrel.

A disszertáció *negyedik fejezete* Finsler-sokaságokon értelmezett elliptikus problémákat tárgyal. Vizsgálja a reverzibilitás és a Finsler sokaság felett értelmezett Szoboljev-terek alapvető tulajdonságainak kapcsolatát. Igazolja, hogy amennyiben egy Finsler-sokaság reverzibilitási állandója véges, akkor a felette értelmezett Szoboljev-tér egy reflexív Banach-tér. Ugyanakkor példát ad egy olyan (szükségképpen nemkompakt) Finsler térre, amelynek a reverzibilitási állandója végtelen és a sokaság felett értelmezett Szoboljev-tér még csak nem is vektortér. A fejezet második és harmadik alfejezetében elliptikus problémákat vizsgál Finsler–Hadamard-sokaságokon. Paraméterfüggő, Finsler–Laplace-operátort és egy nemlinearis tagot tartalmazó elliptikus problémát vizsgál Funk-típusú Finsler-sokaságokon, majd szingularitást tartalmazó Poisson-típusú feladatot vizsgál általános Finsler–Hadamard-sokaságokon. Többek között igazolja, hogy a Poisson-egyenlet megoldásának alakja jellemzi a Finsler-sokaság görbületét.

A disszertáció *ötödik fejezete* Riemann-sokaságokon értelmezett elliptikus problémákat tárgyal. Kompakt esetben variációs módszerek alkalmazásával egy szublineáris tagot tartalmazó sajátérték-feladatra vonatkozó éles bifurkációs eredményt igazol. Vizsgálja a megoldások számának stabilitását kis perturbációk esetén. Ezek az eredmények éles Emden-típusú multiplicitási eredmények igazolására alkalmazhatók. Nemkompakt esetre vonatkozólag az egységgömb felső féltekéjén a Laplace–Beltrami-operátort tartalmazó elliptikus problémát vizsgál. Felhasználva az éles, többpólusú Hardy–Poincaré-egyenlőtlenséget végtelen sok, egymástól szimmetrikusan különböző megoldás létezését igazolja. Megmutatja továbbá, hogy a Hadamard-sokaságokon értelmezett, oszcillációs tagot tartalmazó Schrödinger-Maxwell rendszernek végtelen sok izometria-invariáns megoldása van.

A tartalom ismertetése után áttérek a disszertáció, a tézisek és azokban megfogalmazott eredmények értékelésére.

Az angol nyelven megírt disszertáció megfogalmazása korrekt és érthető. Egységes jelölésrendszert használva tárgyalja a különböző fejezeteket. Az értekezés elején a fontosabb jelöléseket összegyűjtő listát találunk, amely nagy mértékben segíti az értekezés olvasását és megértését. Az értekezés tartalmazza azon legfontosabb előismereteket, melyek feltétlenül szükségesek a megértéséhez. A matematikai állítások világosan vannak megfogalmazva. A szerző nagyon jó érzékkel találja meg az egyensúlyt a lényeg kiemelése és a matematikai precizitás között.

A fejezetek első alfejezetei összefoglalják az adott területeken az előzményeket, azon vizsgálatokat és eredményeket, melyekhez kapcsolódnak a szerző eredményei. Az utolsó alfejezetekben a bemutatott témához kapcsolódó további saját, vagy mások által elért eredményeket ismertet, megjegyzéseket fűz az egyes eredményekhez, illetve ismerteti a felmerülő aktuális problémákat, amivel tovább segíti az olvasó tájékozódását az adott témában.

A szerző az értekezésben nem törekszik az egész életművének bemutatására, hanem az utóbbi kilenc évben elért tudományos eredményeire koncentrál. A megfogalmazás világos és lényegre törő. A vizsgált problémák igen jól motiváltak és a modern nemzetközi tudományos kutatásokhoz kapcsolódnak. Az értekezés nehéz problémákat vizsgál, melyekben eredményt csak az absztrakt fogalmak és a komplex eszközök mély megértésével és ismeretével lehet elérni.

A szerző igen jól összegzi az értekezés legfontosabb eredményeit tézisek formájában. A négy tézist, azaz

1. az éles interpolációs egyenlőtlenségekre vonatkozó tézist (Tézis 1.)
2. az éles bizonytalansági elvekre vonatkozó tézist (Tézis 2.)
3. a Finsler-sokaságokon elliptikus problémákra vonatkozó tézist (Tézis 3.)
4. a Riemann-sokaságokon elliptikus problémákra vonatkozó tézist (Tézis 4.)

új tudományos eredményként elfogadom. Ezek az eredmények bőven kielégítik a matematikai doktori műre vonatkozóan elvárt követelményeket.

A következő kérdést fogalmazom meg: az értekezés Finsler terekre vonatkozó bizonyos állításaiban, melyek bizonyításában térfogatváltozásra vonatkozó érvelés jelenik meg (például 3.9-es, 4.4, 4.5, 4.6 tételek) szerepel az $\mathbf{S} = 0$ feltétel. Ez csak igen speciális esetekben, például Berwald típusú Finsler terekben teljesül, de általában nem. Lát-e arra lehetőséget, hogy például konstans vagy izotróp $\mathbf{S}$-görbületű terekben (ahol az $\mathbf{S}$-görbület $\mathbf{S}(x, y) = c \cdot F(x, y)$ illetve $\mathbf{S}(x, y) = c(x) \cdot F(x, y)$ alakú) a disszertációban használt módszerek kiterjesztésével eredményt lehet elérni?

Összefoglalva: a tárgyalt témakörök sokoldalúsága és az eredmények bizonyításához használt módszerek igen széles skálája igazolják a szerző ötletgazdagságát, valamint mély matematikai intuíciós és bizonyítási készségét. A szerző gazdag, értékes, magasan jegyzett matematikai tudományos munkássággal és publikációs tevékenységgel rendelkezik, amit a nemzetközi szakmai tudományos közvélemény is elismer. Ezek alapján megállapítható, hogy Kristály Sándor a funkcionál-egyenlőtlenségek és elliptikus parciális differenciálegyenletek nemzetközi szempontból kiemelkedő szakembere.

A doktori munka tudományos eredményeit elegendőnek tartom az MTA doktora cím megszerzéséhez, a nyilvános védés kitűzését javaslom.

Debrecen, 2019. január 7.

Muzsnay Zoltán

Dr. Muzsnay Zoltán
tanszékvezető egyetemi docens
DE TTK Matematikai Intézet
Geometria Tanszék