Válasz Simon László bírálatára

Szeretném megköszönni Simon Lászlónak támogató véleményét, a Disszertáció alapos átolvasását, valamint gondolatébresztő kérdéseit.

A bírálatban két kérdés van megfogalmazva, melyekre az alábbiakban rendre választ adok.

1. Kérdés. *A 2. és 3. fejezet mely eredményei lehetnek még alkalmazhatók a 4. és 5. fejezetben tárgyalt elliptikus parciális differenciálegyenletek tanulmányozásában?*

Válasz. A 2. és 3. fejezet minden olyan funkcionál-egyenlőtlensége, mely *Hadamard*-sokaságokon van igazolva, alkalmazhatóvá válik a 4. és 5. fejezetben tárgyalt elliptikus parciális differenciálegyenletek tanulmányozásában; ezek a 2.7 és 3.5-3.9 Tételekben olvashatóak. Fontos megemlíteni, hogy a Hadamard-sokaságok (egyszeresen összefüggő, teljes Riemann/Finsler-sokaságok, melyek metszet/flag-görbülete *nempozitív*) topológiai szempontból közel állnak az euklideszi terekhez és mint ilyenek, elvárható bizonyos elliptikus problémák tárgyalhatósága ezen nemlineáris struktúrákon. Nyílván, komoly technikai problémák merülhetnek fel az euklideszi esethez képest, de megfelelő eszközök révén látványos eredmények igazolhatóak (a 2. Kérdésre adott alábbi válasz is ezt a tényt támasztja alá).

A nempozitívan görbült struktúrákkal szemben, sokkal nehezebben kivitelezhető a *nemnegatív* görbületű objektumokon való hasonló vizsgálódás, mivel ezek a terek topológiailag sokkal komplikáltabbak, mint az előbbi esetben. Valóban, a ”cut-locus” megjelenése különös problémákat von maga után, így nem triviális ezeken a tereken a kérdés pozitív kimenetelű megválaszolása. Ráadásul, mint ahogyan igazoltuk a Disszertációban is (2.6 és 3.4 Tételek), a nemnegatívan görbült sokaságokon érvényes éles Szoboljev-típusú funkcionál-egyenlőtlenségek teljesülése a térstruktúra rigiditását eredményezi (sajátosan, a sokaság izometrikus lesz a megfelelő dimenziójú euklideszi térrel), így az esetleges elliptikus problémák ezen geometriai objektumokon nem mutatnának túl sok újdonságot a már ismert eredményekhez képest.

2. Kérdés. *Van-e lehetőség a fentiek alapján kvázilineáris* (p*-Laplace típusú*) *egyenletek megoldásai számának vizsgálatára*?

Válasz. A kvázilineáris egyenletek esetén az elsőrendű problémát értelemszerűen a p-Laplace operátor nemlinearitása idézi elő, $p \neq 2$, valamint a sokaságon értelmezett Szoboljev-terek Hilbert-strukturájának elvesztése (Banach-tereket vagy akár csak egy zárt, konvex kúpot kapunk, mint a 4.1 alfejezetben). Ennek ellenére, bátran kijelenthetjük, hogy a Disszertációban tárgyalt összes problémának tekinthetjük valamilyen kvázilineáris verzióját. Nyílván, néhány esetben technikai problémákkal kell szembenéznünk, viszont különösebb ok aggodalomra nincs, hiszen a sokaság érintőterein érvényes bizonyos konvexitási tulajdonságok elegendő keretet biztosítanak az érveléseink végrehajtására (Riemann és Finsler esetben egyaránt). Hasonló jelenség már a 2-Finsler–Laplace-operátor esetén is jól érzékelhető volt, mely szintén nemlineáris természetű és mégis jól kezelhető (4.3 és 4.4 Tételek).

Az 1. Kérdés válaszából is kitűnik, hogy az adott geometriai struktúra nemlineáris jellege képezi a fő akadályt a kvázilineáris esetben is. Hasonló jelenségre az A. Kristály [New geometric aspects of Moser-Trudinger inequalities on Riemannian manifolds: the non-compact case, *J. Funct. Anal.* 276(2019), no. 8, 2359-2396] dolgozatban mutatok rá, ahol egy n-dimenziós (M, g) Hadamard-sokaságon vizsgált kvázilineáris elliptikus differenciálegyenlet megoldásainak viselkedését tanulmányozom, melyben a főtag a $\Delta_{n,g}$ n-Laplace–Beltrami-operátor, $n \geq 2$. Az adott egyenlet kvázilinearitása, valamint a sokaság nemkompaktitása megköveteli a Lions-féle szimmetrizáció-kompaktitás elv, a Palais-féle kritikus szimmetria elv, valamint megfelelő variációs eljárás kombinálását a Moser–Trudinger-egyenlőtlenséggel, melyek révén nemnulla, izometria-invariáns megoldás létezését lehet igazolni az adott egyenletnek az (M, g) sokaságon. Ehhez hasonló kvázilineáris egyenletek vizsgálata a továbbiakban is értelemszerűen kivitelezhető.

Budapest, 2019. február 26. Kristály Sándor