Válasz Muzsnay Zoltán bírálatára

Mindenekelőtt, szeretném köszönetemet kifejezni Muzsnay Zoltánnak, hogy elvállalta és alaposan áttanulmányozta a Disszertációmat. A bírálatban egy összetett kérdés fogalmazódott meg.

Kérdés. *Az értekezés Finsler terekre vonatkozó bizonyos állításaiban, melyek bizonyításában térfogatváltozásra vonatkozó érvelés jelenik meg (például* 3.9*-es,* 4.4, 4.5, 4.6 *tételek) szerepel az* $\mathbf{S} = 0$ *feltétel. Ez csak igen speciális esetekben, például Berwald típusú Finsler terekben teljesül, de általában nem. Lát-e arra lehetőséget, hogy például konstans vagy izotróp* $\mathbf{S}$*-görbületű terekben (ahol az* $\mathbf{S}$*-görbület* $\mathbf{S}(x, y) = c \cdot F(x, y)$ *illetve* $\mathbf{S}(x, y) = c(x) \cdot F(x, y)$ *alakú) a disszertációban használt módszerek kiterjesztésével eredményt lehet elérni?*

Válasz. Természetesen, igazolhatóak olyan funkcionál-egyenlőtlenségek, ahol $\mathbf{S} \neq 0$ (tehát a 3.9 Tételnek létezik $\mathbf{S} \neq 0$ verziója is), viszont az $\mathbf{S}$-görbület jelenléte miatt az adott állandókról nem igazolható élesség. Mi több, van olyan Finsler-sokaságon lévő funkcionál-egyenlőtlenség, melynek élessége szükségszerűen maga után vonja az $\mathbf{S} = 0$ állítást. A 4.4, 4.5, 4.6 Tételekben az $\mathbf{S} = 0$ feltétel elengedhetetlennek tűnik.

A következőkben a fenti választ részletezem.

I. Ha (M, F) egy $n \geq 3$ dimenziós Finsler–Hadamard-sokaság és rögzítünk tetszőlegesen egy $x_0 \in M$ pontot, akkor igazolható a következő *Hardy-egyenlőtlenség*

$$\int_M [F^*(x, -D(|u|)(x))]^2 \, \mathrm{d}V_F(x) \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_M \frac{u^2(x)}{d_F^2(x_0, x)} \mathrm{d}V_F(x) - \frac{n-2}{2} \int_M \frac{u^2(x)}{d_F(x_0, x)} \|\mathbf{S}\|_x \mathrm{d}V_F(x), \tag{1}$$

bármely $u \in C_0^\infty(M)$ tesztfüggvény esetén, ahol

$$\|\mathbf{S}\|_x = \sup_{y \in T_xM \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{S}(x, y)}{F(x, y)}.$$

Az (1) igazolásához a B.Y. Wu & Y.L. Xin [Comparison theorems in Finsler geometry and their applications. *Math. Ann.* 337 (2007), no. 1, 177–196] szerzők által igazolt 5.1 Tétel szükséges, ahol a Finsler–Laplace-operátorra vonatkozó összehasonlítási elv érvényes (disztribucionális értelemben):

$$\boldsymbol{\Delta}_F d_F(x_0, x) \geq \frac{n-1}{d_F(x_0, x)} - \|\mathbf{S}\|_x, \quad x \in M.$$

Sajátosan, az (1) egyenlőtlenség a Disszertáció 3.9 Tételének felel meg $\mathbf{S} = 0$ esetben, ahol kimondjuk az $\frac{(n-2)^2}{4}$ állandó élességét is. Ennek ellenére, nem tűnik könnyen beláthatónak az (1) egyenlőtlenségben megjelenő két állandó élessége.

(II) Az L. Huang, A. Kristály & W. Zhao [Sharp uncertainty principles on general Finsler manifolds, arXiv preprint, https://arxiv.org/pdf/1811.08697, 2018] dolgozatban többek között azt igazoljuk, hogy ha érvényes az éles Heisenberg–Pauli–Weyl bizonytalansági elv egy nem feltétlenül reverzibilis, nemnegatív $\mathbf{S}$-görbületű és Ricci-görbületű (M, F) Finsler sokaságon (mely a Disszertáció 3.4 Tételének Finsler változata), akkor kötelező módon $\mathbf{S} = 0$ kell legyen. Mi több, ugyanebben a dolgozatban, egy egész Finsler-sokaság osztályt szerkesztünk a Zermelo-navigációs probléma révén, melyekre $\mathbf{S} = 0$, és *mégse* lesznek Berwald-típusú sokaságok.

(III) A kérdésben említett 4.4, 4.5 és 4.6 Tételek bizonyításában elengedhetetlennek tűnik az $\mathbf{S} = 0$ feltétel. Valóban, a 4.4 Tétel bizonyítása a 4.1 és 4.2 Segédtételekre támaszkodik, melyek csak akkor érvényesek,–legjobb tudásom szerint,– ha $\mathbf{S} = 0$, míg a 4.5 és 4.6 Tételekben *rigiditási* eredmények vannak igazolva, ahol a probléma eleve akkor válik tanulmányozhatóvá, ha modell-tér közeli strukturát/állapotot követelünk meg az adott Finsler-sokaságra vonatkozóan, mint amilyen például az $\mathbf{S} = 0$ feltétel is.

Budapest, 2019. február 26. Kristály Sándor